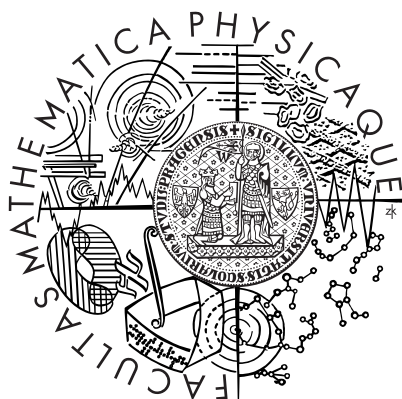


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Karel Tůma

Deformace vazkopružných materiálů – modelování a počítačová analýza vybraných modelů

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.
Studijní program: Matematika, Matematické modelování ve fyzice a technice

2008

Děkuji Doc. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., DSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které jsem uplatnil při psaní této práce. Dále děkuji RNDr. Ing. Jaroslavu Hronovi, Ph.D. za pomoc a připomínky související se softwarem. Děkuji Dr. J. Murali Krishnanovi z Madras Institute of Technology za poskytnutí experimentálních dat. Děkuji Mgr. Janu Kratochvílovi za pomoc při seznámování se s jeho diplomovou prací.

Tato práce vznikla s podporou projektu GAČR 201/06/0352, a projektu GAUK 306-10/252509.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze, dne 10. srpna 2008

Karel Tůma

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Asfalt	7
1.2	Cíl a obsah práce	8
2	Mechanika kontinua	10
2.1	Konfigurace a kinematické veličiny	10
2.2	Bilanční rovnice mechaniky kontinua	13
2.3	Princip maxima rychlosti produkce entropie	14
3	Viskoelastické modely	16
3.1	Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi	16
3.1.1	Model v dimenzi dvě	20
3.2	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací	22
3.2.1	Model v dimenzi dvě	23
3.2.2	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a ne- konstantním koeficientem	23
3.3	Oldroydův model	24
3.4	Burgersův model	26
4	Popis experimentu	27
5	Simulace problému v rovinné geometrii	29
5.1	Oldroyd-B	30
5.1.1	Stacionární řešení	30
5.1.2	Nestacionární řešení	30
5.2	Burgers	32
5.2.1	Stacionární řešení	32
5.2.2	Nestacionární řešení	33
5.3	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací	35

5.3.1	Stacionární řešení	35
5.3.2	Nestacionární řešení	36
5.4	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonzstantním koeficientem	39
5.4.1	Stacionární řešení	39
5.4.2	Nestacionární řešení	40
5.5	Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi	43
5.5.1	Stacionární řešení	43
5.5.2	Nestacionární proudění	44
6	Simulace problému ve válcové geometrii	47
6.1	Popis úlohy	47
6.2	Řešení zjednodušeného problému	48
6.2.1	Zjednodušující předpoklady	48
6.2.2	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací	49
6.2.3	Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi	53
6.2.4	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonzstantním koeficientem	55
6.3	Řešení úplného problému	59
6.3.1	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací	59
6.3.2	Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonzstantním koeficientem	66
7	Závěr	70
A	Diferenciální operátory	72
A.1	Kartézské souřadnice	72
A.2	Válcové souřadnice	75
B	Obsah příloženého CD	78
	Literatura	80

Název práce: Deformace vazkopružných materiálů – modelování a počítačová analýza vybraných modelů

Autor: Karel Tůma

Katedra (ústav): Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

e-mail vedoucího: `Josef.Malek@mff.cuni.cz`

Abstrakt: V předložené práci odvodíme dva nelineární modely nestlačitelných tekutin rychlostního typu, které popisují chování viskoelastických tekutin. Linearizací elastické části odezvy dostaneme dva modely blízké populárním modelům pro viskoelastické tekutiny – Oldroyd-B a Burgersův model. Představíme úpravu nelineárního modelu pomocí koeficientu závislého na prvním invariantu deformačního gradientu. Dále ukážeme experiment zachycující relaxaci napětí asfaltu ve válcové geometrii. Studujeme proudění ve dvou různých geometriích – rovinné proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami a osově symetrické proudění ve válci. Pokud je to možné, řešíme problémy analyticky, jinak numericky. Zkoumáme, který z uvažovaných modelů je schopen zachytit adekvátně experimentální data.

Klíčová slova: Asfalt, viskoelastická tekutina, metoda konečných prvků.

Title: Deformations of viscoelastic materials – modeling and computational analysis of selected models

Author: Karel Tůma

Department: Matematický ústav UK

Supervisor: Doc. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Supervisor's e-mail address: `Josef.Malek@mff.cuni.cz`

Abstract: In the present work we derive two nonlinear models for incompressible rate type fluids that describe the behaviour of the viscoelastic fluids. Making the linearization of the elastic response, we obtain two models similar to the popular models for viscoelastic fluid – Oldroyd-B and Burgers model. Furthermore, we modify the nonlinear model by assuming that one of the coefficient depends on the first invariant of the deformation gradient. We present an experiment that documents the stress relaxation of asphalt in the cylindrical geometry. We study the flow at two different geometries – the parallel plate flow and the axially symmetric cylinder flow. If it is possible, the problems are solved analytically, otherwise they are solved numerically. We investigate what model is capable of fitting the experimental data.

Keywords: Asphalt, viscoelastic fluid, finite element method.

Kapitola 1

Úvod

Modely lineárně pružného materiálu a lineárně viskózní tekutiny nejsou schopny adekvátně zachytit napěťovou relaxaci pozorovanou takřka ve všech reálných materiálech. Tento nedostatek klasických modelů vedl ke vzniku celé hierarchie modelů pro vazko-pružné (viskoelastické) materiály.

Uvažujme materiál, který po určitou dobu udržujeme při konstantní deformaci. Měříme sílu, která je k tomu potřeba. Deformace čistě elastické látky vyžaduje po celou dobu konstantní působení síly, poté se materiál ihned navrácí do původního stavu. Naproti tomu deformace viskózní látky se dosáhne působením v čase singulární síly, a v deformovaném stavu tekutina setrvává i bez dalšího působení. Téměř všechny skutečné materiály však pro udržení deformovaného stavu požadují sílu, která je menší než počáteční, ale není zpravidla nulová. Napěťová relaxace tedy není u většiny materiálů triviální (konstantní resp. po počátečním impulzu nulová). Další vlastnosti typické pro viskoelastické materiály jsou nelineární creep či přítomnost rozdílů normálových napětí v jednoduchém smykovém poli.

V této práci budeme simulovat chování asfaltu. Snažíme se modelovat chování tohoto geofyzikálního materiálu v experimentu, který máme k dispozici. Představíme různé modely viskoelastických tekutin a zjišťujeme, který z nich lépe odpovídá experimentálním datům.

V první kapitole stručně popíšeme modelovaný materiál a dále shrneme, čím se budeme v práci zabývat. Čtenáře, který by rád získal více informací o materiálových vlastnostech asfaltu a jeho využití, můžeme odkázat na přehledný článek [1], kde lze rovněž nalézt velký počet odkazů a referencí.

1.1 Asfalt

Asfalt je komplexní heterogenní směs uhlovodíků. Čistý destilační asfalt (angl. straight-run asphalt) se získává jako vedlejší produkt při rafinování ropy. Ten se pak dále upravuje pro další použití. Nejčastěji se používá pro stavbu silnic a dálnic. V tom případě se čistý asfalt smíchá se štěrkem a jinými plnivými a hotová směs se pak lije na vozovku, aby po zchladnutí vytvořila její pevný povrch. Dále se asfalt používá jako elektrický izolátor podvodních kabelů nebo jako izolace pro uchování lehce a středně silně radioaktivního odpadu. Existují i přirozené zdroje asfaltu, které byly využívány už našimi předky. Používali je k výrobě loveckých zbraní, k těsnícím účelům nebo ke stavbě svých obydlí.

V této práci se budeme snažit popsat makroskopické chování čistého asfaltu. Asfalt je velmi komplikovanou směsí různých složek, které mezi sebou různě interagují, přičemž přesné chemické složení a procesy probíhající v asfaltu stále nejsou zcela známy. Asfalt obsahuje typicky dvě složky – složku amorfní a krystalickou. Tohoto poznatku dále využijeme. Další komplikací je, že vlastnosti asfaltu výrazně závisí na teplotě. Pro nízké teploty se chová jako sklovitá pevná látka, se zvyšující teplotou se z něj stává viskoelastická pevná látka, viskoelastická tekutina, až newtonská tekutina. Přesné rozmezí teplot odpovídající jednotlivým režimům nelze jednoznačně určit, neboť je ovlivněno složením a původem asfaltu.

Asfalt se navíc různě projevuje v závislosti na časové škále pozorování. Pokud jej pozorujeme v běžné situaci, například v rámci jednoho dne, zdá se nám, že jde o pevnou látku. Zajímavý experiment, který ukazuje chování asfaltu v mnohem delší časové škále, začal probíhat na University of Queensland v roce 1927. Profesor Thomas Parnell zahřál asfalt a nalil ho do skleněného trychtýře se zalepeným dnem. Tři roky se nechal asfalt ustálit a po této době bylo dno ustříženo a asfalt mohl začít volně vytékat. Asfalt začal odkapávat jako tekutina, jednotlivé kapky však odpadávaly v řádu několika let po sobě. Na obr. 1.1 lze vidět fotografii probíhajícího experimentu, v tabulce je uvedeno, kdy z trychtýře odpadly jednotlivé kapky asfaltu. Podrobnosti o experimentu lze nalézt na internetové stránce [2].

Rok	Událost
1930	ustřiženo
1938, prosinec	1. kapka
1947, únor	2. kapka
1954, duben	3. kapka
1962, květen	4. kapka
1970, srpen	5. kapka
1979, duben	6. kapka
1988, červenec	7. kapka
2000, listopad	8. kapka



Obrázek 1.1: Experiment s kapajícím asfaltem

1.2 Cíl a obsah práce

Cílem práce je co nejlépe popsat chování asfaltu za zjednodušených podmínek daných parametry experimentu, který představíme ve čtvrté kapitole. Experiment je prováděn při konstantní teplotě a na časové škále 15 sekund. Z toho důvodu není třeba uvažovat výše uvedené komplikace a asfalt budeme modelovat jako homogenní kontinuum při konstantní teplotě. V další kapitole odvodíme dva modely rychlostního typu, k tomu použijeme dva moderní přístupy nelineární mechaniky kontinua založené na pojmech přirozené konfigurace a maximalizace rychlosti produkce entropie. Konstitutivní rovnici pro tenzor napětí (tenzorová veličina) odvodíme pomocí tohoto aparátu a ze znalosti konstitutivních vztahů pro dvě skalární veličiny – rychlost produkce entropie a Helmholtzovy volné energie. Tím získáme viskoelastický model, který je schopný zachytit nelinearitu v elastické části odezvy.

Lineárně elastický materiál si lze představit jako homogenní materiál, kde odezva v každém bodě tělesa při jednoduchém smyku je stejná a navíc odpovídá odezvě lineární pružinky. Odezva je tak řízena Hookeovým zákonem. Klasickou lineární newtonskou tekutinu si lze představit jako izotropní homogenní materiál, kde odezva v každém bodě je stejná a odpovídá odezvě lineárního tlumiče. Jednoduchý viskoelastický materiál si tak lze představit jako homogenní materiál, jehož odezva v jednoduchém smyku je dána nějakou kombinací vzájemně propojených lineárních tlumičů a pružinek. Jednoduché sériové zapojení je jako příklad uvedeno na obr. 2.1. Pružinka představuje elastickou část odezvy, tlumič pak viskózní část. Není zřejmé, jak tímto přístupem sestavit viskoelastický model s nelineární elastickou částí odezvy. Aparát zmíněný v předchozím odstavci nám to umožňuje; s jeho pomocí odvodíme dva nelineární modely. První z nich se odvodí za předpokladu existence jedné přirozené konfigurace. Tento model použil Jan Kratochvíl ve své diplomové práci a tato práce na [3] navazuje. Protože asfalt obsahuje typicky dvě složky – amorfni a krystalickou, odvodíme v této práci model se dvěma přirozenými konfiguracemi. Oba nelineární modely modifikujeme pro použití ve dvourozměrném prostoru, čímž získáme snadněji řešitelné rovnice. Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací dále modifikujeme. Jeden z viskózních koeficientů není konstantní, ale závisí na prvním invariantu odpovídajícího deformačního gradientu. Takto upravený model nám umožní lépe zachytit měřený experiment. Součástí práce bude řešení rovnic uvedených modelů jak ve dvourozměrném, tak ve trojrozměrném prostoru.

Linearizací nelineárních modelů získáme populární modely Oldroyd-B a Burgersův model. Ve páté kapitole otestujeme adekvátnost všech pěti uvedených modelů na příkladě Couetteho proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Výsledky tohoto testu použijeme v následující kapitole k simulaci skutečného experimentu ve válci. Parametry modelů určíme tak, aby výsledek simulace co nejlépe odpovídal experimentálním datům. Při hledání parametrů řešíme problém za zjednodušujících podmínek. Jejich oprávněnost dále ověříme řešením úplného problému metodou konečných prvků.

Kapitola 2

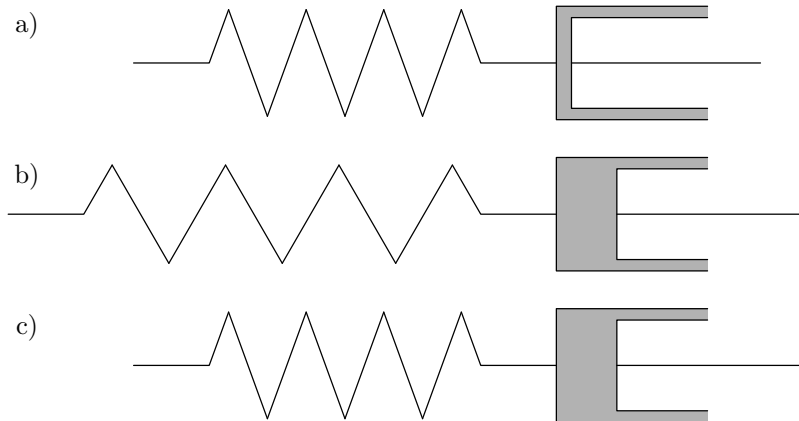
Mechanika kontinua

K popisu tělesa uijeme jednotný termomechanicky konzistentní rámec založený na pojmech referenční, současná a přirozená konfigurace a principu maximalizace rychlosti produkce entropie, který je vhodný k nalezení efektivního tvaru konstitutivní rovnice pro tenzor napětí. Obecný popis celkového přístupu lze nalézt v [5, 6, 7].

2.1 Konfigurace a kinematické veličiny

Těleso tvořené viskoelastickým materiálem se nachází v čase t v konfiguraci $\kappa(t)$, tato konfigurace se nazývá aktuální (současná) konfigurace. Tuto konfiguraci budeme porovnávat s konfigurací systému $\kappa(r)$, což je konfigurace systému v klidu na počátku, tzv. referenční konfigurace. Zavedeme přirozenou konfiguraci $\kappa(p(t))$. Je to taková konfigurace systému odpovídající aktuální konfiguraci $\kappa(t)$, při které je těleso oproštěno od všech vnějších podnětů. Pak se aktuální konfigurace a jí takto odpovídající přirozená konfigurace od sebe liší čistě elastickou deformací. Zavedením pojmu přirozená konfigurace tedy rozdělíme proces na část čistě elastickou a čistě viskózní.

Ukažme si na jednoduchém konkrétním příkladě, jak lze motivovat pojem přirozené konfiguraci. Jednoduchý lineární viskoelastický model lze například znázornit sériově zapojenou pružinou a tlumičem jako na obr. 2.1. Tlumič tvoří dva sousední válce vyplněné tekutinou. Pružina představuje elastickou část a tlumič viskózní část. Na obr. 2.1a) je na počátku materiál relaxován a pružina i tlumič nejsou natažené. Systém se nachází v referenční konfiguraci $\kappa(r)$. Poté zapojení natáhneme (obr. 2.1b)), dojde k deformaci a systém se ocitne v aktuální konfiguraci $\kappa(t)$. Pak soustavu necháme zrelaxovat, pru-



Obrázek 2.1: Jednoduchý lineární viskoelastický model

žina se stáhne do svého klidového stavu, tlumič zůstane natažený (obr. 2.1c)). Konfiguraci tohoto systému nazveme přirozenou konfigurací $\kappa(p(t))$. Protože při relaxaci se deformace tlumiče nemění, budeme uvažovat, že celková volná energie systému je závislá jen na deformaci z přirozené konfigurace. Podrobnosti o přirozené konfiguraci lze nalézt např. v [8].

Označme χ deformační funkci, která zobrazuje bod tělesa X v referenční konfiguraci $\kappa(r)$ do bodu tělesa x v aktuální konfiguraci, tj.

$$x = \chi(X, t).$$

Její derivací podle času získáme rychlostní pole

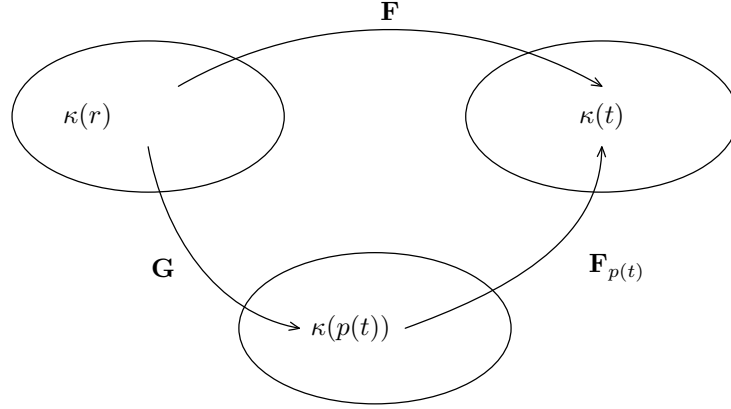
$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

K deformační funkci v případě homogenního materiálu zavedeme deformační gradient (viz obr. 2.2)

$$\mathbf{F} = \nabla \chi$$

zobrazující infinitezimální element z $\kappa(r)$ do $\kappa(t)$. Ze znalosti deformačního gradientu můžeme určit následující veličiny. Levý a pravý Cauchyho-Greenův tenzor napětí (tyto veličiny nebudeme dále používat a pod těmito pojmy budeme myslet něco jiného)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F},$$



Obrázek 2.2: Přirozená konfigurace

gradient rychlosti

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

a jeho symetrickou část

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2}.$$

Dále definujeme $\mathbf{F}_{p(t)}$ jako zobrazení infinitezimálního elementu z $\kappa(p(t))$ do $\kappa(t)$ a \mathbf{G} zobrazuje z $\kappa(r)$ do $\kappa(p(t))$. Tyto dvě nové veličiny mají tedy vůči sobě vztah

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_{p(t)}^{-1}\mathbf{F}.$$

Zavedme dále levý a pravý Cauchyho-Greenův tenzor napětí

$$\mathbf{B}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{F}_{p(t)}^T, \quad \mathbf{C}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)}^T\mathbf{F}_{p(t)}$$

a rychlost deformace, resp. její symetrickou část

$$\mathbf{L}_{p(t)} = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}, \quad \mathbf{D}_{p(t)} = \frac{\mathbf{L}_{p(t)} + \mathbf{L}_{p(t)}^T}{2}.$$

Pro odvození nelineární modelu budeme dále potřebovat znát deviatorickou část tenzoru $\mathbf{B}_{p(t)}$

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \mathbf{B}_{p(t)} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{I}$$

a jeho časovou derivaci

$$\dot{\mathbf{B}}_{p(t)} = \overline{(\mathbf{F}_{p(t)}\dot{\mathbf{F}}_{p(t)}^T)} = \overline{(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}\dot{\mathbf{G}}^{-T}\mathbf{F}^T)} = \mathbf{L}\mathbf{B}_{p(t)} + \mathbf{B}_{p(t)}\mathbf{L}^T - 2\mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)}\mathbf{F}_{p(t)}^T,$$

kde jsme použili vztahu

$$\dot{\mathbf{A}^{-1}} = -\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}.$$

Označíme-li $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{L}^T$ jako Oldroydovu derivaci tenzoru \mathbf{A} , pak můžeme Oldroydovu derivaci tenzoru $\mathbf{B}_{p(t)}$ zapsat ve tvaru

$$\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)} = -2\mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)}\mathbf{F}_{p(t)}^T. \quad (2.1)$$

Dále budeme pro odvození modelu potřebovat znát, jak vypadá Oldroydova derivace jeho deviatorické části

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)}^\delta &= \overline{\left(\mathbf{B}_{p(t)} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{I} \right)}^\nabla = \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)} - \frac{1}{3}(\text{tr } \dot{\mathbf{B}}_{p(t)})\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \overset{\nabla}{\mathbf{I}} = \\ &= -2\mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)}\mathbf{F}_{p(t)}^T - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{B}_{p(t)} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{I} + \\ &\quad + \frac{2}{3}\text{tr}(\mathbf{F}_{p(t)}^T\mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{D} = \\ &= -2\mathbf{F}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)}\mathbf{F}_{p(t)}^T - \frac{2}{3}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\mathbf{C}_{p(t)} \cdot \mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)})\mathbf{D}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde jsme použili cykličnost stopy a vztahu

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T.$$

2.2 Bilanční rovnice mechaniky kontinua

Asfalt simulujeme jako homogenní materiál, proto si nyní shrneme bilanční rovnice mechaniky kontinua, podrobnosti viz podkapitola A/2 v [4]. Tečka bude v celém textu značit materiálovou derivaci, tj.

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi.$$

Bilance hmoty

$$\dot{\rho} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

kde ρ značí hustotu tekutiny a \mathbf{v} její rychlost. V případě konstantní hustoty se bilance hmoty redukuje na

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Bilance hybnosti

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T},$$

kde \mathbf{T} značí tenzor napětí a \mathbf{f} vnější objemové síly, ty budeme zanedbávat.

Bilance momentu hybnosti

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T.$$

Bilance energie

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (2.3)$$

kde e značí vnitřní energii, r hustotu energetických zdrojů a \mathbf{q} tok tepla.

Entropická nerovnost (Druhý zákon termodynamiky)

$$\rho \theta \dot{\eta} + \theta \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho r \geq 0, \quad (2.4)$$

kde θ je termodynamická teplota a η entropie. Odečtením (2.4) od (2.3) a zavedením Helmholtzovy volné energie $\psi = e - \theta \eta$ dostáváme

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho \theta \dot{\eta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0. \quad (2.5)$$

Definujeme-li rychlost produkce entropie vztahem

$$\xi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho \theta \dot{\eta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta}, \quad (2.6)$$

pak (2.5) říká, že $\xi \geq 0$.

Redukovaná termodynamická nerovnost

V případě, kdy uvažovaný proces se děje při konstantní teplotě, se rovnice (2.6) zjednoduší na

$$\xi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} \quad \text{a} \quad \xi \geq 0. \quad (2.7)$$

2.3 Princip maxima rychlosti produkce entropie

Cílem odvození bude získat konstitutivní vztah pro symetrický tenzor napětí \mathbf{T} . Namísto toho, abychom si ho přímo předsali, a tím museli určit jeho šest

různých složek¹, určíme si pouze dvě konstitutivní rovnice pro Helmholtzovu volnou energii ψ a rychlost produkce entropie ξ závislou na $\mathbf{D}, \mathbf{D}_{p(t)}, \mathbf{B}_{p(t)}$. Volbu ξ musíme provést tak, aby $\xi \geq 0$, a tak byl automaticky splněn druhý termodynamický zákon (druhá část (2.7)). Navíc požadujeme, aby ξ splňovalo první část (2.7). Takových $\mathbf{D}, \mathbf{D}_{p(t)}, \mathbf{T}$ bude mnoho, z nich vybereme ty, které maximalizují rychlost produkce entropie, a tak určíme konstitutivní vztah pro \mathbf{T} . Důvod, proč provádíme maximalizaci, je následující. Představme si izolovaný systém. Tento systém dosáhne rovnováhy, když jeho entropie dosáhne maxima. Volbou maximální rychlosti produkce entropie tedy zajistíme, že se těleso dostane do rovnováhy, co nejrychleji to jde. Více o tomto principu lze nalézt např. v [9].

Hledáme tedy \mathbf{T} tak, abychom maximalizovali rychlost produkce entropie ξ majíce na paměti podmínky nestlačitelnosti ($\text{tr } \mathbf{D} = \text{tr } \mathbf{D}_{p(t)} = 0$) a redukovanou termodynamickou nerovnost (2.7).

¹Musíme určit šest složek pro konstitutivní vztah tenzoru napětí \mathbf{T} a ještě konstitutivní vztah pro Helmholtzovu volnou energii ψ .

Kapitola 3

Viskoelastické modely

V této kapitole odvodíme čtyři modely nestlačitelných tekutin rychlostního typu vhodných k popisu neneutonských charakteristik jako jsou relaxace napětí, nelineární creep či přítomnost rozdílů normálových napětí v jednoduchém smykovém poli.

3.1 Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi

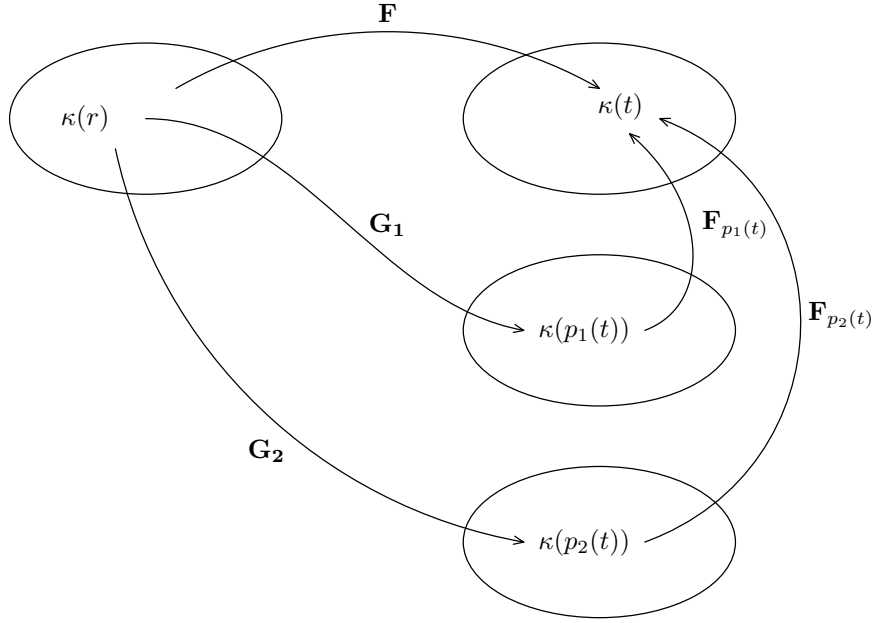
Jak již bylo řečeno výše, asfalt má dvě významné složky – amorfni a krystalickou. Můžeme tedy asfalt modelovat buď jako homogenní kontinuum, či jako směs dvou kontinuí. V této části se budeme zabývat komplikovanějším případem, tj. asfalt modelujeme jako směs dvou složek. Na rozdíl od klasické kontinuální teorie směsí (viz např. [10] či [11]) však skutečnost, že se zabýváme směsí, nereprezentujeme dvěma koexistujícími kontinui, ale jedním kontinuem (viz např. [12]), kterému přiřadíme dvě přirozené konfigurace – jedna odpovídá amorfni složce, druhá složce krystalické.

Mějme tedy materiál skládající se ze dvou složek. Každé jeho složce odpovídá jedna přirozená konfigurace $\kappa(p_1(t))$ a $\kappa(p_2(t))$ (viz obr. 3.1).

Helmholtzovy volné energie těchto složek označme ψ_1, ψ_2 . Celková volná energie je rovna součtu volných energií jednotlivých složek. Redukovaná termodynamická nerovnost pak má tvar

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = \xi \geq 0.$$

Určíme konstitutivní vztahy pro Helmholtzovy volné energie jednotlivých složek, ty jsou dány neo-Hookeovým zákonem popisující nelineární elasticitou



Obrázek 3.1: Dvě přirozené konfigurace

odezvu mezi $\kappa(p_i(t))$ a $\kappa(t)$

$$\begin{aligned}\rho\psi_1 &= \frac{\mu_1}{2}(\text{tr } \mathbf{B}_{p_1(t)} - 3), \\ \rho\psi_2 &= \frac{\mu_2}{2}(\text{tr } \mathbf{B}_{p_2(t)} - 3),\end{aligned}\quad (3.1)$$

kde μ_1, μ_2 jsou nezáporná čísla. Rychlosti produkce entropie jednotlivých složek položíme rovny

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)}, \\ \xi_2 &= \alpha_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_2 \mathbf{D}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)} \mathbf{D}_{p_2(t)},\end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ jsou nezáporná čísla, aby byla splněna druhá část (2.7). První členy odpovídají disipaci newtonské tekutiny, druhé členy způsobují viskoelastické chování. Pak celková rychlost produkce entropie je rovna ($\varepsilon_0 = \alpha_1 + \alpha_2$)

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \varepsilon_0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} + \varepsilon_2 \mathbf{D}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)} \mathbf{D}_{p_2(t)}. \quad (3.2)$$

Dle principu maxima rychlosti produkce entropie chceme tedy maximalizovat $\xi = \xi(\mathbf{D}, \mathbf{D}_{p_1(t)}, \mathbf{D}_{p_2(t)})$ vzhledem k proměnným \mathbf{D} , $\mathbf{D}_{p_1(t)}$ a $\mathbf{D}_{p_2(t)}$ a vzhledem k vazbám daným nestlačitelností $\text{tr } \mathbf{D} = \text{tr } \mathbf{D}_{p_1(t)} = \text{tr } \mathbf{D}_{p_2(t)} = 0$ a redukovanou termodynamickou nerovností (2.7). Upravujeme vazbu dosazením neo-Hookeova (3.1) materiálu

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = \xi &\Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \overline{(\rho\dot{\psi}_1 + \rho\dot{\psi}_2)} = \xi, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{\mu_1}{2} \text{tr } \overline{\mathbf{B}_{p_1(t)}} - \frac{\mu_2}{2} \text{tr } \overline{\mathbf{B}_{p_2(t)}} &= \xi, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mu_1(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mathbf{C}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)}) - \mu_2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)} - \mathbf{C}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_2(t)}) &= \xi. \end{aligned}$$

Na prvním řádku jsme užili nestlačitelnosti a na třetím provedli $\text{tr } \overline{\mathbf{B}_{p_1(t)}}$, resp. $\text{tr } \overline{\mathbf{B}_{p_2(t)}}$. Maximalizaci ξ provedeme pomocí teorie Lagrangeových multiplikátorů. Zavádíme pomocnou Lagrangeovu funkci

$$\begin{aligned} F(\mathbf{D}, \mathbf{D}_{p_1(t)}, \mathbf{D}_{p_2(t)}) &= \xi - \lambda_1 [\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mu_1(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mathbf{C}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)})] + \\ &+ \lambda_1 [\mu_2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)} - \mathbf{C}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_2(t)}) - \xi] - \\ &- \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} - \lambda_3 \mathbf{D}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{I} - \lambda_4 \mathbf{D}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{I}, \end{aligned}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ jsou odpovídající Lagrangeovy multiplikátory. Nutná podmínka pro lokální extrém ξ pak dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{T} - \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{I}, \\ \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}_{p_1(t)}} &= \mu_1 \mathbf{C}_{p_1(t)} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{I}, \\ \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}_{p_2(t)}} &= \mu_2 \mathbf{C}_{p_2(t)} + \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Dosadíme za ξ ze vztahu (3.2)

$$\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} 2\varepsilon_0 \mathbf{D} = \mathbf{T} - \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{I}, \quad (3.3)$$

$$\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} 2\varepsilon_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} = \mu_1 \mathbf{C}_{p_1(t)} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{I}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} 2\varepsilon_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} \mathbf{D}_{p_2(t)} = \mu_2 \mathbf{C}_{p_2(t)} + \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \mathbf{I}. \quad (3.5)$$

Provedením následující operace (máme na paměti vazby nestlačitelnosti)

$$(3.3) \cdot \mathbf{D} + (3.4) \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)} + (3.5) \cdot \mathbf{D}_{p_2(t)}$$

dostáváme rovnici

$$\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} 2\xi = \xi \Rightarrow \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1}{2}.$$

Provedením stopy na rovnice (3.3), (3.4) a (3.5) pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &= -\frac{1}{3} \operatorname{tr} (\mathbf{T} - \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}), \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_1} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)} - \mu_1 \operatorname{tr} \mathbf{C}_{p_1(t)}), \\ \frac{\lambda_4}{\lambda_1} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_2(t)} - \mu_2 \operatorname{tr} \mathbf{C}_{p_2(t)}). \end{aligned}$$

Nyní už z (3.3) známe konstitutivní rovnici pro tenzor napětí

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} + \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mu_1 (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{p_1(t)}) \mathbf{I} - \\ &\quad - \frac{1}{3} \mu_2 (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{p_2(t)}) \mathbf{I} = -p \mathbf{I} + \varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta, \end{aligned}$$

kde jsme označili $p = -\operatorname{tr} \mathbf{T}/3$. Rovnice (3.4) nám pak dává vztah pro Cauchyho-Greenův tenzor napětí $\mathbf{B}_{p_1(t)}$

$$\varepsilon_1 \left(\mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} - \frac{1}{3} (\mathbf{B}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right) = \mu_1 \left(\mathbf{C}_{p_1(t)} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{C}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right). \quad (3.6)$$

Nyní provedeme polární rozklad deformačního gradientu

$$\mathbf{F}_{p_1(t)} = \mathbf{R}_{p_1(t)} \mathbf{U}_{p_1(t)} = \mathbf{V}_{p_1(t)} \mathbf{R}_{p_1(t)}.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme izotropní materiál, můžeme předpokládat, že materiál je natočený správným směrem, a tedy $\mathbf{R}_{p_1(t)} = \mathbf{I}$. Pak je $\mathbf{F}_{p_1(t)} = \mathbf{U}_{p_1(t)} = \mathbf{V}_{p_1(t)}$ a $\mathbf{F}_{p_1(t)}$ je symetrický tenzor. Vynásobíme-li rovnici (3.6) zleva $\mathbf{F}_{p_1(t)}^{-\top}$ a zprava $\mathbf{F}_{p_1(t)}^\top$, dostaneme $(\operatorname{tr} \mathbf{C}_{p_1(t)} = \operatorname{tr} \mathbf{B}_{p_1(t)})$

$$\varepsilon_1 \left(\mathbf{F}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} \mathbf{F}_{p_1(t)}^\top - \frac{1}{3} (\mathbf{C}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right) = \mu_1 \left(\mathbf{F}_{p_1(t)} \mathbf{F}_{p_1(t)}^\top - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right).$$

Ze vztahu (2.2) pak dostáváme

$$\varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{p_1(t)}^\nabla - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b_1 \mathbf{D} \right) = \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta,$$

kde jsme označili $b_1 = \text{tr } \mathbf{B}_{p_1(t)}$. Stejným postupem upravíme (3.5). Nakonec dosazením do bilančních rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} &= \text{div } \mathbf{T} \Rightarrow \rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta), \\ \varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p_1(t)}^\delta - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b_1 \mathbf{D} \right) &= \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta, \\ 1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \frac{1}{3} b_1 \mathbf{I} \right), \quad (3.7) \\ \varepsilon_2 \left(-\frac{1}{2} \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p_2(t)}^\delta - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b_2 \mathbf{D} \right) &= \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta, \\ 1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta + \frac{1}{3} b_2 \mathbf{I} \right). \end{aligned}$$

Třetí (pátý) vztah obsahuje jen pět nezávislých rovnic, neboť stopa této rovnice je nulová. Musíme přidat další rovnice pro nestlačitelnost elastické odezvy. Celkem máme šestnáct neznámých, jedna je p , tři \mathbf{v} , dvě b_1, b_2 a deset $\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta, \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta$. A máme také šestnáct rovnic, tedy uzavřený systém, který můžeme řešit.

3.1.1 Model v dimenzi dvě

Nyní se podíváme, jak se výsledný systém zjednoduší, uvažujeme-li výše uvedený model jen ve dvou prostorových dimenzích. Informace týkající se dimenze prostoru se vyskytovala v deviatorické části tenzoru $\mathbf{B}_{p(t)}^\delta$. Postupujeme tedy stejně jako výše s tím rozdílem, že deviatorická část je definována

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \mathbf{B}_{p(t)} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{I}.$$

Vypočítejme nyní Oldroydovu derivaci deviatorické části, vzorec (2.1) zůstává stejný.

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)}^\delta &= \overset{\nabla}{\left(\mathbf{B}_{p(t)} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{I} \right)} = \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)} - \frac{1}{2} (\text{tr } \dot{\mathbf{B}}_{p(t)}) \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \overset{\nabla}{\mathbf{I}} = \\ &= -2 \mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)} \mathbf{F}_{p(t)}^\top - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{L} \mathbf{B}_{p(t)} + \mathbf{L}^\top \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{I} + \\ &\quad + \text{tr}(\mathbf{F}_{p(t)}^\top \mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)}) \mathbf{I} + (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{D} = \\ &= -2 \mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)} \mathbf{F}_{p(t)}^\top - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{I} + (\mathbf{C}_{p(t)} \cdot \mathbf{D}_{p(t)}) \mathbf{I} + (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)}) \mathbf{D}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Narozdíl od předchozího odvození mají Helmholtzovy energie tvar

$$\begin{aligned}\rho\psi_1 &= \frac{\mu_1}{2}(\text{tr } \mathbf{B}_{p_1(t)} - 2), \\ \rho\psi_2 &= \frac{\mu_2}{2}(\text{tr } \mathbf{B}_{p_2(t)} - 2).\end{aligned}$$

Rychlosti produkce entropie jednotlivých složek zůstávají stejné

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)}, \\ \xi_2 &= \alpha_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_2 \mathbf{D}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)} \mathbf{D}_{p_2(t)}.\end{aligned}$$

Rovnice (3.3), (3.4) a (3.5) zůstávají v platnosti, liší se až provedení stop na tyto rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\mathbf{T} - \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} - \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} \right), \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1 \mathbf{B}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)} - \mu_1 \text{tr } \mathbf{C}_{p_1(t)} \right), \\ \frac{\lambda_4}{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_2 \mathbf{B}_{p_2(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_2(t)} - \mu_2 \text{tr } \mathbf{C}_{p_2(t)} \right).\end{aligned}$$

Tensor napětí má pak tvar

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta,$$

kde $p = -\text{tr } \mathbf{T}/2$. Rovnice (3.4) dává po dosazení vztah pro Cauchyho-Greenův tenzor napětí

$$\varepsilon_1 \left(\mathbf{B}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right) = \mu_1 \left(\mathbf{C}_{p_1(t)} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{C}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right).$$

Užitím izotropie materiálu a násobením zleva $\mathbf{F}_{p_1(t)}^{-\text{T}}$ a zprava $\mathbf{F}_{p_1(t)}^{\text{T}}$ dostaneme

$$\varepsilon_1 \left(\mathbf{F}_{p_1(t)} \mathbf{D}_{p_1(t)} \mathbf{F}_{p_1(t)}^{\text{T}} - \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{p_1(t)} \cdot \mathbf{D}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right) = \mu_1 \left(\mathbf{F}_{p_1(t)} \mathbf{F}_{p_1(t)}^{\text{T}} - \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{B}_{p_1(t)}) \mathbf{I} \right).$$

Použitím (3.8) dostáváme

$$\varepsilon_1 \left(-\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p_1(t)}^\delta - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta) \mathbf{I} + b_1 \mathbf{D} \right) = 2\mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta,$$

kde $b_1 = \text{tr } \mathbf{B}_{p_1(t)}$. Stejným postupem upravíme (3.5) a dosazením do bilančních rovnic získáme nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi ve dvourozměrném prostoru

$$\begin{aligned}
\text{div } \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla p + \text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta), \\
\varepsilon_1 \left(-\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p_1(t)}^\delta - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta) \mathbf{I} + b_1 \mathbf{D} \right) &= 2\mu_1 \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta, \\
1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{I} \right), \\
\varepsilon_2 \left(-\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p_2(t)}^\delta - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta) \mathbf{I} + b_2 \mathbf{D} \right) &= 2\mu_2 \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta, \\
1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{I} \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Jednoduchost tohoto systému spočívá v tom, že vektory, resp. matice mají velikost 2, resp. 2×2 . Narozdíl od trojrozměrného případu zde máme jen 11 rovnic, které je třeba řešit. Navíc rovnice pro nestlačitelnost elastické odezvy můžeme snadno eliminovat. Tyto rovnice představují kvadratické rovnice pro b_1 , resp. b_2 . Jejich jednoduché řešení můžeme tedy dosadit do zbývajících rovnic, a tak získat systém s pouze 9 rovnicemi.

3.2 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací

Výše popsané modely snadno zjednodušíme, budeme-li uvažovat jen jednu přirozenou konfiguraci systému jako na obr. 2.2. Odvození tohoto modelu je stejné, jen máme jednu složku materiálu. Volná energie a rychlost produkce entropie mají tvar

$$\begin{aligned}
\rho \psi &= \frac{\mu}{2} (\text{tr } \mathbf{B}_{p(t)} - 3), \\
\xi &= \varepsilon_0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\mu, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \geq 0$.

Rovnice popisující tento model pak mají tvar

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla p + \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu \mathbf{B}_{p(t)}^\delta), \\
\varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)}^\delta - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) &= \mu \mathbf{B}_{p(t)}^\delta, \\
1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

kde $b = \operatorname{tr} \mathbf{B}_{p(t)}$ a \mathbf{D} je symetrická část gradientu rychlosti.

3.2.1 Model v dimenzi dvě

Úprava pro model fungující ve dvou prostorových dimenzích je stejná jako výše popsaná úprava pro systém se dvěma přirozenými konfiguracemi. Model má pak tvar

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla p + \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{B}_{p(t)}^\delta), \\
\varepsilon_1 \left(-\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_{p(t)}^\delta - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^\delta) \mathbf{I} + b \mathbf{D} \right) &= 2\mu_1 \mathbf{B}_{p(t)}^\delta, \\
1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{2} b \mathbf{I} \right),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

kde $b = \operatorname{tr} \mathbf{B}_{p(t)}$ a \mathbf{D} je symetrická část gradientu rychlosti.

3.2.2 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonztantním koeficientem

Nyní uvažujme nelineární model s jednou přirozenou konfigurací (3.11) modifikovaný o viskózní koeficient závislý na prvním invariantu deformačního gradientu podle vztahu

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1], \tag{3.13}$$

který byl použit např. v pracích [13] a [14]. Koeficienty N , m jsou reálná čísla a $\bar{\varepsilon}_1, N \geq 0$. Pak rychlost produkce entropie má tvar

$$\xi = \varepsilon_0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1] \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)}. \tag{3.14}$$

Rychlost produkce entropie ξ musí být objektivní izotropní funkce, a tedy invariantní vůči grupě ortogonálních transformací. Předpokládejme nyní pro jednoduchost, že neobsahuje první člen odpovídající newtonské disipaci. Pak skalární funkce ξ dvou tenzorů $\mathbf{B}_{p(t)}$, $\mathbf{D}_{p(t)}$ je invariantní vůči grupě ortogonálních transformací, pokud lze vyjádřit jako funkce invariantů těchto tenzorů a jejich součinů, tj.

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{B}_{p(t)}, \mathbf{D}_{p(t)}) = f(\text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}), \text{tr}(\mathbf{D}_{p(t)}), \text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}^2), \text{tr}(\mathbf{D}_{p(t)}^2), \\ \text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}\mathbf{D}_{p(t)}), \text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}^2\mathbf{D}_{p(t)}), \text{tr}(\mathbf{D}_{p(t)}^2\mathbf{B}_{p(t)}), \dots). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Výše uvedeně tvrzení a více podrobností o objektivitě lze nalézt např. v dodatku C v [15]. V našem případě má rychlost produkce entropie tvar

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{B}_{p(t)}, \mathbf{D}_{p(t)}) = \bar{\varepsilon}_1 [N(\text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}) - 3)^m + 1] \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)} = \\ = \bar{\varepsilon}_1 [N(\text{tr}(\mathbf{B}_{p(t)}) - 3)^m + 1] \text{tr}(\mathbf{D}_{p(t)}^2 \mathbf{B}_{p(t)}) \end{aligned}$$

a ξ je tedy speciální případ (3.15) a volba (3.14) je tedy přípustná.

3.3 Oldroydův model

Předpokládejme, že $\mathbf{F}_{p(t)}$ popisuje malé elastické odezvy nestlačitelného materiálu, tj.

$$\mathbf{F}_{p(t)} = \mathbf{I} + \mathbf{X}, \quad \|\mathbf{X}\| = \varepsilon \ll 1. \quad (3.16)$$

Pak $\mathbf{B}_{p(t)}$ a $\mathbf{C}_{p(t)}$ mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{F}_{p(t)}^T = \mathbf{I} + \mathbf{X} + \mathbf{X}^T + O(\varepsilon^2) \approx \mathbf{I} + 2\mathbf{A}, \\ \mathbf{C}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)}^T \mathbf{F}_{p(t)} \approx \mathbf{I} + 2\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde \approx znamená zanedbání členů druhého a vyššího řádu. Elastická odezva je nestlačitelná, tj. $\det \mathbf{F}_{p(t)} = 1$ a provedeme-li Taylorův rozvoj determinantu, získáme

$$1 = \det \mathbf{F}_{p(t)} = 1 + \text{tr} \mathbf{A} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \text{tr} \mathbf{A} = 0.$$

Dosazením z (3.17) do redukované termodynamické nerovnosti (2.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} + \mu \mathbf{C}_{p(t)} \cdot \mathbf{D}_{p(t)} &= \xi, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mu \mathbf{D} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{A}) + \mu \mathbf{D}_{p(t)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{A}) &= \xi, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} + 2\mu \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{A} &= \xi, \end{aligned}$$

kde jsme použili nestlačitelnost ($\text{tr } \mathbf{D} = \text{tr } \mathbf{D}_{p(t)} = 0$). Rychlost produkce entropie (3.10) má v tomto případě tvar

$$\xi = \varepsilon_0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p(t)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{A}) \mathbf{D}_{p(t)}.$$

Nyní budeme jako výše maximalizovat ξ vzhledem k vazbám termodynamické nerovnosti a nestlačitelnosti. Pokud tento postup provedeme, dostaneme konstitutivní rovnice pro tenzor napětí

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T})\mathbf{I} - \frac{2}{3}(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{I} + \varepsilon_0 \mathbf{D} + 2\mu \mathbf{A} = -p\mathbf{I} + \varepsilon_0 \mathbf{D} + 2\mu \mathbf{A}, \\ \varepsilon_1 (\mathbf{I} + 2\mathbf{A}) \mathbf{D}_{p(t)} &= 2\mu \mathbf{A} + \frac{2}{3}\varepsilon_1 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I} - \frac{2}{3}(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{I} = \\ &= 2\mu \mathbf{A} + \frac{2}{3}\varepsilon_1 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde $p = -\text{tr } \mathbf{T}/3$. Nyní z (3.16) a (3.17) dosadíme do (2.2) a s užitím izotropie ($\mathbf{F}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)}^T$) dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \overset{\nabla}{(\mathbf{I} + 2\mathbf{A})^\delta} &= \overset{\nabla}{\mathbf{B}_{p(t)}^\delta} = -2(\mathbf{I} + \mathbf{X})\mathbf{D}_{p(t)}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) - \frac{2}{3}(\mathbf{D} \cdot 2\mathbf{A})\mathbf{I} + \\ &+ \frac{2}{3}(2\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I} + 2\mathbf{D} = \\ &= -2(\mathbf{D}_{p(t)} + 2\mathbf{A}\mathbf{D}_{p(t)}) - \frac{4}{3}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})\mathbf{I} + \frac{4}{3}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{p(t)})\mathbf{I} + 2\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Dosazením do (3.18) dostaneme

$$2\mu \mathbf{A} + \varepsilon_1 \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = 2\varepsilon_1 \mathbf{D} - \frac{2}{3}\varepsilon_1 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})\mathbf{I}.$$

Zanedbáme-li poslední člen předchozí rovnice, dostaneme známý model pro viskoelastický materiál – Oldroyd-B

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \varepsilon_0 \mathbf{D} + G\mathbf{A}, \\ \mathbf{A} + \tau \overset{\nabla}{\mathbf{A}} &= 2\tau \mathbf{D}, \end{aligned}$$

kde jsme označili $G = 2\mu \geq 0$ a $\tau = \varepsilon_1/(2\mu) \geq 0$. Tento lineární model se nazývá Oldroyd-B a parametr τ má význam relaxačního času. Spolu s bilancí hmoty a bilancí hybnosti tvoří uzavřený systém

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla p + \text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{D} + G\mathbf{A}), \\ \mathbf{A} + \tau \overset{\nabla}{\mathbf{A}} &= 2\tau \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Model v dimenzi dvě popisují stejné rovnice.

3.4 Burgersův model

Provedeme-li analogicky linearizaci nelineárního modelu se dvěma konfiguracemi, dostaneme Burgersův model. Náznak jejího postupu lze nalézt v [7]¹. Burgersův model má pak tvar

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla p + \operatorname{div}(\mathbf{A}), \\ \mathbf{A} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{A}} + \lambda_2 \overset{\nabla\nabla}{\mathbf{A}} &= \eta_1 \mathbf{D} + \eta_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}},\end{aligned}\tag{3.20}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2 \geq 0$ jsou viskózní koeficienty. Model v dimenzi dvě popisují stejné rovnice.

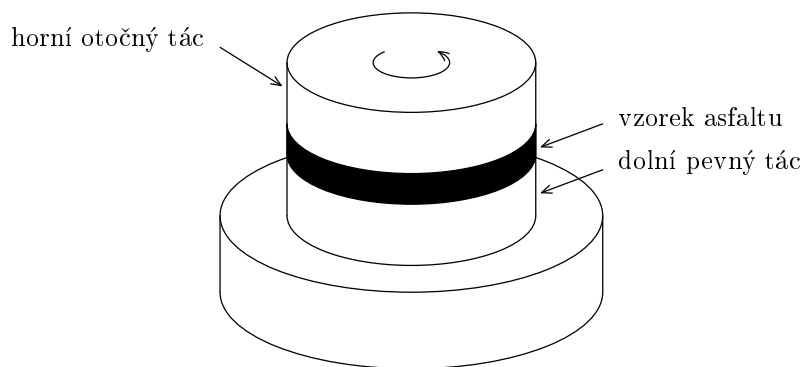
¹Autorovi se bohužel nepodařilo dle uvedeného článku redukovat nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi na lineární Burgersův model.

Kapitola 4

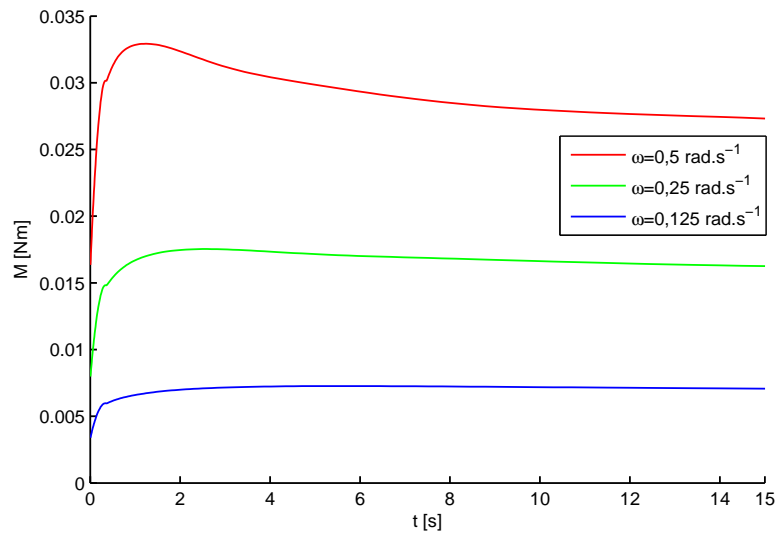
Popis experimentu

Experiment s asfaltem prováděl Dr. J. Murali Krishnan v Indian Institute of Technology v Madrasu [16]. Experiment byl prováděn pomocí dynamického viskozimetru (viz obr. 4.1). Toto zařízení má tvar válce skládajícího se ze dvou táčů. Spodní táč je pevně usazen a nehýbe se, horní se otáčí. Mezi tyto táčy je na počátku umístěn kulový vzorek asfaltu a stlačen na tvar válce, přesahující materiál je odstraněn. Poté se nechá vzorek zrelaxovat při dané teplotě. V čase $t = 0$ se začne horní táč otáčet konstantní úhlovou rychlostí ω a pro čas $t \in [0 \text{ s}, 15 \text{ s}]$ je na něm měřen moment síly potřebný k udržení této konstantní úhlové rychlosti. Výška vzorku je 1 mm a je udržována po celou dobu trvání experimentu. Průměr táčů je 8 mm.

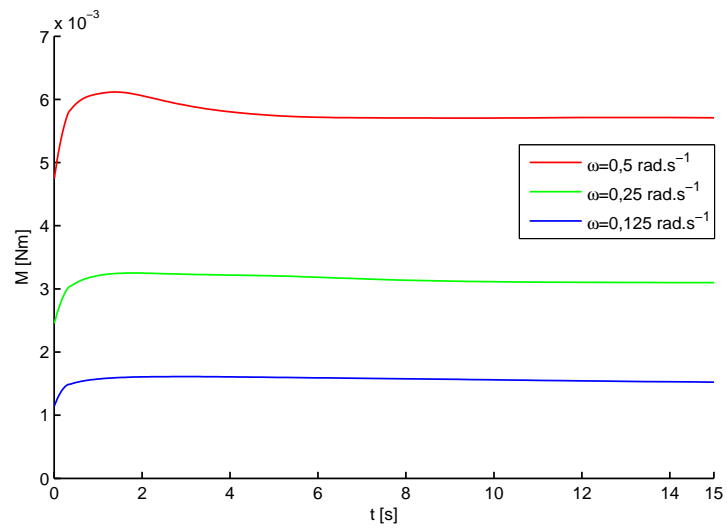
Experiment byl prováděn pro tři různé úhlové rychlosti $\omega = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$, $0,25 \text{ rad.s}^{-1}$, $0,125 \text{ rad.s}^{-1}$ a dvě různé teploty 25°C a 35°C . Při teplotě 25°C jsou momenty sil přibližně o řád vyšší než při teplotě 35°C .



Obrázek 4.1: Schéma viskozimetru



Obrázek 4.2: Experimentální data, závislost momentu sil na čase, $25\text{ }^{\circ}\text{C}$



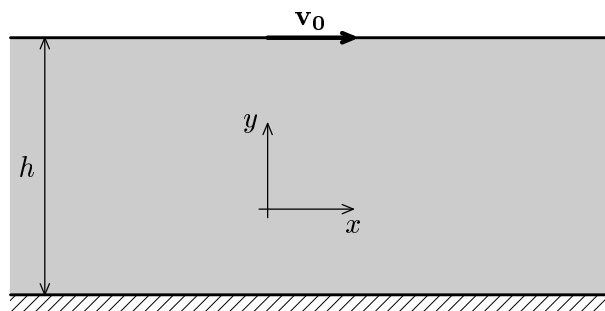
Obrázek 4.3: Experimentální data, závislost momentu sil na čase, $35\text{ }^{\circ}\text{C}$

Kapitola 5

Simulace problému v rovinné geometrii

Provedení experimentu s otáčením dvou válců je určitě snadnější než experiment, ve kterém by se posouvaly dvě (nekonečně dlouhé) rovnoběžné desky. Naopak z matematického pohledu řídicích rovnic je rovinná geometrie mezi deskami jednodušší než v případě válcových souřadnic. Z tohoto důvodu jsme předpokládali, že experimentální data byla získána v takovém experimentu. Simulace ve 2D nám pomůže indikovat, které modely jsou dobré, a může nám prozradit informace užitečné pro simulaci ve válci.

Nyní si popíšeme experiment s rovnoběžnými deskami. Spodní deska je v klidu, horní deska se začne v čase $t = 0$ pohybovat doprava rychlostí v_0 a experimentátor měří sílu potřebnou k udržení této konstantní rychlosti v_0 . Desky jsou vzdálené od sebe $h = 1$ mm.



Obrázek 5.1: Pohyb desek

Materiál považujeme za homogenní nestlačitelnou viskoelastickou tek-

tinu. Pro tuto tekutinu použijeme modely odvozené ve třetí kapitole. Nejdříve použijeme lineární modely, pak modely nelineární. Síla potřebná k udržení konstantní síly je úměrná složce tenzoru napětí T_{xy} . Hledáme takové parametry modelu, aby se vypočítaná síla co nejvíce shodovala s experimentálními daty při teplotě 35 °C a úhlové rychlosti 0,5 rad.s⁻¹.

Problém řešíme ve dvourozměrném euklidovském prostoru. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny veličiny závisí pouze na y a t . Rychlost tekutiny $\mathbf{v} = (v_x, 0)$ má nenulovou pouze složku ve směru osy x . Začneme od jednodušších modelů.

5.1 Oldroyd-B

5.1.1 Stacionární řešení

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = (v_x(y), 0), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx}(y) & A_{xy}(y) \\ A_{xy}(y) & A_{yy}(y) \end{pmatrix}.$$

Dosazením¹ do modelu (3.19) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} + GA_{xy} \right), & (5.1) \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ A_{xx} &= 2\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) A_{xy}, \\ A_{xy} &= \tau \frac{\partial v_x}{\partial y}, & (5.2) \\ A_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením (5.2) do (5.1) zjistíme, že v_x je lineární funkcí y a z podmínek $v_x(0) = 0$ a $v_x(h) = v_0$ plyne, že $v_x = v_0 y/h$.

5.1.2 Nestacionární řešení

$$p = p(y, t), \quad \mathbf{v} = (v_x(y, t), 0), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx}(y, t) & A_{xy}(y, t) \\ A_{xy}(y, t) & A_{yy}(y, t) \end{pmatrix}.$$

Navíc máme počáteční podmínky $v_x(t = 0) = 0$ a $\mathbf{A}(t = 0) = \mathbf{0}$, $\forall y \in [0, h]$.

¹Tvar diferenciálních operátorů v kartézských souřadnicích naleznete v příloze A.1.

Dosažením do modelu (3.19) dostaneme

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} + G A_{xy} \right), \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ A_{xx} + \tau \frac{\partial A_{xx}}{\partial t} &= 2\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) A_{xy}, \\ A_{xy} + \tau \frac{\partial A_{xy}}{\partial t} &= \tau \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\ A_{yy} &= 0.\end{aligned}$$

Tyto rovnice nelze řešit analyticky, přesto, když aproximujeme rychlost proudění řešením stacionárního problému

$$v_x = v_0(t) \frac{y}{h}$$

a zanedbáme $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$, pak dostaneme pro A_{xy} rovnice

$$\begin{aligned}0 &= G \frac{\partial A_{xy}}{\partial y}, \\ A_{xy} + \tau \frac{\partial A_{xy}}{\partial t} &= \tau \frac{v_0}{h}.\end{aligned}$$

Spolu s počáteční podmínkou je řešení této rovnice

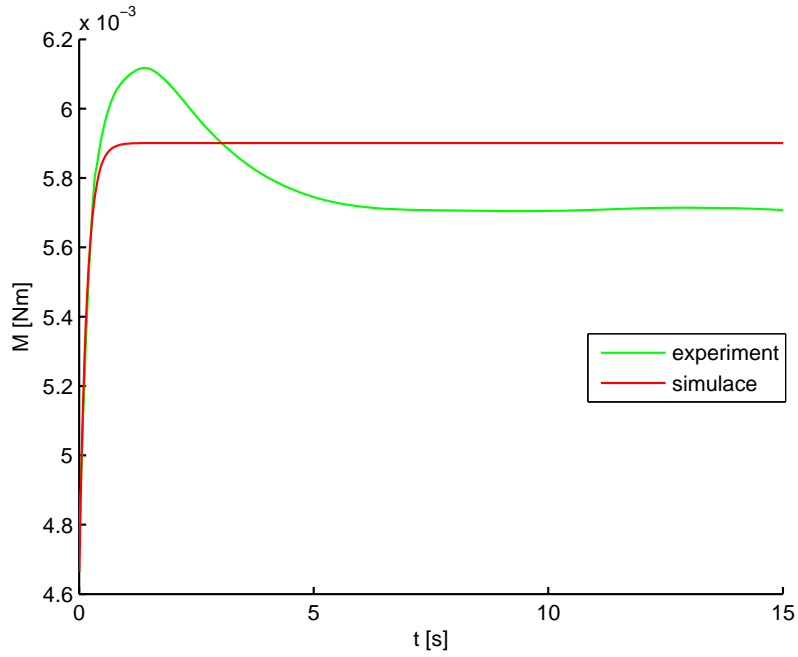
$$A_{xy} = \frac{v_0 \tau}{h} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Pro tenzor napětí pak máme vztah

$$T_{xy} = \frac{\varepsilon_0 v_0}{h} + G \frac{v_0 \tau}{h} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Nejvhodnější koeficienty ε_0, G, τ jsou nalezeny v Matlabu metodou nejmenších čtverců použitím funkce `fitoptions`. Pro podrobnosti ohledně funkcí Matlabu viz [17]. Zelená barva označuje experimentální data, červená barva simulaci.

Vidíme, že Oldroydův model není schopen zachytit tento experiment.



Obrázek 5.2: Simulace vs. experiment
 $\varepsilon_0 = 9,24 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $G = 1,62 \cdot 10^{-5}$ Pa, $\tau = 0,16$ s.

5.2 Burgers

5.2.1 Stacionární řešení

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = (v_x(y), 0), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx}(y) & A_{xy}(y) \\ A_{xy}(y) & A_{yy}(y) \end{pmatrix}.$$

Dosazením do modelu (3.20) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A_{xy}}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ A_{xx} &= 2\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) A_{xy} - \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$A_{xy} = \frac{\eta_1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (5.4)$$

$$A_{yy} = 0.$$

Dosazením (5.4) do (5.3) zjistíme, že v_x je lineární funkcí y a z podmínek $v_x(0) = 0$ a $v_x(h) = v_0$ plyne, že $v_x = v_0 y/h$.

5.2.2 Nestacionární řešení

$$p = p(y, t), \quad \mathbf{v} = (v_x(y, t), 0), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx}(y, t) & A_{xy}(y, t) \\ A_{xy}(y, t) & A_{yy}(y, t) \end{pmatrix}.$$

Navíc máme počáteční podmínky, v čase $t = 0$ je $v_x = 0$ a $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\partial \mathbf{A} / \partial t = \mathbf{0}$, $\forall y \in [0, h]$. Dosazením do modelu (3.20) dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial A_{xy}}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ A_{xx} + \lambda_1 \frac{\partial A_{xx}}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial t^2} &= 2\lambda_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) A_{xy} + 4\lambda_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial A_{xy}}{\partial t} + \\ &\quad + 2\lambda_2 \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial t} \right) A_{xy} - \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2, \\ A_{xy} + \lambda_1 \frac{\partial A_{xy}}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial t^2} &= \frac{\eta_1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\eta_2}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial t}, \\ A_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice nelze řešit analyticky, aproximujeme proto rychlost proudění řešením stacionárního problému

$$v_x = v_0(t) \frac{y}{h}$$

a zanedbáme $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$, pak dostaneme pro A_{xy} rovnice

$$0 = \frac{\partial A_{xy}}{\partial y},$$

$$A_{xy} + \lambda_1 \frac{\partial A_{xy}}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial t^2} = \frac{\eta_1 v_0}{2h}.$$

Spolu s počátečními podmínkami je řešení této rovnice

$$A_{xy} = \frac{\eta_1 v_0}{2h} \left[1 + e^{At} \left(\frac{A}{B} \sinh(Bt) - \cosh(Bt) \right) \right],$$

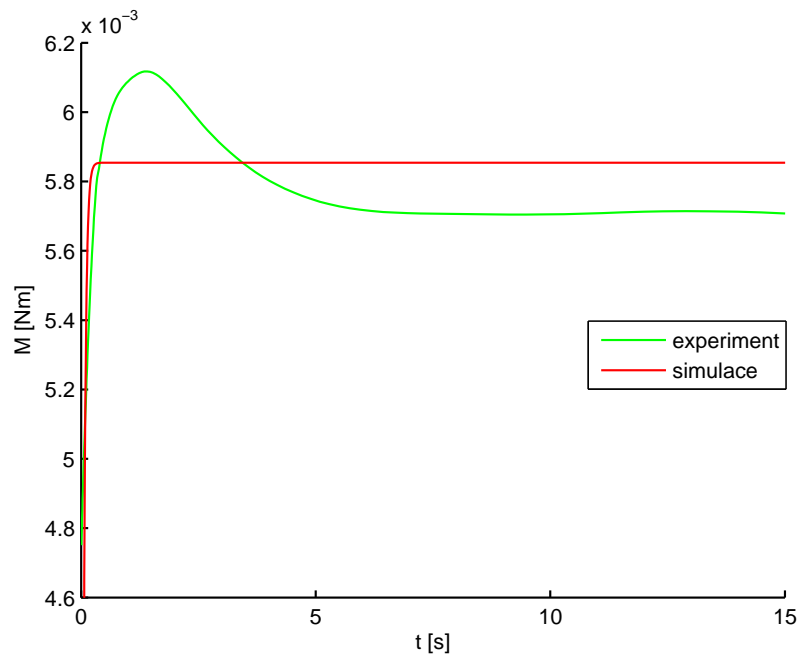
kde

$$A = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}, \quad B = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2\lambda_2}.$$

Pro tenzor napětí máme v tomto případě stejný vztah jako pro složku A_{xy}

$$T_{xy} = A_{xy} = \frac{\eta_1 v_0}{2h} \left[1 + e^{At} \left(\frac{A}{B} \sinh(Bt) - \cosh(Bt) \right) \right].$$

Nejvhodnější koeficienty η_1 , A , B nalezneme opět metodou nejmenších čtverců (koeficient η_2 není možné tímto experimentem určit).



Obrázek 5.3: Simulace vs. experiment
 $\eta_1 = 2,34 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $A = -523$, $B = 499$.

Jak je z obr. 5.3 patrné, ani Burgersův model není schopen dobře zachytit tento experiment.

5.3 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací

5.3.1 Stacionární řešení

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = (v_x(y), 0), \quad b = b(y), \quad \mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{xx}(y) & B_{xy}(y) \\ B_{xy}(y) & -B_{xx}(y) \end{pmatrix}.$$

Dosazením do modelu (3.12) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu B_{xy} \right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu B_{xy}), \\ 2\mu B_{xx} &= \varepsilon_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{xy}, \\ 2\mu B_{xy} &= \varepsilon_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(-B_{xx} + \frac{b}{2} \right), \\ b^2 &= 4(1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2). \end{aligned}$$

Označme

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2\mu} \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

pak řešení posledních tří rovnic je

$$B_{xy} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad B_{xx} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad b = 2\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Dosazením do první rovnice dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \mu \alpha + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}},$$

kde C je konstanta a my hledáme $\alpha(y)$. Na levé straně rovnice je konstanta, a tedy α musí být stejné pro všechna y , jinak řečeno α nezávisí na y , a tedy v_x je lineární funkcí y . Z okrajových podmínek dostáváme

$$v_x = \frac{v_0 y}{h}.$$

5.3.2 Nestacionární řešení

$$p = p(y, t), \quad \mathbf{v} = (v_x(y, t), 0), \quad b = b(y, t),$$

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{xx}(y, t) & B_{xy}(y, t) \\ B_{xy}(y, t) & -B_{xx}(y, t) \end{pmatrix}.$$

Navíc máme počáteční podmínky, v čase $t = 0$ je $v_x = 0$ a $\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \mathbf{0}$, $b = 2$, $\forall y \in [0, h]$. Dosazením do modelu (3.12) dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu B_{xy} \right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu B_{xy}), \\ \frac{\partial B_{xx}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{xy}, \\ \frac{\partial B_{xy}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{xy} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(B_{xx} - \frac{b}{2} \right), \\ b^2 &= 4(1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2). \end{aligned}$$

Tyto rovnice nelze řešit analyticky, aproximujeme rychlost proudění řešením stacionárního problému

$$v_x = v_0(t) \frac{y}{h}$$

a zanedbáme $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$, pak dostaneme pro B_{xy} rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial B_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_{xx}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{xx} + \frac{v_0}{h} B_{xy}, \\ \frac{\partial B_{xy}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{xy} - \frac{v_0}{h} \left(B_{xx} - \sqrt{1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2} \right), \end{aligned}$$

a tedy B_{xy} nezávisí na y . Máme tedy soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic, kde neznáme závisí na čase t . Tu řešíme v Matlabu Rungeho-Kuttovou metodou čtvrtého řádu pomocí funkce `ode45`. Řešení soustavy B_{xy} je závislé na poměru koeficientů μ/ε_1 , z něj vypočítáme složku tenzoru napětí

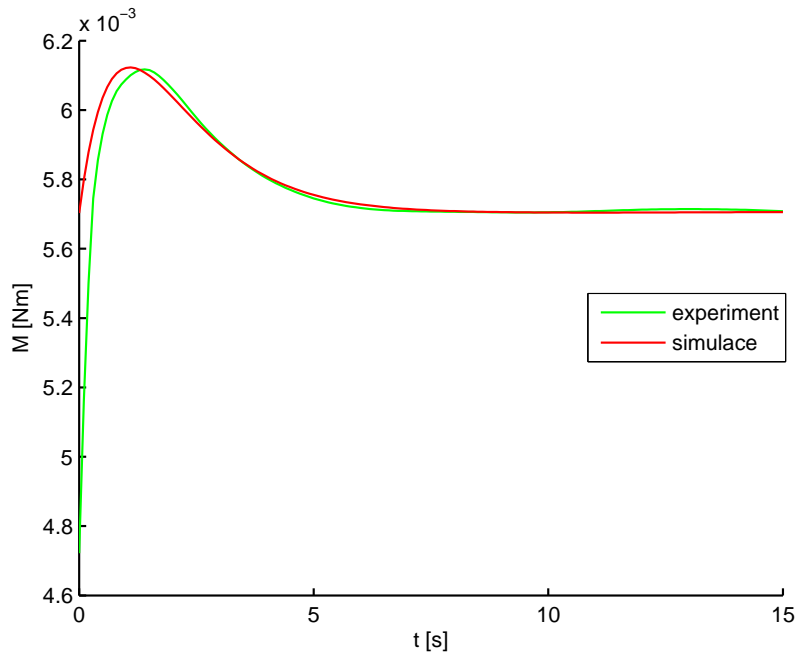
$$T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, t) = \frac{\varepsilon_0 v_0}{2h} + \mu B_{xy}(\mu/\varepsilon_1, t).$$

Dále zavedeme skalární funkci jako L^1 , resp. L^2 normu rozdílu experimentálních dat a výpočtu

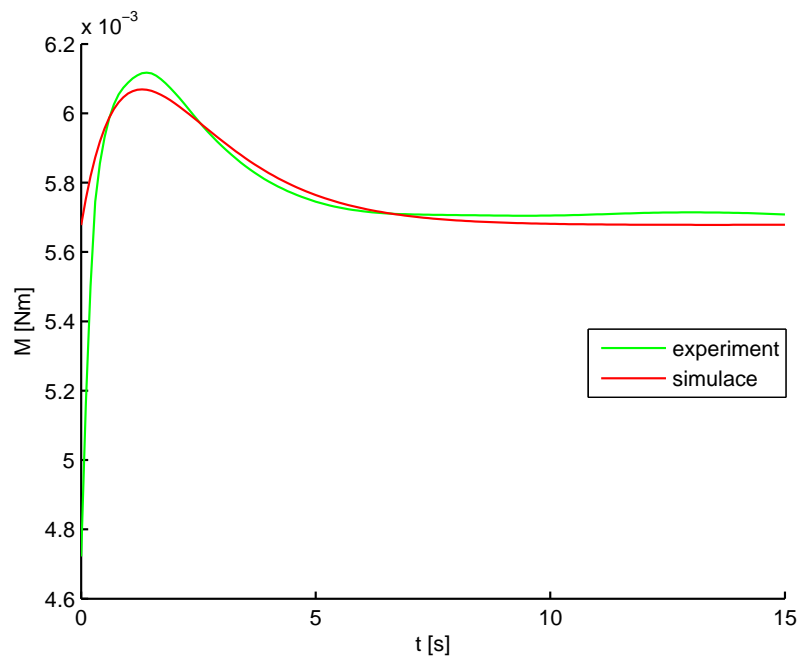
$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu) = \left(\int_0^T |e(t) - T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, t)|^n dt \right)^{1/n}, \quad n = 1, 2,$$

kde $e(t)$ jsou experimentální data a $T=15$ s. Hledáme takové $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu$, aby g byla co nejmenší. K minimalizaci g použijeme v Matlabu funkci `fminsearch`. Minimalizací g pak dostáváme parametry, které dosadíme do T_{xy} . Porovnání vypočtené složky tenzoru napětí a experimentálních dat vidíme na obr. 5.4, resp. 5.5.

Lepší výsledek nám poskytuje L^1 norma, ačkoli L^2 norma, a tedy i prostor L^2 funkcí má lepší analytické vlastnosti. Nelineární model s jednou konfigurací je schopen celkem pěkně zachytit experiment.



Obrázek 5.4: Simulace vs. experiment, L^1 norma, $\varepsilon_0 = 2,28 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 4,55 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu = 2,10 \cdot 10^{-6}$ Pa



Obrázek 5.5: Simulace vs. experiment, L^2 norma,
 $\varepsilon_0 = 2,27 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 4,24 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu = 1,64 \cdot 10^{-6}$ Pa

5.4 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonztantním koeficientem

5.4.1 Stacionární řešení

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = (v_x(y), 0), \quad b = b(y), \quad \mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{xx}(y) & B_{xy}(y) \\ B_{xy}(y) & -B_{xx}(y) \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do modelu (3.12) spolu s (3.13) upraveným pro dvourozměrný případ

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1] \quad (5.5)$$

a dostaneme

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu B_{xy} \right), \quad (5.6)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu B_{xy}),$$

$$2\mu B_{xx} = \bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1] \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{xy},$$

$$2\mu B_{xy} = \bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1] \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(-B_{xx} + \frac{b}{2} \right),$$

$$b^2 = 4(1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2).$$

Označme

$$\alpha = \frac{\bar{\varepsilon}_1}{2\mu} \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

pak poslední tři rovnice jsou algebraické rovnice pro šest proměnných B_{xx} , B_{xy} , b , α , m , N . Najdeme řešení pro B_{xx} , B_{xy} , b jako funkci α , m , N , tj.

$$B_{xy} = f_1(\alpha, m, N), \quad B_{xx} = f_2(\alpha, m, N), \quad b = f_3(\alpha, m, N),$$

kde f_1, f_2, f_3 jsou nelineární funkce v proměnné α . Dosazením do rovnice (5.6) dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\bar{\varepsilon}_1} \mu \alpha + \mu f_1(\alpha, m, N),$$

kde C, m, N jsou konstanty a my hledáme $\alpha(y)$. Pravá strana rovnice musí být tedy stále konstantní. Vzhledem k tomu, že f_1 není lineární v α , musí být α také konstanta, tedy α nezávisí na y , a tedy v_x je lineární funkcí y . Z okrajových podmínek dostáváme

$$v_x = \frac{v_0 y}{h}.$$

5.4.2 Nestacionární řešení

$$p = p(y, t), \quad \mathbf{v} = (v_x(y, t), 0), \quad b = b(y, t),$$

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{xx}(y, t) & B_{xy}(y, t) \\ B_{xy}(y, t) & -B_{xx}(y, t) \end{pmatrix}.$$

Navíc máme počáteční podmínky, v čase $t = 0$ je $v_x = 0$ a $\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \mathbf{0}$, $b = 2$, $\forall y \in [0, h]$. Dosazením do modelu (3.12) spolu s (5.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu B_{xy} \right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu B_{xy}), \\ \frac{\partial B_{xx}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1]} B_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{xy}, \\ \frac{\partial B_{xy}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1]} B_{xy} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(B_{xx} - \frac{b}{2} \right), \\ b^2 &= 4(1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2). \end{aligned}$$

Tyto rovnice nelze řešit analyticky, aproximujeme rychlost proudění řešením stacionárního problému

$$v_x = v_0(t) \frac{y}{h}$$

a zanedbáme $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$, pak dostaneme pro B_{xy} rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial B_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_{xx}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1]} B_{xx} + \frac{v_0}{h} B_{xy}, \\ \frac{\partial B_{xy}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\bar{\varepsilon}_1 [N(b-2)^m + 1]} B_{xy} - \frac{v_0}{h} \left(B_{xx} - \sqrt{1 + B_{xx}^2 + B_{xy}^2} \right), \end{aligned}$$

a tedy B_{xy} nezávisí na y . Máme tedy soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic na čase t . Řešení soustavy B_{xy} je závislé na poměru koeficientů μ/ε_1 a m, N , z něj vypočítáme složku tenzoru napětí

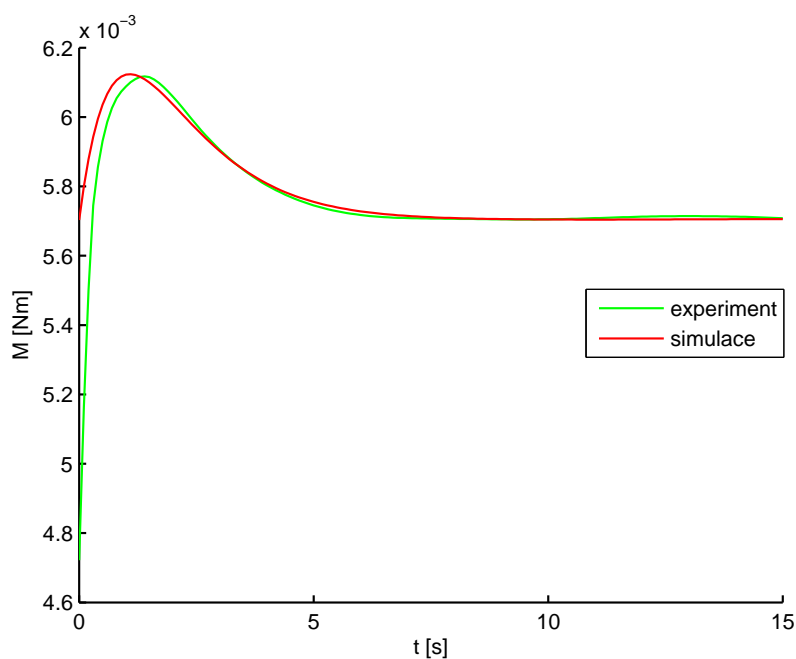
$$T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, m, N, t) = \frac{\varepsilon_0 v_0}{2h} + \mu B_{xy}(\mu/\varepsilon_1, m, N, t).$$

Dále zavedeme skalární funkci jako L^1 , resp. L^2 normu rozdílu experimentálních dat a výpočtu

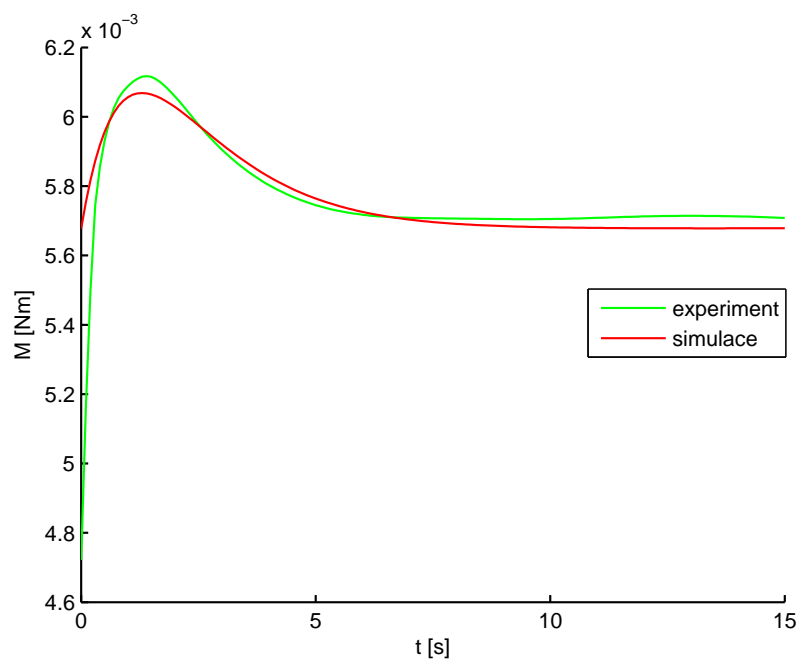
$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, m, N) = \left(\int_0^T |e(t) - T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, m, N, t)|^n dt \right)^{1/n}, \quad n = 1, 2,$$

kde $e(t)$ jsou experimentální data a $T=15$ s. Hledáme takové $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, m, N$, aby g byla co nejmenší. Minimalizací g pak dostáváme parametry, které dosadíme do T_{xy} . Porovnáním vypočtené složky tenzoru napětí a experimentálních dat vidíme na obr. 5.6, resp. 5.7.

Výsledek se téměř neliší od modelu s konstantními nezávislými koeficienty, řešení závisí málo na parametrech m, N . Ovšem tento model není horší, ani být nemůže, neboť pro $N = 0$ se stává koeficient konstantním. Lepší výsledek nám opět poskytuje L^1 norma.



Obrázek 5.6: Simulace vs. experiment, L^1 norma,
 $\varepsilon_0 = 2,28 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 4,53 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu = 2,09 \cdot 10^{-6}$ Pa,
 $m = -0,90$, $N = 4,52$.



Obrázek 5.7: Simulace vs. experiment, L^2 norma,
 $\varepsilon_0 = 2,27 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 4,23 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu = 1,63 \cdot 10^{-6}$ Pa,
 $m = -1,06$, $N = 5,87$.

5.5 Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi

5.5.1 Stacionární řešení

$$p = p(y), \quad \mathbf{v} = (v_x(y), 0), \quad b_1 = b_1(y), \quad b_2 = b_2(y),$$

$$\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{1xx}(y) & B_{1xy}(y) \\ B_{1xy}(y) & -B_{1xx}(y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{2xx}(y) & B_{2xy}(y) \\ B_{2xy}(y) & -B_{2xx}(y) \end{pmatrix}.$$

Dosazením do modelu (3.9) dostaneme

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu_1 B_{1xy} + \mu_2 B_{2xy} \right),$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu_1 B_{1xy} + \mu_2 B_{2xy}),$$

$$2\mu_i B_{ixx} = \varepsilon_i \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{ixy},$$

$$2\mu_i B_{ixy} = \varepsilon_i \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(-B_{ixx} + \frac{b_i}{2} \right),$$

$$b_i^2 = 4(1 + B_{ixx}^2 + B_{ixy}^2), \quad i = 1, 2.$$

Označme

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i}{2\mu_i} \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

pak řešení posledních tří rovnic je

$$B_{ixy} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{1 + \alpha_i^2}}, \quad B_{ixx} = \frac{\alpha_i^2}{\sqrt{1 + \alpha_i^2}}, \quad b_i = 2\sqrt{1 + \alpha_i^2}.$$

Dosazením do první rovnice dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} \mu \alpha_i + \mu_1 \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} + \mu_2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}}.$$

Na levé straně rovnice je konstanta C , a tedy α_i nezávisí na y , a tedy v_x je lineární funkcí y . Z okrajových podmínek dostáváme

$$v_x = \frac{v_0 y}{h}.$$

5.5.2 Nestacionární proudění

$$p = p(y, t), \quad \mathbf{v} = (v_x(y, t), 0), \quad b_1 = b_1(y, t), \quad b_2 = b_2(y, t),$$

$$\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{1xx}(y, t) & B_{1xy}(y, t) \\ B_{1xy}(y, t) & -B_{1xx}(y, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{2xx}(y, t) & B_{2xy}(y, t) \\ B_{2xy}(y, t) & -B_{2xx}(y, t) \end{pmatrix}.$$

Navíc máme počáteční podmínky, v čase $t = 0$ je $v_x = 0$ a $\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta = \mathbf{0}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2 \forall y \in [0, h]$. Dosazením do modelu (3.9) dostaneme

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \mu_1 B_{1xy} + \mu_2 B_{2xy} \right),$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (p + \mu_1 B_{1xy} + \mu_2 B_{2xy}),$$

$$\frac{\partial B_{ixx}}{\partial t} = -\frac{2\mu_i}{\varepsilon_i} B_{ixx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} B_{ixy},$$

$$\frac{\partial B_{ixy}}{\partial t} = -\frac{2\mu_i}{\varepsilon_i} B_{ixy} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(B_{ixx} - \frac{b_i}{2} \right),$$

$$b_i^2 = 4(1 + B_{ixx}^2 + B_{ixy}^2), \quad i = 1, 2.$$

Tyto rovnice nelze řešit analyticky. Aproximujeme-li rychlost proudění řešením stacionárního problému

$$v_x = v_0(t) \frac{y}{h}$$

a zanedbáme $\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0$, dostaneme pro B_{ixy} rovnice

$$0 = \frac{\partial B_{ixy}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial B_{ixx}}{\partial t} = -\frac{2\mu_i}{\varepsilon_i} B_{ixx} + \frac{v_0}{h} B_{ixy},$$

$$\frac{\partial B_{ixy}}{\partial t} = -\frac{2\mu_i}{\varepsilon_i} B_{ixy} - \frac{v_0}{h} \left(B_{ixx} - \sqrt{1 + B_{ixx}^2 + B_{ixy}^2} \right), \quad i = 1, 2,$$

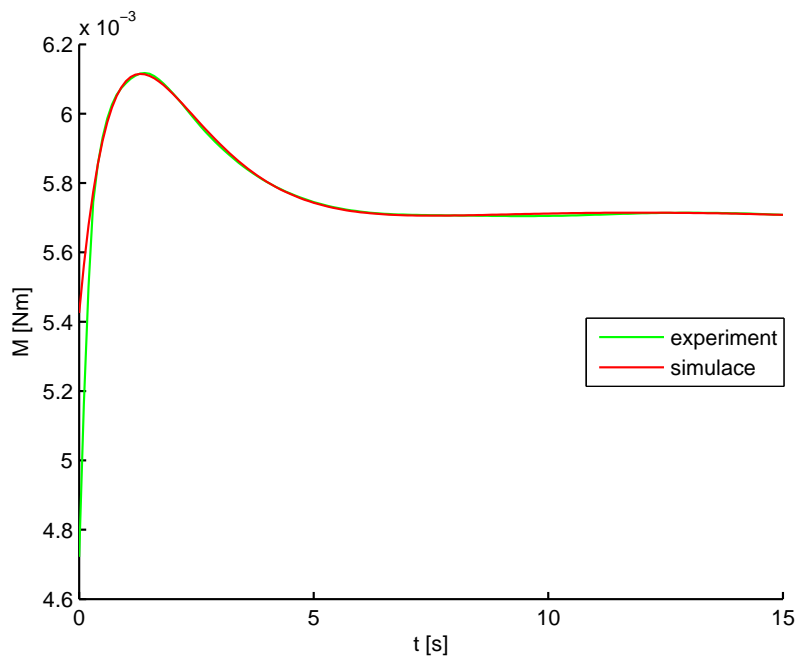
a tedy B_{ixy} nezávisí na y . Máme dvě soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé závislé na čase t . Tu řešíme Rungeho-Kuttovou metodou čtvrtého řádu. Řešení soustav B_{ixy} jsou závislá na poměru koeficientů μ_i/ε_i , z nichž vypočítáme tenzor napětí

$$T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2, t) = \varepsilon_0 v_0 / (2h) + \mu_1 B_{1xy}(\mu_1/\varepsilon_1, t) + \mu_2 B_{2xy}(\mu_2/\varepsilon_2, t).$$

Zavedeme skalární funkci pěti proměnných jako L^1 , resp. L^2 normu rozdílu experimentálních dat a výpočtu

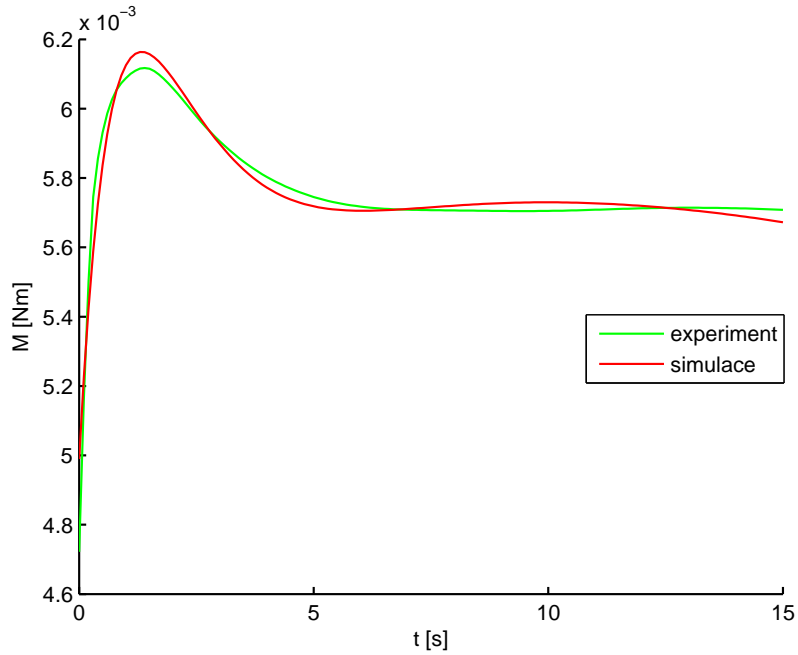
$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2) = \left(\int_0^T |e(t) - T_{xy}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2, t)|^n dt \right)^{1/n}, \quad n = 1, 2,$$

kde $e(t)$ jsou experimentální data a $T=15$ s. Hledáme taková $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$, aby g byla co nejmenší. Minimalizací g dostáváme parametry, které dosadíme do T_{xy} . Porovnáním vypočtené složky tenzoru napětí a experimentálních dat vidíme na obr. 5.8, resp. 5.9.



Obrázek 5.8: Simulace vs. experiment, L^1 norma
 $\varepsilon_0 = 2,17 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 3,13 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu_1 = 1,31 \cdot 10^{-7}$ Pa,
 $\varepsilon_2 = 6,67 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu_2 = 2,83 \cdot 10^{-6}$ Pa.

Lepší výsledek nám poskytuje opět L^1 norma. Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi zachycuje experiment nejlépe. Na závěr této kapitoly poznamenejme, že všechny výpočty u nelineárních modelů byly provedeny také v trojrozměrném případě, kdy složky odpovídající ose z byly nulové



Obrázek 5.9: Simulace vs. experiment, L^2 norma
 $\varepsilon_0 = 2,00 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 8,01 \cdot 10^{-6}$ Pa.s, $\mu_1 = 3,91 \cdot 10^{-7}$ Pa,
 $\varepsilon_2 = 1,04 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\mu_2 = 4,72 \cdot 10^{-6}$ Pa.

a veličiny nezávisely na z . Vzhledem k tomu, že výpočty v trojrozměrném případě byly náročnější (např. determinant má složitější tvar, matice jsou velikosti 3×3) a výsledky výpočtů byly identické, uvedli jsme zde jen výpočty ve dvourozměrném případě. V další kapitole budeme řešit skutečný experiment. Vycházejí z výsledků této kapitoly, jsme se rozhodli v dalším používat jen nelineární modely a pro srovnání použít standardně jen L^1 normu.

Kapitola 6

Simulace problému ve válcové geometrii

Protože experiment byl prováděn ve viskozimetru tvaru válce, budeme problém řešit ve válcových souřadnicích (viz Příloha A.2). V minulé kapitole jsme zjistili, že nemá význam zkoušet lineární modely – Oldroyd-B a Burgers. Proto budeme v případě válcové geometrie zkoumat jen nelineární modely (3.11), (3.7) a (3.13). Naším cílem je nafitovat experiment uvedený v kapitole 4.

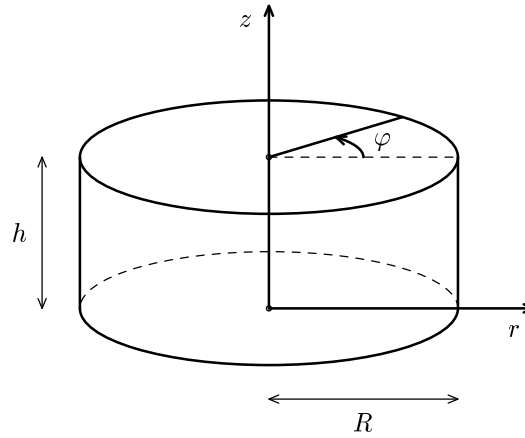
V průběhu fitování je třeba umět rychle vyřešit problém. Z toho důvodu budeme simulaci počítat s určitými zjednodušeními, podobně jako v kapitole 5. Nakonec, až určíme koeficienty, budeme řešit úplný problém bez jakýchkoli zjednodušení pouze za předpokladu osové symetrie.

6.1 Popis úlohy

Simulujeme experiment uvedený v kapitole 4. Na počátku je asfalt v klidu, zrelaxovaný, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & (6.1) \\ \mathbf{B}_{p(t)}^\delta(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad b(0, \mathbf{x}) = 3 & \text{pro nelineární model s jednou konfigurací,} \\ \mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad b_1(0, \mathbf{x}) = 3 & \text{pro nelineární model se dvěma přiroze-} \\ \mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad b_2(0, \mathbf{x}) = 3 & \text{nými konfiguracemi.} \end{aligned}$$

V průběhu experimentu se horní podstava válce otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω a strhává s sebou všechny materiál. Spodní podstava se nehýbe.



Obrázek 6.1: Simulace ve válcové geometrii

Okrajové podmínky úlohy jsou tedy následující:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(z = 0) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}(z = h) &= (0, \omega r, 0). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pro porovnání s experimentem musíme po vyřešení rovnic určit hodnotu momentu síly na horní podstavě

$$M = \int_{\text{horní podstava}} r T_{\varphi z} dS = \int_0^R 2\pi r^2 T_{\varphi z}(r, z = h) dr, \quad (6.3)$$

kde jsme použili osové symetrie.

6.2 Řešení zjednodušeného problému

V této kapitole budeme řešit daný problém za podmínek, které nám usnadní výpočet. Celý postup si ukážeme pro případ nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací.

6.2.1 Zjednodušující předpoklady

Aby bylo možné rovnice snadněji řešit, zjednodušíme si úlohu obdobně jako v kapitole 5. Všechny veličiny jsou nezávislé na úhlu φ . Dále budeme uvažovat, že rychlost proudění tekutiny je nenulová jen ve směru otáčení. Rychlost

musí navíc splňovat okrajové podmínky, tedy

$$\mathbf{v} = \left(0, \frac{\omega r z}{h}, 0\right).$$

Správnost tohoto předpokladu dále ověříme simulací úplného problému, kdy zjistíme že velikost rychlosti v radiálním směru, způsobená setrvačnými silami, a velikost rychlosti ve směru osy z je mnohokrát menší než velikost rychlosti ve směru rotace.

Asfalt při své velmi vysoké viskozitě η velmi pomalu proudí a jeho Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{\rho \omega R h}{\eta}$$

je řádu 10^{-7} . Z tohoto důvodu zanedbáme navíc konvektivní člen v bilanci hybnosti.

6.2.2 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací

Nyní budeme hledat nestacionární řešení úlohy se zjednodušujícími předpoklady v případě nelineárního modelu s jednou konfigurací.

$$p = p(t, r, z), \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{\omega(t) r z}{h}, 0\right), \quad b = b(t, r, z),$$

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{rr}(t, r, z) & B_{r\varphi}(t, r, z) & B_{rz}(t, r, z) \\ B_{r\varphi}(t, r, z) & B_{\varphi\varphi}(t, r, z) & B_{\varphi z}(t, r, z) \\ B_{rz}(t, r, z) & B_{\varphi z}(t, r, z) & -B_{rr}(t, r, z) - B_{\varphi\varphi}(t, r, z) \end{pmatrix}.$$

Navíc musí řešení splňovat počáteční podmínky (6.1). Dosazením¹ do nelineárního modelu s jednou konfigurací (3.11) dostaneme (bilance hmoty je splněna automaticky)

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial B_{rr}}{\partial r} + \frac{B_{rr} - B_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial B_{rz}}{\partial z} \right), \\ \frac{\rho r z}{h} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2B_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial B_{\varphi z}}{\partial z} \right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial B_{rz}}{\partial r} + \frac{B_{rz}}{r} - \frac{\partial}{\partial z} (B_{rr} + B_{\varphi\varphi}) \right), \end{aligned}$$

¹Tvar diferenciálních operátorů ve válcových souřadnicích naleznete v příloze A.2.

$$\frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{rr} - \frac{2r\omega}{3h} B_{\varphi z}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{r\varphi} + \frac{r\omega}{h} B_{rz}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial B_{rz}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{rz}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{\varphi\varphi} + \frac{4r\omega}{3h} B_{\varphi z}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial B_{\varphi z}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{\varphi z} - \frac{r\omega}{h} (B_{rr} + B_{\varphi\varphi}) + \frac{r\omega}{3h} b,$$

$$1 = \det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right).$$

Nyní tuto soustavu zjednodušíme. S počáteční podmínkou (6.1) z rovnic (6.5) a (6.6) plyne

$$B_{r\varphi} = B_{rz} = 0.$$

Dále součtem (6.7) + 2 · (6.4) a užitím počátečních podmínek zjistíme, že

$$B_{\varphi\varphi} + 2B_{rr} = 0 \Rightarrow B_{\varphi\varphi} = -2B_{rr}.$$

Dosazením do soustavy a zanedbáním časové derivace $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ pak dostáváme

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial B_{rr}}{\partial r} + 3 \frac{B_{rr}}{r} \right), \quad (6.8)$$

$$0 = \mu \frac{\partial B_{\varphi z}}{\partial z}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial B_{rr}}{\partial r}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{rr} - \frac{2r\omega}{3h} B_{\varphi z}, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial B_{\varphi z}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{\varphi z} + \frac{r\omega}{h} B_{rr} + \frac{r\omega}{3h} b, \quad (6.12)$$

$$1 = -2B_{rr}^3 - bB_{rr}^2 - B_{rr}B_{\varphi z}^2 + \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{3}bB_{\varphi z}^2. \quad (6.13)$$

Rovnice (6.9) nám tedy říká, že $B_{\varphi z}$ závisí jen na r . Z rovnic (6.8) a (6.10) a záměny parciálních derivací

$$\mu \frac{\partial^2 B_{rr}}{\partial r \partial z} + \frac{3}{r} \frac{\partial B_{rr}}{\partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \mu \frac{\partial^2 B_{rr}}{\partial r \partial z}$$

pak plyne, že ani B_{rr} nezávisí na z . Z rovnice nestlačitelnosti elastické odezvy (6.13) víme totéž o b .

Získáváme tedy soustavu tří rovnic (6.11), (6.12), (6.13) o třech neznámých $B_{rr}, B_{\varphi z}, b$ v proměnných r, t .

Postup při fitování experimentu

Cílem fitování je určit vypočítaný moment (6.3) tak, aby se co nejvíce shodoval s naměřeným experimentem. Fitovat budeme experiment při úhlové rychlosti $\omega = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$ a teplotě 35°C . Při této teplotě a této úhlové rychlosti došlo v tomto experimentu k nejvýraznějšímu překmitu momentu síly na počátku při spouštění experimentu. K určení momentu potřebujeme znát složku tenzoru napětí $T_{\varphi z}$, která je v případě nelineárního modelu s jednou konfigurací (a za zjednodušujícími předpoklady) rovna

$$T_{\varphi z} = \frac{\varepsilon_0 r \omega}{2h} + \mu B_{\varphi z}.$$

Potřebujeme tedy znát řešení soustavy rovnic (6.11), (6.12) a (6.13). Řešíme ji následujícím postupem. Z kubické rovnice (6.13) pro b určíme pomocí Cardanových vzorců (viz např. [18]) reálné řešení $b = b(B_{rr}, B_{\varphi z})$. To dosadíme do rovnice (6.12). Tím pak získáváme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic o dvou neznámých v proměnných r, t .

Vidíme, že rovnice obsahují jen derivace podle času, což nám umožňuje řešit soustavu následující rychlou metodou. Pro libovolně zvolené, ale pevné r vyřešíme už jen soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic v čase. To provedeme v Matlabu Rungeho-Kuttovou metodou čtvrtého řádu. Jeho řešení závisí na podílu μ/ε_1 a složka tenzoru napětí $T_{\varphi z}$ je závislá na třech parametrech nelineárního modelu s jednou konfigurací.

$$T_{\varphi z}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, r, t) = \frac{\varepsilon_0 r \omega}{2h} + \mu B_{\varphi z} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_1}, r, t \right).$$

Moment sil (6.3) integrujeme složeným Simpsonovým pravidlem ve 4 uzlech.

$$M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, t) = \int_0^R 2\pi r^2 T_{\varphi z}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, r, t) dr.$$

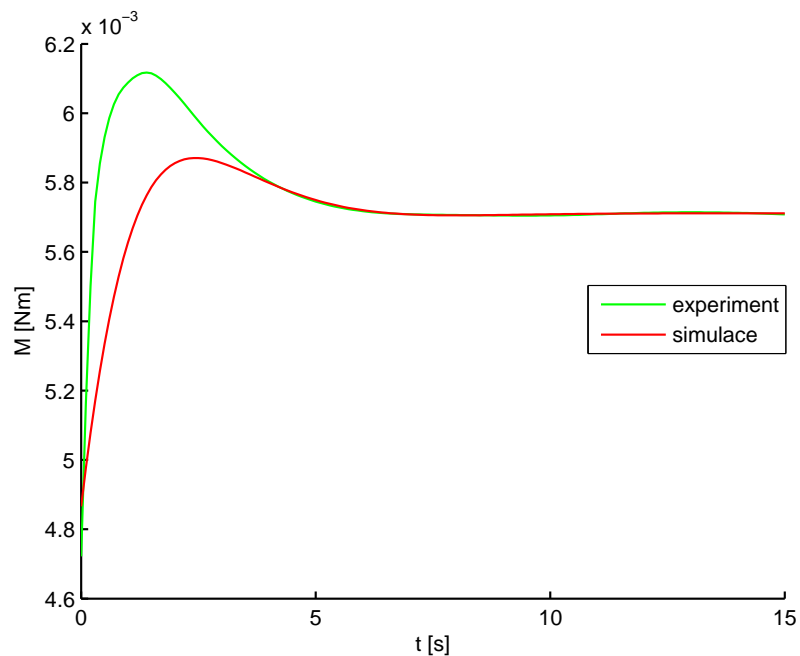
Tedy pro výpočet jednoho momentu sil řešíme čtyři soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Dále zavedeme skalární funkci g jako L^1 normu rozdílu

experimentálních dat a vypočítaného momentu

$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu) = \int_0^T |e(t) - M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu, t)| dt,$$

kde $e(t)$ jsou experimentální data a $T=15$ s. Hledáme takové $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu$, aby g byla co nejmenší. K minimalizaci g použijeme v Matlabu funkci `fminsearch`. Minimalizací g pak dostáváme parametry, které dosadíme do momentu M . V případě $\omega = 0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a teploty 35°C dostáváme výsledek na obr. 6.2.

Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací tedy neumí dobře zachytit překmit momentu síly na počátku spouštění experimentu.



Obrázek 6.2: Simulace vs. experiment, L^1 norma, $\varepsilon_0 = 4,84 \cdot 10^4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\varepsilon_1 = 1,41 \cdot 10^4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\mu = 5,70 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

6.2.3 Nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi

Hledáme nestacionární řešení se zjednodušujícími předpoklady pro nelineárního model se dvěma přirozenými konfiguracemi.

$$p = p(t, r, z), \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{\omega(t)r z}{h}, 0 \right), \quad b_1 = b_1(t, r, z), \quad b_2 = b_2(t, r, z),$$

$$\mathbf{B}_{p_1(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{1rr}(t, r, z) & B_{1r\varphi}(t, r, z) & B_{1rz}(t, r, z) \\ B_{1r\varphi}(t, r, z) & B_{1\varphi\varphi}(t, r, z) & B_{1\varphi z}(t, r, z) \\ B_{1rz}(t, r, z) & B_{1\varphi z}(t, r, z) & -B_{1rr}(t, r, z) - B_{1\varphi\varphi}(t, r, z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{p_2(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{2rr}(t, r, z) & B_{2r\varphi}(t, r, z) & B_{2rz}(t, r, z) \\ B_{2r\varphi}(t, r, z) & B_{2\varphi\varphi}(t, r, z) & B_{2\varphi z}(t, r, z) \\ B_{2rz}(t, r, z) & B_{2\varphi z}(t, r, z) & -B_{2rr}(t, r, z) - B_{2\varphi\varphi}(t, r, z) \end{pmatrix}.$$

Řešení musí splňovat počáteční podmínky (6.1). Dosazením do nelineárního modelu se dvěma přirozenými konfiguracemi (3.7) a stejným postupem jako u nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací získáme dvě nezávislé soustavy tří parciálních diferenciálních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{1rr}}{\partial t} &= -\frac{2\mu_1}{\varepsilon_1} B_{1rr} - \frac{2r\omega}{3h} B_{1\varphi z}, \\ \frac{\partial B_{1\varphi z}}{\partial t} &= -\frac{2\mu_1}{\varepsilon_2} B_{1\varphi z} + \frac{r\omega}{h} B_{1rr} + \frac{r\omega}{3h} b_1, \\ 1 &= -2B_{1rr}^3 - bB_{1rr}^2 - B_{1rr}B_{1\varphi z}^2 + \frac{1}{27}b_1^3 - \frac{1}{3}b_1B_{1\varphi z}^2, \\ \frac{\partial B_{2rr}}{\partial t} &= -\frac{2\mu_2}{\varepsilon_2} B_{2rr} - \frac{2r\omega}{3h} B_{2\varphi z}, \\ \frac{\partial B_{2\varphi z}}{\partial t} &= -\frac{2\mu_2}{\varepsilon_2} B_{2\varphi z} + \frac{r\omega}{h} B_{2rr} + \frac{r\omega}{3h} b_2, \\ 1 &= -2B_{2rr}^3 - bB_{2rr}^2 - B_{2rr}B_{2\varphi z}^2 + \frac{1}{27}b_2^3 - \frac{1}{3}b_2B_{2\varphi z}^2. \end{aligned}$$

Dále víme, že všechny neznámé B_{1rr} , $B_{1\varphi z}$, b_1 , B_{2rr} , $B_{2\varphi z}$, b_2 závisí jen na proměnných r, t . K vypočtu momentu potřebujeme znát složku tenzoru napětí $T_{\varphi z}$, která má v případě nelineárního modelu se dvěma přirozenými konfiguracemi tvar

$$T_{\varphi z} = \frac{\varepsilon_0 r \omega}{2h} + \mu_1 B_{1\varphi z} + \mu_2 B_{2\varphi z}.$$

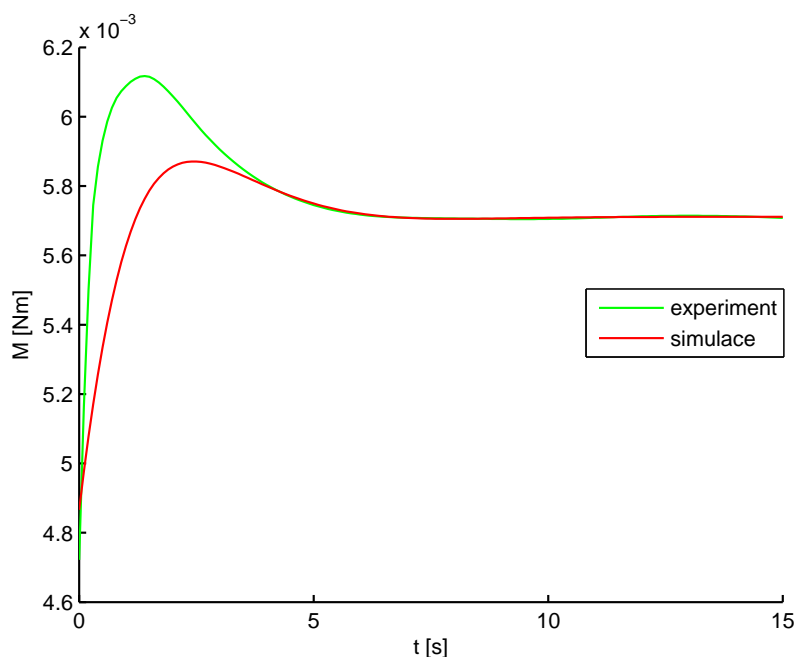
Řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic $B_{1\varphi z}$ a $B_{2\varphi z}$ dostaneme stejným postupem jako u nelineárního modelu s jednou konfigurací. Ze znalosti složky tenzoru napětí $T_{\varphi z}$ pak vypočítáme moment sil na vrchním tácu

$$M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2, t) = \int_0^R 2\pi r^2 T_{\varphi z}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2, r, t) dr$$

a zavedeme skalární funkci g jako L^1 normu rozdílu experimentálních dat a vypočítaného momentu

$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2) = \int_0^T |e(t) - M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2, t)| dt.$$

Hledáme pěťici parametrů $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$ tak, aby g byla co nejmenší. Minimalizací g pak pro $\omega = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$ a teplotu 35°C dostáváme výsledek na obr. 6.3.



Obrázek 6.3: Simulace vs. experiment, L^1 norma,
 $\varepsilon_0 = 4,70 \cdot 10^4 \text{ Pa.s}$, $\varepsilon_1 = 1,11 \cdot 10^4 \text{ Pa.s}$, $\mu_1 = 4,05 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $\varepsilon_2 = 3,60 \cdot 10^3 \text{ Pa.s}$,
 $\mu_2 = 2,99 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

Zjistili jsme, že nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi není lepší než model s jednou přirozenou konfigurací. Proto ho ani dále nepoužijeme pro výpočet v úplném modelu.

6.2.4 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonzstantním koeficientem

Dále se pokusíme získat lepší výsledek použitím koeficientu závislého na míře deformace (3.13). Hledáme tedy nestacionární řešení zjednodušeného problému. Stejně jako v případě konstantních koeficientů předpokládáme

$$p = p(t, r, z), \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{\omega(t)rz}{h}, 0 \right), \quad b = b(t, r, z),$$

$$\mathbf{B}_{p(t)}^\delta = \begin{pmatrix} B_{rr}(t, r, z) & B_{r\varphi}(t, r, z) & B_{rz}(t, r, z) \\ B_{r\varphi}(t, r, z) & B_{\varphi\varphi}(t, r, z) & B_{\varphi z}(t, r, z) \\ B_{rz}(t, r, z) & B_{\varphi z}(t, r, z) & -B_{rr}(t, r, z) - B_{\varphi\varphi}(t, r, z) \end{pmatrix}.$$

Dosazením do modelu (3.11) s nekonzstantním koeficientem (3.13) dostáváme rovnice pro model

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{rr}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{rr} - \frac{2r\omega}{3h} B_{\varphi z}, \\ \frac{\partial B_{r\varphi}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{r\varphi} + \frac{r\omega}{h} B_{rz}, \\ \frac{\partial B_{rz}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{rz}, \\ \frac{\partial B_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{\varphi\varphi} + \frac{4r\omega}{3h} B_{\varphi z}, \\ \frac{\partial B_{\varphi z}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{\varepsilon_1} B_{\varphi z} - \frac{r\omega}{h} (B_{rr} + B_{\varphi\varphi}) + \frac{r\omega}{3h} b, \\ 1 &= \det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right), \\ \varepsilon_1 &= \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1]. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Pro další řešení předpokládáme, že všechny veličiny $B_{rr}, B_{r\varphi}, B_{rz}, B_{\varphi\varphi}, B_{\varphi z}, b$ závisí jen na r a t . V tomto případě řešíme tedy soustavu šesti rovnic o šesti neznámých. K výpočtu momentu sil je třeba znát složku tenzoru napětí $T_{\varphi z}$

$$T_{\varphi z} = \frac{\varepsilon_0 r \omega}{2h} + \mu B_{\varphi z}$$

a musíme tedy znát řešení $B_{\varphi z}$. Při jeho výpočtu postupujeme obdobně jako v případě modelu s konstantním koeficientem. Z rovnice pro nestlačitelnost elastické odezvy (6.14) vypočítáme pomocí Cardanových vzorců vztah pro b v závislosti na ostatních neznámých a dosadíme do zbylých rovnic, tím získáme soustavu pěti parciálních diferenciálních rovnic o pěti neznámých. Její řešení provádíme stejně jako v případě konstantních koeficientů, tj. zvolíme libovolné pevné r a vyřešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Z řešení $B_{\varphi z}$ určíme

$$T_{\varphi z}(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N, r, t) = \frac{\varepsilon_0 r \omega}{2h} + \mu B_{\varphi z} \left(\frac{\mu}{\bar{\varepsilon}_1}, m, N, r, t \right),$$

ze kterého vypočítáme moment sil na horním tácu

$$M(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N, t) = \int_0^R 2\pi r^2 T_{\varphi z}(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N, r, t) dr.$$

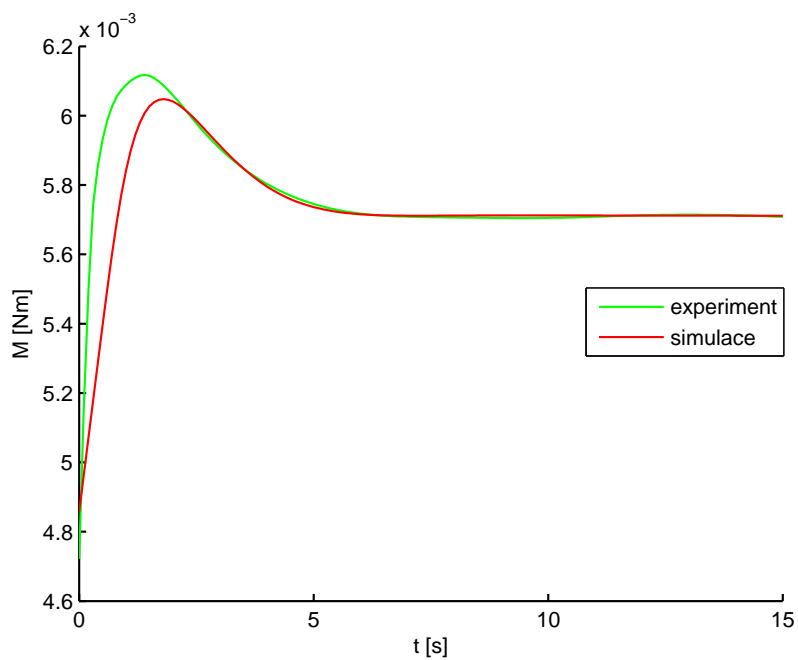
Zavedeme skalární funkci g jako L^1 normu rozdílu experimentálních dat a vypočítaného momentu

$$g(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N) = \int_0^T |e(t) - M(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N, t)| dt.$$

Hledáme pětici parametrů $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu, m, N$ tak, aby g byla co nejmenší. Minimalizací g pak dostáváme výsledek na obr. 6.4.

Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonstantním koeficientem je schopen alespoň částečně zachytit překmit momentu síly při spouštění experimentu. Vidíme také, že v porovnání s modelem s konstantním koeficientem se koeficienty $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_1, \mu$ výrazně neliší od koeficientů $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu$.

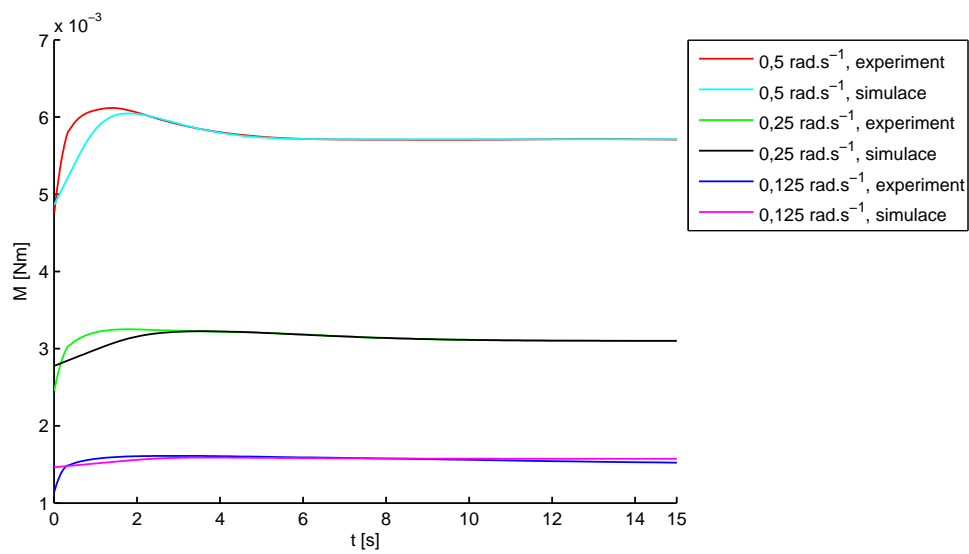
Grafy momentů sil získané ze simulace společně s grafy naměřených hodnot pro všechny úhlové rychlosti a teploty 35°C, resp. 25°C lze nalézt na obrázcích 6.5, resp. 6.6.



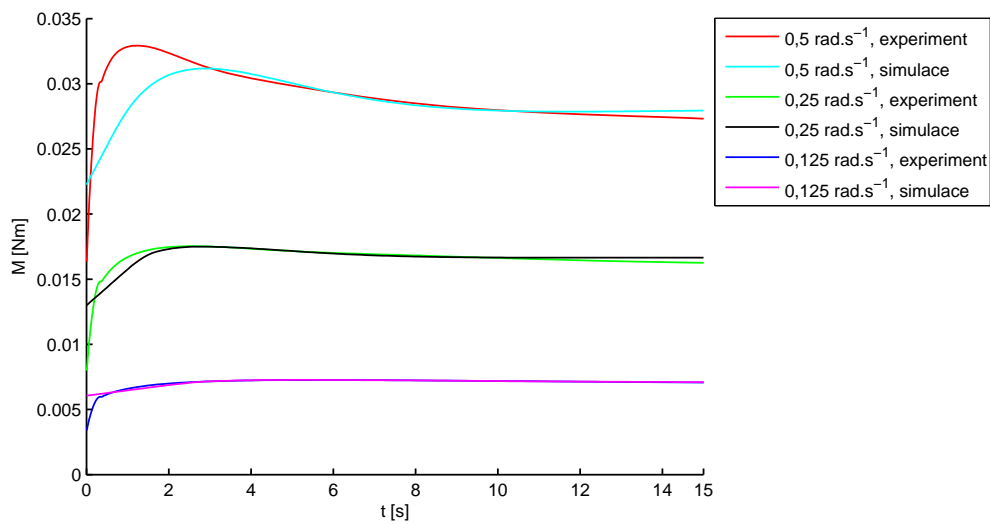
Obrázek 6.4: Simulace vs. experiment, L^1 norma,
 $\varepsilon_0 = 4,83 \cdot 10^4$ Pa.s, $\bar{\varepsilon}_1 = 1,13 \cdot 10^4$ Pa.s, $\mu = 5,36 \cdot 10^3$ Pa,
 $N = 11,84$, $m = -2,79$.

V tabulce jsou umístěny hodnoty parametrů použitých v předchozích grafech.

τ [°C]	ω [rad.s ⁻¹]	ε_0 [10 ⁴ Pa.s]	$\bar{\varepsilon}_1$ [10 ⁴ Pa.s]	μ [10 ³ Pa]	N	m
35	0,125	5,82	0,19	0,98	2,95	-4,29
	0,25	5,52	0,99	2,09	16,63	-4,09
	0,5	4,83	1,13	5,36	11,84	-2,79
25	0,125	24,11	5,43	8,13	8,81	-34,37
	0,25	25,84	10,15	27,61	10,35	-11,74
	0,5	22,13	12,75	29,90	14,87	-3,17



Obrázek 6.5: Simulace vs. experiment pro teplotu 35°C



Obrázek 6.6: Simulace vs. experiment pro teplotu 25°C

6.3 Řešení úplného problému

Abychom ověřili, že zjednodušující předpoklady jsou skutečně oprávněné, budeme dále řešit úplný problém. K tomu použijeme metodu konečných prvků. Budeme řešit úplný model pro případ nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací a nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací a nekonztantním koeficientem.

6.3.1 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací

Slabá formulace

Pro použití metody konečných prvků potřebujeme znát slabou formulaci nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací (3.11). Oblast válce, ve kterém probíhá simulace, označme Ω , na jeho hranici musí být splněné okrajové podmínky (6.2). Hranici oblasti $\partial\Omega$ rozdělíme na dvě části

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Část hranice Γ_1 obsahuje spodní a horní podstavu, Γ_2 je plášť válce. Na Γ_1 máme předepsanou Dirichletovu podmínku $\mathbf{v}_0^* \in L^2((0, T), W^{1/2,2}(\Gamma_1))$ pro rychlost \mathbf{v} (6.2). Nechť existuje její rozšíření $\bar{\mathbf{v}}_0 \in L^2((0, T), W^{1,2}(\Omega))$ tak, že $\text{tr}(\bar{\mathbf{v}}_0)|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}_0^*$.

K okrajovým podmínkám přidejme Neumannovu okrajovou podmínku

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_2,$$

kde \mathbf{n} je vnější normála ke Γ_2 . Tato podmínka zajišťuje, že asfalt není vytlačován mimo viskozimetr.

Předtím než napíšeme slabou formulaci problému, provedeme energetické odhady, abychom věděli, v jakých prostorech máme řešení hledat. Bilance hybnosti nestlačitelné tekutiny má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \text{div} \mathbf{T},$$

kde $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \varepsilon_0\mathbf{D} + \mu\mathbf{B}_{p(t)}$. Bilanci hybnosti nyní vynásobíme rychlostí (konvektivní člen vymizí) a celou rovnici zintegrujeme podle času od 0 do t , tedy

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dx \, dt = \|\mathbf{v}_0\|_2^2.$$

Dosadíme z redukované termodynamické nerovnosti (2.7)

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \xi \, dx \, dt + \rho\|\psi(t)\|_1 \leq \|\mathbf{v}_0\|_2^2 + \|\psi(0)\|_1.$$

Nyní dosadíme z konstitutivních rovnic (3.10) za rychlost produkce entropie $\xi = \varepsilon_0 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)}$ a $\psi = \frac{\mu}{2}(\text{tr} \mathbf{B}_{p(t)} - 3)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + \int_0^t \int_{\Omega} (\varepsilon_0 |\mathbf{D}|^2 + \varepsilon_1 \mathbf{D}_{p(t)} \cdot \mathbf{B}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)}) \, dx \, dt + \\ + \frac{\mu}{2} \rho \|\text{tr} \mathbf{B}_{p(t)}(t) - 3\|_1 \leq \|\mathbf{v}_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Z prvního členu vyplývá, že $\mathbf{v} \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega))$. Z druhého členu pak $\mathbf{D}(\mathbf{v}) \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$. To pak dohromady s Kornovou nerovností dává $\mathbf{v} \in L^2((0, T), W^{1,2}(\Omega))$. Celkově tedy víme, že

$$\mathbf{v} \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T), W^{1,2}(\Omega)) \Rightarrow \mathbf{v} \in L^{10/3}((0, T), L^{10/3}(\Omega)).$$

Druhý člen také říká, že $\mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{D}_{p(t)} \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$. Třetí člen pak, že $\mathbf{F}_{p(t)} \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega))$. Provedeme-li nyní divergenci na bilanci hybnosti a dosadíme za tenzor napětí, dostaneme

$$-\Delta p = \text{div} \, \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \varepsilon_0 \mathbf{D} + \mu \mathbf{B}_{p(t)}).$$

Už víme, že

- $\mathbf{D}(\mathbf{v}) \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$,
- $\mathbf{B}_{p(t)} = \mathbf{F}_{p(t)} \mathbf{F}_{p(t)}^T \in L^\infty((0, T), L^1(\Omega))$,
- $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \in L^{5/3}((0, T), L^{5/3}(\Omega))$.

Dohromady tedy tlak $p \in L^2((0, T), L^1(\Omega))$.

Pak slabá formulace úlohy nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací (3.11), je následující:

Najděte takové $(p, \mathbf{v}, \mathbf{B}_{p(t)}, b)$, že

- $p \in L^2((0, T), L^1(\Omega))$,
- $\mathbf{v} \in L^{10/3}((0, T), L^{10/3}(\Omega))$,

- $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_0 \in L^2((0, T), W_{0, \Gamma_1}^{1,2}(\Omega)),$
- $\mathbf{B}_{p(t)}^\delta \in \{(\mathbf{A})_{ij}, A_{ij} = A_{ji}, \text{tr } \mathbf{A} = 0; A_{ij} \in L^\infty((0, T), L^1(\Omega)), \forall i, j = 1, 2, 3\},$
- $b \in L^\infty((0, T), L^1(\Omega))$

splňující

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}) q_1 \, dx &= 0, \\
\int_{\Omega} (\rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} \, dx &= - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \, dx, \\
\int_{\Omega} \mu \mathbf{B}_{p(t)}^\delta \cdot \mathbf{S} \, dx &= \int_{\Omega} \varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{p(t)}^\delta - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) \cdot \mathbf{S} \, dx, \\
0 &= \int_{\Omega} \left(\det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right) - 1 \right) q_2 \, dx
\end{aligned} \tag{6.15}$$

pro každé $q_1 \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{u} \in C_0^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{S} \in \{(\mathbf{A})_{ij}, A_{ij} = A_{ji}; A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \forall i, j = 1, 2, 3\}$ a $q_2 \in C^1(\bar{\Omega})$.

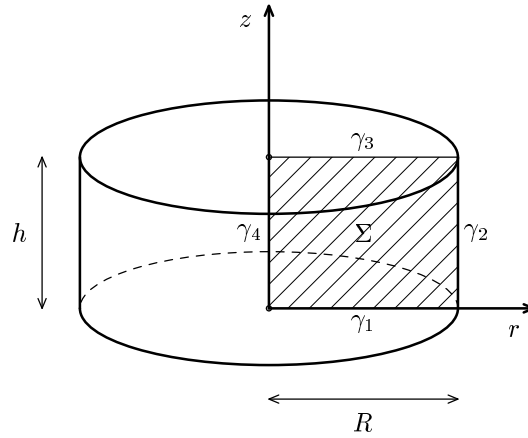
Invariantnost úhlu otočení

Nezávislost na úhlu otočení je jediný předpoklad, který použijeme k simulaci úplného problému. Symetrie úlohy nám říká, že veličiny nezávisí na úhlu otočení φ . V tom případě nemusíme problém řešit v trojrozměrném válci, ale pouze na dvourozměrném řezu válce Σ , viz obr. 6.7. Okrajové podmínky jsou pak následující

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{0} \text{ na } \gamma_1, \\
\mathbf{v} &= (0, \omega r, 0) \text{ na } \gamma_3, \\
\mathbf{T} \mathbf{n} &= 0 \text{ na } \gamma_2.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Zbývá nám určit okrajové podmínky na γ_4 – ose symetrie. Ze symetrie úlohy plyne

$$\begin{aligned}
v_r(r, z) &= -v_r(-r, z), \\
v_\varphi(r, z) &= -v_\varphi(-r, z), \\
v_z(r, z) &= v_z(-r, z).
\end{aligned}$$



Obrázek 6.7: Řez válcem

Dosadíme-li nyní za $r = 0$, dostaneme okrajové podmínky pro složky v_r a v_φ

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z) \text{ na } \gamma_4.$$

Nyní užitím úhlové nezávislosti převedeme slabou formulaci v oblasti válce Ω do oblasti řezu válce Σ . K tomu použijeme válcové souřadnice, jejichž Jakobián je roven r

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q_1 \, dx = \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r \operatorname{div} \mathbf{v}(r, z) q_1 \, d\varphi \, dr \, dz = \\ &= \int_0^h \int_0^R r \operatorname{div} \mathbf{v}(r, z) \left(\int_0^{2\pi} q_1 \, d\varphi \right) \, dr \, dz = \int_{\Sigma} r \operatorname{div} \mathbf{v} \hat{q}_1 \, dS. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Tímto jsme zadefinovali novou testovací funkci

$$\hat{q}_1(r, z) = \int_0^{2\pi} q_1(r, \varphi, z) \, d\varphi.$$

Zbylé rovnice slabé formulace pak oproti původní slabé formulaci obsahují navíc jen Jakobián válcových souřadnic r

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (r \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS &= - \int_{\Sigma} r \mathbf{T} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \, dS, \\ \int_{\Sigma} r \mu \mathbf{B}_{p(t)}^\delta \cdot \hat{\mathbf{S}} \, dS &= \int_{\Sigma} r \varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{p(t)}^\delta - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^\delta) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) \cdot \hat{\mathbf{S}} \, dS, \\ 0 &= \int_{\Sigma} r \left(\det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^\delta + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right) - 1 \right) \hat{q}_2 \, dS. \end{aligned}$$

Ve slabé formulaci bilance hybnosti dochází v případě výpočtu ve válcových souřadnicích k dělení r , a tudíž při výpočtu dělíme nulou. Proto při odvozování slabé formulace vynásobíme rovnici bilance hybnosti r , a pak až integrujeme, standardně použijeme Gaussovu větu a vytvoříme novou slabou formulaci

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho r \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \, dx &= \int_{\Omega} (r \operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} \, dx, \\ \int_{\Omega} \rho r \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(r \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{T} \nabla r \cdot \mathbf{u} \, dx, \\ \int_{\Omega} \rho r \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \, dx &= - \int_{\Omega} (r \mathbf{T}) \cdot \nabla \mathbf{u} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{T} \nabla r \cdot \mathbf{u} \, dx.\end{aligned}$$

Tu pak převedeme stejně jako výše do řezu válce

$$\int_{\Sigma} \rho r^2 \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS = - \int_{\Sigma} (r^2 \mathbf{T}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \, dS - \int_{\Sigma} r \mathbf{T} \nabla r \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS. \quad (6.18)$$

Časová diskretizace

Derivaci podle času provádíme pomocí konečných diferencí, používáme zpětnou diferencii. Jedná se o implicitní metodu a na každé časové hladině řešíme rovnice v prostoru metodou konečných prvků. Časovou osu rozdělíme diskrétně $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$, kde $t_k = k\tau$ a τ je časový krok. Konkrétně přepíšeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + g(x, t) = 0 &\leftrightarrow \frac{f(x, t_{k+1}) - f(x, t_k)}{\tau} + g(x, t_{k+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x, t_{k+1}) - f(x, t_k) + \tau g(x, t_{k+1}) = 0.\end{aligned} \quad (6.19)$$

Bilance hybnosti (6.18) pak konkrétně vypadá takto

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \rho r^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS &= - \int_{\Sigma} \rho r^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS - \\ &\quad - \int_{\Sigma} (r^2 \mathbf{T}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \, dS - \int_{\Sigma} r \mathbf{T} \nabla r \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS, \\ \int_{\Sigma} \rho r^2 (\mathbf{v}(x, t_{k+1}) - \mathbf{v}(x, t_k)) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS &= -\tau \int_{\Sigma} \rho r^2 (\mathbf{v}(x, t_{k+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(x, t_{k+1}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS - \\ &\quad - \tau \int_{\Sigma} (r^2 \mathbf{T}(x, t_{k+1})) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \, dS - \tau \int_{\Sigma} r \mathbf{T}(x, t_{k+1}) \nabla r \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS.\end{aligned}$$

A tedy ze znalosti řešení na předešlé časové hladině t_k vypočítáme metodou konečných prvků řešení na aktuální časové hladině t_{k+1} .

Bilance hmoty má tvar

$$0 = \int_{\Sigma} r \operatorname{div} \mathbf{v}(x, t_{k+1}) \widehat{q}_1 \, dS.$$

Rozepíšeme Oldroydovu derivaci v rovnici pro nelineární model

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} r \mu \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS &= \int_{\Sigma} r \varepsilon_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} \right) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS + \\ &+ \int_{\Sigma} r \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS \end{aligned}$$

a prepíšeme ve tvaru pro časovou diskretizaci

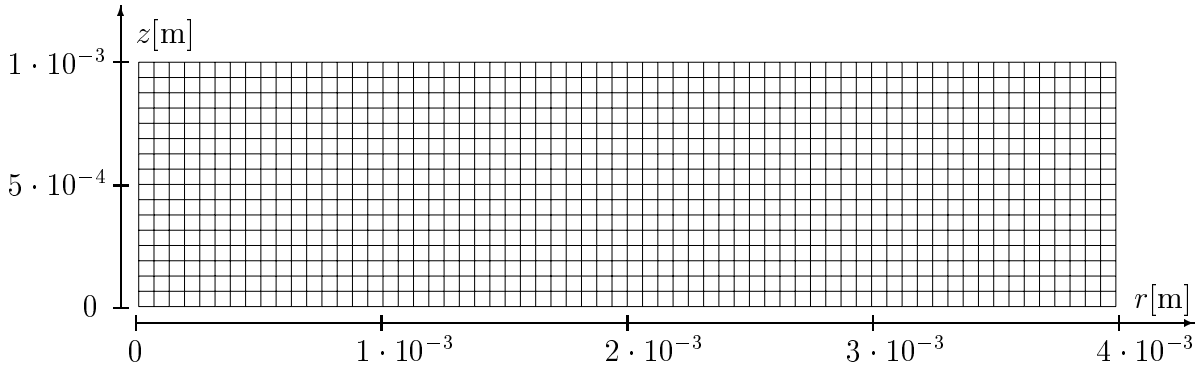
$$\begin{aligned} \tau \int_{\Sigma} r \mu \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS &= \int_{\Sigma} \frac{r \varepsilon_1}{2} (-\mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) + \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_k)) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS + \\ &+ \tau \int_{\Sigma} \frac{r \varepsilon_1}{2} (-\mathbf{v}(x, t_{k+1}) \cdot \nabla) \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS + \\ &+ \tau \int_{\Sigma} \frac{r \varepsilon_1}{2} ((\nabla \mathbf{v}(x, t_{k+1})) \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) + \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) (\nabla \mathbf{v}(x, t_{k+1}))^T) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS + \\ &+ \tau \int_{\Sigma} r \varepsilon_1 \left(-\frac{1}{3} (\mathbf{D}(x, t_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1})) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b(x, t_{k+1}) \mathbf{D}(x, t_{k+1}) \right) \cdot \widehat{\mathbf{S}} \, dS. \end{aligned}$$

Nakonec nestlačitelnost elastické odezvy má tvar

$$0 = \int_{\Sigma} r \left(\det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}(x, t_{k+1}) + \frac{1}{3} b(x, t_{k+1}) \mathbf{I} \right) - 1 \right) \widehat{q}_2 \, dS.$$

Metoda konečných prvků a výsledky simulace

Problém řešíme na řezu válce metodou konečných prvků. K tomu používáme program napsaný Jaroslavem Hronem v programovacím jazyku C. Podrobnosti lze nalézt v kapitole 5 v [19]. Program používá čtyřúhelníkové prvky. Náš problém jsme řešili na různě hustých sítích a ověřili jsme, že řešení nezávisí na počtu prvků. Nejjemnější síť, jakou jsme zvolili, měla 1024 prvků, viz obr. 6.8. Počet stupňů volnosti byl v tomto případě roven 41 385. Z důvodu náročnosti úlohy jsme výpočet pouštěli na clusteru Sněhurka v Karlíně.



Obrázek 6.8: Síť s 1024 prvky

Testovací funkce jsme aproximovali v případě \hat{q}_1 Lagrangeovými po částech konstantními prvky. Ostatní testovací funkce jsme aproximovali Hermiteovými C^2 spojitými prvky.

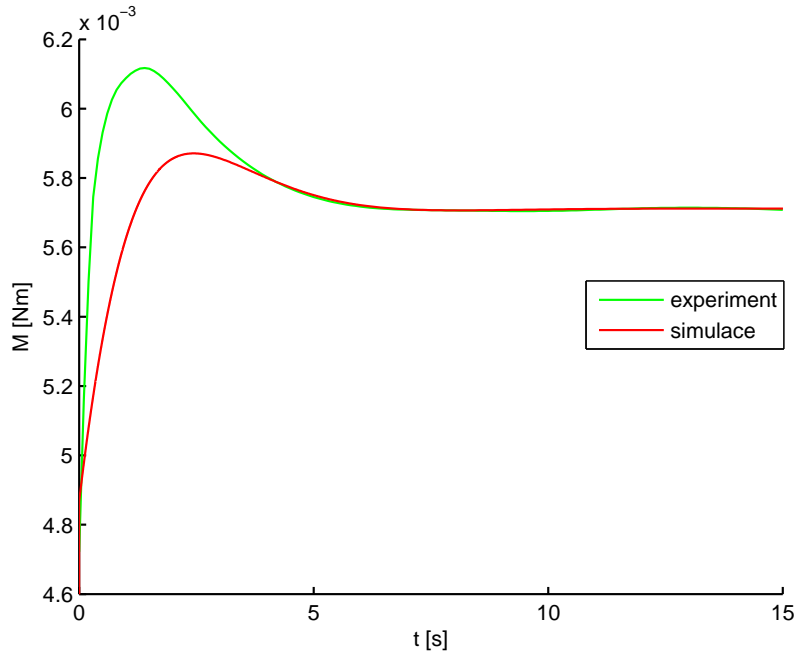
Derivaci podle času jsme řešili pomocí zpětné diference (viz minulá podkapitola). Program časovou adaptibilitu neumožňuje, proto jsme ze znalosti toho, jak experiment probíhá, dopředu určili závislost délky časového kroku na probíhajícímu času. Na počátku jsme zvolili malý časový krok, který jsme pak postupně během výpočtu zvětšovali. Skok ve složce rychlosti v_r na γ_3 způsobený spouštěním experimentu, kdy se začne horní ták náhle točit, jsme aproximovali spojitě na časovém intervalu 1 ms pomocí funkce

$$\frac{\omega r}{2}(1 - \cos(1000\pi t)).$$

Ověřili jsme, že výsledek nezávisí na tom, jak dlouhý časový interval zvolíme.

Užitím zjednodušujících předpokladů jsme získali parametry pro nelineární model s jednou přirozenou konfigurací. Šlo o tyto parametry: $\varepsilon_0 = 4,84 \cdot 10^4$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 1,41 \cdot 10^4$ Pa.s, $\mu = 5,70 \cdot 10^3$ Pa. Ty jsme použili pro simulaci úplného problému. Výsledek nám potvrdil, že zjednodušující předpoklady byly oprávněné. Závislost momentu síly na čase na obr. 6.9 je stejná jako v případě, kdy jsme použili zjednodušující předpoklady (obr. 6.2).

Dále, podíváme-li se na rychlostní pole v řezu válce, zjistíme, že velikost síly v radiálním směru a ve směru osy z je o 10 řádu nižší než velikost rychlosti ve směru rotace. Zjednodušující předpoklady byly tedy oprávněné.



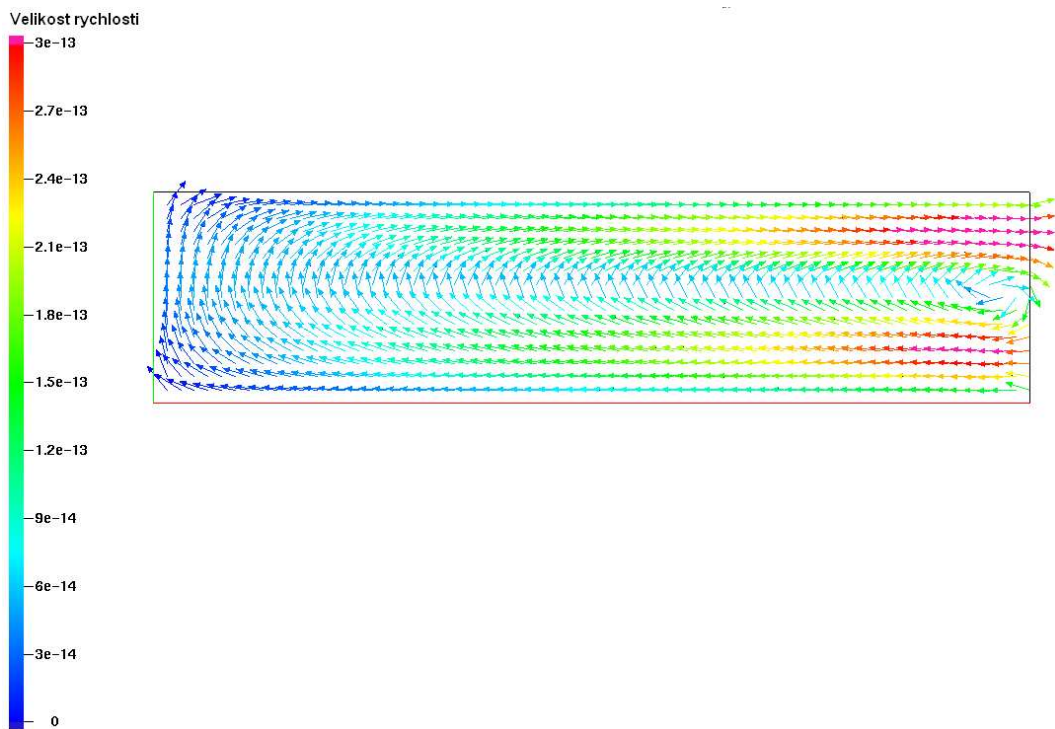
Obrázek 6.9: Simulace úplného problému vs. experiment, $\varepsilon_0 = 4,84 \cdot 10^4$ Pa.s, $\varepsilon_1 = 1,41 \cdot 10^4$ Pa.s, $\mu = 5,70 \cdot 10^3$ Pa.

K zobrazení rychlostního pole (obr. 6.10) jsme použili General Mesh Viewer. Podrobné informace o tomto softwaru a návod k jeho použití lze nalézt na [20].

6.3.2 Nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonstantním koeficientem

V této části napíšeme slabou formulaci problému při použití nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací a nekonstantním koeficientem. Rozdíl oproti předchozí části je v tom, že namísto konstantního koeficientu ε_1 budeme používat nekonstantní koeficient

$$\varepsilon_1 \longrightarrow \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1].$$



Obrázek 6.10: Rychlostní pole v řezu válce Σ

Slabá formulace pak zní následovně. Najděte takové $(p, \mathbf{v}, \mathbf{B}_{p(t)}^\delta, b)$, že

- $p \in L^2((0, T), L^1(\Omega))$,
- $\mathbf{v} \in L^{10/3}((0, T), L^{10/3}(\Omega))$,
- $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_0 \in L^2((0, T), W_{0,\Gamma_1}^{1,2}(\Omega))$,
- $\mathbf{B}_{p(t)}^\delta \in \{(\mathbf{A})_{ij}, A_{ij} = A_{ji}, \text{tr } \mathbf{A} = 0; A_{ij} \in L^\infty((0, T), L^1(\Omega)), \forall i, j = 1, 2, 3\}$,
- $b \in L^\infty((0, T), L^1(\Omega))$

splňující

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) q_1 \, dx &= 0, \\
\int_{\Omega} (\rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} \, dx &= - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \, dx, \\
\int_{\Omega} \mu \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} \cdot \mathbf{S} \, dx &= \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1] \left(-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) \cdot \mathbf{S} \, dx, \\
0 &= \int_{\Omega} \left(\det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right) - 1 \right) q_2 \, dx
\end{aligned}$$

pro každé $q_1 \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{u} \in C_0^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{S} \in \{(\mathbf{A})_{ij}, A_{ij} = A_{ji}; A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \forall i, j = 1, 2, 3\}$ a $q_2 \in C^1(\bar{\Omega})$.

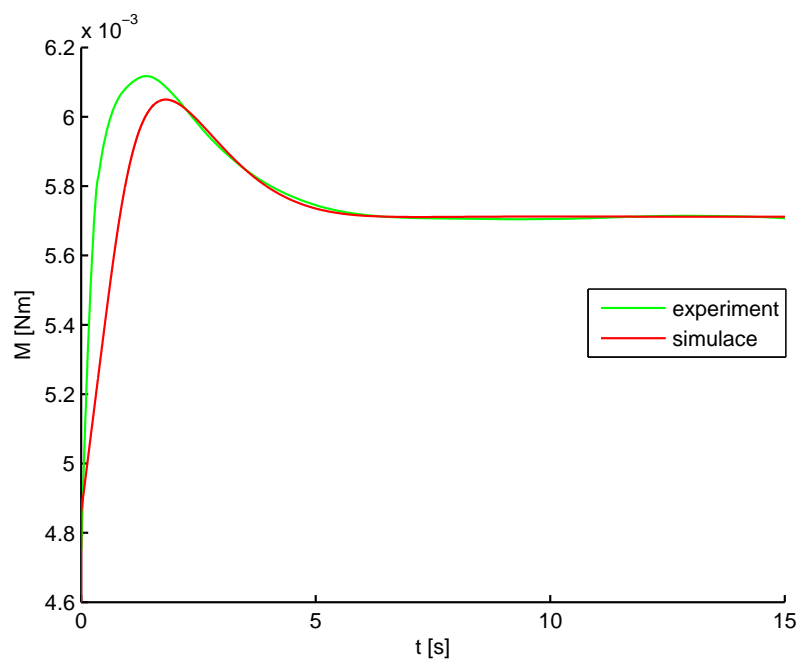
Úžití nezávislosti na úhlu otočení φ nám stejně jako v předchozí části umožní řešit problém v řezu válce Σ , viz obr. 6.7. Slabá formulace v řezu válce se odvodí stejně jako v předchozím případě (6.17).

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Sigma} r \operatorname{div} \mathbf{v} \hat{q}_1 \, dS, \\
\int_{\Sigma} \rho r^2 \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS &= - \int_{\Sigma} (r^2 \mathbf{T}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \, dS - \int_{\Sigma} r \mathbf{T} \nabla r \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS, \\
\int_{\Sigma} r \mu \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} \cdot \hat{\mathbf{S}} \, dS &= \int_{\Sigma} r \bar{\varepsilon}_1 [N(b-3)^m + 1] \left(-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} - \frac{1}{3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{p(t)}^{\delta}) \mathbf{I} + \frac{1}{3} b \mathbf{D} \right) \cdot \hat{\mathbf{S}} \, dS, \\
0 &= \int_{\Sigma} r \left(\det \left(\mathbf{B}_{p(t)}^{\delta} + \frac{1}{3} b \mathbf{I} \right) - 1 \right) \hat{q}_2 \, dS.
\end{aligned}$$

Časová derivace se provádí opět pomocí zpětné diference (6.19). Pro metodu konečných prvků jsme zvolili stejnou síť (6.8) i stejné prvky jako při řešení úplného problému nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací a konstantním koeficientem. Délku časového kroku jsme také nechali stejnou.

Při řešení zjednodušeného problému jsme získali parametry pro nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonstantním koeficientem pro úhlovou rychlost $\omega = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$. Šlo o tyto parametry: $\varepsilon_0 = 4,83 \cdot 10^4 \text{ Pa.s}$, $\bar{\varepsilon}_1 = 1,13 \cdot 10^4 \text{ Pa.s}$, $\mu = 5,36 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $N = 11,84$ a $m = -2,79$. Tyto parametry jsme použili pro simulaci úplného problému. Výsledek nám potvrdil, že zjednodušující předpoklady byly oprávněné. Závislost momentu síly na čase je na obr. 6.11 a je stejná jako u zjednodušeného problému (obr. 6.4).

Rychlostní pole v řezu válce je téměř stejné jako v případě konstantních koeficientů (obr. 6.10). Předpoklady, které jsme použili v případě zjednodušeného problému, byly tedy oprávněné.



Obrázek 6.11: Simulace úplného problému vs. experiment,
 $\varepsilon_0 = 4,83 \cdot 10^4$ Pa.s, $\bar{\varepsilon}_1 = 1,13 \cdot 10^4$ Pa.s, $\mu = 5,36 \cdot 10^3$ Pa,
 $N = 11,84$, $m = -2,79$.

Kapitola 7

Závěr

V této práci jsme představili hierarchii modelů nestlačitelných tekutin rychlostního typu. Jednotlivé modely jsme použili k otestování na příkladě Couetteho proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. K porovnání simulace s experimentem jsme použili data naměřená Dr. J. Murali Krishnanem. Zjistili jsme, že oba viskoelastické modely s lineární elastickou odezvou – Oldroyd-B (3.19) a Burgersův model (3.20) nejsou schopny dobře popsat experiment. Simulace lineárních modelů se s experimentálními daty neshoduje po celou dobu měření.

Proto jsme při simulaci experimentu ve válci použili nelineární modely. Zjistili jsme, že nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi (3.7) nedává lepší výsledky než nelineární model s jednou přirozenou konfigurací (3.11). Z toho důvodu jsme se rozhodli použít model s jednou přirozenou konfigurací obohacený o koeficient závislý na prvním invariantu deformačního gradientu. Tento model vykazuje lepší chování než model s konstantními koeficienty, ovšem neumí stále dokonale zachytit experiment. Podstatné zlepšení oproti lineárním modelům spočívá v poměrně přesném zachycení průběhu experimentu v oblasti útlumu počátečního překmitu momentu síly.

Při hledání optimálních parametrů modelů jsme řešili problém za zjednodušujících předpokladů. Oprávněnost těchto předpokladů jsme ověřili počítáním úplného modelu. Za tím účelem jsme zformulovali slabou formulaci rovnic modelů a tu řešili metodou konečných prvků.

Tato práce navazovala na diplomovou práci Jana Kratochvíla. Ten ve své práci použil nelineární model s jednou přirozenou konfigurací s konstantními koeficienty a lineární Oldroyd-B. Pro srovnání s experimentem využíval L^2 normu, a tedy získané výsledky byly při použití stejných modelů méně úspěšné než v této práci. Také způsob řešení systému rovnic byl v této práci

mnohonásobně efektivnější. Dále jsme při simulacích otestovali další tři viskoelastické modely – lineární Burgersův model, nelineární model se dvěma přirozenými konfiguracemi a nelineární model s jednou přirozenou konfigurací a nekonztantním koeficientem.

Další práce by se mohla zaměřit na hledání dalších modelů rychlostního typu získaných například užitím implicitní konstitutivní teorie. Pro lepší zachycení překmitu momentu síly při spouštění experimentu může také být úspěšné studium stlačitelných modelů.

Příloha A

Diferenciální operátory

V této příloze ukážeme složky diferenciálních operátorů, které se vyskytují v bilančních rovnicích mechaniky kontinua. V případě této práce jsme potřebovali znát složky v kartézské soustavě souřadnic a ve válcových souřadnicích. K jejich určení jsme použili balíček pro Maple napsaný Janem Kratochvílem [3]. Jejich správnost můžeme porovnat s [21] (kap. 7, příloha) a [22] (příloha A).

A.1 Kartézské souřadnice

Kartézská soustava souřadnic je soustava souřadnic, kde jsou všechny souřadné osy přímky na sebe vzájemně kolmé a bod v trojrozměrném prostoru je určen pomocí trojice souřadnic (viz obrázek A.1)

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z).$$

Skalární funkci závislou na všech souřadnicích označíme

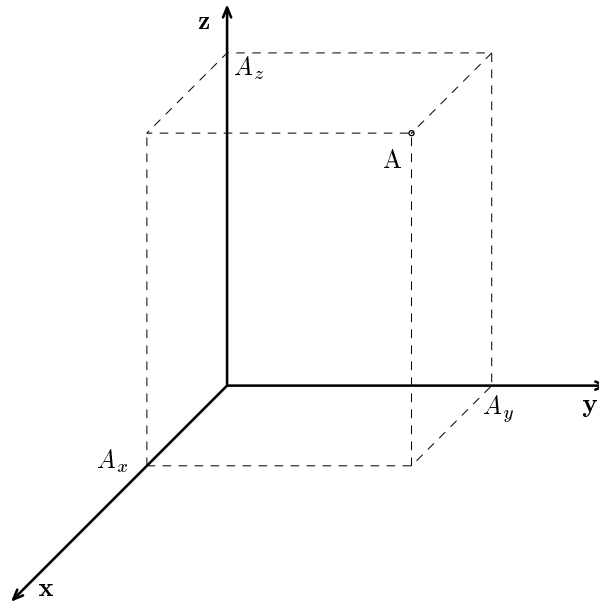
$$s = s(x, y, z),$$

vektorové funkce označíme písmeny \mathbf{v} , \mathbf{w} a mají složky

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)(x, y, z), \quad \mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)(x, y, z).$$

Tenzor druhého řádu označíme \mathbf{T} a jeho složky jsou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} (x, y, z).$$



Obrázek A.1: Kartézské souřadnice

Nyní vypíšeme složky diferenciálních operátorů užívaných v mechanice kontinua, konkrétně gradient skaláru a vektoru, konvektivní člen skaláru, vektoru a tenzoru a divergenci vektoru a tenzoru.

$$\nabla s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla w_x \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w_y \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w_z \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla T_{xx} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{xy} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{xz} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T_{yx} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{yy} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{yz} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T_{zx} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{zy} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{zz} \end{pmatrix}.$$

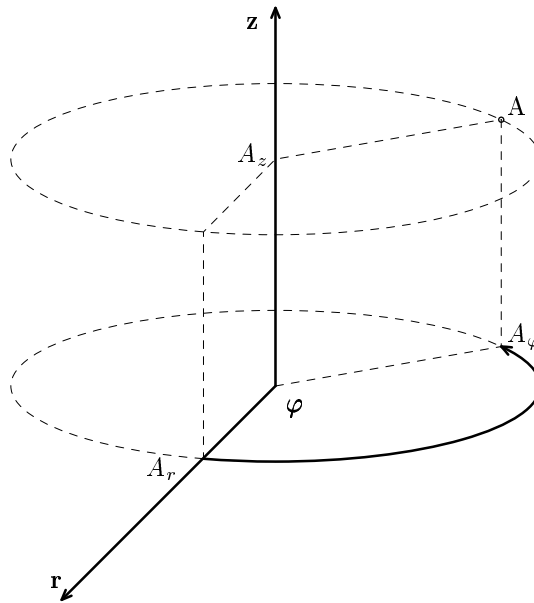
Ve dvourozměrném prostoru vypadají složky diferenciálních operátorů obdobně. Členy odpovídající z -ové složce chybí.

A.2 Válcové souřadnice

Ve válcové soustavě souřadnic je bod v trojrozměrném prostoru určen třemi souřadnicemi (viz obrázek A.2)

$$\mathbf{A} = (A_r, A_\varphi, A_z),$$

kde souřadnice r udává vzdálenost bodu od osy z , souřadnice φ udává úhel mezi zvolenou osou v rovině podstavy a průmětem průvodiče bodu do této roviny. Souřadnice z má stejný význam jako v kartézských souřadnicích.



Obrázek A.2: Válcové souřadnice

Skalární funkci závislou na všech souřadnicích označíme

$$s = s(r, \varphi, z),$$

vektorové funkce označíme písmeny \mathbf{v} , \mathbf{w} a mají složky

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)(r, \varphi, z), \quad \mathbf{w} = (w_r, w_\varphi, w_z)(r, \varphi, z).$$

Tenzor druhého řádu označíme \mathbf{T} a jeho složky jsou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\varphi} & T_{\varphi z} \\ T_{zr} & T_{z\varphi} & T_{zz} \end{pmatrix} (r, \varphi, z).$$

Vypíšeme složky diferenciálních operátorů ve válcových souřadnicích. Konkrétně gradient skaláru a vektoru, konvektivní člen skaláru, vektoru a tenzoru a divergenci vektoru a tenzoru.

$$\nabla_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_s = v_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial s}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla w_r - \frac{v_\varphi w_\varphi}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w_\varphi + \frac{v_\varphi w_r}{r} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w_z \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{T_{r\varphi} + T_{\varphi r}}{r} + \frac{\partial T_{z\varphi}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla T_{rr} - \frac{v_\varphi}{r} (T_{r\varphi} + T_{\varphi r}) & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{r\varphi} - \frac{v_\varphi}{r} (T_{\varphi\varphi} - T_{rr}) & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{rz} - \frac{v_\varphi}{r} T_{\varphi z} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T_{\varphi r} + \frac{v_\varphi}{r} (T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{\varphi\varphi} + \frac{v_\varphi}{r} (T_{\varphi r} + T_{r\varphi}) & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{\varphi z} + \frac{v_\varphi}{r} T_{rz} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T_{zr} - \frac{v_\varphi}{r} T_{z\varphi} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{z\varphi} + \frac{v_\varphi}{r} T_{zr} & \mathbf{v} \cdot \nabla T_{zz} \end{pmatrix}.$$

Příloha B

Obsah přiloženého CD

Na přiloženém CD se kromě této samotné práce nachází použité zdrojové kódy. Adresářová struktura CD je následující.

```
+---Kody
|   +---GMV
|   +---Konecne_prvky
|   |   +---amd
|   |   +---arpack
|   |   +---bin
|   |   +---blas
|   |   +---itsol
|   |   +---lapack
|   |   +---lib
|   |   +---nezavisle_koeficienty
|   |   +---splib
|   |   +---umfpack
|   |   L---zavisle_koeficienty
|   L---Matlab
|       +---Euklid
|       L---Valec
+---Vysledky_uplneho_modelu
|   +---moment_konst
|   +---moment_nekonst
|   L---video
L---Vysledky_zjednoduseneho_modelu
    +---Euklid
    L---Valec
```

Na disku je přiložen program GMV [20] pro vizualizaci výsledků. Na CD lze také nalézt kód konečných prvků napsaný v programovacím jazyku C a kódy, které byly použity pro výpočty v Matlabu. Dále obsahuje výsledky získané řešením úplného nelineárního modelu s jednou přirozenou konfigurací 3.11 a modelu se závislým koeficientem 3.13. Konkrétně se na CD nachází závislost momentu síly na čase a video obsahující závislost rychlostního pole na čase a vývoj tlaku na čase v řezu válce. Nakonec obsahuje závislosti momentu síly na čase získané zjednodušeným modelem.

Literatura

- [1] Krishnan J. M., Rajagopal K. R.: *Review of the uses and modeling of bitumen from ancient to modern times*. Applied Mechanics Reviews, 56(2):149–214, 2003.
- [2] <http://www.physics.uq.edu.au/pitchdrop/pitchdrop.shtml>.
- [3] Kratochvíl J.: *Numerical simulations of flows of visco-elastic fluid-like materials, as asphalt in particular*. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007.
- [4] Málek J., Rajagopal, K. R.: *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of their generalizations*. Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, 2: 371–459, 2006.
- [5] Málek J., Rajagopal K. R.: *Incompressible rate type fluids with pressure and shear-rate dependent material moduli*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 8(1):156–164, 2007.
- [6] Rajagopal K. R., Srinivasa A. R.: *A thermodynamic frame work for rate type fluid models*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 88(3):207–227, 2000.
- [7] Krishnan J. M., Rajagopal K. R.: *Thermodynamic framework for the constitutive modeling of asphalt concrete: Theory and Applications*. ASCE Journal of Materials in Civil Engineering, 16(2):155–166, 2004.
- [8] Rajagopal K. R., Srinivasa A. R.: *On the thermomechanics of materials that have multiple natural configurations, Part 1: Viscoelasticity and classical plasticity*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 55(5):861–893, 2004.

- [9] Rajagopal K. R., Srinivasa A. R.: *On thermomechanical restrictions of continua*. Proc. R. Soc. Lond. A, 460:631–651, 2004.
- [10] Rajagopal K. R., Tao L.: *Mechanics of mixtures*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 1995.
- [11] Samohýl J.: *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*. Academia, Praha 1982.
- [12] Kratochvíl J., Málek J., Rajagopal K. R., Srinivasa A. R.: *Modeling of the response of elastic plastic materials treated as a mixture of hard and soft regions*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 55(3):500–518, 2004.
- [13] Krishnan J. M., Rajagopal K. R.: *Triaxial testing and stress relaxation of asphalt concrete*. Mechanics of Materials, 36(9):849–864, 2004.
- [14] Krishnan J. M., Rajagopal K. R.: *On the mechanical behavior of asphalt*. Mechanics of Materials, 37(11):1085–1100, 2005.
- [15] Maršík F.: *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha 1999.
- [16] Krishnan J. M.: osobní korespondence, 2007–2008.
- [17] <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.shtml>.
- [18] Bartsch H. J.: *Matematické vzorce*. 214–218. SNTL, Praha 1983.
- [19] Hron J.: *Fluid structure interaction with applications in biomechanics*. Doktorská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2001.
- [20] <http://www-xdiv.lanl.gov/XCM/gmv/GMVHome.html>.
- [21] Schowalter W. R.: *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*. Pergamon Press Inc., New York 1978.
- [22] Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.: *Transport Phenomena, Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York 2002.