

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Lamač

## Numerické řešení rovnic konvekce-difúze pomocí stabilizačních a adaptivních metod

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.  
Studijní program: Matematika, numerická a výpočtová matematika

2008

Rád bych na tomto místě poděkoval panu docentu Knoblochovi za přínosné konzultace a panu inženýru Milanovovi za poskytnutý software a hardware.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 9. srpna 2008

Jan Lamač

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Metoda konečných prvků</b>	<b>7</b>
2.1	Základní značení . . . . .	7
2.2	Slabé řešení . . . . .	7
2.3	Prostory konečných prvků . . . . .	9
2.4	Apriorní odhady chyby . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Metoda SUPG</b>	<b>14</b>
3.1	Upwind v jedné dimenzi . . . . .	14
3.2	Definice metody SUPG . . . . .	18
3.3	Volba stabilizačního parametru . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Stabilizace pomocí SOLD metod</b>	<b>20</b>
4.1	Do Carmova - Galeãova metoda . . . . .	20
4.2	Burmanova - Ernova metoda . . . . .	21
4.3	Mizukamiho - Hughesova metoda a její zlepšená verze . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Aposteriorní odhady chyby</b>	<b>25</b>
5.1	Kunertův odhad . . . . .	26
5.2	Odhad Zienkiewiczze a Zhua . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Adaptivní zjemňování triangulace</b>	<b>29</b>
6.1	Algoritmus adaptivního zjemňování . . . . .	29
6.2	Posun uzlů triangulace . . . . .	30
6.3	Red-green algoritmus . . . . .	31
6.4	Malá modifikace . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Numerické výsledky</b>	<b>34</b>
7.1	Volba počáteční sítě . . . . .	35
7.2	Výsledky získané stabilizací . . . . .	37
7.3	Výsledky získané adaptivním zjemněním sítě . . . . .	38
7.4	Různá vylepšení . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>47</b>
	<b>Literatura</b>	<b>48</b>

Název práce: *Numerické řešení rovnic konvekce-difúze pomocí stabilizačních a adaptivních metod*

Autor: *Jan Lamač*

Katedra (Ústav): *Katedra numerické matematiky*

Vedoucí diplomové práce: *Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.*

e-mail vedoucího: `knobloch@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: *Obsahem předložené diplomové práce je srovnání přístupů numerického řešení rovnic konvekce-difúze pomocí stabilizačních a adaptivních metod. Nejprve jsou shrnuty základní aspekty a myšlenky použité numerické metody - Galerkinovy metody konečných prvků. Následně jsou definovány nejběžnější typy stabilizačních metod používaných k odstranění nefyzikálních oscilací z diskrétního řešení (zejména metoda SUPG). Další část je věnována a posteriori odhadům chyby a adaptivnímu zjemňování triangulace, jež může rovněž přispět k potlačení nefyzikálních oscilací. Všechny popsané metody a techniky jsou implementovány a na závěr porovnány na testovacích příkladech.*

Klíčová slova: *metoda konečných prvků, konvekce, difúze, stabilizace, adaptivita*

Title: *Numerical solution of convection-diffusion equations using stabilization and adaptive methods*

Author: *Jan Lamač*

Department: *Department of Numerical Mathematics*

Supervisor: *Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.*

Supervisor's e-mail address: `knobloch@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: *The subject of the present Master Thesis is a comparison of numerical solution of convection-diffusion equations approaches using stabilization and adaptive methods. Firstly the basic aspects and thoughts of employed numerical method - Galerkin finite element method - are summarized. Consequently the most common kinds of stabilization methods for spurious oscillations diminishing are defined (esp. SUPG method). Next section is devoted to a posteriori error estimations and adaptive refinement of triangulation which could help to diminish the spurious oscillations too. All mentioned methods and techniques are implemented and finally tested on the sample examples.*

Keywords: *finite element method, convection, diffusion, stabilization, adaptivity*

# Kapitola 1

## Úvod

Mnoho složitých fyzikálních mechanismů a přírodních dějů je popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi respektive soustavou těchto rovnic. Mezi ty základní patří rovnice konvekce - difúze popřípadě rovnice konvekce - difúze - reakce. Tyto rovnice se objevují např. při popisu šíření nečistot či tepla nebo v různých problémech matematického modelování mechaniky tekutin.

Skalární rovnice konvekce-difúze má obvykle následující tvar :

$$-\varepsilon\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f \quad \text{v } \Omega, \quad u = u_b \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.1)$$

kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  nebo  $3$ , je omezená oblast, jejíž hranice  $\partial\Omega$  je mnohoúhelník (nebo mnohostěn),  $\varepsilon > 0$  je difúzní konstanta, vektorová funkce  $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  představuje dané konvektivní pole a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je vnější síla. Funkce  $u_b : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reprezentuje Dirichletovu okrajovou podmínku předepsanou na celé hranici  $\partial\Omega$ . Regularita těchto funkcí ovlivňuje regularitu a existenci řešení rovnice (1.1).

Přesné (analytické) řešení rovnice (1.1) není ve většině případů možné nalézt, proto je nutné řešit tento problém numericky. Numerické řešení vychází z moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic, slabého řešení a Galerkinovy metody konečných prvků.

V silně konvektivně dominantních případech, kdy je  $\varepsilon \ll |\mathbf{b}|$ , obsahuje řešení tzv. *mezní vrstvy*, což jsou úzké oblasti, ve kterých se prudce mění hodnota řešení. V těchto oblastech je velmi obtížné vyřešit rovnici správně. Výsledným efektem je pak značný nárůst nefyzikálních oscilací, jež zcela (v celé výpočetní oblasti) znehodnocují diskrétní řešení. K odstranění těchto oscilací se běžně používá tzv. *upwinding*, což je technika sloužící k diskretizaci diferenciálních operátorů, která zvyšuje vliv informace proti směru jejího šíření v konvektivním poli. Vícerozměrnou analogií upwindingu je metoda *SUPG* (*Streamline upwind Petrov/Galerkin method*) vyvinutá T.J.R. Hughesem a A.N. Brooksem, viz [1].

Metoda SUPG ovšem neodstraní všechny oscilace. Především v mezních vrstvách zůstávají patrné nefyzikální oscilace, které mohou být v aplikacích nechtěné a nepřípustné. K potlačení těchto oscilací lze do diskrétního problému zavést dodatečné stabilizační členy - hovoříme o tzv. *SOLD* (*Spurious oscillations at layers diminishing*) metodách. Jinou možností je původní triangulaci v kritických oblastech adaptivně zjemnit či jinak upravit (adaptivní metody). Pro tento účel se zejména využívá aposteriorních odhadů chyby.

V kapitole 2 představíme standardní metodu konečných prvků vycházející z teorie variačního počtu, přičemž stručně uvedeme potřebná tvrzení. O výše zmíněné metodě SUPG pojednává kapitola 3 a v kapitole 4 je popsáno několik účinných stabilizačních metod. Pátá kapitola je věnována charakteristice několika aposteriorních odhadů chyby používaných k adaptivnímu zjemňování triangulací. Způsob tohoto zjemňování je detailněji

rozebrán v kapitole 6. Následující, sedmá, kapitola pak obsahuje četné numerické výsledky, jež jsou hlavním indikátorem kvality ať už stabilizační či adaptivní metody. V závěrečné kapitole jsou získané výsledky vyhodnoceny a vzájemně porovnány.

# Kapitola 2

## Metoda konečných prvků

V této kapitole shrneme základní myšlenky Galerkinovy *metody konečných prvků* - v současné době jedné z nejrozšířenějších metod užívaných k numerickému řešení parciálních diferenciálních rovnic. Zároveň zavedeme značení a definice, které budou užívány v celé práci. Neprovedené důkazy klíčových vět použitých v této kapitole je možné nalézt například v [14], [4] nebo v [6].

### 2.1 Základní značení

Výpočetní oblast  $\Omega$ , ve které budeme rovnici (1.1) řešit, budeme uvažovat s polygonální hranicí, nejčastěji bude  $\Omega$  jednotkovým čtvercem, tj.  $\Omega = [0, 1]^2$ .

Prostory funkcí budou značeny běžně užívaným způsobem, tj. pro  $p \geq 1$  a  $k \geq 0$  jsou  $L^p(\Omega)$  Lebesgueovy prostory s normou  $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ ,  $W^{k,p}(\Omega)$  resp.  $W_0^{k,p}(\Omega)$  Sobolevovy prostory s normou  $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ , přičemž značíme  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ,  $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$  a  $\|\cdot\|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,2,\Omega}$ . Seminormu v prostoru  $W^{k,p}(\Omega)$  značíme  $|\cdot|_{k,p,\Omega}$  a rovněž  $|\cdot|_{k,\Omega} = |\cdot|_{k,2,\Omega}$ . Skalární součin v Hilbertově prostoru  $L^2(\Omega)$  resp.  $L^2(\Omega)^d$  budeme standardně značit  $(\cdot, \cdot)$  a  $\|\cdot\|_\Omega$  bude norma v  $L^2(\Omega)$ . V dalším textu zavedeme také energetickou normu  $\|\cdot\|$ .

Je-li dále  $k \geq 0$ , pak  $C^k(\Omega)$  značíme jako obvykle prostor funkcí majících  $k$  spojitých derivací v oblasti  $\Omega$  a  $C_0^k(\Omega)$  podprostor  $C^k(\Omega)$  funkcí s kompaktním nosičem.

### 2.2 Slabé řešení

Rovnice (1.1) může mít klasické řešení,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , pouze v případě, kdy jsou zadané funkce  $f$ ,  $\mathbf{b}$  a  $u_b$  značně hladké. To je však často nespílitelný předpoklad. Z toho důvodu formulujeme rovnici (1.1) slabě a zavádíme tzv. *slabé řešení*.

**Definice 2.2.1** (Slabé řešení). Nechtě jsou dány funkce  $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ ,  $u_b \in H^{1/2}(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  a konstanta  $\varepsilon > 0$ . Označíme-li  $\tilde{u}_b \in H^1(\Omega)$  rozšíření funkce  $u_b$  na celou množinu  $\Omega$  a

$$a(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.1)$$

pak slabá formulace rovnice (1.1) zní:

*Najdi funkci  $u \in H^1(\Omega)$  takovou, že*

$$u - \tilde{u}_b \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Funkci  $u \in H^1(\Omega)$  pak nazveme *slabým řešením rovnice* (1.1).

K důkazu existence a jednoznačnosti slabého řešení využijeme následující velmi důležitou a používanou větu.

**Věta 2.2.2** (Lax-Milgram). *Nechť  $V$  je Hilbertův prostor a  $a(\cdot, \cdot)$  je bilineární forma na  $V$ . Jestliže existují kladné konstanty  $\alpha$  a  $M$  takové, že pro každé  $v, w \in V$  platí*

- $|a(w, v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V$  (omezenost formy  $a(\cdot, \cdot)$ ),
- $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$  ( $V$ -elipticita formy  $a(\cdot, \cdot)$ ),

pak pro každý prvek  $f \in V'$  existuje právě jedno  $u \in V$  tak, že

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

přičemž platí, že  $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$ .

Abychom mohli úspěšně použít Laxovu-Milgramovu větu, musíme doplnit jeden dodatečný požadavek na konvektivní pole  $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ . Předpokládejme proto, že funkce  $\mathbf{b}$  splňuje podmínku nestlačitelnosti, tj.

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad \text{v } \Omega. \quad (2.4)$$

**Věta 2.2.3.** *Nechť jsou dány funkce  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ ,  $u_b \in H^{1/2}(\Omega)$  a konstanta  $\varepsilon > 0$ . Je-li splněna podmínka (2.4), pak existuje právě jedno slabé řešení rovnice (1.1).*

**Důkaz.** Prostor  $V = H_0^1(\Omega)$  je Hilbertův a forma  $a(\cdot, \cdot)$  definovaná v (2.1) je zřejmě bilineární. S využitím Cauchyho-Schwarzovy (CS) nerovnosti a Friedrichsovy nerovnosti (F) pak pro tuto formu a pro každé  $u, v \in V$  platí:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq |\varepsilon(\nabla u, \nabla v)| + |(\mathbf{b} \cdot \nabla u, v)| \stackrel{CS}{\leq} \varepsilon |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|\mathbf{b}\|_{\Omega} |u|_{1,\Omega} \|v\|_{\Omega} \leq \\ &\leq \varepsilon |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + C \|\mathbf{b}\|_{1,\infty,\Omega} |u|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \stackrel{F}{\leq} (\varepsilon + C \|\mathbf{b}\|_{1,\infty,\Omega} \cdot C_F) \cdot |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vnoření  $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  a zřejmé nerovnosti  $\|v\|_{\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}$ . Jelikož je seminorma  $|\cdot|_{1,\Omega}$  normou na prostoru  $V$ , je forma  $a(\cdot, \cdot)$  omezená.

Protože dále pro všechna  $v \in V$  platí :

$$\operatorname{div}(v^2 \mathbf{b}) = v^2 \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{b}}_0 + 2v \mathbf{b} \cdot \nabla v = 2v \mathbf{b} \cdot \nabla v,$$

platí pro formu  $a(\cdot, \cdot)$  a všechna  $v \in V$  :

$$a(v, v) = \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} v \mathbf{b} \cdot \nabla v \, dx = \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(v^2 \mathbf{b}) \, dx. \quad (2.5)$$

Označme  $\mathbf{n}$  jednotkovou vnější normálu k hranici  $\partial\Omega$ . Použijeme-li na poslední člen v (2.5) větu o divergenci, získáme :

$$a(v, v) = \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(v^2 \mathbf{b}) \, dx = \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} v^2 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{n}} \, ds = \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2,$$

neboť je  $v = 0$  na  $\partial\Omega$ .

Forma  $a(\cdot, \cdot)$  je tedy  $V$ -eliptická a z Laxovy-Milgramovy věty tak plyne pro každé  $f \in L^2(\Omega) \subset V'$  existence právě jednoho slabého řešení rovnice (1.1).  $\diamond$



## 2.3 Prostory konečných prvků

Metoda konečných prvků je Galerkinovou metodou se speciálním výběrem konečněrozměrných prostorů. Bázové funkce těchto prostorů jsou voleny tak, aby jejich nosič byl v porovnání s výpočetní oblastí  $\Omega$  malý. Díky tomu se metoda konečných prvků ve výsledku redukuje na řešení soustavy algebraických rovnic s řídkou maticí (tzv. *maticí tuhosti*).

Prvním bodem konstrukce konečněrozměrného prostoru funkcí je definice triangulace oblasti  $\Omega$ .

**Definice 2.3.1** (Triangulace). Množina  $\mathcal{T}_h$  tvořená konečně mnoha podmnožinami  $\Omega$  se nazývá *triangulací* oblasti  $\Omega$ , jestliže

( $\mathcal{T}_h1$ ) každá množina  $K \in \mathcal{T}_h$  je uzavřená a její vnitřek je neprázdný a souvislý;

( $\mathcal{T}_h2$ ) každá hranice  $\partial K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , je lipschitzovsky spojitá;

( $\mathcal{T}_h3$ )  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ ;

( $\mathcal{T}_h4$ ) průnik vnitřků každých dvou různých množin z  $\mathcal{T}_h$  je prázdný;

Index  $h$  pak značí  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{\text{diam}(K)\}$ .

**Poznámka 2.3.2.** Tato definice triangulace však připouští křivé hranice množin  $K \in \mathcal{T}_h$  a tzv. *hanging nodes*, čemuž se v této práci snažíme vyhnout. Proto budeme pracovat s *regulární triangulací*.

**Definice 2.3.3** (Regulární triangulace). Triangulace oblasti  $\Omega$  se nazývá *regulární*, jestliže

( $\mathcal{T}_h5$ ) každá množina  $K \in \mathcal{T}_h$  je mnohoúhelník (případně interval nebo mnohostěn), přičemž jsou-li  $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$ ,  $i \neq j$ , dvě různé množiny z  $\mathcal{T}_h$ , potom je buď  $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j = \emptyset$ , nebo je společným průnikem uzávěrů obou množin jejich společný vrchol, společná hrana ( $d = 2, 3$ ), nebo společná stěna ( $d = 3$ ).

Nyní již můžeme přistoupit k definici konečného prvku :

**Definice 2.3.4** (Konečný prvek). Konečným prvkem v  $\mathbb{R}^n$  nazveme uspořádanou trojici  $(K, P, \Sigma)$ , kde

- $K \subset \mathbb{R}^n$  je omezená a uzavřená množina s neprázdným vnitřkem a lipschitzovsky spojitou hranicí;
- $P$  je konečněrozměrný prostor reálných funkcí definovaných na  $K$ ,  $\dim P = N$ ;
- $\Sigma$  je množina  $q$  lineárně nezávislých lineárních forem  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , definovaných na množině funkcí, jež obsahuje  $P$ .

V celé práci budeme pracovat s dimenzemi prostoru  $d = 1$  a především  $d = 2$ . V jednorozměrném případě budou množiny  $K$  uzavřené intervaly, ve dvourozměrném uzavřené trojúhelníky.

Konečnědimenzionální prostor funkcí definovaných na elementu  $K$  (intervalu, trojúhelníku) bude prostor lineárních funkcí definovaných na  $K$ , tj.  $P = P_1(K)$ .

Jako množinu lineárně nezávislých lineárních forem budeme uvažovat hodnoty funkcí  $p \in P$  v předem známých význačných bodech elementu  $K$  (vrcholy, středy stran), tedy

$$\Phi_i(p) = p(a_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, q, a_i \in K. \quad (2.6)$$

To, kolik těchto lineárních forem (stupňů volnosti) bude zapotřebí, plyne z následující definice a lemmatu, které uvádíme bez důkazu.

**Definice 2.3.5** (*P*-unisolvence). Nechť  $(K, P, \Sigma)$  je konečný prvek. Řekneme, že množina lineárních forem  $\Sigma = \{\Phi_i\}_{i=1}^q$  je *P*-unisolvence, jestliže pro libovolnou *q*-tici reálných čísel  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  existuje právě jediný prvek  $p \in P$ , takový, že

$$\Phi_i(p) = \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, q. \quad (2.7)$$

**Lemma 2.3.6.** Nechť  $(K, P, \Sigma)$  je konečný prvek. Nutnou podmínkou k tomu, aby množina  $\Sigma = \{\Phi_i\}_{i=1}^q$  byla *P*-unisolvence je, aby  $q = N$  ( $= \dim P$ ).

Vidíme tedy, že v případě prostoru  $P_1(K)$ , jehož dimenze je 3, musí být nutně  $q = 3$ , obdobně je  $\dim P_2(K) = q = 6$ . Je-li  $K$  čtyřúhelník, pak je  $\dim Q_1(K) = q = 4$ .

V následujícím proto předpokládáme, že každý konečný prvek  $(K, P_K, \Sigma_K)$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , je takový, že množina  $\Sigma_K$  je  $P_K$ -unisolvence.

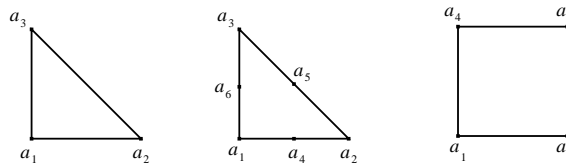
**Poznámka 2.3.7.** Nechť  $(K, P, \Sigma)$  je konečný prvek. Není obtížné ukázat, že je-li množina  $\Sigma$  *P*-unisolvence, existují funkce  $p_j \in P$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ , takové, že

$$\Phi_i(p_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, q\}. \quad (2.8)$$

Tyto funkce tvoří bázi prostoru  $P$  a každá funkce  $p \in P$  může být tedy jednoznačně vyjádřena ve tvaru

$$p = \sum_{i=1}^q \Phi_i(p) p_i. \quad (2.9)$$

Bázové funkce prostoru  $P = P(K)$  se obvykle volí tak, že je  $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ , pro všechna  $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ , kde  $a_j \in K$  jsou význačné body elementu  $K$  (vrcholy, středy stran), jak je vyznačeno na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Různé typy elementů tringulace.

**Definice 2.3.8** (Afinní ekvivalence). Nechť  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  a  $(K, P, \Sigma)$  jsou dva konečné prvky. Pak řekneme, že jsou *afinně ekvivalentní*, jestliže existuje afinní regulární transformace  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  taková, že

- (i)  $F(\widehat{K}) = K$ ,
- (ii)  $P = \{p \mid \exists \widehat{p} \in \widehat{P} : p = \widehat{p} \circ F^{-1}\}$  a

- (iii) patří-li funkce  $\widehat{v}$  do definičního oboru systému  $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\Phi}_i\}_{i=1}^q$ , patří i funkce  $v = \widehat{v} \circ F^{-1}$  do definičního oboru systému  $\Sigma = \{\Phi_i\}_{i=1}^q$  a naopak, přičemž zároveň platí  $\widehat{\Phi}_i(\widehat{v}) = \Phi_i(v)$ , pro  $i = 1, 2, \dots, q$ .

Máme-li nyní pevně zvolený konečný prvek  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ , můžeme pomocí afinní ekvivalence odvodit libovolný další prvek  $(K, P, \Sigma)$ , přičemž řada vlastností původního prvku zůstane zachována. V dalším budeme relaci afinní ekvivalence značit symbolem " $\sim$ " a psát  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) \sim (K, P, \Sigma)$ . Následující lemma je velmi užitečné při dokazování  $P$ -unisolvence u konečných prvků se složitou geometrií.

**Lemma 2.3.9.** *Nechť  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) \sim (K, P, \Sigma)$  jsou dva konečné prvky. Potom  $\widehat{\Sigma}$  je  $\widehat{P}$ -unisolvence právě tehdy, když  $\Sigma$  je  $P$ -unisolvence.*

**Důkaz.** Důkaz plyne ihned z vlastností  $P$ -interpolace a afinní ekvivalence.

**Lemma 2.3.10.** *Nechť  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) \sim (K, P, \Sigma)$  jsou dva konečné prvky. Potom*

$$\widehat{\Pi}v = \widehat{\Pi}\widehat{v}. \quad (2.10)$$

**Důkaz.** Nechť je funkce  $v$  definovaná na množině  $K$  a afinní ekvivalence mezi prvky  $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$  a  $(K, P, \Sigma)$  je zprostředkována afinním zobrazením  $F : \widehat{K} \rightarrow K$ . Potom

$$\widehat{\Pi}v = (\Pi v) \circ F = \left( \sum_{i=1}^q \Phi_i(v) p_i \right) \circ F = \sum_{i=1}^q \Phi_i(v) (p_i \circ F) = \sum_{i=1}^q \widehat{\Phi}_i(\widehat{v}) \widehat{p}_i = \widehat{\Pi}\widehat{v}.$$

**Definice 2.3.11** ( $P$ -interpolace). Nechť  $(K, P, \Sigma)$  je konečný prvek a  $v : K \rightarrow \mathbb{R}$  dostatečně hladká funkce taková, že  $\Phi_i(v)$  je definováno pro všechna  $\Phi_i \in \Sigma$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Pak  $P$ -interpolací funkce  $v$  nazveme funkci  $\Pi v \in P$ , splňující

$$\Phi_i(\Pi v) = \Phi_i(v), \quad \forall i = 1, 2, \dots, q. \quad (2.11)$$

Jestliže je  $\Sigma$   $P$ -unisolvence, existuje pro každou (dostatečně hladkou) funkci  $v$  právě jedna  $P$ -interpolace  $\Pi v$  a v důsledku (2.8) platí :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^q \Phi_i(v) p_i. \quad (2.12)$$

Navíc

$$\Pi p = p \quad \forall p \in P. \quad (2.13)$$

Protože budeme v celé práci pracovat výhradně s prostory konečných prvků, jež jsou podprostorem funkcí spojitých v uzávěru oblasti  $\Omega$ , můžeme pro naše účely definovat prostor konečných prvků následovně :

**Definice 2.3.12** (Prostor konečných prvků). Nechť  $\mathcal{T}_h$  je regulární triangulace oblasti  $\Omega$ . Nechť dále pro každý  $K \in \mathcal{T}_h$  je  $(K, P_K, \Sigma_K)$  příslušný konečný prvek. Potom definujeme prostor konečných prvků jako

$$X_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}); \quad v_h|_K \in P_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.14)$$

**Poznámka 2.3.13.** Definujeme-li pro každý konečný prvek  $(K, P_K, \Sigma_K)$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , a každou funkci  $v \in H^1(K)$   $P_K$ -interpolaci funkce  $v$  jako v (2.6), můžeme pro každou funkci  $v \in H^1(\Omega)$  definovat zobrazení  $\Pi_h : H^1(\Omega) \rightarrow X_h$  tak, že platí

$$(\Pi_h v)|_K = \Pi_K(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (2.15)$$

Není obtížné ukázat, že v tomto případě je  $X_h \subset H^1(\Omega)$  a proto je zobrazení  $\Pi_h$  projekcí.

Prostor  $X_h$  je tedy konečnědimenzionálním podprostorem prostoru  $H^1(\Omega)$ . Konečnědimenzionální podprostor prostoru  $V = H_0^1(\Omega)$  je pak definován jako

$$V_h = \{v_h \in X_h; \quad v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \quad (2.16)$$

**Definice 2.3.14** (Diskrétní řešení rovnice (1.1)). Nechť jsou dány funkce  $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ ,  $u_b \in H^{1/2}(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  a konstanta  $\varepsilon > 0$ . Označme  $\tilde{u}_b \in H^1(\Omega)$  rozšíření funkce  $u_b$  na celou množinu  $\Omega$  a  $\tilde{u}_{bh} = \Pi_h \tilde{u}_b$  její konečněprvkovou interpolaci. Nechť dále forma  $a(\cdot, \cdot)$  je definována stejně jako v (2.1). Pak diskrétní slabá formulace rovnice (1.1) zní:

Najdi funkci  $u_h \in X_h$  takovou, že

$$u_h - \tilde{u}_{bh} \in V_h, \quad (2.17)$$

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.18)$$

Funkci  $u_h \in X_h$  pak nazveme *diskrétním řešením rovnice (1.1)*.

**Věta 2.3.15.** Nechť jsou dány funkce  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ ,  $u_b \in H^{1/2}(\Omega)$  a konstanta  $\varepsilon > 0$ . Je-li splněna podmínka (2.4), pak existuje právě jedno diskrétní řešení rovnice (1.1).

**Důkaz.** Protože je  $X_h \subset H^1(\Omega)$  a  $V_h \subset V$  plyne důkaz přímo z věty 2.2.3.  $\diamond$

## 2.4 Apriorní odhady chyby

Při řešení rovnice (1.1) metodou konečných prvků jsme aproximovali nekonečněrozměrný prostor  $V = H^1(\Omega)$  konečněrozměrným prostorem  $V_h$ , takže  $u_h - \tilde{u}_{bh} \in V_h$ . Dopustili jsme se tak určité chyby. Naším cílem je zkonstruovat prostory  $V_h$  takovým způsobem, aby

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|u - u_h\|_V = 0 \quad (2.19)$$

Následující základní nerovnost říká, že problém odhadu chyby může být převeden na vyšetření aproximačních vlastností prostoru  $V_h$  :

**Věta 2.4.1** (Céa). Nechť  $u_h$  je diskrétní řešení rovnice (1.1) získané metodou konečných prvků a nechť jsou splněny předpoklady věty 2.3.15, potom existuje konstanta  $C$  nezávislé na  $V_h$  tak, že

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.20)$$

**Důkaz.** Protože je  $V_h \subset V$ , je  $a(u - u_h, v_h) = 0$ ,  $\forall v_h \in V_h$ . Díky tomu a díky elipticitě formy  $a(\cdot, \cdot)$  je  $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_h$ .

Potom ale rovněž platí :

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq \inf_{v_h \in V_h} a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \cdot \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Nerovnost (2.20) je tedy splněna s konstantou  $C = M/\alpha$ .  $\diamond$

Abychom byli schopni ukázat, jakým způsobem závisí rychlost konvergence (2.19) na parametru  $h$ , zopakujeme a zavedeme další předpoklady na použité konečné prvky a triangulaci.

Nechť  $\{\mathcal{T}_h\}$  je množina triangulací oblasti  $\Omega$  splňující  $(\mathcal{T}_h1) - (\mathcal{T}_h5)$  a necht' je každému elementu  $K \in \cup_h \mathcal{T}_h$  přiřazen konečný prvek  $(K, P_K, \Sigma_K)$ . Pro každé  $K \in \mathcal{T}_h$  označme  $h_K = \text{diam}(K)$  a předpokládejme, že parametry  $h$  splňují  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ .

Nechť dále pro každé  $K \in \mathcal{T}_h$  značí  $\rho_K = \sup\{r > 0; \mathcal{B}_r \subset K\}$  poloměr největší vepsané koule (kružnice) elementu  $K$ .

V dalším uvažujeme následující podmínky :

(H1) Rodina triangulací  $\{\mathcal{T}_h\}$  je *regulární*, tj.

$$\exists \sigma > 0 : \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ a } h \rightarrow 0+. \quad (2.21)$$

(H2) Existuje konečný počet referenčních konečných prvků  $(\widehat{K}_i, \widehat{P}_i, \widehat{\Sigma}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , takových, že pro každé  $K \in \mathcal{T}_h$  je konečný prvek  $(K, P_K, \Sigma_K)$  afinně ekvivalentní jednomu z referenčních konečných prvků.

(H3) Prostor  $Q(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ , na němž je definován  $X_h$ -interpolační operátor  $\Pi_h$ , je takový, že

$$(\Pi_h v)|_K = \Pi_K(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in Q(\Omega).$$

(H4) Pro  $X_h$ -interpolační operátor  $\Pi_h$  platí

$$\Pi_h v \in V_h \quad \forall v \in Q(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

**Poznámka 2.4.2.** Jsou-li všechny elementy  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $h \rightarrow 0+$ , trojúhelníky, potom je  $\sigma \geq 2\sqrt{3}$ . Navíc je-li v rodině triangulací  $\{\mathcal{T}_h\}$  splněna podmínka (2.21) a označíme-li  $\alpha_{min}$  minimální vnitřní úhel v trojúhelnících  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $h \rightarrow 0+$ , pak lze snadno ukázat, že

$$\frac{\pi}{3} \geq \alpha_{min} \geq 2 \arctg \left( \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sigma + \sqrt{(\sqrt{3}\sigma - 2)^2 - 16}} \right) > 2 \arctg \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sigma - 1} \right).$$

**Poznámka 2.4.3.** Jak již bylo řečeno v poznámce 2.3.13, je v našem případě podmínka (H3) splněna, neboť je  $Q(\Omega) = H^1(\Omega)$ . Stejně tak lze snadno ukázat, že podmínka (H4) pro  $Q(\Omega) = H^1(\Omega)$  rovněž platí.

**Věta 2.4.4.** *Nechť platí (H1) – (H4) a necht' existuje  $k \in \mathbb{N}$  tak, že pro každý referenční konečný prvek  $(\widehat{K}_i, \widehat{P}_i, \widehat{\Sigma}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , platí :*

$$\widehat{\Sigma}_i \subset [H^{k+1}(\widehat{K}_i)]', \quad P_k(\widehat{K}_i) \subset \widehat{P}_i \subset H^1(\widehat{K}_i), \quad Q(\Omega) \supset H^{k+1}(\Omega). \quad (2.22)$$

*Nechť dále  $u_h \in X_h$  je diskrétní řešení rovnice (1.1) získané metodou konečných prvků a necht' pro slabé řešení téže rovnice platí  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ . Pak existuje konstanta  $C$  nezávisící na  $h$  tak, že*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}. \quad (2.23)$$

**Poznámka 2.4.5.** Jestliže je například  $u \in H^2(\Omega)$  a použijeme-li spojitě po částech lineární konečné prvky na trojúhelníkové síti (tj.  $d = 2$  a  $k = 1$ ), pak jsou všechny předpoklady (2.22) splněny, neboť je  $\widehat{\Sigma}_i \subset [C(\widehat{K}_i)]' \subset [H^2(\widehat{K}_i)]'$ ,  $P_1(\widehat{K}_i) = \widehat{P}_i \subset H^1(\widehat{K}_i)$  a  $Q(\Omega) = H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega)$ . Obdobně lze ukázat použití předchozí věty pro případ jiných konečných prvků.

# Kapitola 3

## Metoda SUPG

Jak již bylo řečeno dříve, metoda SUPG (*Streamline upwind Petrov/Galerkin method*) se používá k odstranění nefyzikálních oscilací vznikajících v mezních vrstvách při diskretizaci vícerozměrných konvektivně dominantních úloh.

Dříve než přistoupíme k definici a charakteristice metody SUPG, budeme ilustrovat problém nefyzikálních oscilací na jednodimenzionální úloze.

### 3.1 Upwind v jedné dimenzi

Nechť  $\varepsilon > 0$  a  $b > 0$  jsou konstanty. Uvažujme následující jednodimenzionální variantu rovnice (1.1) :

$$-\varepsilon u'' + bu' = 0 \quad \text{v } [0, L], \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 1. \quad (3.1)$$

Přesné řešení rovnice (3.1) lze v tomto jednoduchém případě spočítat :

$$u(x) = \frac{1 - \exp\left(\frac{bx}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{bL}{\varepsilon}\right)}. \quad (3.2)$$

**Definice 3.1.1** (Pécletovo číslo). Je-li dána rovnice (3.1), pak číslo

$$\text{Pe} = \frac{bL}{\varepsilon}$$

nazveme *globálním Pécletovým číslem* příslušným rovnici (3.1).

Nechť dále  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$  je nějaké dělení intervalu  $[0, L]$ . Označíme-li  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , pro každé  $i = 1, 2, \dots, N$ , pak číslo

$$\alpha_i = \frac{bh_i}{2\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

nazveme *lokálním (mřížovým) Pécletovým číslem* příslušným intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  a rovnici (3.1). Je-li  $h_i = h$ , pro každé  $i = 1, 2, \dots, N$ , pak píšeme  $\alpha = \frac{bh}{2\varepsilon}$ .

Řešení rovnice (3.1) lze s využitím globálního Pécletova čísla přepsat ve tvaru

$$u(x) = \frac{1 - \exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right)}{1 - \exp(\text{Pe})}.$$

Pro velmi nízké globální Pécletovo číslo ( $\varepsilon \gg b$ ) se jedná o difúzivně dominantní případ a pro řešení rovnice (3.1) platí

$$u(x) = \frac{1 - \exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right)}{1 - \exp(\text{Pe})} \approx \frac{1 - (1 + \text{Pe} \frac{x}{L})}{1 - (1 + \text{Pe})} = \frac{x}{L}.$$

Řešení je tedy vizuálně téměř neodlišitelné od rovné úsečky spojující hraniční body.

V konvektivně dominantním případě ( $\varepsilon \ll b$ ,  $\text{Pe} \gg 1$ ) můžeme psát

$$u(x) = \frac{1 - \exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right)}{1 - \exp(\text{Pe})} \approx \frac{-\exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right)}{-\exp(\text{Pe})} = \exp\left(-\text{Pe} \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right).$$

Přesné řešení je pak téměř na celém intervalu  $[0, L]$  přibližně rovno vstupní podmínce ( $u(0) = 0$ ). Výjimkou je tenká hraniční vrstva na výstupu ( $x \rightarrow L-$ ), kde graf přesného řešení prudce roste. Při numerickém řešení rovnice (3.1) je proto v konvektivně dominantním případě nutné použít upwind.

Jedním ze způsobů, kterým lze rovnici (3.1) numericky řešit, je *metoda konečných diferencí*. Ta je založena na aproximaci diferenciálních operátorů, operátory diferencními.

Jestliže je  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$  rovnoměrné dělení intervalu  $[0, L]$ , tedy  $|x_i - x_{i-1}| = h = L/N$ , pro  $i = 1, 2, \dots, N$ , pak aproximace rovnice (3.1) pomocí *centrálních* diferencí spočívá v nalezení vektoru  $(u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$  takového, že

$$-\varepsilon \delta^2(u_i) + b \delta(u_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

$$u_0 = u(0), \quad u_N = u(x_N) = u(L),$$

kde

$$\delta(u_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{a} \quad \delta^2(u_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (3.4)$$

Hodnoty  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , jsou pak aproximacemi hodnot  $u(x_i)$  a funkce  $\tilde{u}(x)$ , pro kterou platí

$$\tilde{u}(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}(x - x_{i-1}) + u_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

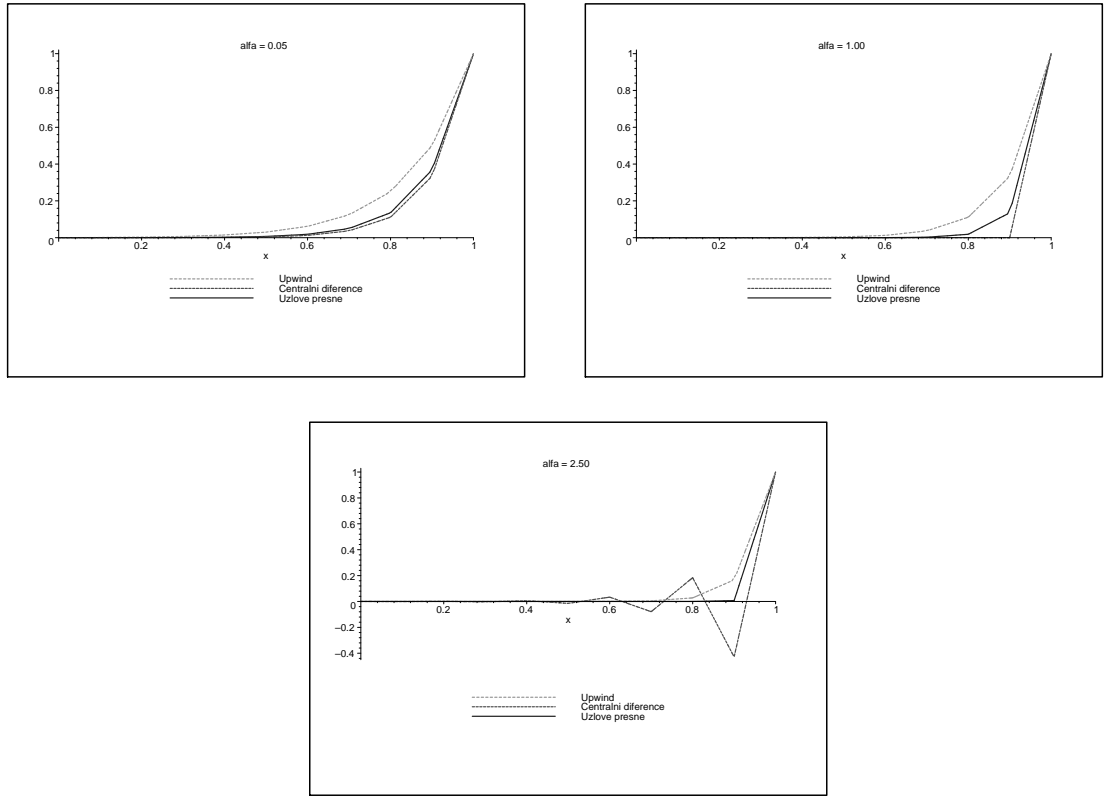
je po částech lineární aproximací přesného řešení  $u(x)$ . V tomto případě je metoda konečných diferencí ekvivalentní Galerkinově metodě konečných prvků popsané v kapitole 1.

**Poznámka 3.1.2.** Je-li  $\varepsilon \ll b$ , potom lze ukázat, že pro číslo podmíněnosti matice soustavy (3.3) platí  $\kappa \approx \alpha = \frac{bh}{2\varepsilon}$ . Úloha daná soustavou (3.3) je tedy špatně podmíněná.

Jak již bylo řečeno, je-li rovnice (3.1) konvektivně dominantní, vede právě použitý postup aproximace pomocí centrálních diferencí ke vzniku nefyzikálních oscilací. Tomu lze zabránit aproximujeme-li konvektivní člen v rovnici (3.1) pomocí *upwind* difference, tedy namísto  $\delta(u_i)$ , použijeme

$$\delta_U(u_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

Užití upwindu umožňuje šíření konvektivní informace pouze *proti proudu* a odstraňuje tak nefyzikální oscilace v blízkosti odtokové hranice. Příklady pro různé volby  $\alpha$  jsou uvedeny na následujících obrázcích.

Obrázek 3.1: Použití upwindingu pro různé volby  $\alpha$ .

**Poznámka 3.1.3.** Použití upwind diferencí je možné také interpretovat jako použití centrálních diferencí a umělé difúze  $\tilde{\varepsilon} = bh/2$ , přičtené k difúzní konstantě  $\varepsilon$ . Skutečně, pokud v rovnici (3.3) položíme  $\varepsilon = \varepsilon + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + bh/2$ , pak pro  $i = 1, 2, \dots, N$  platí :

$$\begin{aligned}
 -\left(\varepsilon + \frac{bh}{2}\right) \delta^2(u_i) + b\delta(u_i) &= -\varepsilon\delta^2(u_i) - \frac{bh}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + b \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \\
 &= -\varepsilon\delta^2(u_i) + \frac{b}{2h}(2u_i - 2u_{i-1}) = \\
 &= -\varepsilon\delta^2(u_i) + b\delta_U(u_i)
 \end{aligned}$$

Z předchozího je zřejmé, že ani použití centrálních diferencí, ani použití upwind diferencí nevede k uzlově přesnému řešení. K tomu lze dospět obdobně jako v poznámce 3.1.3, tentokrát však zvolíme množství přidané umělé difúze jiným způsobem.

**Definice 3.1.4** (Upwind funkce). Funkci  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$ , definovanou vztahem

$$\xi(\alpha) = \operatorname{cotgh}(\alpha) - \frac{1}{\alpha},$$

nazveme tzv. *upwind funkci*.

**Lemma 3.1.5.** Nechť  $\varepsilon, b, L > 0$  jsou data úlohy (3.1) a nechť  $h > 0$  je délka každého z intervalů vzniklých rovnoměrným dělením intervalu  $[0, L]$ . Položíme-li v rovnici (3.3)

$$\varepsilon = \varepsilon + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{bh}{2} \xi(\alpha) = \varepsilon + \frac{bh}{2} \xi\left(\frac{bh}{2\varepsilon}\right), \quad (3.7)$$

pak řešení úlohy (3.1) získané metodou centrálních diferencí s difúzní konstantou danou vztahem (3.7) je uzlově přesné.



**Důkaz.** Je třeba ukázat platnost vztahu

$$-\left[\varepsilon + \frac{bh}{2} \xi\left(\frac{bh}{2\varepsilon}\right)\right] \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + b \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = 0, \quad (3.8)$$

kde  $u(x_i)$  je dáno vzorcem (3.2) :

$$u(x_i) = \frac{1 - \exp\left(\frac{bx_i}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{bL}{\varepsilon}\right)} = \frac{1 - \exp\left(\frac{bih}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{bL}{\varepsilon}\right)} = \frac{1 - e^{2\alpha i}}{1 - e^{Pe}}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Úpravou levé strany rovnosti (3.8) obržíme :

$$\begin{aligned} & -\left[\varepsilon + \frac{bh}{2} \xi\left(\frac{bh}{2\varepsilon}\right)\right] \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + b \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = \\ & = -\left[\frac{bh}{2\alpha} + \frac{bh}{2} \xi(\alpha)\right] \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + b \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = \\ & = \frac{b}{2h} \left[ -\left(\frac{1}{\alpha} + \xi(\alpha)\right) (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))) + u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) \right] = \\ & = \frac{b}{2h} \left[ -\operatorname{cotgh}(\alpha) \left( \frac{e^{2\alpha(i+1)} - 2e^{2\alpha i} + e^{2\alpha(i-1)}}{1 - e^{Pe}} \right) + \frac{e^{2\alpha(i+1)} - e^{2\alpha(i-1)}}{1 - e^{Pe}} \right] = \\ & = \frac{b e^{2\alpha i}}{2h(1 - e^{Pe})} \left[ -\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} (e^{2\alpha} - 2 + e^{-2\alpha}) + (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) \right] = \\ & = \frac{b e^{2\alpha i}}{2h(1 - e^{Pe})} \left[ -\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} (e^\alpha - e^{-\alpha})^2 + (e^\alpha - e^{-\alpha})(e^\alpha + e^{-\alpha}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (3.1) získané metodou centrálních diferencí s difúzní konstantou danou vztahem (3.7) je tedy uzlově přesné.  $\diamond$

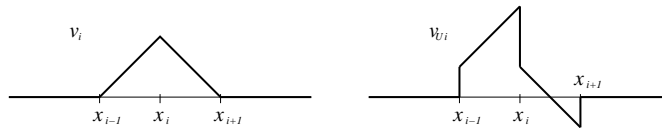
**Poznámka 3.1.6.** Jinou možností, jak docílit upwind efektu při numerickém řešení rovnic konvekce-difúze, je změnit testovací funkce  $v_h$  ve slabé formulaci (2.18). Klasické spojité po částech lineární testovací funkce mají v jednodimenzionálním případě tvar :

$$v_i(x) = \chi_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{x - x_{i-1}}{h} + \chi_{[x_i, x_{i+1}]} \frac{x_{i+1} - x}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Upwind efektu docílíme, přičteme-li na každém z intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  a  $[x_i, x_{i+1}]$  k funkci  $v_i$  nějakou (určitou) konstantu, tedy

$$v_i[c_L, c_P] = \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(v_i + c_L) + \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(v_i + c_P), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.9)$$

Snadno se lze přesvědčit, že pro  $c_L = \frac{1}{2}$  a  $c_P = -\frac{1}{2}$ , je matice vzniklé soustavy totožná s maticí soustavy vzniklé použitím upwind diferencí. Funkce  $v_i$  a  $v_{U_i} = v_i[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$  jsou znázorněny na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Běžná váhová funkce  $v_i$  a váhová funkce  $v_{U_i}$  způsobující upwind efekt.

**Poznámka 3.1.7.** Obdobně lze ukázat, že platí-li v (3.9)

$$c_L = \frac{1}{2} \xi(\alpha) \quad \left[ = \left( \frac{h}{2b} \xi(\alpha) \right) b v'_i|_{[x_{i-1}, x_i]} \right] \quad \text{a} \quad (3.10)$$

$$c_P = -\frac{1}{2} \xi(\alpha) \quad \left[ = \left( \frac{h}{2b} \xi(\alpha) \right) b v'_i|_{[x_i, x_{i+1}]} \right], \quad (3.11)$$

je výsledné řešení získané metodou konečných prvků uzlově přesné - matice vzniklé soustavy je shodná s maticí získanou použitím difúzní konstanty z lemmatu 3.1.5 v metodě centrálních diferencí. (Výrazy v hranatých závorkách vysvětlíme později.)

## 3.2 Definice metody SUPG

Vícerozměrnou analogií upwindingu je metoda SUPG. Idea metody SUPG je založena na změně testovacích funkcí ve slabé formulaci rovnice (1.1), obdobně jako v předchozím jednodimenzionálním případě.

Obecná formulace metody SUPG vyžaduje, aby byly funkce z prostoru  $V_h$  (prostor bázových funkcí) alespoň třídy  $H^2$  uvnitř každého elementu  $K \in \mathcal{T}_h$ . Protože my budeme pracovat pouze se spojitými po částech polynomiálními konečněprvkovými funkcemi, je tento předpoklad splněn. Prostor  $V_h$  zůstane tedy beze změny.

Předpokládejme nyní, že  $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ . Metodu SUPG odvodíme z rovnosti:

$$(v + C, -\varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u - f) = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad (3.12)$$

kde hodnota  $C$  je volena obdobně jako v jednodimenzionálním případě (s cílem dosáhnout uzlové přesnosti) :

$$C = \tau \mathbf{b} \cdot \nabla v. \quad (3.13)$$

V jednodimenzionálním případě je pak pro  $\tau = \frac{h}{2b} \xi(\alpha)$  numerické řešení uzlově přesné, viz poznámka 3.1.7.

Označíme-li  $R(u) = -\varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u - f$ , pak integrací a použitím Greenovy věty v (3.12), získáme vztah :

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u, v) + (R(u), \tau \mathbf{b} \cdot \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}). \quad (3.14)$$

Položíme-li dále

$$a(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u, v),$$

můžeme definovat metodu SUPG následovně.

**Definice 3.2.1** (Metoda SUPG). Necht' jsou parametry  $\varepsilon, \mathbf{b}, f$  a  $u_{bh}$  takové jako v definici 2.3.14, pak formulace metody SUPG zní :

*Najdi funkci  $u_h \in X_h$  takovou, že*

$$u_h - \tilde{u}_{bh} \in V_h, \quad (3.15)$$

$$a(u_h, v_h) + (R(u_h), \tau \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.16)$$

kde  $\tau \in L^\infty(\Omega)$  je nezáporný stabilizační parametr.

### 3.3 Volba stabilizačního parametru

Jak již bylo naznačeno dříve, je-li pravá strana rovnice (1.1) konstantní, je v jednodimenzionálním případě řešení získané metodou SUPG uzlově přesné, zvolíme-li

$$\tau = \frac{h}{2|b|} \xi(\alpha), \quad (3.17)$$

kde  $h$  je délka elementu,  $\xi$  je upwind funkce a  $\alpha = \frac{|b|h}{2\varepsilon}$  je lokální Pécletovo číslo. Pro velké hodnoty  $\alpha$  bývá funkce  $\xi$  aproximována funkcemi  $\xi_1$  a  $\xi_2$  danými vztahy :

$$\xi_1(\alpha) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\alpha} \right\}, \quad \xi_2(\alpha) = \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{3} \right\}.$$

Parametr  $\tau = \tau(\mathbf{b})$  má ve více rozměrech následující tvar :

$$\tau|_K = \tau_K = \mu_K \frac{h_K}{2|\mathbf{b}|} \xi(\alpha_K), \quad \text{s} \quad \alpha_K = \nu_K \frac{|\mathbf{b}|h_K}{2\varepsilon}, \quad (3.18)$$

přičemž označíme-li  $C_K$  těžiště elementu  $K$ ,  $N_K$  počet vrcholů  $K$  a  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_K}$  bázové funkce  $P(K)$  (je-li  $K$  trojúhelník), pak

$$h_K = \text{diam}^*(K, \mathbf{b}) = \frac{2|\mathbf{b}|}{\sum_{i=1}^{N_K} |\mathbf{b} \cdot \nabla \varphi_i(C_K)|} \quad \text{a}$$

$$\mu_K = \nu_K = \frac{1}{k},$$

kde  $k$  je řád aproximace  $V_h|_K$  v normě  $\|\cdot\|_{1,K}$ .

# Kapitola 4

## Stabilizace pomocí SOLD metod

Metoda SUPG neodstraní všechny nefyzikální oscilace, zejména v hraničních oblastech a oblastech, kde se přesné řešení prudce mění, oscilace přetrvávají. K jejich odstranění lze použít buď adaptivní zjemnění triangulace, anebo dodatečnou stabilizaci pomocí SOLD (*Spurious oscillations at layers diminishing*) metod. V této kapitole formulujeme tři typy SOLD metod, jež poskytují nejlepší výsledky (viz. [9]).

Většina SOLD metod je založena na přidání určitého množství umělé difúze v kritických částech výpočetní oblasti, což odpovídá přičtení stabilizačního členu k levé straně rovnice (3.16).

### 4.1 Do Carmova - Galeãova metoda

K levé straně rovnice (3.16) je přičten člen

$$(\tilde{\varepsilon} \nabla u_h, \nabla v_h), \quad (4.1)$$

kde parametr  $\tilde{\varepsilon}$  je volen tak, aby

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \sigma \frac{|R(u_h)|^2}{|\nabla u_h|^2} & \text{je-li } \nabla u_h \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{je-li } \nabla u_h = \mathbf{0}, \end{cases}$$

přičemž parametr  $\sigma$  splňuje

$$\sigma = \tau(\mathbf{b}) \max \left\{ 0, \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{z}_h|} - 1 \right\},$$

kde vektor  $\mathbf{z}_h$  je takový, že

$$\mathbf{z}_h = \begin{cases} \frac{R(u_h)}{|\nabla u_h|^2} \nabla u_h & \text{je-li } \nabla u_h \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{je-li } \nabla u_h = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Označíme-li  $\mathbf{b}_h = \mathbf{b} - \mathbf{z}_h$ , pak lze metodu do Carmo - Galeã ekvivalentně popsat jako metodu SUPG, kde k levé straně slabé formulace (3.16) je místo původního stabilizačního členu přičten člen

$$(R(u_h), \mathbf{b}_h^{up} \cdot \nabla v_h), \quad (4.2)$$

přičemž

$$\mathbf{b}_h^{up} = (\tau + \sigma) \mathbf{b} - \sigma \mathbf{b}_h = \tau \mathbf{b} + \sigma \mathbf{z}_h.$$

Člen (4.1) je tedy k levé straně rovnice (3.16) přičten pouze tehdy, je-li  $\nabla u_h \neq \mathbf{0}$  a zároveň  $|\mathbf{b}| > |\mathbf{z}_h|$ , což je motivováno požadavkem, aby

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_h = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{z}_h) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{z}_h = \frac{1}{2} (\mathbf{b}^2 - \mathbf{z}_h^2 + \mathbf{b}_h^2) > \frac{1}{2} \mathbf{b}_h^2 > 0.$$

## 4.2 Burmanova - Ernova metoda

Tato metoda vychází ze snahy Burmana a Erna zaručit diskrétní princip maxima pro lineární trojúhelníkové konečné prvky. My budeme pracovat s její obměnou definovanou v [9] následovně:

K levé straně rovnice (3.16) je přičten člen

$$(\tilde{\varepsilon} D \nabla u_h, \nabla v_h), \quad (4.3)$$

kde

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tau(\mathbf{b})|\mathbf{b}|^2|R(u_h)|}{|\mathbf{b}||\nabla u_h| + |R(u_h)|}$$

a  $D$  je projekce do roviny kolmé k vektoru  $\mathbf{b}$ , tj.

$$D = \begin{cases} I - \frac{\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} & \text{je-li } \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{je-li } \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Člen (4.3) lze pak rovněž zapsat ve tvaru :

$$\left( |R(u_h)|, \tau \frac{\mathbf{b} \times (\nabla u_h \times \mathbf{b})}{|\mathbf{b}||\nabla u_h| + |R(u_h)|} \cdot \nabla v_h \right). \quad (4.4)$$

## 4.3 Mizukamiho - Hughesova metoda a její zlepšená verze

Metoda Mizukami-Hughes [13] nepracuje narozdíl od předchozích dvou metod se stabilizačními parametry, ale s obměněnými testovacími (váhovými) funkcemi. Jako jediná pak splňuje diskrétní princip maxima.

Předpokládejme, že k numerickému řešení rovnice (1.1) používáme lineární konečné prvky na trojúhelnících a že vektorovou funkci  $\mathbf{b}$  uvažujeme po částech konstantní na elementech  $K \in \mathcal{T}_h$ . Metodu Mizukami-Hughes dostaneme, posuneme-li testovací funkce  $v_i \in V_h$  na každém trojúhelníku  $K \in \mathcal{T}_h$  o konstantu  $C_i^K$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ . Je tedy

$$\varphi_i = v_i + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ a_i \in \overline{K}}} C_i^K \chi_K \quad v_i \in V_h, \quad i = 1, 2, \dots, M_h, \quad (4.5)$$

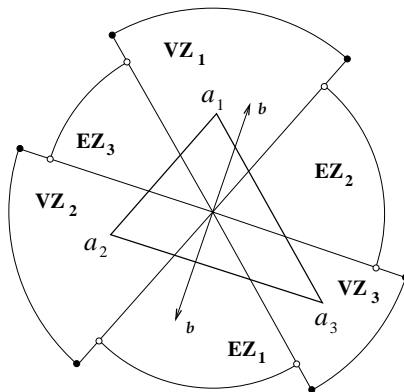
kde  $a_i \in K$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ , jsou vrcholy trojúhelníka  $K$  a  $\chi_K$  je charakteristická funkce množiny  $K$ . Označíme-li  $N_h > M_h$  počet všech uzlů triangulace  $\mathcal{T}_h$  (tedy včetně hraničních), pak konstanty  $C_i^K$  jsou pro každý trojúhelník  $K \in \mathcal{T}_h$  voleny tak, že

$$C_i^K \geq -\frac{1}{3}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_h, \quad a_i \in \overline{K}, \quad \text{a} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ a_i \in \overline{K}}}^{N_h} C_i^K = 0. \quad (4.6)$$

Lokální konvektivní matice  $A^K$  s prvky

$$a_{ij}^K = (\mathbf{b} \cdot \nabla v_j, \varphi_i)_K, \quad i = 1, 2, \dots, M_h, j = 1, 2, \dots, N_h, a_i, a_j \in \overline{K},$$

je potom nezáporná (tj.  $a_{ii}^K \geq 0$ ,  $a_{ij}^K \leq 0$  a  $\sum_{j=1}^{N_h} a_{ij}^K \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_h$ ).



Obrázek 4.1: Vrcholové a hranové zóny.

Označme pro teď  $a_1, a_2$  a  $a_3$  vrcholy libovolného elementu  $K \in \mathcal{T}_h$ . Pro každý vrchol  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pak definujme vrcholovou zónu  $VZ_i$  a hranovou zónu  $EZ_i$  tak, že hranice těchto zón jsou tvořeny přímkami protínajícími se v těžišti trojúhelníka  $K$  a rovnoběžnými s hranami obsahujícími vrchol  $a_i$  (viz. Obr. 4.1). Společná část dvou přilehlých zón pak náleží příslušné vrcholové zóně.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že vektor  $\mathbf{b}$  (jeho aproximace  $\mathbf{b}_K$ ) směřuje do vrcholové či hranové zóny příslušné vrcholu  $a_1$ , jak je tomu i v případě Obr. 4.1. V případě, kdy  $\mathbf{b} \in VZ_1$ , je matice  $A^K$  nezáporná a (4.6) platí, jestliže

$$C_1^K = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad C_2^K = C_3^K = -\frac{1}{3}.$$

Pokud však  $\mathbf{b} \in EZ_1$ , pak obecně není možné zvolit konstanty  $C_i^K$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tak, aby (4.6) platilo a zároveň byla matice  $A^K$  nezáporná. Řešením je nahradit vektorovou funkci  $\mathbf{b}$  jinou funkcí  $\tilde{\mathbf{b}}$  takovou, že  $\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$  je kolmé k  $\nabla u$ . Přesné řešení  $u$  rovnice (1.1) se tak nezmění. Protože ale  $\nabla u$  není předem známo, získáváme nelineární problém s konstantami  $C_i^K$  záviselými na diskrétním řešení  $u_h$ .

Předpokládejme tedy, že  $\mathbf{b} \in EZ_1$ ,  $\mathbf{b} \cdot \nabla u_h|_K \neq 0$  a nechť  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  je vektor kolmý k  $\nabla u_h|_K$ . Potom je alespoň jedna z množin

$$V_k = \{\alpha \in \mathbb{R}; \mathbf{b} + \alpha \mathbf{w} \in VZ_k\}, \quad k = 2, 3,$$

neprázdná. Podle Mizukamiho a Hughese by v závislosti na  $V_2$  a  $V_3$  měli být použity následující konstanty :

$$V_2 \neq \emptyset \quad \& \quad V_3 = \emptyset \quad \implies \quad C_2^K = \frac{2}{3}, \quad C_1^K = C_3^K = -\frac{1}{3}, \quad (4.7)$$

$$V_2 = \emptyset \quad \& \quad V_3 \neq \emptyset \quad \implies \quad C_3^K = \frac{2}{3}, \quad C_1^K = C_2^K = -\frac{1}{3}, \quad (4.8)$$

$$V_2 \neq \emptyset \quad \& \quad V_3 \neq \emptyset \quad \implies \quad C_1^K = -\frac{1}{3}, \quad C_1^K + C_2^K = \frac{1}{3}, \quad (4.9)$$

$$C_2^K \geq -\frac{1}{3}, \quad C_3^K \geq -\frac{1}{3}.$$

V případě (4.9) navrhnújí Mizukami s Hughesem použít konstanty

$$C_i^K = \frac{\mathbf{b} \cdot \nabla v_i}{3 |\mathbf{b} \cdot \nabla v_1|}, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde  $v_i$ , jsou bázové funkce příslušné vrcholům  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Tato volba je rovněž uvažována v případě, kdy  $\mathbf{b} \in \text{EZ}_1$  splňuje  $\mathbf{b} \cdot \nabla u_h|_K = 0$ . V případě, kdy je dokonce  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , je přirozená volba  $C_i^K = 0$ , pro  $i = 1, 2, 3$ .

Není obížné ukázat, že takto definovaný diskretní problém splňuje diskretní princip maxima.

## Zlepšená verze Mizukamiho - Hughesovy metody

Zlepšenou verzi předchozí metody navrhl Knobloch [11]. Zlepšení spočívá v odstranění nespojitě závislosti konstant  $C_i^K$ ,  $i = 1, 2, 3$  na vektorech  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{w}$  a v jejich jiné volbě v případě, kdy element  $K \in \mathcal{T}_h$  leží v mezních vrstvách.

Předpokládejme tedy, že  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  a že  $\mathbf{b}$  směřuje do vrcholové nebo hranové zóny vrcholu  $a_1$ . Dále označme

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{a_3 - a_1}{|a_3 - a_1|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3|}$$

a vektory  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}^\perp$ ,  $\mathbf{v}_2^\perp$  a  $\mathbf{v}_3^\perp$  splňující :

$$\mathbf{w} \cdot \nabla u_h|_K = 0, \quad \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_2^\perp \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_3^\perp \cdot \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \geq 0, \quad \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}_3 \geq 0.$$

**Algoritmus 4.3.1.** (Algoritmus zlepšené Mizukamiho - Hughesovy metody)

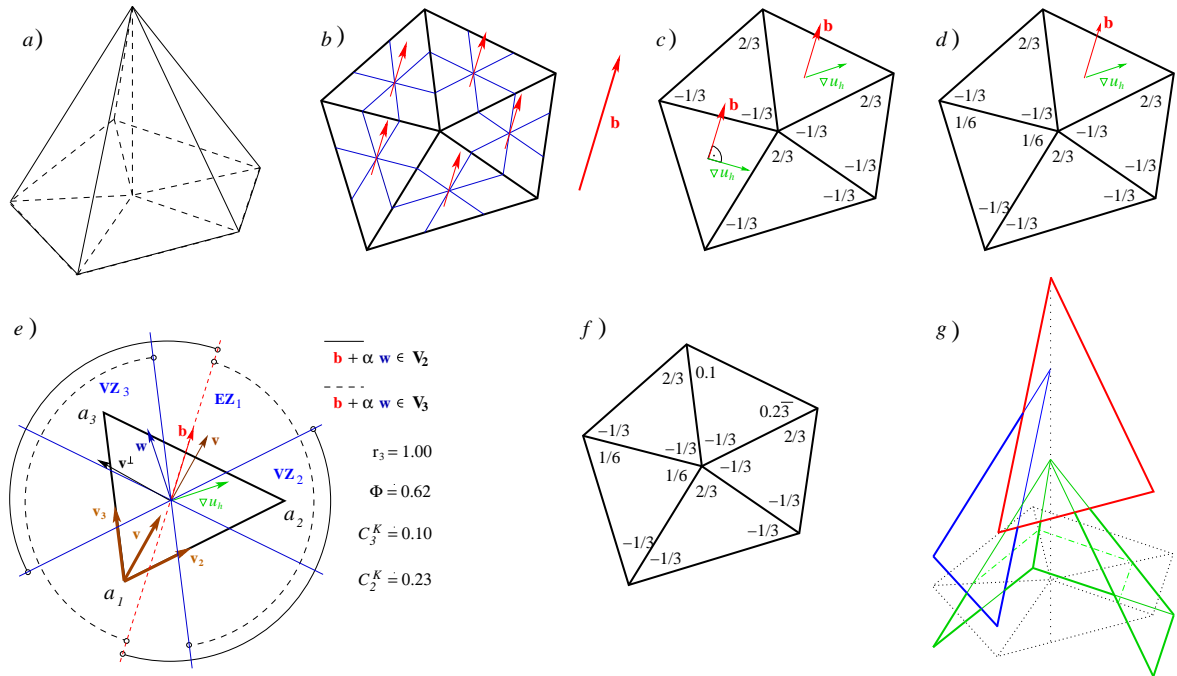
1. Jestliže  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , pak  $C_1^K = C_2^K = C_3^K = 0$ ,
2. jinak jestliže  $\mathbf{b} \in \text{VZ}_1$ , pak  $C_1^K = \frac{2}{3}$  a  $C_2^K = C_3^K = -\frac{1}{3}$ ,
3. jinak jestliže  $\overline{K} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , pak  $C_1^K = C_2^K = C_3^K = -\frac{1}{3}$ ,
4. jinak jestliže síť  $\mathcal{T}_h$  není isotropní a všechny vrcholy  $K$  jsou spojeny hranami s vrcholy hranice  $\partial\Omega$ , pak  $C_1^K = C_2^K = C_3^K = -\frac{1}{3}$ ,
5. jinak jestliže  $\mathbf{b} \cdot \nabla u_h|_K = 0$ , pak  $C_1^K = -\frac{1}{3}$  a  $C_2^K = C_3^K = \frac{1}{6}$ ,
6. jinak jestliže  $V_2 \neq \emptyset$  &  $V_3 = \emptyset$ , pak  $C_2^K = \frac{2}{3}$  a  $C_1^K = C_3^K = -\frac{1}{3}$ ,
7. jinak jestliže  $V_2 = \emptyset$  &  $V_3 \neq \emptyset$ , pak  $C_3^K = \frac{2}{3}$  a  $C_1^K = C_2^K = -\frac{1}{3}$ ,
8. jinak jestliže  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^\perp < 0$ , pak

$$r_2 = \min \left\{ 1, \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_2^\perp|}{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2^\perp|} + 1 - \text{sgn}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2) \right\}, \quad \Phi = \min \left\{ 1, \frac{2|\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2^\perp|}{r_2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2^\perp|} \right\},$$

$$C_2^K = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Phi \left[ 1 + \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{s}}{1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3} \right], \quad C_3^K = \frac{1}{3} - C_2^K, \quad C_1^K = -\frac{1}{3},$$

9. jinak  $r_3 = \min \left\{ 1, \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_3^\perp|}{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3^\perp|} + 1 - \text{sgn}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_3) \right\}$ ,  $\Phi = \min \left\{ 1, \frac{2|\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_3^\perp|}{r_3 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3^\perp|} \right\}$ ,
- $$C_3^K = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Phi \left[ 1 + \frac{(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{s}}{1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3} \right], \quad C_2^K = \frac{1}{3} - C_3^K, \quad C_1^K = -\frac{1}{3}.$$

**Příklad 4.3.2.** Na Obr. 4.2 je uveden příklad aplikace vylepšené Mizukamiho - Hughesovy metody. Po částech lineární spojité testovací funkce  $v_i$  jsou na každém elementu  $K$  svého nosiče posunuty o konstantu  $C_i^K$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ . Dostaneme tak nespojité testovací funkce  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ , jejichž aplikace na slabou formulaci rovnice (1.1) přináší kýžený upwind efekt.



Obrázek 4.2: Na obrázcích b) – f) je uveden postup konstrukce nespojité váhové funkce  $g$ ) pomocí Mizukamiho - Hughesovy metody. Na původní spojitou po částech lineární funkci a) jsou postupně aplikovány body 2., 5. a 9. algoritmu 4.3.1.



# Kapitola 5

## Aposteriorní odhady chyby

Abychom byli schopni lokalizovat oblasti, kde není numerické řešení dostatečně přesné, potřebujeme nějakým způsobem lokálně odhadnout chybu aproximace  $u - u_h$ . K tomu využijeme tzv. *aposteriorní odhady chyby*. V dalším textu navíc budeme předpokládat, že chyby vzniklé zaokrouhlováním či numerickou integrací jsou nulové, získáme tak pouze odhady chyby diskretizační.

Aposteriorní odhady chyby jsou vždy počítány ze známých koeficientů úlohy. Závisí rovněž na typu a tvaru triangulace a spočteném diskrétním řešení. Zatímco lokální odhady chyby (tzv. *indikátory*) určují oblasti, kde je chyba největší, globální odhady chyby (tzv. *estimátory*) určují odhad chyby v celé výpočetní oblasti. Naším cílem je vhodným zjemněním sítě dosáhnout minimalizace globální chyby. Globální odhad chyby lze zpravidla získat jako součet lokálních indikátorů chyby.

**Definice 5.0.3.** Označme  $e = u - u_h$  diskretizační chybu vzniklou řešením úlohy (1.1) pomocí metody konečných prvků. Pak

- lokální *indikátor chyby* je nezáporný funkcionál  $\eta_K$  aproximující diskretizační chybu na elementu  $K \in \mathcal{T}_h$ ;
- *estimátor* je nezáporný funkcionál  $\delta = \delta(\Omega, \mathcal{T}_h, f, \varepsilon, \mathbf{b}, \dots)$  takový, že

$$\|e\|^2 \approx \delta^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2;$$

- estimátor  $\delta$  nazveme *efektivní*, jestliže existuje kladná konstanta  $d$  taková, že

$$d\delta \leq \|e\|, \quad \forall h > 0;$$

- estimátor  $\delta$  nazveme *věrohodný*, jestliže existuje kladná konstanta  $D$  taková, že

$$\|e\| \leq D\delta, \quad \forall h > 0;$$

- *indexem efektivity* estimátoru  $\delta$  nazveme funkci  $I_h = \frac{\delta}{\|e\|} \geq 1$ ;

- estimátor nazveme *asymptoticky přesný*, jestliže pro jeho index efektivity platí :

$$I_h \longrightarrow 1+, \quad h \rightarrow 0+.$$

## 5.1 Kunertův odhad

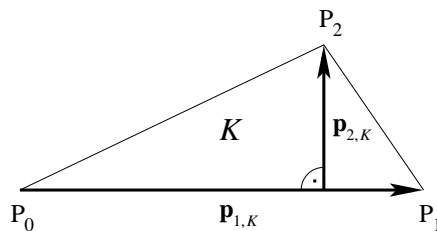
Využijeme odhad zkonstruovaný G. Kunertem v [12] pro rovnici konvekce-difúze-reakce typu  $-\varepsilon\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = f$ , který modifikujeme na případ rovnice (1.1).

Jako většina odhadů, bude i tento odhadovat diskretizační chybu v energetické normě dané vztahem

$$\|v\|_{\omega}^2 = \varepsilon \|\nabla v\|_{\omega}^2. \quad (5.1)$$

Pro každý element  $K \in \mathcal{T}_h$  označme  $\mathbf{p}_{1,K}$  a  $\mathbf{p}_{2,K}$  vektory příslušející nejdelší straně elementu  $K$  a výšce na tuto stranu (Obr. 5.1). Označme dále  $h_{i,K} = |\mathbf{p}_{i,K}|$ ,  $i = 1, 2$ , a položme

$$h_{\min,K} = h_{2,K} \leq h_{1,K} = \text{diam } K. \quad (5.2)$$



Obrázek 5.1: Definice vektorů  $\mathbf{p}_{1,K}$  a  $\mathbf{p}_{2,K}$ .

Nyní můžeme definovat škálovací faktor  $\alpha_K = h_{\min,K} \cdot \varepsilon^{-1/2}$ , který bude použit v definici indikátorů chyby, a tzv. *matching function*, jenž dává do souvislosti řešení rovnice (1.1) a použitou triangulaci. Tato funkce hraje velmi důležitou roli při stanovení horní meze odhadu chyby.

**Definice 5.1.1** (Matching function). Nechť  $v \in H^1(\Omega)$  a  $\mathcal{T}_h$  je triangulace oblasti  $\Omega$ . Potom definujme *matching function*  $m_1 = m_1(v, \mathcal{T}_h)$  následovně

$$m_1(v, \mathcal{T}_h) = \frac{1}{\|\nabla v\|_{\Omega}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_{\min,K}^{-2} \cdot \|\mathbb{C}_K^T \nabla v\|_K^2 \right)^{1/2}, \quad (5.3)$$

kde  $\mathbb{C}_K = (\mathbf{p}_{1,K}, \mathbf{p}_{2,K}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

**Poznámka 5.1.2.** Pro *matching function* platí odhad  $1 \leq m_1(v, \mathcal{T}_h)$ , přičemž v případě anisotropní sítě  $\mathcal{T}_h$ , která je "vhodně" sestrojena k řešení  $u$  platí  $m_1(u, \mathcal{T}_h) < 5$ .

**Definice 5.1.3** (Přesné a aproximované residuum). Pro každý element  $K \in \mathcal{T}_h$  a hranu  $E \subset \partial K$  definujme *přesné residuum*  $R_K$  na elementu  $K$  a *přesné residuum*  $R_E$  na hraně  $E$  následovně :

$$R_K = f - (-\varepsilon\Delta u_h + \mathbf{b} \cdot \nabla u_h) \quad \text{na } K, \quad (5.4)$$

$$R_E = \begin{cases} \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \partial_{\mathbf{n}_E} u_h(x + t\mathbf{n}_E) - \partial_{\mathbf{n}_E} u_h(x - t\mathbf{n}_E) \right] & \text{pro } E = K \cap \tilde{K} \subset \Omega \setminus \partial\Omega, \\ 0 & \text{pro } E \subset \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

kde  $\mathbf{n}_E \perp E$  je jeden ze dvou jednodukových normálových vektorů.

Je-li  $R_K \notin P^0(K)$ , resp.  $R_E \notin P^0(E)$ , definujeme *aproximované residuum*  $r_K$  na elementu  $K$  a *aproximované residuum*  $r_E$  na hraně  $E$  tak, aby  $r_K \in P^0(K)$  a  $r_E \in P^0(E)$ . V našich numerických experimentech, budeme uvažovat  $r_K = R_K(C_K)$  a  $r_E = R_E(C_E)$ , kde  $C_K$  je těžiště elementu  $K$  a  $C_E$  střed hrany  $E$ .

**Poznámka 5.1.4.** V případě, kdy  $\nabla u_h|_K \in P^0(K)$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , je

$$R_E = \begin{cases} \varepsilon (\nabla u_h|_K - \nabla u_h|_{\tilde{K}}) \cdot \mathbf{n}_E & \text{pro } E = K \cap \tilde{K} \subset \Omega \setminus \partial\Omega. \\ 0 & \text{pro } E \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

Potom je samozřejmě i  $r_E = R_E$ .

Lokální residuální indikátory chyby  $\eta_{R,K}$  a  $\zeta_K$  jsou poté definovány následovně:

**Definice 5.1.5** (Residuální indikátor a estimátor chyby). Nechť  $K \in \mathcal{T}_h$ , pak definujeme *residuální indikátor chyby*  $\eta_{R,K}$  a *aproximační člen*  $\zeta_K$  následovně :

$$\eta_{R,K}^2 = \alpha_K^2 \cdot \|r_K\|_K^2 + \varepsilon^{-1/2} \cdot \alpha_K \cdot \sum_{E \subset \partial K \setminus \partial\Omega} \|r_E\|_E^2 \quad (5.7)$$

$$\zeta_K^2 = \alpha_K^2 \cdot \|r_T - R_T\|_{\omega_K}^2, \quad (5.8)$$

kde  $\alpha_K$  je dříve definovaný škálovací faktor a  $\omega_K$  je množina splňující

$$\omega_K = \left\{ \tilde{K} \in \mathcal{T}_h; K \cap \tilde{K} \neq \emptyset \right\}. \quad (5.9)$$

Dále můžeme definovat příslušné globální residuální estimátory chyby jako

$$\eta_R^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,K}^2 \quad \text{a} \quad \zeta^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \zeta_K^2. \quad (5.10)$$

Nyní již můžeme přistoupit ke stanovení dolní a horní meze odhadu chyby. Zatímco horní mez chyby závisí na typu a tvaru použité triangulace a věrohodný odhad chyby je tedy dosažen pouze pro vhodné typy sítí, dolní mez chyby závisí na příslušném Pécletovu čísle. Efektivita je zaručena pouze v případech, kdy je Pécletovo číslo malé (což není námi studovaný problém).

**Věta 5.1.6** (Residuální odhad chyby). *Nechť  $u_h$  je řešení získané použitím metody konečných prvků s dodatečnou stabilizací pomocí metody SUPG. Nechť dále  $K \in \mathcal{T}_h$ , pak existuje konstanta  $C_D > 0$  (nezávisící na  $h, \mathcal{T}_h$  a  $\varepsilon$ ) taková, že diskretizační chyba je omezena lokálně (na množině  $\omega_K$ ) zdola :*

$$\eta_{R,K} \leq C_D \|u - u_h\|_{\omega_K} \cdot (1 + \text{Pe}_{\omega_K}) + \zeta_K, \quad (5.11)$$

kde  $\text{Pe}_{\omega_K} = \max_{K \in \omega_K} \alpha(K)$ , a  $\alpha(K)$  je definováno v (3.18).

*Je-li stabilizační parametr  $\tau$  volen jako v (3.18), pak existuje konstanta  $C_U > 0$  (nezávisící na  $h, \mathcal{T}_h$  a  $\varepsilon$ ) taková, že je diskretizační chyba omezena globálně shora :*

$$\|u - u_h\|_{\Omega} \leq C_U \cdot m_1(u - u_h, \mathcal{T}_h) \cdot [\eta_R^2 + \zeta^2]^{1/2}. \quad (5.12)$$

**Důkaz.** Podrobný důkaz je možné nalézt v [12].

## 5.2 Odhad Zienkiewicze a Zhua

Právě definovaný Kunertův odhad porovnáme se standardně používaným odhadem Zienkiewicze a Zhua [16]. Odhad Zienkiewicze a Zhua odhaduje chybu  $\|\nabla u - \nabla u_h\|_K$  s využitím funkce  $Gu$ , jež je zhlazením funkce  $\nabla u_h$ . Pokud je totiž  $Gu$  přesnější aproximace  $\nabla u$ , potom

$$\|\nabla u - Gu\|_K \leq c \|\nabla u - \nabla u_h\|_K, \quad c < 1. \quad (5.13)$$

V takovém případě platí oboustranný odhad :

$$\frac{1}{1+c} \|\nabla u_h - Gu\|_K \leq \|\nabla u - \nabla u_h\|_K \leq \frac{1}{1-c} \|\nabla u_h - Gu\|_K. \quad (5.14)$$

Jako lokální odhad chyby v  $H^1$ -seminormě můžeme tedy uvažovat hodnotu

$$\eta_{ZZ,K} = \|\nabla u_h - Gu\|_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (5.15)$$

Klíčovým problémem zůstává konstrukce funkce  $Gu$ . Obecně lze říci, že hodnota funkce  $Gu$  v nějakém uzlu triangulace je průměrem hodnot  $\nabla u_h$  v elementech do nichž uzel náleží. Je-li například  $\nabla u_h|_K \in (P^0(K))^2$ , potom je funkce  $Gu \in (C(\Omega))^2$  po částech lineárním zhlazením  $\nabla u_h$ . Označíme-li  $A$  uzel triangulace a  $\omega_A$  sjednocení elementů obsahujících  $A$ , potom  $Gu(A)$  můžeme definovat jako váhový průměr  $\nabla u_h|_K$ ,  $K \in \omega_A$  :

$$Gu(A) = \sum_{K \in \omega_A} \frac{|K|}{|\omega_A|} \nabla u_h|_K, \quad (5.16)$$

kde  $|K|$  a  $|\omega_A|$  mají význam obsahu elementu  $K$ , resp.  $\omega_A$ .

Jinou možností je zvolit váhy v podobě velikosti úhlů  $\theta_{A,K}$  při vrcholu  $A$  v elementech  $K \in \omega_A$ , tedy :

$$Gu(A) = \sum_{K \in \omega_A} \frac{\theta_{A,K}}{2\pi} \nabla u_h|_K. \quad (5.17)$$

Vzhledem k [8] odhaduje odhad Zienkiewicze a Zhua velmi dobře globální chybu, zejména v oblastech s vnitřními parabolickými vrstvami. Nicméně žádná bližší přesná analýza není k dispozici.

# Kapitola 6

## Adaptivní zjemňování triangulace

Adaptivní zjemňování triangulace je účinný způsob, jak významně vylepšit kvalitu numerického řešení. Tato technika spočívá v lokalizaci těch částí výpočetní oblasti, ve kterých dochází k největší odchylce přesného a diskrétního řešení - kde je největší chyba. Tyto oblasti jsou následně rozděleny na několik menších podoblastí, díky čemuž je posléze možné lépe aproximovat přesné řešení. K vyhledávání problematických částí výpočetní oblasti se využívá aposteriorních odhadů chyby popsanych v kapitole 5. Naším cílem bude nejenom snižování globální chyby (pod úroveň jisté předem zadané tolerance), ale i (především) odstranění oscilací přetrvávajících v numerickém řešení po použití metody SUPG.

### 6.1 Algoritmus adaptivního zjemňování

Nejdříve představíme obecný algoritmus používaný k adaptivnímu zjemňování triangulace. Poté se budeme některým krokům adaptivního algoritmu věnovat podrobněji.

#### Algoritmus 6.1.1.

##### 1. KROK: Konstrukce počáteční triangulace $\mathcal{T}_{h_0}$ .

Pakliže nemáme žádné informace o přesném řešení, je počáteční triangulace obvykle volena isotropní, tj. mající ve všech směrech a částech výpočetní oblasti stejné vlastnosti. Další otázkou je volba počtu elementů počáteční triangulace. Obecně lze říci, že kvalitní adaptivní algoritmy si umí poradit nejenom se zvětšováním, ale i se zmenšováním počtu elementů. Námí použitý algoritmus bude pracovat pouze s přidáváním elementů, proto budeme volit počet elementů počáteční triangulace relativně nízký (řádově  $10^2$ ). Je-li počet elementů počáteční triangulace volen příliš nízký, je třeba při následném zjemňování klást důraz na zabránění degenerace tvaru trojúhelníků, jež by měla za následek neplatnost nerovnosti (2.21) v podmínce ( $\mathcal{H}1$ ). Naopak příliš vysoký počet elementů počáteční triangulace vede k nadměrné paměťové zátěži počítače způsobené vysokou hustotou elementů v oblastech, kde toho není třeba.

##### 2. KROK: Řešení příslušného diskrétního problému na triangulaci $\mathcal{T}_{h_k}$ .

Řešením diskrétního problému (3.15),(3.16) pomocí metody konečných prvků na síti  $\mathcal{T}_{h_k}$  získáme aproximaci přesného řešení  $u_{h_k}$ .

**3. KROK: Spočtení lokálního odhadu chyby na každém elementu.**

Pro každý element  $K \in \mathcal{T}_{h_k}$  jsou spočteny indikátory chyby  $\eta_K$ . (viz. (5.7), (5.8)).

**4. KROK: Vyhodnocení globální chyby.**

Globální chyba je spočtena s využitím lokálních indikátorů chyby, přičemž v případě, kdy je globální chyba menší než nějaká předem zadaná tolerance, je algoritmus zastaven. (V případech, kdy není snadné spočítat odhad globální chyby, je možné k zastavení algoritmu užít i jiné kritérium - například pokles oscilací.)

**5. KROK: Výběr elementů ke zjemnění.**

Označíme-li počet všech elementů  $n_{h_k}$ , pak jednou z možností je vybrat z řady elementů seřazených podle klesajícího lokálního odhadu chyby prvních  $[\theta \cdot n_{h_k}]$  elementů,  $\theta \in [0, 1]$ , kde  $[s]$  označuje celou část  $s$ . To je však mnohdy nevhodné, neboť mohou být zjemněny i elementy, na kterých je hodnota lokální chyby malá. Počet zjemňovaných elementů navíc roste.

Proto je vhodné rozhodovat o zjemnění elementů podle hodnoty lokálního odhadu chyby. Označíme-li

$$\eta_{max} = \max_{K \in \mathcal{T}_{h_k}} \eta_K$$

maximální hodnotu lokálního odhadu chyby, pak zjemněny budou všechny elementy  $K \in \mathcal{T}_{h_k}$ , pro které je

$$\eta_K \geq \omega \eta_{max}, \quad \omega \in [0, 1]. \quad (6.1)$$

Tento přístup je ve většině případů lepší. Problém nastává v případech, kdy je chyba na jednom či několika elementech příliš vysoká a na dalších stále nezanedbatelná. V takovém případě dochází nejdříve ke zjemňování (často velmi velkému) elementů s velkým odhadem chyby, zatímco elementy s nižší chybou jsou nezjemněny a diskrétní řešení na nich spočtené může být značně nepřesné.

**6. KROK: Vhodné zjemnění vybraných elementů.**

Použijeme tzv. *red-green* zjemňovacím algoritmus. Dále budeme testovat možnost vhodného posouvání uzlů triangulace, které může rovněž přinést kýžený efekt poklesu globální chyby. Je však zřejmé, že tento postup nemusí vždy vést k dosažení požadované tolerance. Podrobnosti k oběma technikám jsou uvedeny níže.

**6.2 Posun uzlů triangulace**

Označme opět pro každý vrchol triangulace  $\omega_A = \{K \in \mathcal{T}_h, A \subset K\}$ . Je zřejmé, že ve většině případů není bod  $A$  umístěn v optimální pozici v oblasti  $\omega_A$ . Proto se ho budeme snažit umístit do lepší pozice v oblasti  $\omega_A$  tak, abychom minimalizovali jisté chybové kritérium. Za tímto účelem označme pro každý vrchol  $A$  triangulace  $\mathcal{T}_h$ :

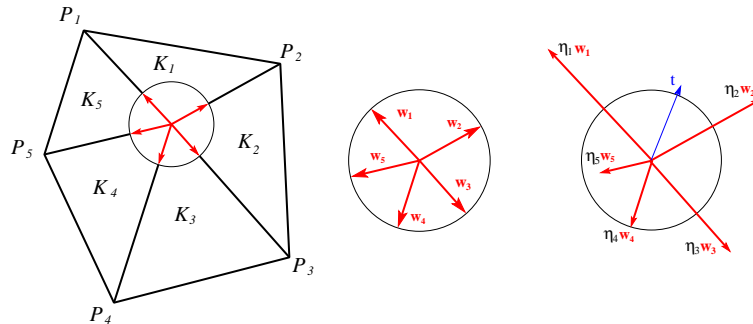
$$\eta_A^2 = \frac{1}{|\omega_A|^2} \sum_{K \in \omega_A} \alpha_K^2 \cdot \|r_K\|_K^2 + \frac{1}{l_A^2} \sum_{K \in \omega_A} \varepsilon^{-1/2} \cdot \alpha_K \cdot \sum_{E \subset \partial K \setminus \partial \Omega} \|r_E\|_E^2, \quad (6.2)$$

kde

$$l_A = \sum_{K \in \omega_A} \sum_{E \subset \partial K \setminus \partial \Omega} |E|.$$

Každému vrcholu pak přiřadíme směrový vektor, v jehož směru budeme vrchol posouvat. Tento vektor je sestaven jako vážený součet vektorů daných sousedními vrcholy, kde váhy jsou hodnoty  $\eta_i = \eta_{P_i}$  (viz. Obr. 6.1) :

$$\mathbf{t}_A = \sum_{P_i \in \omega_A \setminus A} \frac{P_i - A}{|P_i - A|} \eta_i.$$



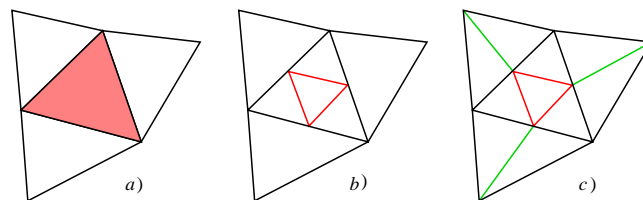
Obrázek 6.1: Postup při konstrukci směrového vektoru  $\mathbf{t}$ .

Vrchol  $A$  je posunován ve směru  $\mathbf{t}_A$  dokud hodnota  $\eta_A$  klesá. Během posunování uzlu je na množině  $\omega_A$  řešen lokálně problém (1.1).

### 6.3 Red-green algorithmus

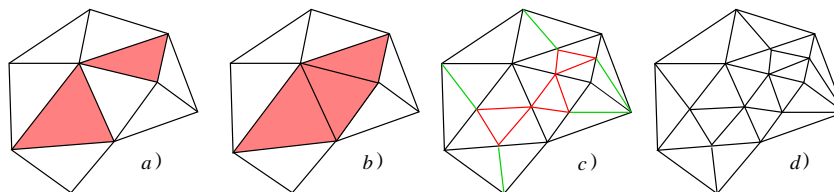
Blíže popíšeme *red-green* algoritmus pracující výhradně na trojúhelníkových sítích. Zjemňování triangulace pomocí red-green algoritmu probíhá vždy ve dvou fázích - je třeba nejenom rozdělit vybrané (označené) elementy na více částí, ale i zajistit, že triangulace zůstane nadále bez *hanging nodes*.

Nejprve je vybraný trojúhelník rozdělen třemi (červenými) středními příčkami na čtyři shodné menší trojúhelníky. Vzniknou přitom tři *hanging nodes*. Abychom je odstranili, rozpůlíme (zelenými) těžnicemi trojúhelníky sousedící s původním elementem (Obr. 6.2). Tím přidáme do triangulace šest nových elementů a tři nové uzly.



Obrázek 6.2: Red-green algoritmus: Vybraný trojúhelník (a) je rozdělen červenými středními příčkami (b) na čtyři shodné trojúhelníky. Sousední trojúhelníky jsou rozpůleny zelenými těžnicemi (c).

V případě, že některý z trojúhelníků triangulace není určen k dělení, ale má přitom dva nebo tři sousedy, které k dělení vybrány jsou, je tento trojúhelník rovněž vybrán (označen). Vybrané trojúhelníky jsou následně rozděleny červenými středními příčkami

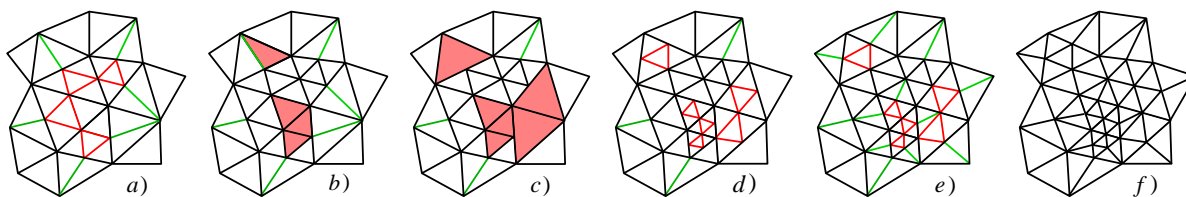


Obrázek 6.3: Red-green algoritmus: Má-li některý z neoznačených trojúhelníků dva nebo tři sousedy určené k dělení, je tento trojúhelník rovněž označen.

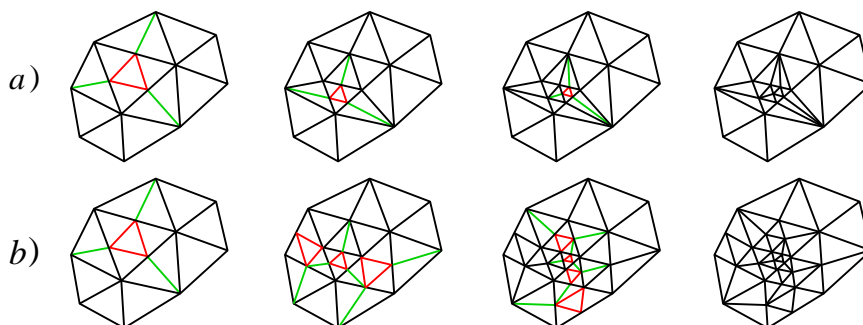
na čtyři menší. Zelenými těžnicemi jsou rozpuřeny pouze ty trojúhelníky, které mají právě jednoho vybraného (označeného) souseda (Obr. 6.3).

Abychom zabránili degenerativnímu zmenšování úhlů, jež by porušilo podmínku (2.21) v  $(\mathcal{H}1)$ , je třeba v dalších iteracích red-green algoritmu nedělit několikrát po sobě stejný trojúhelník zelenými úsečkami (viz. Obr. 6.5a). Má-li být tedy nějaký trojúhelník podruhé rozdělen zelenou úsečkou, je první dělení zelenou úsečkou zrušeno a trojúhelník je nejdříve rozdělen na čtyři části (červenými) středními příčkami. Teprve poté je trojúhelník rozdělen zelenými úsečkami, které odstraňují hanging nodes. Ukázka takového postupu je znázorněna na Obr. 6.4.

Obr. 6.5 pak demonstruje výhodu tohoto postupu na příkladu, kdy k porušení podmínky (2.21) dochází.



Obrázek 6.4: Red-green algoritmus: Žádný trojúhelník není rozdělen dvakrát po sobě zelenou úsečkou. Má-li být element rozdělen podruhé za sebou zelenou úsečkou, je první dělení zelenou úsečkou zrušeno (c) a trojúhelník je rozdělen červenými středními příčkami (d). Následně jsou doplněny zelené těžnice, abychom opět zabránili vzniku hanging nodes.



Obrázek 6.5: Klíčovým bodem celého red-green algoritmu je odstranění zelených těžnic v případě, kdy s nimi má být nějaký trojúhelník podruhé rozdělen. Kdybychom tak neučinili, docházelo by k v kritických částech výpočetní oblasti k degeneraci úhlů (a).



## 6.4 Malá modifikace

Dělení trojúhelníku středními příčkami nemusí být vždy optimální. Zabraňuje se tím sice degeneraci úhlů, nicméně v oblastech, kde se řešení prudce mění, je někdy nutné mít trojúhelníky 'sploštělé'. Proto rovněž otestujeme následující modifikaci red-green algoritmu.

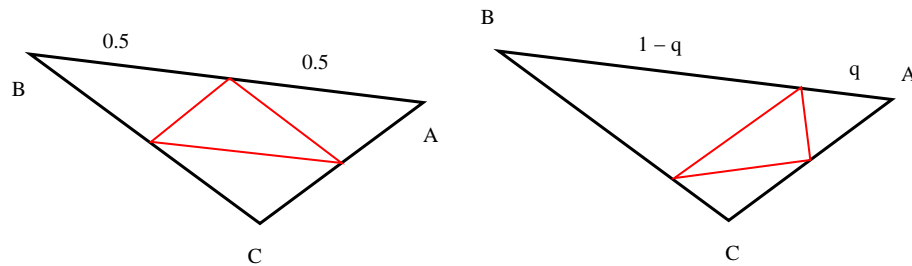
Zvolme  $q \in (0, \frac{1}{2}]$  a definujme funkci  $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow [q, 1 - q]$  následovně :

$$\lambda(x) = q + \frac{1 - 2q}{x + 1}.$$

Je-li nyní  $X$  bod, který má být při chodu red-green algoritmu umístěn na hranu  $\overline{AB}$ , a označíme-li  $\eta_A, \eta_B$  ohodnocení vrcholů definované v (6.2), pak bude bod  $X$  umístěn na hraně  $\overline{AB}$  v takové poloze, že

$$|AX| = \lambda\left(\frac{\eta_A}{\eta_B}\right) \cdot |AB| \quad \text{a} \quad |XB| = \lambda\left(\frac{\eta_B}{\eta_A}\right) \cdot |AB|.$$

Je-li tedy například  $\eta_A \gg \eta_B$ , pak  $\lambda(\eta_A/\eta_B) \doteq q$  a  $\lambda(\eta_B/\eta_A) \doteq 1 - q$  (viz. Obr. 6.6). Pro  $q = \frac{1}{2}$  je  $\lambda \equiv \frac{1}{2}$  a jedná se tedy o původní algoritmus.



Obrázek 6.6: Malá modifikace red-green algoritmu - nové vrcholy nejsou umísťovány přesně ve středech hran, ale blíže vrcholu s větší chybou.

# Kapitola 7

## Numerické výsledky

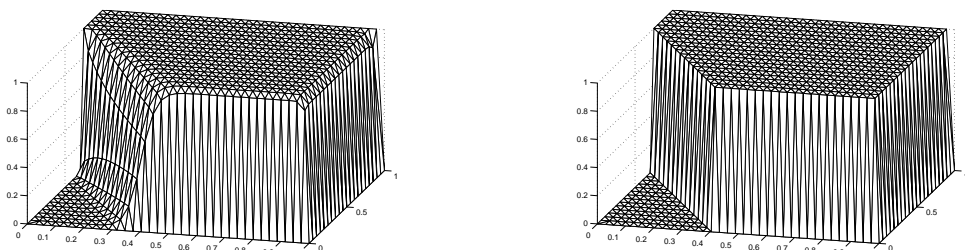
Numerické výsledky jsou rozdělny do čtyř sekcí. Nejprve je diskutována volba počáteční sítě, jež svým vhodným anisotropním tvarem výrazně ovlivňuje nejen (ne)přítomnost nefyzikálních oscilací, ale i efektivní chod adaptivního procesu. Následně jsou stručně rekapitulovány výsledky a použití stabilizačních metod převzatých z [9]. V další části je testován adaptivní proces, založený na odhadech chyby definovaných v kapitole 5. Důraz je kladen nejenom na snižování globální chyby, ale i na odstraňování nefyzikálních oscilací. V závěrečné části jsou představena různá vylepšení, konstruovaná s cílem dosáhnout nejlepších výsledků ve výše zmíněných kritériích.

Všechny metody jsou testovány na dvou ukázkových příkladech. Po použití metody SUPG je řešení prvního příkladu znehodnoceno nefyzikálními oscilacemi ve vnitřní mezní vrstvě (přibližně podél přímky  $y = 0.7 - \sqrt{3}x$ ) a exponenciálních hraničních mezních vrstvách ( $x = 1$  a část hranice  $y = 0$ ), řešení druhého je znehodnoceno ve třech hraničních mezních vrstvách - dvou parabolických ( $y = 0$  a  $y = 1$ ) a jedné exponenciální ( $x = 1$ ).

Uzlově přesná řešení obou dvou příkladů jsou pro názornost vyobrazena na obrázcích 7.1 a 7.2. Byla zkonstruována na velmi jemných sítích. Jsou z nich patrný všechny výše zmíněné aspekty.

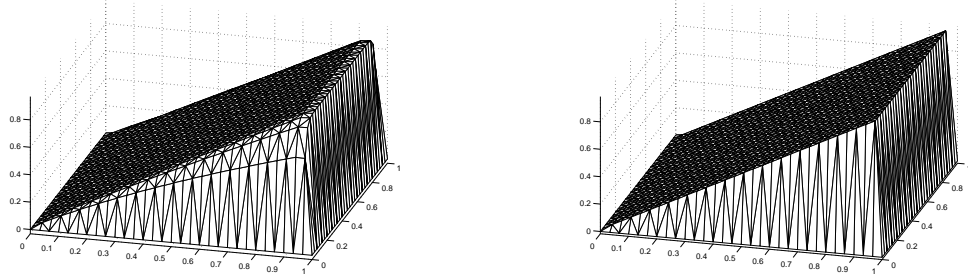
**Testovací příklad 1.** Uvažujme rovnici konvekce-difúze (1.1) v  $\Omega = [0, 1]^2$ , s parametry  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  a  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $\mathbf{b} = (\cos(-\pi/3), \sin(-\pi/3))^T = (1/2, -\sqrt{3}/2)^T$ ,  $f \equiv 0$  a

$$u_b = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 1 \text{ nebo } y \leq 0.7, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 7.1: Uzlově přesná řešení testovacího příkladu 1 s difúzními konstantami  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  (vlevo) a  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$  (vpavo), oblast  $\Omega = [0, 1]^2$  byla rozdělena na  $2 \times 20 \times 35 = 1400$  trojúhelníkových elementů.

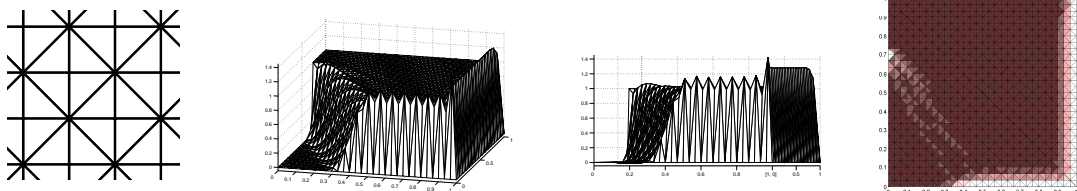
**Testovací příklad 2.** Uvažujme rovnici konvekce-difúze (1.1) v  $\Omega = [0, 1]^2$ , s parametry  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  a  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0)^T$ ,  $f \equiv 1$  a  $u_b \equiv 0$ .



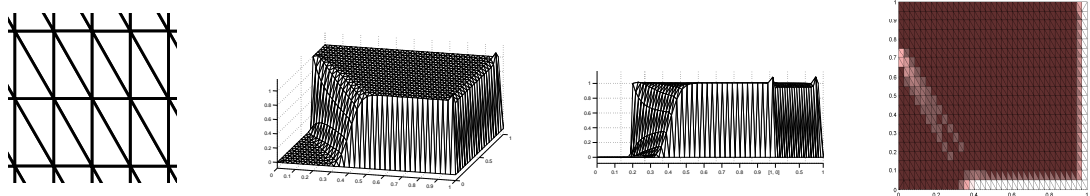
Obrázek 7.2: Uzlově přesná řešení testovacího příkladu 2 s difúzními konstantami  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  (vlevo) a  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$  (vpavo), oblast  $\Omega = [0, 1]^2$  byla rozdělena na  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkových elementů.

## 7.1 Volba počáteční sítě

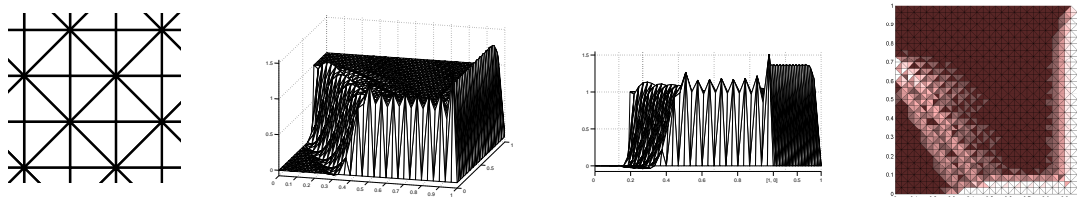
Následující obrázky potvrzují fakt, že zvolíme-li počáteční síť vhodě orientovanou vůči vektoru  $\mathbf{b}$ , můžeme docílit nejen odstranění většiny nefyzikálních oscilací, ale celkového poklesu globální chyby. Na jednotlivých seriích obrázků je vždy vyobrazena část použité sítě, dva pohledy na spočtené řešení a graf lokálních aposteriorních odhadů chyby  $\eta_{R,K}$  spočtený pomocí Kunertova odhadu. Bílá barva značí oblasti s největšími hodnotami odhadu chyby. V případech, kdy je  $\varepsilon = 10^{-8}$ , se hodnoty aposteriorních odhadů chyby v exponenciálních a parabolických vrstvách velmi výrazně liší, proto jsou znázorněny v logaritmickém měřítku.



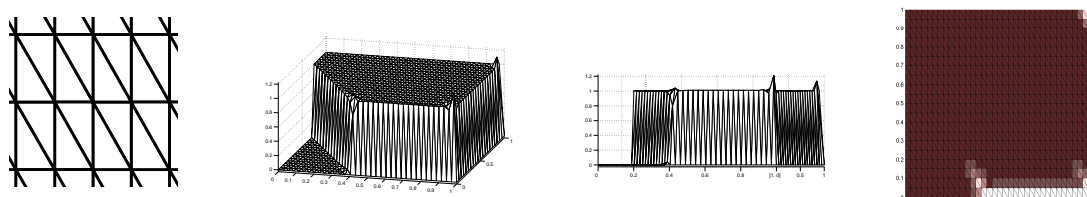
Obrázek 7.3: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3,95$ . Použita isotropní síť (iso0) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými různým směrem.



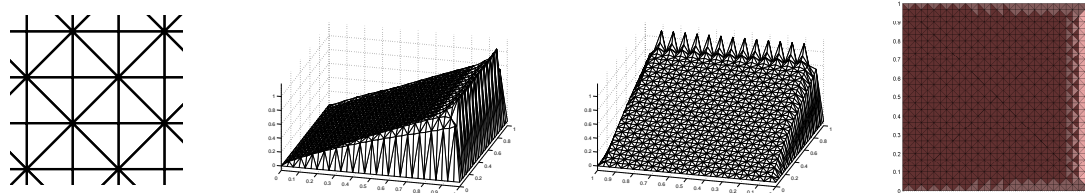
Obrázek 7.4: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3,17$ . Použita síť (rec1) s  $2 \times 20 \times 35 = 1400$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými ve směru vektoru  $\mathbf{b}$ .



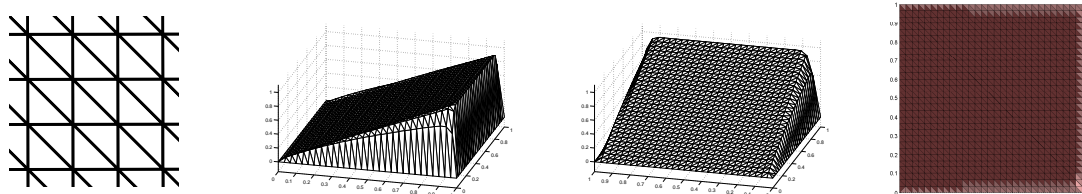
Obrázek 7.5: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1316,6$ . Použita isotropní síť (iso0) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými různým směrem.



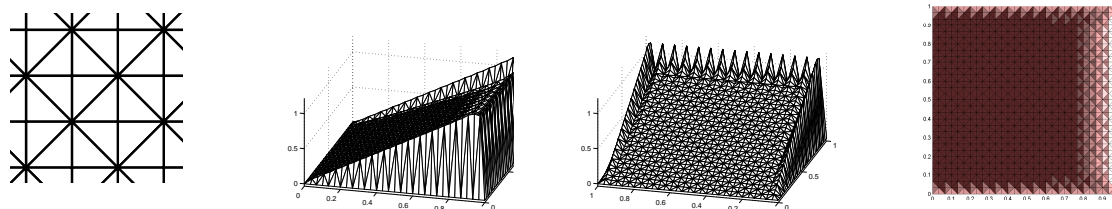
Obrázek 7.6: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1035,3$ . Použita síť (rec1) s  $2 \times 20 \times 35 = 1400$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými ve směru vektoru  $\mathbf{b}$ .



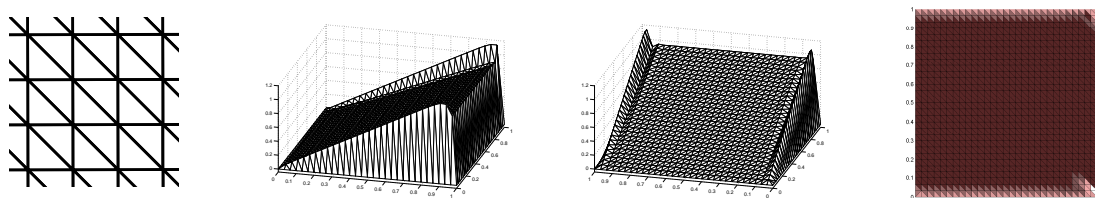
Obrázek 7.7: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3,93$ . Použita síť (iso0) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými různým směrem.



Obrázek 7.8: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3,95$ . Použita síť (iso1) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými stejným směrem.



Obrázek 7.9: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1279, 3$ . Použita síť (iso0) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými různým směrem.



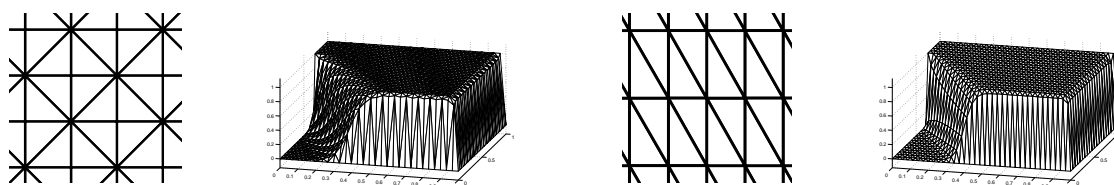
Obrázek 7.10: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody SUPG,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1279, 1$ . Použita síť (iso1) s  $2 \times 30 \times 30 = 1800$  trojúhelníkovými elementy s přeponami orientovanými stejným směrem.

V testovacím příkladu 1 vede vhodná volba sítě (jedna hrana každého elementu je rovnoběžná s vektorem  $\mathbf{b}$ ) k odstranění většiny nefyzikálních oscilací a následně ke značnému poklesu chyby. Obě použité sítě v testovacím příkladu 2 již tuto vlastnost mají a tudíž je pokles chyby menší, nicméně část oscilací zmizí. Měření nefyzikálních oscilací popíšeme na konci následujícího odstavce.

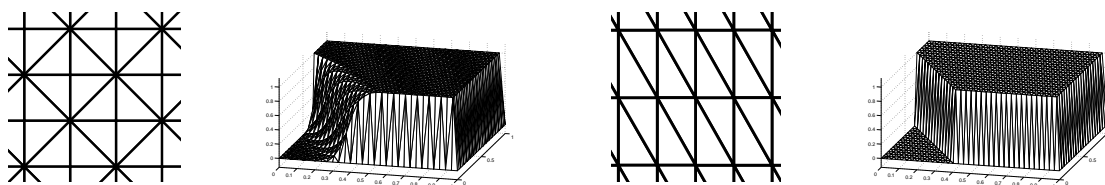
## 7.2 Výsledky získané stabilizací

Ačkoli je v některých případech globální odhad chyby řešení spočteného pomocí do Carmovy-Galeãovy či Burmanovy-Ernovy metody nižší, než v případě vylepšené Mizukamiho-Hughesovy metody, Mizukamiho-Hughesova metoda odstraňuje úplně nefyzikální oscilace. Další nevýhodou prvních dvou metod je, že matice soustav vznikajících při výpočtu jsou v některých případech špatně podmíněné a může se tedy stát, že při použití nějakého nepřímého řešiče (např. Gaussova-Seidlova metoda) výpočet kolabuje.

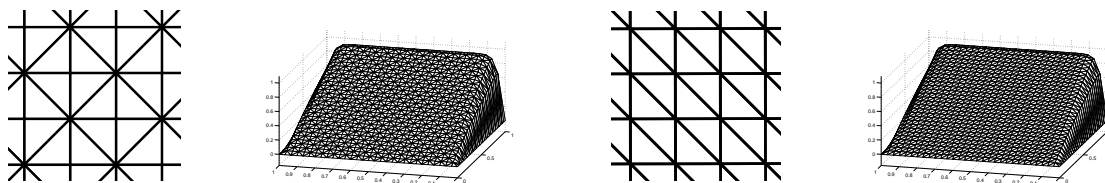
Z výše zmíněných důvodů budeme v dalších numerických výpočtech pracovat výhradně s vylepšenou verzí Mizukamiho-Hughesovy metody (IMH). Následující obrázky ukazují řešení spočtená pomocí IMH metody na různých typech sítí.



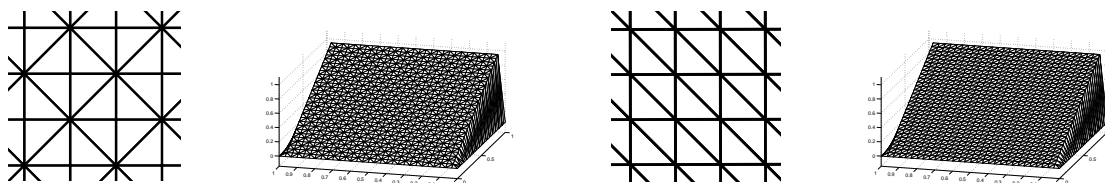
Obrázek 7.11: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody IMH na dvou různých sítích (iso0 a rec1),  $\varepsilon = 10^{-3}$ . V prvním případě je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3, 08$ , v druhém je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3, 21$ .



Obrázek 7.12: Řešení testovacího příkladu 1 spočtené pomocí metody IMH na dvou různých sítích (iso0 a rec1),  $\varepsilon = 10^{-8}$ . V prvním případě je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1063,3$ , v druhém je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1026,7$ .



Obrázek 7.13: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody IMH na dvou různých sítích (iso0 a iso1),  $\varepsilon = 10^{-3}$ . V prvním i v druhém případě je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 3,83$ .



Obrázek 7.14: Řešení testovacího příkladu 2 spočtené pomocí metody IMH na dvou různých sítích (iso0 a iso1),  $\varepsilon = 10^{-8}$ . V prvním i v druhém případě je  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 1270,2$ .

Oba testovací příklady jsou zvoleny tak, že je-li  $\varepsilon = 10^{-8}$ , lze přítomnost nefyzikálních oscilací v řešení spočteném pomocí metody SUPG měřit poměrně lehce - pomocí maxima a minima diskrétního řešení na oblasti  $\Omega$ . Je-li  $\varepsilon = 10^{-3}$ , je situace poněkud obtížnější. Využijeme proto faktu, že řešení spočtené pomocí metody IMH je téměř bez oscilací, a budeme oscilace měřit také jako maximální výchylku rozdílu řešení spočtených pomocí metod SUPG a IMH. Je ale třeba dodat, že řešení spočtené pomocí metody IMH může být (díky přítomnosti umělé difúze) rozmazané. Proto i tento způsob měření nemusí být přesný.

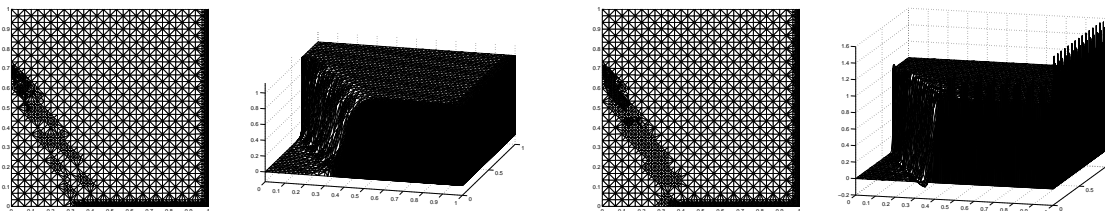
### 7.3 Výsledky získané adaptivním zjemněním sítě

Při adaptivním zjemňování sítě jsem využil dříve zmíněných aposteriorních odhadů chyby a také program ANGENER 3.0. Angener nepracuje s původní rovnicí (1.1), chybu odhaduje pomocí Hessovy matice zkonstruované k diskrétnímu řešení  $u_h$  (viz. [17]).

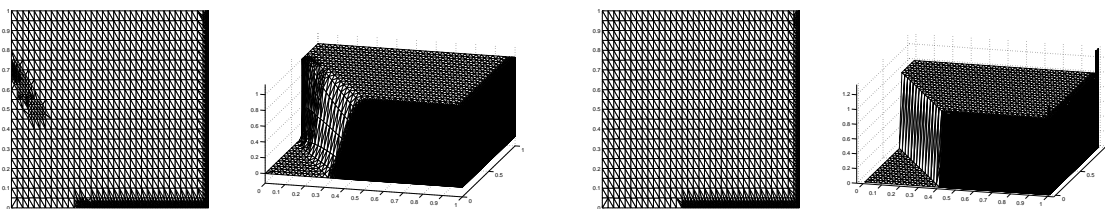
Všechny metody byly porovnány na základě přítomnosti nefyzikálních oscilací v diskrétním řešení a rovněž pomocí odhadů globální chyby.

## Red - Green algoritmus

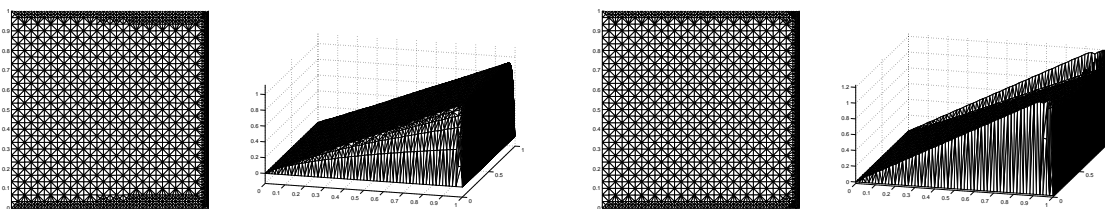
Z následujících obrázků je zřejmé, že red-green algoritmus sice snižuje globální chybu, ovšem v případě, kdy  $\varepsilon = 10^{-8}$  je neschopný odstranit všechny nefyzikální oscilace. To se podaří až po aplikaci IMH metody.



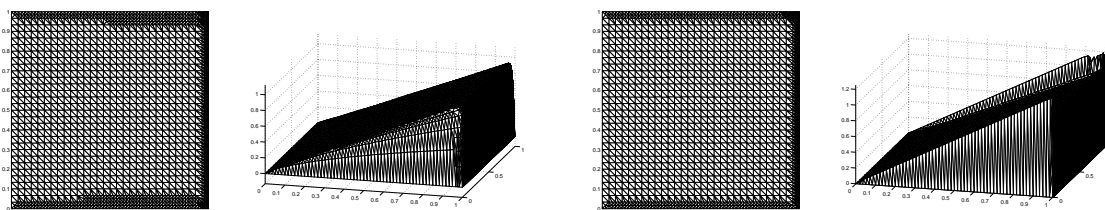
Obrázek 7.15: Řešení příkladu 1 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  (vlevo, 17883 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,478$ ) a  $\varepsilon = 10^{-8}$  (vpravo, 8064 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 347,1$ ) a na síti iso0 po aplikaci red-green algoritmu s  $\omega = 0.1$ .



Obrázek 7.16: Řešení příkladu 1 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  (vlevo, 12291 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,588$ ) a  $\varepsilon = 10^{-8}$  (vpravo, 19704 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 131,0$ ) na síti rec1 po aplikaci red-green algoritmu s  $\omega = 0.1$ .



Obrázek 7.17: Řešení příkladu 2 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  (vlevo, 13120 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,710$ ) a  $\varepsilon = 10^{-8}$  (vpravo, 8654 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 228,7$ ) na síti iso0 po aplikaci red-green algoritmu s  $\omega = 0.1$ .

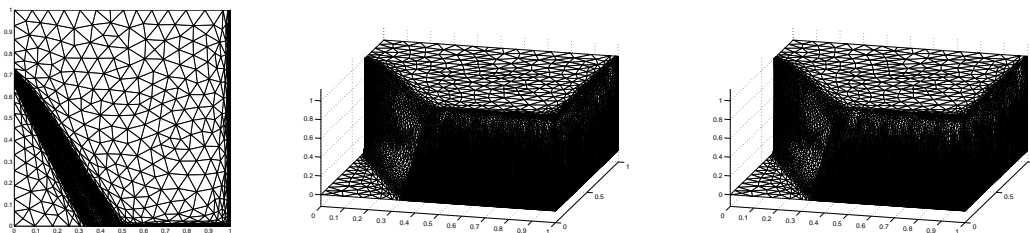


Obrázek 7.18: Řešení příkladu 2 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  (vlevo, 13609 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,707$ ) a  $\varepsilon = 10^{-8}$  (vpravo, 8832 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 234,3$ ) na síti iso1 po aplikaci red-green algoritmu s  $\omega = 0.1$ .

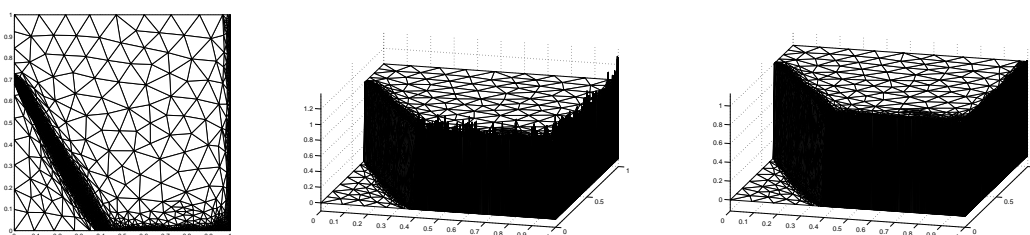


## Angener

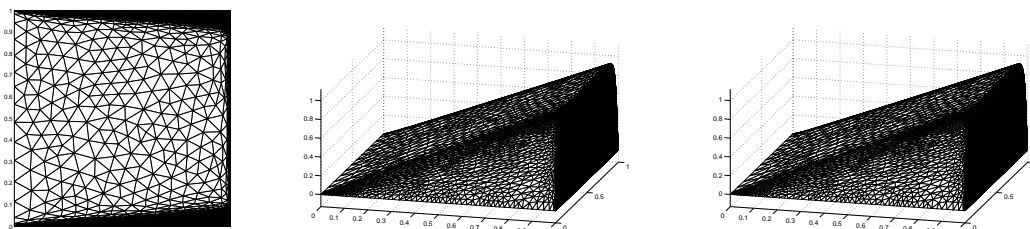
Obdobně je na tom i program Angener. Pro  $\varepsilon = 10^{-3}$  se úspěšně oscilace odstranit podaří. Pro  $\varepsilon = 10^{-8}$  však oscilace přetrvávají.



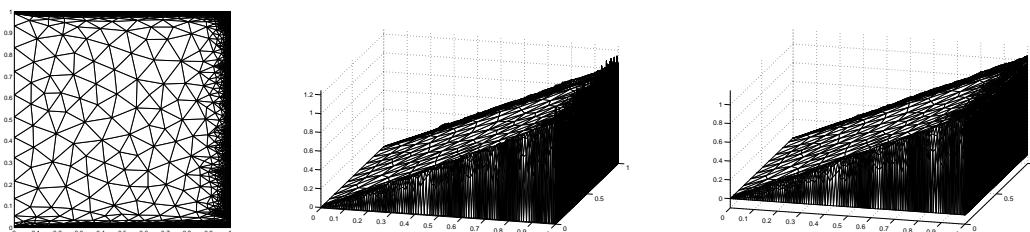
Obrázek 7.19: Řešení příkladu 1 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  na síti zkonstruované Angenerem (vlevo, 9859 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,381$ ) a po použití IMH (vpravo,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,342$ ).



Obrázek 7.20: Řešení příkladu 1 s  $\varepsilon = 10^{-8}$  na síti zkonstruované Angenerem (vlevo, 11542 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 236,9$ ) a po použití IMH (vpravo,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 232,1$ ).



Obrázek 7.21: Řešení příkladu 2 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  na síti zkonstruované Angenerem (vlevo, 8637 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,481$ ) a po použití IMH (vpravo,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 0,401$ ).

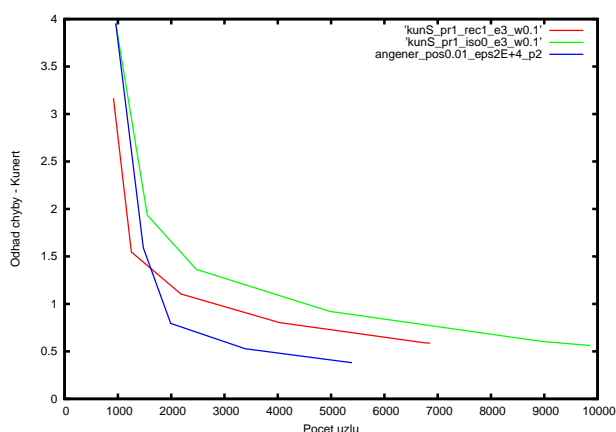


Obrázek 7.22: Řešení příkladu 2 s  $\varepsilon = 10^{-8}$  na síti zkonstruované Angenerem (vlevo, 15368 elementů,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 267,1$ ) a po použití IMH (vpravo,  $(\eta_R^2 + \zeta^2)^{1/2} \doteq 266,4$ ).

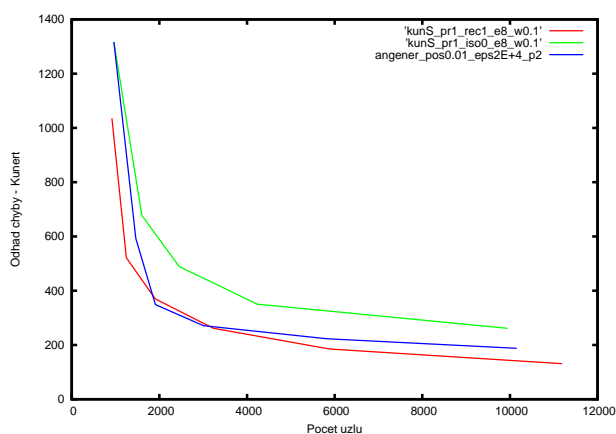
Na posledním obrázku si můžeme všimnout, že metoda IMH si v tomto případě dokonce neporadila s oscilacemi v klesající hraniční parabolické vrstvě.



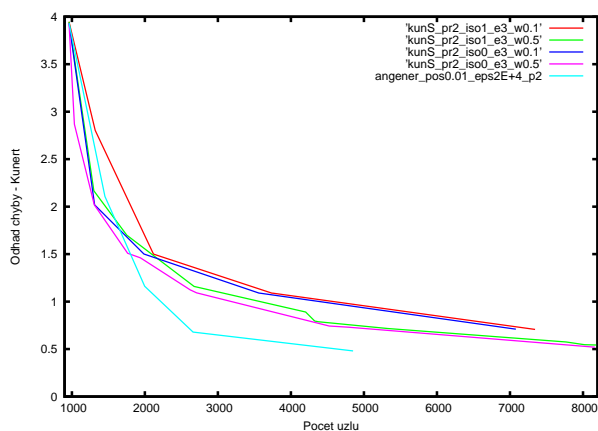
Nyní shrneme získané výsledky do grafů. Následující čtyři grafy ukazují pokles Kunterova odhadu globální chyby při použití red-green algoritmu (resp. Angeneru).



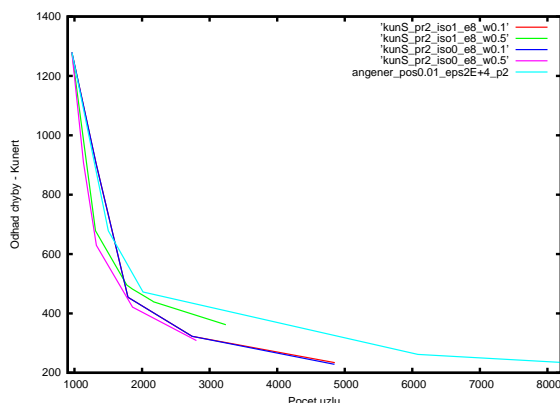
Obrázek 7.23: Pokles globální chyby při použití red-green algoritmu a programu Angener v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\omega = 0, 1$ .



Obrázek 7.24: Pokles globální chyby při použití red-green algoritmu a programu Angener v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $\omega = 0, 1$ .



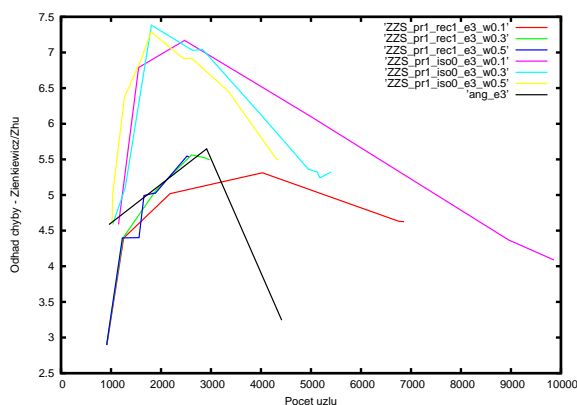
Obrázek 7.25: Pokles globální chyby při použití red-green algoritmu a programu Angener v testovacím příkladu 2,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Různé volby  $\omega$ .



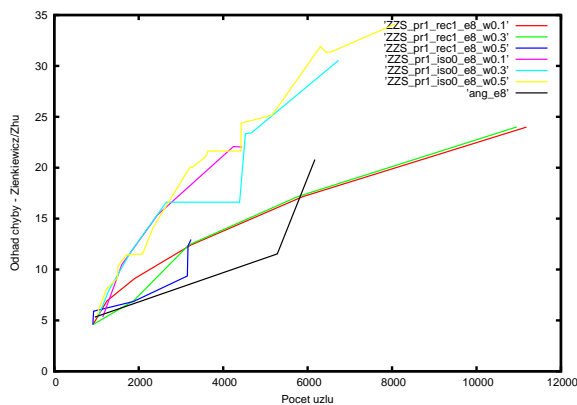
Obrázek 7.26: Pokles globální chyby při použití red-green algoritmu a programu Angener v testovacím příkladu 2,  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Různé volby  $\omega$ .

Na obrázcích si můžeme všimnout, že o tvaru a poloze křivek rozhoduje nejenom počáteční volba sítě (testovací příklad 1), ale i volba  $\omega$  v nerovnosti (6.1)

Pakliže bychom chtěli zkonstruovat podobné grafy i pro jiný než Kunertův odhad chyby, zjistili bychom že většina běžných odhadů v případě konvektivně dominantní rovnice (1.1) nefunguje. Jako příklad nám mohou posloužit následující grafy zkonstruované pro odhad Zienkiewicze a Zhua (5.16) a testovací příklad 1.

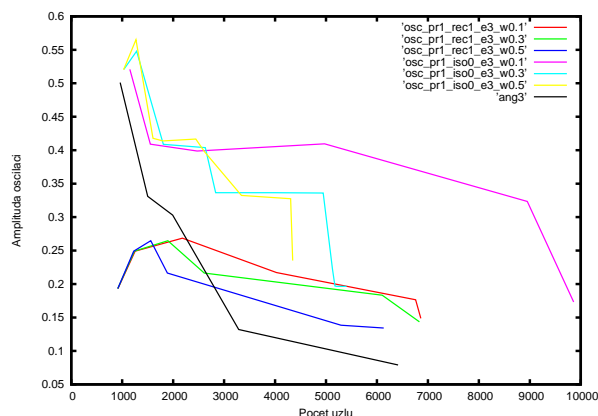


Obrázek 7.27: Průběh odhadu globální chyby Zienkiewicze a Zhua při použití red-green algoritmu a Angeneru v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Různé volby  $\omega$ .

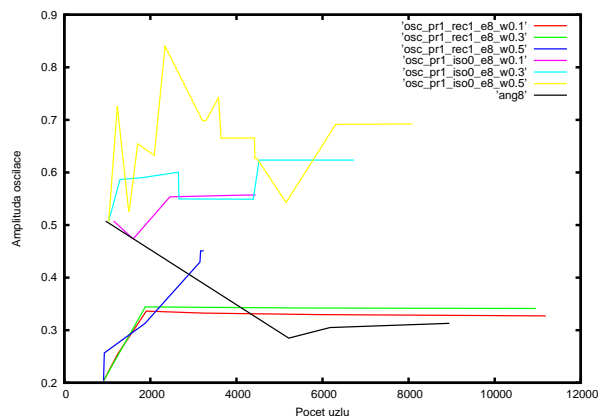


Obrázek 7.28: Průběh odhadu globální chyby Zienkiewicze a Zhua při použití red-green algoritmu a Angeneru v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Různé volby  $\omega$ .

Následující obrázky potvrzují fakt, že při volbě  $\varepsilon = 10^{-3}$  se oscilace z diskrétního řešení odstranit podaří, zatímco pro  $\varepsilon = 10^{-8}$  oscilace přetrvávají. Grafy jsou zkonstruovány pro testovací příklad 1, u testovacího příkladu 2 je situace obdobná.



Obrázek 7.29: Vývoj ne fyzikálních oscilací při použití red-green algoritmu a Angeneru v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Různé volby  $\omega$ .



Obrázek 7.30: Vývoj ne fyzikálních oscilací při použití red-green algoritmu a Angeneru v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Různé volby  $\omega$ .

## 7.4 Různá vylepšení

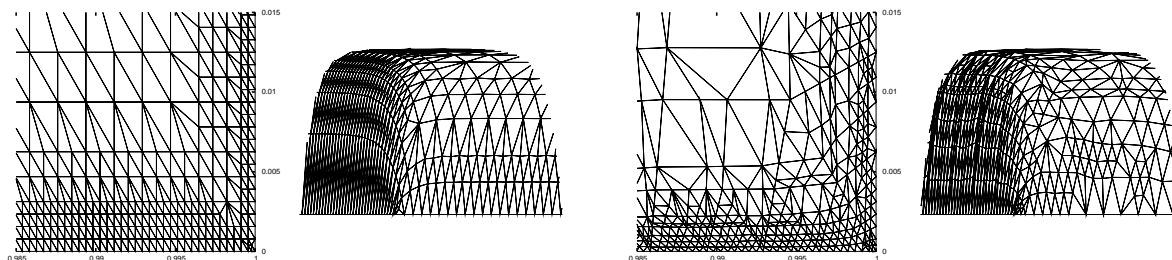
V poslední části numerických výsledků otestujeme dva možné postupy, jenž ve vhodné kombinaci s předchozími mohou významně ovlivnit kvalitu numerického řešení. Prvním z nich je modifikace red-green algoritmu definovaná v kapitole 6.

### Vylepšení red-green algoritmu

Celý postup demonstrujeme na prvním testovacím příkladě. Použijeme konstanty  $q_1 = 0,5$  a  $q_2 = 0,25$ . Tomu odpovídají funkce

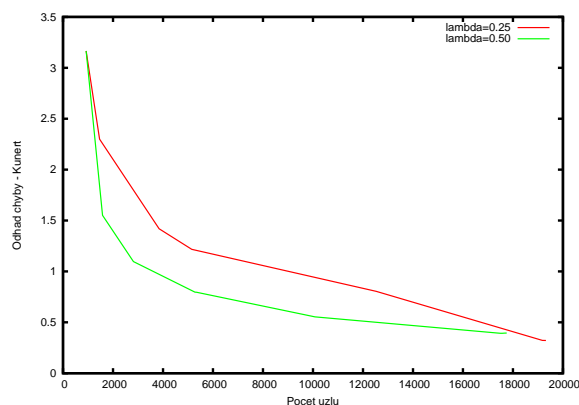
$$\lambda_1 = 0,5 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = 0,25 + \frac{0,5}{x+1}.$$

Použijeme-li tyto funkce pro stanovení dělicích bodů při chodu red-green algoritmu ( $\lambda_1$  odpovídá původnímu algoritmu), zjistíme, že red-green algoritmus používající druhou z jmenovaných funkcí poskytuje lepší výsledky. Následující obrázky ukazují výřez řešení obou dvou postupů v blízkosti kritického rohu  $[1, 0]$  pro  $\varepsilon = 10^{-3}$  po pěti iteracích. Zvláště na straně  $x = 0$  je zřejmé výrazné zlepšení kvality sítě.

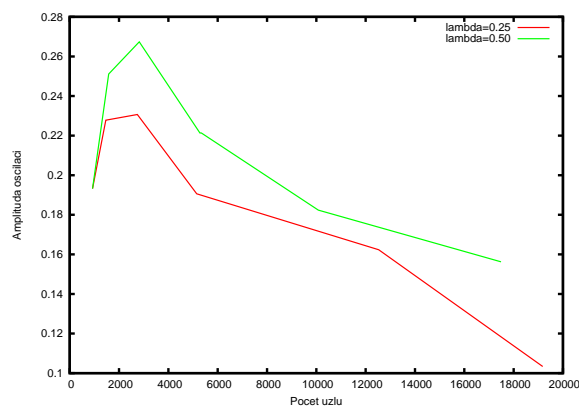


Obrázek 7.31: Výřez řešení testovacího příkladu 1 s  $\varepsilon = 10^{-3}$  na síti rec1 po aplikaci red-green algoritmu s  $\omega = 0.193$ . Použity funkce  $\lambda_1$  (vlevo) a  $\lambda_2$  (vpravo).

O tom, že řešení modifikovaného red-green algoritmu může být 'kvalitnější' svědčí grafy závislosti odhadu chyby a amplitudy oscilací na počtu uzlů :



Obrázek 7.32: Vývoj Kunertova odhadu chyby při použití red-green algoritmu a modifikovaného red-green algoritmu v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\omega = 0,193$ .



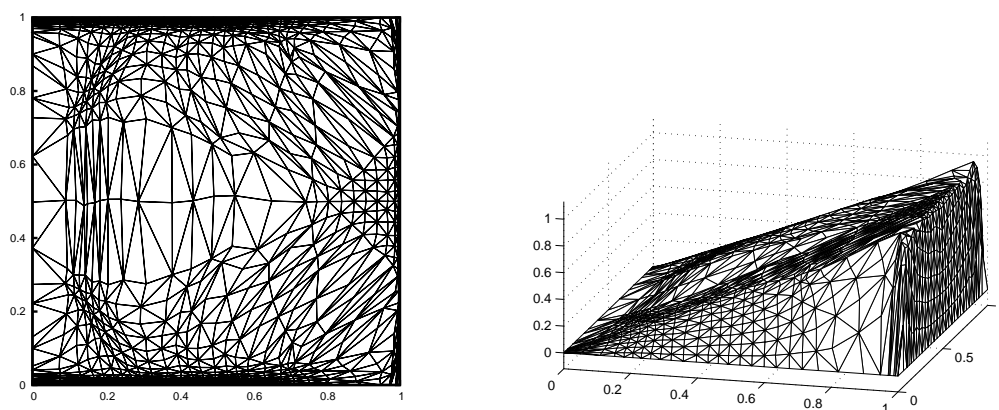
Obrázek 7.33: Vývoj nefyzikálních oscilací při použití red-green algoritmu a modifikovaného red-green algoritmu v testovacím příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\omega = 0,193$ .

Je třeba podotknout, že hodnotu koeficientu  $q$  není vhodné volit příliš malou, neboť tak můžeme způsobit degeneraci úhlů v oblastech, kde to není vhodné.

## Posun uzlů

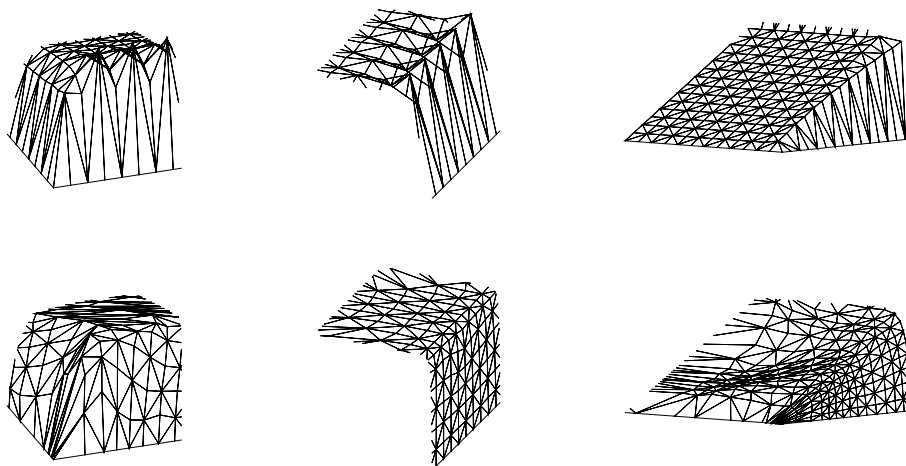
Posuneme-li před použitím red-green algoritmu (klasického) uzly sítě do 'lepší' pozice, zvýšíme tím anisotropitu sítě (snížíme hodnotu příslušné matching function). Následně aplikovaný red-green algoritmus pak pracuje s 'vhodnými' - sploštělými trojúhelníky.

Tentokrát budeme uvažovaný postup demonstrovat na testovacím příkladě 2, opět s difúzní konstantou  $\varepsilon = 10^{-3}$ . V každé iteraci posunujeme vždy všechny uzly sítě podle postupu popsáném v sekci 6.2. Po 1000 iteracích tak získáme následující síť a řešení :



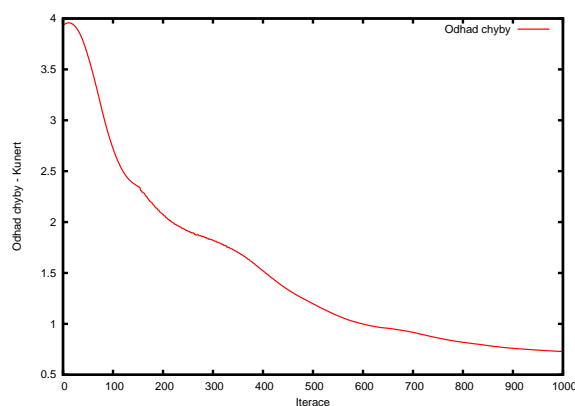
Obrázek 7.34: Síť a řešení vzniklé posunem uzlů původní sítě.

Detailní výřezy řešení naznačují (Obr. 7.35), že nová síť je kvalitější nežli původní (iso0). Z výřezu rohu u vrcholu  $[1,0]$  je ale také patrné, že by se uzly mohly posouvat do vhodnějších poloh. Jak již bylo řečeno výše, s takto vzniklou sítí lze dále pracovat - například je možné využít ji jako počáteční síť k red-green algoritmu.

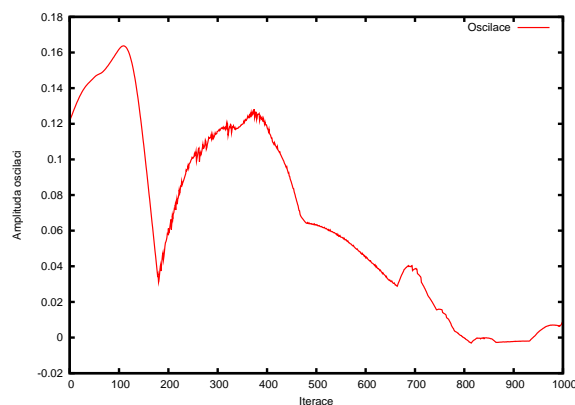


Obrázek 7.35: Srovnání výřezů řešení zkonstruovaných na původní a modifikované síti. (U vrcholu  $[1,0]$ , na straně  $y = 1$  a u vrcholu  $[0,0]$ .)

O tom, jak se při celém procesu chovají globální chyba a amplituda oscilace vypovídají následující dva grafy.



Obrázek 7.36: Vývoj Kunertova odhadu chyby při posouvání uzlů v příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .



Obrázek 7.37: Vývoj nefyzikálních oscilací při posouvání uzlů v příkladu 1,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Zatímco odhad chyby s výjimkou počáteční inicializační fáze stále klesá, vývoj oscilací je více komplikovaný, což může být zapříčiněno tím, že jsou počítány jako maximum rozdílu řešení spočteného na dané síti metodou SUPG a metodou IMH. Nicméně, oproti počáteční fázi, je jejich pokles značný.

# Kapitola 8

## Závěr

Provedené numerické experimenty potvrzují fakt, že rovnice konvekce-difúze jsou v konvektivně dominantním případě velmi obtížně numericky řešitelné. Použijeme-li k řešení pouhou stabilizaci bez adaptivního zjemnění, nejsme schopni dosáhnout libovolně nízké chyby (aniž bychom použili velké množství uzlů). V silně konvektivně dominantním případě je zase velmi obtížné odstranit pouhým adaptivním zjemněním veškeré nefyzikální oscilace vznikající v mezních vrstvách.

Klíčem k odstranění nefyzikálních oscilací pomocí adaptivního zjemňování je konstruovat takové sítě, které mají sploštělé elementy ve směru, v jakém se oscilace objevují - nejčastěji tedy ve směru gradientu spočteného řešení.

Stabilizační metody sice odstraní většinu nefyzikálních oscilací, zároveň však díky přidání umělé difúzi způsobují rozmazání a snížení přesnosti počítaného řešení.

Chceme-li úspěšně řešit konvektivně dominantní rovnice konvekce-difúze je tedy nutné vhodně kombinovat stabilizační a adaptivní metodu, abychom nejenom odstranili nefyzikální oscilace, ale zároveň měli řešení i dostatečně přesné.

# Literatura

- [1] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 32 (1982) 199-259.
- [2] E. Burman, A. Ern, *Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection-diffusion-reaction equation*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 191 (2002) 3833-3855.
- [3] E. G. D. do Carmo, A. C. Galeão, *Feedback Petrov-Galerkin methods for convection-dominated problems*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 88 (1991) 1-16.
- [4] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- [5] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Introduction to adaptive methods for differential equations*, Acta Numerica (1995) 105-158.
- [6] J. Haslinger: *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.
- [7] V. John, *A posteriori  $L^2$ -error estimates for the nonconforming  $P_1/P_0$ -finite element discretization of the Stokes equations*, J. Comput. Appl. Math. 96 (2) (1998) 99-116.
- [8] V. John, *A numerical study of a posteriori error estimators for convection-diffusion equations*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 190 (2000) 757-781.
- [9] V. John, P. Knobloch: *A comparison of spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection-diffusion equations: Part I - A review*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 196 (2007) 2197-2215.
- [10] P. Knobloch: *Numerical solution of convection-diffusion equations using upwinding techniques satisfying the discrete maximum principle*, Proceedings of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005, Kjuu Training Center, Oita, Japan, September 15-18, 2005, pp. 69-76.
- [11] P. Knobloch: *Improvements of the Mizukami-Hughes method for convection-diffusion equations*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 196 (2006) 579-594.



- [12] G. Kunert, *A posteriori error estimation for convection-dominated problems on anisotropic meshes*, Preprint-Reihe des Chemnitzer Sonderforschungsbereich 393/02-04, Technische Universität Chemnitz, March 2002.
- [13] A. Mizukami, T. J. R. Hughes: *A Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated flows: An accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle*, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering 50 (1985) 181-193.
- [14] K. Rektorys, *Variční metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky*. Academia, Praha 1999, s. 196-205.
- [15] R. Verfürth, *A posteriori error estimates for nonlinear problems.  $L^r$ -estimates for finite element discretizations of elliptic equations*, Math. Comp. 67 (224) (1998) 1335-1360.
- [16] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, *A simple error estimators and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Internat. J. Numer. Meth. Engrg. 24 (2) (1987) 337-357.
- [17] <http://www.ms.mff.cuni.cz/~dolejsi/ama>