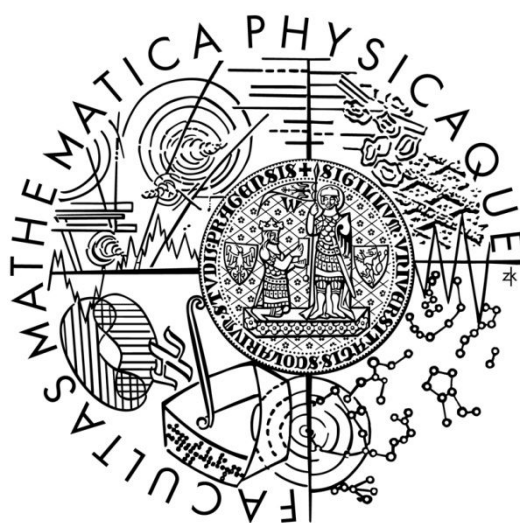


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jakub Mertl

### **Metodiky Solvency II pro neživotní pojištění**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: **Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.**

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2008

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. RNDr. Petru Mandlovi, DrSc. za jeho trpělivost, pomoc a mnoho podnětných rad, které mi poskytl během vypracování této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 8. července 2008.

Jakub Mertl

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1. Způsoby měření rizik</b>	<b>7</b>
1.1. Hodnota v riziku .....	7
1.2. Zbytková hodnota v riziku .....	10
1.3. Agregace technického rizika ze skupin pojištění .....	12
<b>2. Solventnosti II – QIS3, GDV</b>	<b>15</b>
2.1. Struktura výpočtu kapitálového požadavku .....	15
2.1.1. Linie obchodu.....	15
2.1.2. QIS 3 .....	16
2.1.3. GDV .....	17
2.2. QIS 3 - $NL_{pr}$ – pojistné riziko a riziko rezerv.....	17
2.3. QIS 3 - výpočet $NL_{pr}$ .....	18
2.3.1. Výpočet objemu pojistného.....	19
2.3.2. Výpočet směrodatné odchylky .....	20
2.3.3. Výpočet celkové směrodatné odchylky .....	25
2.4. GDV - výpočet $NL1$ .....	25
2.4.1. Stanovení směrodatné odchylky.....	27
2.5. GDV - výpočet $NL2$ .....	29
2.6. $NL_{cat}$ – neživotní katastrofické riziko .....	29
2.6.1. Výpočet podle QIS 3 .....	29
2.6.2. Výpočet podle GDV.....	30
2.7. Kapitálový požadavek neživotního pojištění .....	31
<b>3. IAA – Celkový rámec pro hodnocení solventnosti pojistitelů</b>	<b>32</b>
3.1. Faktorový model RBC.....	32
<b>4. Švýcarský solvenční test</b>	<b>36</b>
4.1. Porovnání Solventnosti II a SST .....	36
4.2. Principy a hlavní cíle SST .....	38
4.2.1. Cílový a rizikový kapitál .....	39
4.2.2. Neživotní pojištění v SST.....	40
4.2.3. Scénáře .....	42
<b>5. Numerické porovnání jednotlivých metod</b>	<b>44</b>
5.1. Data bez dostatečné historie .....	45
5.2. Data s dostatečnou historií .....	46
5.2.1. Proměnlivá směrodatná odchylka.....	47
5.2.2. Proměnlivá výše škodního poměru .....	48
5.2.3. Časová struktura škodního poměru .....	48
<b>Závěr</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>52</b>
<b>Přílohy</b>	<b>53</b>

**Název práce: *Metodiky Solvency II pro neživotní pojištění***

Autor: *Jakub Mertl*

Katedra (ústav): *Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Vedoucí diplomové práce: *Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.*

e-mail vedoucího: *petr.mandl@mff.cuni.cz, petr.mandl@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt: V předložené práci studujeme metodiky Solventnosti II týkající se neživotního pojištění. Popisujeme různé přístupy podle posledních názorů na mezinárodním poli. V první části se zabýváme způsoby měření rizik – hodnotou v riziku, zbytkovou hodnotou v riziku a nakonec obecnou agregační formulí jednotlivých skupin pojištění. Ve druhé části diskutujeme téma Solventnosti II dle současného oficiálního návrhu. Podrobně vycházíme z poslední dopadové studie QIS 3. Tato kapitola také obsahuje popis metodiky navržené Německou asociací pojistitelů (GDV). Další kapitola je zaměřena na americký přístup a faktorový model. Poté uvádíme Švýcarský solvenční test (SST) a jeho specifika pro neživotní pojištění. V poslední kapitole se věnujeme konkrétním výpočtům na předložených modelech a zkoumáme jejich silné a slabé stránky.

Klíčová slova: Solvency II, Solventnost II, neživotní pojištění, Švýcarský solvenční test

Title: *Solvency II Methods for Non Life Insurance*

Author: *Jakub Mertl*

Department: *Department of Probability and Mathematical Statistics*

Supervisor: *Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.*

Supervisor's e-mail address: *petr.mandl@mff.cuni.cz, petr.mandl@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract: In the present work we study the methods of Solvency II for non-life insurance. We describe different approaches according to the latest world opinions. In the first part we deal with the concept of measuring risk – Value at Risk, Tail Value at Risk and finally with the general aggregation formula of each line of business. In the second part we discuss the theme of Solvency II itself according to the contemporary official proposal. We deal with the last quantitative impact study QIS 3 in detail. This chapter also includes a description of methods drafted by German Association of Insurers (GDV). The next chapter focuses on the American approach and the factor based model. In the next section we mention Swiss Solvency Test (SST) and its specifics for non-life insurance. In the last chapter we dedicate our attention to the particular computation on the present models and we explore their strong and weak points.

Keywords: Solvency II, non-life insurance, Swiss Solvency Test

## Úvod

Solventnost II (Solvency II) je projekt zaměřený na tvorbu nového systému v oblasti regulace pojišťovnictví v celé Evropské unii. Jedná se o velmi radikální změnu iniciovanou Evropskou komisí. Tento koncept by měl dokázat zohlednit všechny typy rizik, které pojišťovna podstupuje, a také závislosti mezi nimi. Solventnost II se proto nezaměřuje pouze na pojistné riziko, ale i na ostatní rizika – tržní, úvěrové, operační a jiné.

Výstavba Solventnosti II je založena na tří-pilířovém systému. První pilíř obsahuje kvantitativní požadavky. Hlavním bodem je stanovení solvenčního nebo také požadovaného (SCR) a minimálního kapitálového požadavku (MCR). Solvenční kapitálový požadavek je založen na principu hodnoty v riziku za určité období. Minimální kapitálové požadavky jsou určitou stanovenou hranicí, pod kterou by neměl kapitál poklesnout. Pokud se kapitál dostane pod tuto hranici, musí regulátor zasáhnout. Mělo by být dodrženo pravidlo, že  $MCR \leq SCR$ .

Druhý pilíř je zaměřen na kvalitativní požadavky – především řízení rizik, vnitřní kontrolu či principy dohledu. Třetí pilíř obsahuje požadavky na transparentnost systému a povinnosti zveřejňování informací dalším subjektům.

Projekt Solventnosti II byl započat podnětem Evropské komise. Jeho snahou je nahradit stávající systém Solventnost I, který je v platnosti již od 70. let. Za celou dobu vývoje Solventnosti II vzniklo již mnoho podob. Nyní se nacházíme v druhé fázi projektu, která je zaměřena převážně na technickou stránku věci a přesnou kalibraci systému.

Pomocným orgánem Evropské komise je v této otázce Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS). Pod vedením tohoto výboru se již uskutečnily tři kvantitativní dopadové studie. Poslední z nich byla mimo jiné zaměřena na finální kalibraci SCR a MCR. V současné době probíhá čtvrtá kvantitativní studie.

Proces vzniku Solventnosti II je zdánlivě velmi dlouhý, ale jeho cílem je dosáhnout opravdu kvalitního a fungujícího systému. Nyní se již blížíme do závěrečné fáze, přesto je stále co dohánět, neboť i v současných návrzích se vyskytuje dostatek kontroverzních témat.

Jelikož koncept Solventnosti II má představovat ucelený náhled na stav pojišťoven, není možné v této práci rozebrat všechny jeho součásti. Zaměříme se na jeho pojistně-matematickou část týkající se vykazování solventnosti neživotního pojištění. V práci budou popsány kapitálové požadavky pro daná pojistná rizika neživotního pojištění. Jelikož názory na tuto problematiku nejsou jednotné, předložíme i další modely a návrhy, o kterých je diskutováno.

První kapitola bude věnována poměrně základnímu tématu, nicméně klíčovému pro problematiku měření rizik. Bude se jednat o hodnotu v riziku (VaR) a zbytkovou hodnotu v riziku (TVaR). Tuto kapitolu věnovanou způsobům měření rizik zakončíme popisem standardní agregační formule.

Ve druhé části se budeme věnovat návrhu Solventnosti II, který předložil Evropský parlament a Rada Evropské unie. Především bude kladen důraz na třetí kvantitativní dopadovou studii QIS 3. Tento výklad bude doplněn komentáři z dokumentu Německé asociace pojistitelů GDV (Der Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft). V další kapitole se podíváme na případovou studii vytvořenou pracovní skupinou při IAA (International Actuarial Association).

Ve čtvrté části se budeme věnovat Švýcarskému solvenčnímu testu. V této zemi vývoj započal později než projekt Solventnosti II, přesto je již od roku 2006 systém v provozu. Je založen na poněkud jiných principech, a tak bude zajímavé porovnat oba přístupy.

V poslední části provedeme konkrétní výpočty na výše zmíněných modelech. Ukážeme rozdíly mezi jednotlivými přístupy, zvláště pak s ohledem na dostupnost dat z minulosti. K výpočtu bude použit software Mathematica. Přestože není tento software pro výpočet zcela nezbytný, ukázal se jako jeden z nejvýhodnějších.

# 1. Způsoby měření rizik

V první kapitole se budeme zajímat o ukazatele, které jsou nejběžněji používané při měření rizik. Prvním z nich je ukazatel *hodnota v riziku*, který je v současné době ve světě velmi rozšířený. Pokusíme se rozebrat jeho výhody i nevýhody. Obdobně tak učiníme i pro ukazatel *zbytkové hodnoty v riziku*. Na konci této kapitoly se zaměříme na agregační formuli mezi jednotlivými skupinami pojištění.

Hodnotu v riziku a zbytkovou hodnotu v riziku jsme do této kapitoly nezařadili bezdůvodně. Právě tyto dva způsoby měření rizik byly navrženy k diskusi při výpočtech v Solventnosti II. Myšlenky této kapitoly jsou převážně čerpány z textu Německé asociace pojistitelů GDV [ 8 ], Annex 1, která se k těmto problémům podrobně vyjadřuje.

## 1.1. Hodnota v riziku

Hodnota v riziku (VaR, Value at Risk) je velmi důležitým pojmem, který je třeba vysvětlit v souvislosti s měřením velikosti rizika. Je navržena jako základní míra ve vykazování solventnosti ve standardním modelu. Tento fakt však ještě donedávna nebyl takovou samozřejmostí. Hodnota v riziku svedla pomyslný boj se zbytkovou hodnotou v riziku (viz další kapitola). Navzdory Mezinárodní aktuárské asociaci (IAA), která se kloní ke zbytkové hodnotě v riziku, to nyní vypadá, že pro výpočet Solventnosti II bude opravdu v platnosti hodnota v riziku.

*Definice 1: Hodnota v riziku*

Hodnota v riziku kvantifikuje maximální možnou ztrátu, která nebude překročena se zvolenou pravděpodobností  $\alpha$  v určitém časovém horizontu.

$$(1) \quad VaR_{\alpha}(S) = \inf\{x \mid F_S(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \mid P(S > x) \leq 1 - \alpha\}, \text{ kde } 0 < \alpha < 1$$

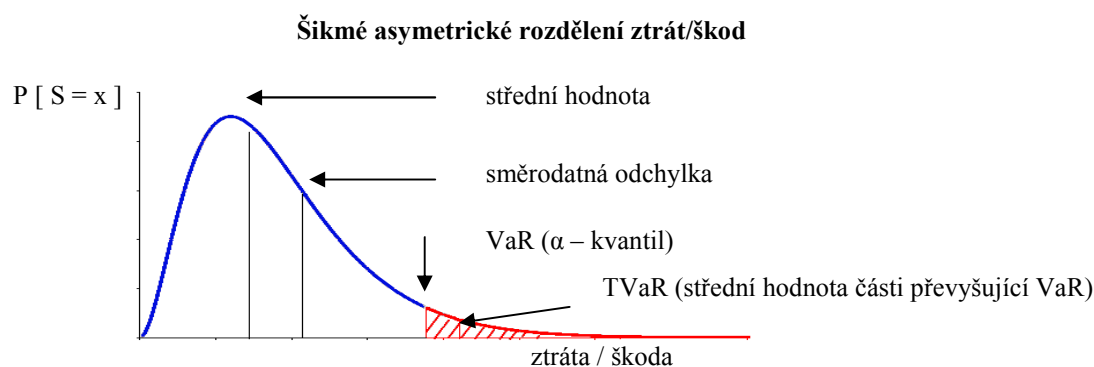
a  $F_S$  je distribuční funkce škod  $S$  za zvolené období.

Jinými slovy hodnotu v riziku můžeme vyjádřit jako minimální možnou ztrátu, kterou můžeme utrpět u  $(1 - \alpha)\%$  nejhorších případů v daném časovém horizontu. Co se týče výpočtu solventnosti, za daný časový horizont se bere v úvahu jeden rok. Hodnota  $\alpha$  je přijatelná od 95%, nejlépe však 99% či dokonce 99,5% (více porovnání VaR a TVaR).

Podle definice 1 i obrázku 1 se na první pohled může zdát, že hodnota v riziku poskytuje dokonalou informaci o výši možné ztráty. Hodnota v riziku udává jedno číslo, které je založeno na výši kvantilu distribuční funkce škod. Z laického pohledu je velmi poutavé mít

jeden výsledek, který vyjadřuje výši rizika a navíc přímo v peněžních jednotkách. Na druhou stranu nezohledňuje chování rozdělení škod za tímto kvantilem.

Výpočet hodnoty v riziku je založen na pravděpodobnostní bázi a umožňuje agregaci rizik, jak ukážeme později. Zde je nutné poznamenat, že tato agregace je možná, pokud budeme agregovat dílčí hodnoty v riziku se stejnou hladinou  $\alpha$ .



**Obrázek 1 - Hodnota VaR a TVaR pro asymetrické rozdělení ztrát**

Na druhou stranu musíme být opatrní při interpretaci. Jediný získaný výsledek může být velmi zavádějící. Mezi hlavní nevýhody, které nás nutí k obezřetnosti, patří zajisté následující body:

- VaR necharakterizuje velmi málo pravděpodobné ztráty,
- VaR není subaditivní míra,
- VaR neobsahuje výhled do budoucna.

Na první pohled by se mohlo zdát, že hodnota v riziku charakterizuje velmi málo pravděpodobné ztráty. Pokud se podíváme například na definici, zjistíme, že se v ní hovoří pouze o ztrátách, které utrpíme do určité stanovené hladiny pravděpodobnosti. Do této hladiny známe předpokládanou výši ztrát. Zatímco o tom, co se děje nad tuto hladinu, neříká definice a tím pádem ani hodnota v riziku nic. Může se stát, že se v této části vyskytuje velmi vysoká ztráta, která výrazně převyšuje hodnotu v riziku. Z toho plyne, že s velmi malou pravděpodobností může nastat extrémní ztráta i přes poměrně optimistickou hodnotu v riziku. Navíc může nastat situace, že máme dvě škodní rozdělení, která mají stejnou hodnotu v riziku, ale rozdílnou maximální nepravděpodobnou ztrátu. Měli bychom jim přiřadit stejnou hodnotu ukazatele rizika? Odpověď je jednoduchá, rozhodně ne.



K objasnění druhého bodu nejprve definujeme koherentní míru rizika, neboť subaditivita je jedním ze čtyř požadavků této definice a hodnota v riziku ji nesplňuje. Touto mírou se zabývali autoři Artzner, Delbaen, Eber a Heath [ 1 ].

*Definice 2: Koherentní míra rizika*

Uvažujme množinu  $V$  reálných náhodných veličin. Funkce  $\rho: V \rightarrow \mathfrak{R}$  se nazývá koherentní míra rizika, pokud splňuje následující vlastnosti pro  $X, Y \in V$ :

- (i) monotónnost:  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- (ii) subaditivita:  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- (iii) pozitivní homogenita:  $\lambda > 0: \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- (iv) translační invariance:  $a \in \mathfrak{R}: \rho(X + a) = \rho(X) + a$

Bod (i) se týká velikosti rizika. Pokud máme jedno riziko větší než druhé, musí tuto vlastnost zachovat i míra rizika. Tento bod hodnota v riziku splňuje.

Důkaz (i): Necht'  $X, Y \in L(\Omega, \mathcal{A}, P)$  takové, že  $X \leq Y$ . Vzhledem k monotonii distribuční funkce platí následující

$$(2) \quad X \leq Y \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(Y \leq x) \Rightarrow \{P(X \leq x) \geq \alpha\} \subseteq \{P(Y \leq x) \geq \alpha\}.$$

Přechodem k infimu pro  $x$  a použitím definice hodnoty v riziku dostaneme požadované.  $\square$

Bod (ii) nám říká, že hodnota součtu rizik by měla být menší nebo rovna součtu rizik odděleně. To znamená, že by neměla nastat situace, kdy pouhým dělením rizik dosáhneme zmenšení celkového rizika. Tato vlastnost není hodnotou v riziku obecně splněna. Ale platí za předpokladu, že rozdělení zisku a ztrát jde popsat normálním rozdělením (obecně eliptickým rozdělením). Proto se hodnota v riziku nepovažuje za koherentní rizikovou míru.

Bod (iii) se týká násobení libovolným nezáporným parametrem a poslední bod (iv) zahrnutí zaručeného zisku  $a$ . Obě tyto vlastnosti hodnota v riziku splňuje.

Důkaz: (iii) Necht'  $X \in L(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $\lambda \geq 0$ . Použitím definice hodnoty v riziku

$$(3) \quad \begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= \inf\{x \mid P(\lambda X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{\lambda y \mid P(\lambda X \leq \lambda y) \geq \alpha\} = \\ &= \lambda \inf\{y \mid P(X \leq y) \geq \alpha\} = \lambda VaR_\alpha(X). \end{aligned}$$

(iv) Necht'  $X \in L(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $a \geq 0$ . Opět použitím definice dokážeme požadované

$$(4) \quad \begin{aligned} VaR_\alpha(X + a) &= \inf\{x \mid P(X + a \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{y + a \mid P(X + a \leq y + a) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{y \mid P(X \leq y) \geq \alpha\} + a = VaR_\alpha(X) + a. \end{aligned}$$

$\square$

Další nevýhoda hodnoty v riziku se týká převážně finančních trhů, které se neustále mění a reagují na vývoj v ekonomice i dalších sektorech. Na těchto trzích může docházet k překotným změnám, které mohou ovlivnit, že hodnota v riziku neposkytne odpovídající výsledky.

Uvedli jsme některé vlastnosti hodnoty v riziku. Ostatně jako na jiné míry rizika i na tento ukazatel panují různé názory. V některých institucích se od něj upouští a používají se jiné ukazatele. Některé instituce získávají lepší informace použitím hodnoty v riziku pro různé pravděpodobnostní hladiny. I přes některé nepříznivé vlastnosti, nesmíme zapomenout, že je nejpoužívanějším ukazatelem a možná i proto byl zvolen jako hlavní nástroj ve výpočtech Solventnosti II.

## 1.2. Zbytková hodnota v riziku

Druhým přístupem k měření rizik je použití zbytkové hodnoty v riziku (TVaR, Tail Value at Risk). Někdy bývá také označována jako Conditional Value at Risk (CVaR) nebo také Mean Excess Loss. Tato hodnota má příznivější matematické vlastnosti. Pflug [ 17 ] dokázal, že zbytková hodnota v riziku má subaditivní vlastnost a je konvexní. Jelikož splňuje i další body z definice, je koherentní mírou.

Zbytková hodnota v riziku je podmíněná očekávaná ztráta převyšující hodnotu v riziku

$$(5) \quad TVaR_\alpha(X) = E[X \mid X > VaR_\alpha(X)].$$

Pro spojité rozdělení můžeme zbytkovou hodnotu vyjádřit následovně

$$(6) \quad TVaR_\alpha = VaR_\alpha + E[X - VaR_\alpha \mid X > VaR_\alpha]$$

$$(7) \quad TVaR_\alpha = VaR_\alpha + \frac{\int_{VaR_\alpha}^{\infty} (x - VaR) dF(x)}{1 - F(VaR)} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} x dF(x).$$

Zbytková hodnota v riziku je opatrnější než „obyčejná“ hodnota v riziku, neboť bere ohled i na výši škod převyšující kritickou hladinu. Ze vzorce ( 6 ) vidíme, že zbytková hodnota v riziku při stejné hladině spolehlivosti je vždy větší než hodnota v riziku, neboť podmíněná střední hodnota bude vždy větší nebo rovná nule. Vhodnou volbou hladin pro VaR, resp. TVaR můžeme dosáhnout rovnost těchto hodnot. Uvedeme odvození pro normované normální rozdělení pro hladiny  $\varepsilon$  a  $\delta$ .

Hodnoty získáme úpravou vzorce ( 7 ), do kterého dosadíme hustotu normálního rozdělení  $\varphi(x)$ . Navíc využijeme toho, že víme, jak vypadá hodnota v riziku pro toto rozdělení. Pro hladinu  $1 - \delta$  je dána kvantilem normálního rozdělení  $z_{1-\delta}$ .

$$(8) \quad TVaR_{1-\delta} = \frac{1}{\delta} \int_{z_{1-\delta}}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{z_{1-\delta}}^{\infty} = \frac{e^{-\frac{z_{1-\delta}^2}{2}}}{\delta\sqrt{2\pi}} = \frac{\varphi(z_{1-\delta})}{\delta}$$

Zvolíme-li hladinu  $\delta$  pro TVaR, pak hodnotu  $\varepsilon$  pro VaR dopočteme pomocí distribuční funkce normálního rozdělení

$$(9) \quad \varepsilon = 1 - \Phi\left(\frac{\varphi(z_{1-\delta})}{\delta}\right).$$

Pokud za  $\delta$  dosadíme konkrétní hodnoty, dostaneme výsledky v tabulce 1. Pro zvolené  $\delta$  musíme volit menší  $\varepsilon$ , což je v souladu s předchozím tvrzením, že zbytková hodnota v riziku je vždy větší nebo rovna hodnotě v riziku při stejné hladině spolehlivosti.

$\delta$	$1 - \delta$	$\varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$TVaR_{1-\delta} = VaR_{1-\varepsilon}$
0,050	0,950	0,0196	0,9804	2,06271
0,025	0,975	0,0097	0,9903	2,33780
0,010	0,990	0,0038	0,9962	2,66521
0,005	0,995	0,0019	0,9981	2,89195

**Tabulka 1 – porovnání hladin významnosti pro rovnost VaR a TVaR, výpočet Mathematica**

Mezi nevýhody jistě patří, že k určení této hodnoty musíme znát rozdělení i pro málo pravděpodobné škody. Tento předpoklad není vždy dobře splněn (způsobeno převážně nedostatkem dat), a tak do modelu vnášíme nový druh rizika – odhadnutí modelu. V praxi to při výpočtu zbytkové hodnoty může být velmi nevýhodné.

Na závěr těchto dvou kapitol uvedeme přehled základních vlastností.

Vlastnost	VaR	TVaR
Koherentní míra	NE	ANO
Interpreovatelnost z „laického“ pohledu	„snazší“ zajímá se jen o jednu konkrétní nejhorší škodu	„obtížnější“ - potřeba matematických základů zajímá se o průměrnou výši určitého počtu nejhorších škod
Data k výpočtu	lépe dostupná	možnost nedostatku dat extrémních hodnot
Využití	více pojišťovny	více zajišťovny – širší použití interní modely

**Tabulka 2 – porovnání Var a TVaR**

Co se týče Solventnosti II, o volbě rizikové míry byly vedeny velké diskuze. V současné době jsou modely založeny na hodnotě v riziku a hladině 99,5% s horizontem jednoho roku. Vzhledem k současnému vývoji již pravděpodobně hlavním ukazatelem zůstane. Autorům předkládaného návrhu se jedná hlavně o jednoduchou a transparentní metodu, která poskytne odpovídající výsledky. Proto se jim jako lepší alternativa jeví hodnota v riziku. Možnost použít zbytkovou hodnotu v riziku se však otevírá u interních modelů. Mezi země používající zbytkovou hodnotu v riziku jako základní míru patří Švýcarsko. Ostatní země prozatím používají hodnotu v riziku.

### 1.3. Agregace technického rizika ze skupin pojištění

V této části se zaměříme na agregaci technického rizika. V souladu s návrhem Solventnosti II budeme agregovat riziko na základě hodnoty v riziku. Odvození uvedeno v GDV [ 8 ]. Pokud budeme mít celkovou ztrátu  $X$ , hodnotu v riziku získáme vyjádřením z definice jako kvantil příslušné distribuční funkce na zvolené hladině  $(1 - \alpha)$ .

$$(10) \quad VaR = F^{-1}(1 - \alpha).$$

Obecný vzorec pro agregaci jednotlivých skupin či linií obchodu odvodíme s předpokladem přiblížení mnohorozměrnému normálnímu rozdělení. Mějme  $n$  závazků  $X_i$  se středními hodnotami  $\nu_i$ , rozptylem  $\sigma_i^2$  a korelací mezi nimi  $\rho_{ij}$ . V [ 8 ] vyjadřují střední hodnotu se záporným znaménkem  $-\mu_i$ . V případě závazku je  $\mu_i$  záporné a tedy  $-\mu_i$  znamená navýšení hodnoty v riziku. Pro jednodušší pochopení budeme v našem odvození používat parametr kladný  $\nu_i$  znamenající výši závazku v kladných hodnotách.

Pro výše uvedených  $n$  závazků můžeme celkovou výši ztráty vyjádřit jako součet dílčích ztrát, stejně tak pro střední hodnoty. Vzorec ( 13 ) je určen dle vlastnosti součtu rozptylů.

$$(11) \quad X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$(12) \quad \nu = \sum_{i=1}^n \nu_i$$

$$(13) \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}.$$

Dále pro zjednodušení zápisu budeme pracovat se směrodatnými odchylkami  $\sigma_i^2 = \sigma_i \sigma_i$  a korelací  $\rho_{ii} = 1$ .

Pokud uvažujeme distribuční funkci celkové ztráty  $X$  odpovídající normálnímu rozdělení s kvantilem  $q_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ , použitím ( 10 ) lze hodnotu v riziku vyjádřit následovně

$$(14) \quad VaR = q_{1-\alpha} \sigma + \nu.$$

Dosazením z ( 12 ) a ( 13 ) dostáváme

$$(15) \quad VaR = q_{1-\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} + \sum_{i=1}^n \nu_i$$

$$(16) \quad VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (q_{1-\alpha} \sigma_i + \nu_i - \nu_i)(q_{1-\alpha} \sigma_j + \nu_j - \nu_j) \rho_{ij}} + \sum_{i=1}^n \nu_i$$

$$(17) \quad VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (VaR_i - \nu_i)(VaR_j - \nu_j) \rho_{ij}} + \sum_{i=1}^n \nu_i.$$

Vzorec ( 17 ) je důležitým vzorcem pro agregaci jednotlivých hodnot v riziku do celkové hodnoty. Nesmíme zapomenout, že tato agregace má smysl pouze pro stejnou hodnotu  $\alpha$  pro všechny skupiny pojištění, neboť můžeme srovnávat pouze odpovídající hodnoty v riziku.

Pomocí vzorce ( 17 ) lze také dokázat, že pro  $\alpha < 0,5$  hodnota v riziku splňuje subaditivitu, tj. druhé kritérium v definici koherence rizika.

Důkaz: Potřebujeme dokázat, že pro hladinu  $\alpha < 0,5$  platí

$$(18) \quad VaR \leq \sum_{i=1}^n VaR_i.$$

Upravíme obě strany nerovnosti s využitím ( 17 ) a ( 14 )

$$(19) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (VaR_i - \nu_i)(VaR_j - \nu_j) \rho_{ij}} + \sum_{i=1}^n \nu_i \leq \sum_{i=1}^n (q_{1-\alpha} \sigma_i + \nu_i),$$

$$(20) \quad q_{1-\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \leq q_{1-\alpha} \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Nyní bychom mohli nerovnici vydělit kvantilem  $q_{1-\alpha}$ . Pochopitelně chceme zajistit, aby nerovnost stále platila. To znamená, že kvantil musí být větší než nula. Vzhledem k symetrickému normálnímu rozdělení tato situace nastává pro  $\alpha < 0,5$ . Rovnici vydělíme a získáme

$$(21) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Tuto nerovnici můžeme nakonec umocnit (výraz na pravé straně je vždy nezáporný). A tím získáme požadované

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j.$$

Tento vztah je splněn vždy, neboť korelace je vždy menší nebo rovna jedné. To pro  $\alpha < 0,5$  dokazuje původní nerovnost. Rovnost nastává v případě, že všechny korelace jsou rovné jedné.

□

## 2. Solventnosti II – QIS3, GDV

Druhá kapitola se bude věnovat solvenčnímu požadavku neživotního pojištění založenému na dvou podobných přístupech. První z nich je technická specifikace kvantitativní dopadové studie 3 (QIS 3 [ 6 ]), která je v souladu s návrhem Evropského parlamentu a Rady nazvaným „O přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu“ ze dne 10. 7. 2007. Druhý návrh je popsán v Discussion Paper for a Solvency II od Německé asociace pojistitelů Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft GDV [ 8 ].

### 2.1. Struktura výpočtu kapitálového požadavku

Než se pustíme do samotného tématu neživotního pojištění, popíšeme strukturu výpočtu obou návrhů, abychom se v celé problematice lépe orientovali. Schéma rozdělení a agregace rizik se stále s časem vyvíjí. Skupiny rizik jsou modifikovány, vytvářeny či přesouvány do jiných částí výpočtu solvenčního požadavku. Tyto změny mají vliv na výsledek, ale žádná z těchto změn však nemá zásadní vliv na způsob výpočtu.

#### 2.1.1. Linie obchodu

Linie obchodu (Line of Business, LoB) jsou prvním pojmem, který je potřeba vysvětlit v souvislosti s výpočtem solventnosti. Jak již název sám napovídá, jedná se o různá odvětví pojištění. Každý výpočet solventnosti musí tento způsob diversifikace obsahovat. Není možné každému odvětví přiřadit stejné parametry výpočtu, a právě proto je zavedeno toto dělení.

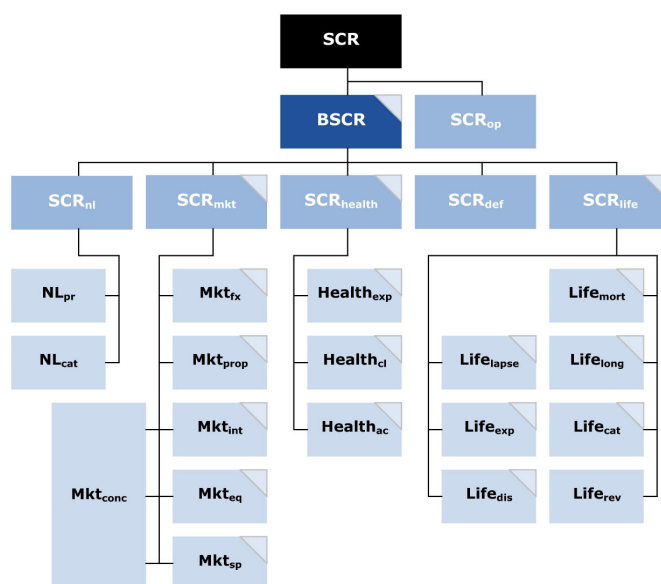
Podobně jako se vyvíjí názory na způsoby výpočtu solvenčního požadavku, prochází vývojem i linie obchodu. Zatímco v QIS1 a QIS2 se setkáváme pouze s jedenácti liniemi obchodu (jednou z nich je zajištění), v QIS3 již nalzáme 15 linií obchodu, z nichž tři jsou věnovány zajištění.

Pochopitelně je těžké přizpůsobit počet linií obchodu různým zemím v celé Evropě. Například v Německu používají 24 linií obchodu. Ve Švýcarsku jich nalezneme jen 12. Zde uvádíme linie obchodu, tak jak byly navrženy pro QIS3.

- Accident and health - workers compensation
- Accident and health - health insurance
- Accident and health - others/default
- Motor, third party liability
- Motor, other classes
- Marine, aviation and transport
- Fire and other damage to property
- Third-party liability
- Credit and suretyship
- Legal expenses
- Assistance
- Miscellaneous non-life insurance
- NP reins property
- NP reins casualty
- NP reins MAT

### 2.1.2. QIS 3

Celý výpočet QIS 3 nejlépe znázorníme pomocí obrázku 2. Velmi přehledně zobrazuje strukturu všech rizik a je z něj i patrná postupná agregace solvenčního požadavku. Na vrcholu je výsledná hodnota kapitálového požadavku, kterou získáme součtem základního solvenčního kapitálového požadavku s operačním požadavkem. Operačním rizikem se v tomto případě rozumí riziko ztráty vyplývající z nedostatečnosti, selhání interních procesů, pracovníků a systémů nebo z vnějších událostí. Výpočet tohoto rizika se oproti minulosti mírně změnil a stejně tak ve výpočtu QIS 4. Navíc do tohoto nového návrhu byl přidán nový efekt, a to úprava o absorpci rizika dělení budoucích zisků a odložených daní. Jinak schéma ve QIS 4 zůstalo beze změny.



**Obrázek 2 – Schéma kapitálových požadavků Solventnosti II, převzato z technické specifikace QIS 3 [ 6 ]**

Nižším stupněm je agregace solvenčních požadavků všech hlavních skupin pojištění (neživotní riziko, životní riziko, zdravotní riziko, tržní riziko a kreditní riziko). K tomuto účelu se používá obecná agregační formule popsána v předchozí kapitole s korelační maticí v příloze D.

Jednotlivá hlavní rizika se skládají ještě z dílčích rizik. Každé z nich má své specifické vlastnosti a popisování všech těchto rizik není možné zahrnout do této práce. Naším úkolem je soustředit se na problematiku neživotního pojištění, a tak se v dalších kapitolách budeme věnovat v obrázku 2 sloupci nalevo. Vidíme, že se skládá ze dvou položek, a to kapitálového požadavku pojistného rizika a rizika rezerv (premium and reserve risk) a neživotního katastrofického rizika (catastrophe risk).



### 2.1.3. GDV

Jak jsme již naznačili na začátku, jednotlivé struktury se od sebe příliš neliší. GDV rozeznává šest základních skupin.

- G1 – investiční riziko: úvěrové riziko, tržní riziko, úrokové riziko a riziko měnové
- G2 – operační riziko
- L – rizika životního pojištění
- NL1 – rizika neživotního pojištění: riziko pojistného a rezerv
- NL2 – riziko selhání zajistitele
- H – rizika nemocenského pojištění

Tato rizika se ve výsledku kombinují již popsanou agregační formulí v první kapitole ( 17 ). Pokud nás tato formule bude zajímat jen pro neživotní pojištění, do kterého se uvažuje i kategorie G1 a G2, výsledek je následující

$$(23) \quad SCR = \sqrt{\left[ \begin{array}{l} (SCR_{G1} + EG_1)^2 + SCR_{G2}^2 + SCR_{NL1}^2 + SCR_{NL2}^2 + \\ (SCR_{G1} + EG_1)(SCR_{G2} + SCR_{NL1} + SCR_{NL2}) + \\ SCR_{G2}(SCR_{NL1} + SCR_{NL2}) + SCR_{NL1}SCR_{NL2} \end{array} \right]} - EG_1.$$

Tento výsledek obdržíme z agregační formule, pokud uvažujeme korelace mezi všemi skupinami pojištění  $\rho_{ij} = 0,5, i \neq j$ . Proměnná  $EG_1$  představuje očekávaný výnos z investic.

### 2.2. QIS 3 - $NL_{pr}$ – pojistné riziko a riziko rezerv

Pojistná rizika a rizika rezerv jsou hlavním zdrojem rizika v neživotním pojištění. Ve směrnici Evropského parlamentu [ 14 ] je uvedeno, že se pro tato rizika tvoří následující kapitálové požadavky:

*„Kapitálové požadavky rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajícího z kolísání načasování, četnosti a závažnosti pojistných událostí a načasování a výše částek na likvidaci pojistných událostí.“*

Pod pojmem pojistného rizika rozumíme takové riziko, které je způsobeno většími výdaji a objemem ztrát, než jaké je obdržené pojistné. Riziko rezerv, jak již název napovídá, se týká nedostatečných rezerv. Jedná se tedy o nedostatečné krytí již nastalých škod, což může být zapříčiněno špatným odhadem rezerv nebo to také plyne z povahy náhodnosti budoucích závazků.

### 2.3. QIS 3 - výpočet $NL_{pr}$

Nyní se podíváme na konkrétní návrh výpočtu uvedený v QIS 3 [ 6 ]. Tento návrh vychází ze zkušeností a výsledků QIS 2. V návrhu QIS 4 probíhá výpočet velmi podobně, ovšem je navíc zahrnuta zeměpisná diversifikace. Toto geografické rozlišení se objevuje v průběhu celého výpočtu. V této práci se omezíme na původní model, tak jak je navržen v QIS 3. K výpočtu potřebujeme znát následující hodnoty (ponecháno původní značení).

$PCO_{lob}$  nejlepší odhad závazků pro každou LoB

$P_{lob}^{t, \text{předepsané}}$  odhad předepsaného pojistného následujícího roku pro všechny LoB

$P_{lob}^{t-1, \text{předepsané}}$  předepsané pojistné za poslední rok pro všechny LoB

$P_{lob}^{t, \text{zasloužené}}$  odhad zaslouženého pojistného následujícího roku pro všechny LoB

$P_{lob}^{y, \text{zasloužené}}$  zasloužené pojistné z minulých let  $y = t-1, t-2, \dots, t-n$

$n_{lob}$  počet známých minulých let pro jednotlivé linie obchodu, nejvíce však 15, v QIS 4 je tato maximální hodnota upravena na 5, 10 nebo 15 let, dle typu linie obchodu

$LR_{lob}^y$  (loss ratio) škodní poměr pro každou LoB z minulých let  $y = t-1, t-2, \dots, t-n$ . Tento poměr se spočte jako vzniklé závazky dělené zaslouženým pojistným. Počítá se na konci roku a pro každou LoB.

Kapitálový požadavek je určen vzorcem ( 24 ), kde  $V$  je objem zohledňující výše  $PCO_{lob}$  a  $P_{lob}^y$  (viz dále),  $\sigma$  směrodatná odchylka a  $q_{N,0,995}$  je kvantil normálního rozdělení.

$$(24) \quad NL_{pr} = \left[ \frac{\exp\left(q_{N,0,995} \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \right] V$$

Část vzorce obsažená v hranaté závorce je odvozena za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení a v souladu s hodnotou v riziku na hladině 99,5%. Jelikož odvození tohoto vzorce není na první pohled zřejmé a není nikde v zadání QIS 3 uvedeno, naznačíme tento postup zde. Víme, že se má jednat o kvantil logaritmicko-normálního rozdělení. Uvažujme-li  $LN(\nu; \tau)$ , potom kvantil tohoto rozdělení vypadá následovně

$$(25) \quad q_{LN,1-\alpha} = \exp(\nu + q_{N,1-\alpha} \tau).$$

Autoři vycházejí ze vztahu rovnosti střední hodnoty a rozptylu s momenty logaritmicko-normálního rozdělení  $LN(\nu; \tau)$ . Vyjádříme parametry logaritmicko-normálního rozdělení ze soustavy těchto rovností

$$(26) \quad \exp\left(\nu + \frac{\tau^2}{2}\right) = \mu$$

$$(27) \quad \exp(2\nu + \tau^2)(\exp(\tau^2) - 1) = \sigma^2.$$

Úpravou dostaneme

$$(28) \quad \nu = -\ln \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1}$$

$$(29) \quad \tau = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right)}.$$

Jelikož se závorka týká jednotkového objemu, položíme střední hodnotu rovnu jedné. Pokud nyní vzorce (28) a (29) dosadíme do rovnice (25), dostaneme již hledaný vzorec v hranaté závorce.

Rovnice (24) se dá ještě upravit do podoby, kterou lze lépe interpretovat

$$(30) \quad 1 + \frac{NL_{pr}}{V} = \frac{\exp\left(q_{N,0,995} \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}}.$$

Na levé straně máme vyjádření, o kolik vzroste hodnota jednotkového objemu v případě započtení kapitálového požadavku. Na pravé straně máme kvantil logaritnicko-normálního rozdělení s parametry (28) a (29), které jsou odvozeny pro střední hodnotu 1 a rozptyl  $\sigma^2$ . Jak víme z předchozí části, tento kvantil odpovídá hodnotě v riziku.

### 2.3.1. Výpočet objemu pojistného

Výpočet hodnot objemu pojistného a směrodatné odchylky probíhá ve dvou krocích. Nejprve se potřebné hodnoty spočítají pro jednotlivé linie obchodu a v druhém kroku se spojí dohromady.

$V_{(prem,lob)}, V_{(res,lob)}$  objem pojistného rizika, respektive rizika rezerv

$\sigma_{(prem,lob)}, \sigma_{(res,lob)}$  směrodatná odchylka pojistného rizika, respektive rizika rezerv

Výpočet objemu rizika rezerv je stanoven pouze přiřazením rezerv na pojistná plnění  $PCO_{lob}$

$$(31) \quad V_{(res,lob)} = PCO_{lob}.$$

Objem rizika pojistného je dán vztahem

$$(32) \quad V_{(prem,lob)} = \max\left(P_{lob}^{t, \text{předešlé}}, P_{lob}^{t, \text{zasloužené}}, 1,05 \cdot P_{lob}^{t-1, \text{předešlé}}\right).$$

Ve druhém kroku získáme celkový objem jako součet objemů obou složek rizik přes všechny linie obchodu

$$(33) \quad V = \sum_{lob} (V_{(prem,lob)} + V_{(res,lob)}).$$

### 2.3.2. Výpočet směrodatné odchylky

Výpočet směrodatné odchylky pojistného rizika je dán vzorcem kredibilitní kombinace vlastních a tržních odhadů směrodatné odchylky. Obě hodnoty jsou váženy kredibilitním násobitelem, jehož velikost je závislá na délce dat, která máme při výpočtu k dispozici.

$$(34) \quad \sigma_{(prem,lob)} = \sqrt{c_{lob} \cdot \sigma_{(U,prem,lob)}^2 + (1 - c_{lob}) \cdot \sigma_{(M,prem,lob)}^2}$$

$\sigma_{(U,prem,lob)}$  ... vlastní odhad směrodatné odchylky pro pojistné riziko pojistného

$\sigma_{(M,prem,lob)}$  ... tržní odhad směrodatné odchylky pro pojistné riziko

$c_{lob}$  ... kredibilitní násobitel

Tržní odhad směrodatné odchylky byl proveden z dat německého trhu. Je určen tak, aby odpovídal vlastnímu odhadu (obecně značenému s indexem *ind*)

$$(35) \quad \sigma_M \approx \sigma_{ind}$$

Z tohoto důvodu autoři QIS 3 volí pro nalezení odhadu minimalizaci odchylky čtverců (váženou průměrnou velikostí přijatého pojistného  $V$  pro každého upisovatele a příslušnou LoB za dané období)

$$(36) \quad \sum_{ind} (V\sigma_M - V\sigma_{ind})^2$$

Kredibilitní násobitel se vypočte dle vzorce ( 37 ). V QIS 4 je tento vzorec nahrazen pouze konkrétními hodnotami, které jsou ovlivněny různou velikostí  $n_{lob}$ .

$$(37) \quad c_{lob} = \begin{cases} \frac{n_{lob}}{n_{lob} + k_{lob}}, & n_{lob} \geq 7 \\ 0, & jinak \end{cases}$$

Vzorec ( 37 ) i celý výpočet je založen na Bühlmann-Straubově modelu. Ve vzorci se vyskytuje konstanta  $k_{lob}$ . Tato konstanta je určena na základě vzorce ( 38 ). Autoři uvádějí, že se její hodnota pro jednotlivé linie obchodu pohybovala v rozmezí od 3 do 5, a tak z důvodů zjednodušení zvolili hodnotu 4.

$$(38) \quad c_{lob} = \frac{n_{lob,i} - 1}{n_{lob,i} - 1 + 2 \frac{E[\sigma^4(\theta_i)]}{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}} = \frac{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{\text{var}[\Sigma_i^2]}$$

Vzorec ( 38 ) je odhadem kredibilitního faktoru z Bühlmann-Straubova modelu. Jedná se o odvození založeném na výpočtu pojistného podle principu rozptylu. Základní myšlenky lze

nalézt v knize Hanse Bühlmana [ 2 ] nebo podrobněji v článku profesorky Lourdes Centeno působící na technické univerzitě v Lisabonu [ 7 ].

Značení:

$$X_{ij} = \frac{S_{ij}}{P_{ij}} \dots \text{škodní poměr v rizikové třídě } i \text{ v roce } j, \text{ kde } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, t_i.$$

Odvození je provedeno za následujících značení a předpokladů:

$$E[X_{ij} | \theta_i] = \mu(\theta_i) \dots \text{podmíněná střední hodnota škodního poměru pro rizikovou třídu } i,$$

$$\text{var}[X_{ij} | \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{ij}} \dots \text{podmíněný rozptyl pro škodní poměr v rizikové třídě } i,$$

$$\mu_4[X_{ij} | \theta_i] = \frac{3}{P_{ij}^2} \sigma^4(\theta_i) \dots \text{podmíněný čtvrtý moment pro rizikovou třídu } i \text{ za předpokladu}$$

normálního rozdělení,

$$\text{cov}[X_{ir}, X_{is} | \theta_i] = 0, r \neq s \dots \text{podmíněná kovariance pro rizikovou třídu } i \text{ je mezi různými časovými okamžiky nulová.}$$

Jednotlivé rizikové třídy jsou nezávislé a  $\theta_1, \dots, \theta_n$  jsou stejně rozdělené náhodné veličiny.

Kredibilitní pojistné se dá rozložit na tři části – část odpovídající střední hodnotě, rozptylu a proměnné části. Nás především bude zajímat část, která se týká výpočtu rozptylu.

- Část střední hodnoty

Hledáme kredibilitní odhad hodnoty  $\mu(\theta_i)$  ve tvaru  $c_{i0} + \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} X_{ij}$  na základě minimalizace střední kvadratické odchylky.

$$(39) \quad \hat{\mu}(\theta_i) = z_i \bar{X}_i + (1 - z_i) E[\mu(\theta_i)],$$

kde

$$z_i = \frac{P_i \cdot a}{P_i \cdot a + s^2} \quad P_i = \sum_{j=1}^{t_i} P_{ij} \quad \bar{X}_i = \frac{1}{P_i} \sum_{j=1}^{t_i} P_{ij} X_{ij},$$

$s^2$  je dohad  $E(\sigma^2(\theta_i))$ ,  $a$  je odhad  $\text{var}(\mu(\theta_i))$ .

- Část rozptylu

Při odhadu této části postupujeme analogicky jako v případě odhadu části střední hodnoty. Opět budeme minimalizovat střední kvadratickou odchylku, ale nyní vycházíme z tvaru

$c_{i0} + \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ . Tedy hledáme řešení pro  $c_{ij}$ , abychom minimalizovali

$$(40) \quad E \left[ \left[ E[\sigma^2(\theta_i) | X_i] - c_{i0} - \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right]^2 \right].$$

Pomocí prvních derivací položených rovné nule získáme následující vyjádření

$$(41) \quad c_{i0} = E[\sigma^2(\theta_i)] - \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} \cdot E(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\text{cov}[\sigma^2(\theta_i), (X_{ik} - \bar{X}_i)^2] = \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} \cdot \text{cov}[(X_{ij} - \bar{X}_i)^2, (X_{ik} - \bar{X}_i)^2], \quad k = 1, \dots, t_i.$$

Druhou rovnici lze upravit a pro  $k = 1, \dots, t_i$  dostaneme

$$(42) \quad \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] = \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] +$$

$$+ \frac{2}{P_i^2} E[\sigma^4(\theta_i)] \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} + \frac{2}{P_{ik}} c_{ik} E[\sigma^4(\theta_i)] \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{2}{P_i} \right].$$

K výše uvedené úpravě je potřeba několika dalších kroků viz Centeno [ 7 ]. Odvození je uvedeno v příloze A. Dále rovnici vynásobíme  $P_{ik}$  a sečteme přes  $k$

$$(43) \quad (t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] = (t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \cdot \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] +$$

$$+ \frac{2}{P_i} E[\sigma^4(\theta_i)] \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} + 2E[\sigma^4(\theta_i)] \sum_{k=1}^{t_i} c_{ik} \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{2}{P_i} \right].$$

$$(44) \quad \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] = \frac{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + 2E[\sigma^4(\theta_i)]}.$$

Nyní dosadíme (44) do (42) a pro  $k = 1, \dots, t_i$  dostaneme

$$(45) \quad \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \left( 1 - \frac{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + 2E[\sigma^4(\theta_i)]} \right) =$$

$$= \frac{2}{P_i^2} E[\sigma^4(\theta_i)] \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} + c_{ik} E[\sigma^4(\theta_i)] \left[ \frac{2}{P_{ik}^2} - \frac{4}{P_i P_{ik}} \right].$$

Upravením kulaté závorky a vydělením rovnice střední hodnotou dostaneme rovnost

$$(46) \quad \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \frac{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + 2E[\sigma^4(\theta_i)]} = \frac{1}{P_i^2} \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} + c_{ik} \left[ \frac{1}{P_{ik}^2} - \frac{2}{P_i P_{ik}} \right], k = 1, \dots, t_i.$$

Označíme

$$(47) \quad C_i = \frac{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)} E[\sigma^4(\theta_i)]}.$$

Hledáme vyjádření pro  $c_{ik}$ , upravíme rovnici (46)

$$(48) \quad P_{ik} P_i (P_i - P_{ik}) \frac{C_i}{(t_i - 1)} = P_{ik}^2 \sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} - 2P_{ik} P_i c_{ik} + c_{ik} P_i^2, k = 1, \dots, t_i.$$

Využijeme-li toho, že  $P_i = \sum_{j=1}^{t_i} P_{ij}$ , pak porovnáním levé a pravé strany dojdeme k výsledku

$$(49) \quad c_{ik} = P_{ik} \frac{C_i}{(t_i - 1)} = P_{ik} \frac{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + 2E[\sigma^4(\theta_i)]}, k = 1, \dots, t_i.$$

Dosazením tohoto vztahu do (41) - vyjádření pro  $c_{i0}$

$$(50) \quad c_{i0} = E[\sigma^2(\theta_i)] \frac{2E[\sigma^4(\theta_i)]}{(t_i - 1) \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + 2E[\sigma^4(\theta_i)]} = E[\sigma^2(\theta_i)](1 - C_i).$$

Nyní máme již vyjádřeny všechny koeficienty pomocí vzorců (49), (50), které dosadíme do lineárního tvaru odhadu. Tím získáme kredibilitní odhad části rozptylu

$$(51) \quad \hat{\delta}_i^2 = C_i \Sigma_i^2 + (1 - C_i) E[\sigma^2(\theta_i)], \text{ kde}$$

$$\Sigma_i^2 = \frac{1}{t_i - 1} \sum_{j=1}^{t_i} P_{ik} (X_{ik} - \bar{X}_i)^2.$$

Vidíme, že proměnná  $C_i$  (určená vzorcem (47)) je kredibilitním násobitelem. Navíc jsme získali hledané vyjádření vzorce (38). Pro úplnost lze ukázat, že

$$(52) \quad \text{var}[\Sigma_i^2] = \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)} E[\sigma^4(\theta_i)].$$

Tento důkaz je také uveden v Centeno [7], viz příloha B.

Z tohoto plyne, že kredibilitní násobitel lze opravdu interpretovat následujícím vzorcem

$$(53) \quad c_{lob} = \frac{\text{var}[\sigma^2(\theta_i)]}{\text{var}[\Sigma_i^2]}.$$

Autoři QIS 3 stanovili hodnotu konstanty  $k_{lob}$  rovnu čtyřem. Při odhadu uvedených hodnot pravděpodobně postupovali následovně. Zavedeme následující značení

$$\mu = E[\mu(\theta_i)], \quad \phi = E[\sigma^2(\theta_i)], \quad \xi = \text{var}[\Sigma_i^2], \quad \varphi = \text{var}[\sigma^2(\theta_i)].$$

Potom jsou odhady následující

$$(54) \quad \hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{P} \sum_i P_i \bar{X}_i, \quad \hat{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_i^2,$$

$$\hat{\xi} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Sigma_i^2 - \hat{\phi})^2, \quad \hat{\varphi} = \hat{\xi} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Sigma_i^2)^2.$$

Lze dokázat, že takto stanovené odhady jsou nestranné. (pro  $\hat{\mu}, \hat{\phi}$  Bühlmann, Straub [ 2 ] a pro  $\hat{\xi}, \hat{\varphi}$  Centeno [ 7 ]).

Nyní se opět vraťme k výpočtu v QIS 3. Poslední hodnotu, kterou ve výpočtu potřebujeme znát, je vlastní směrodatná odchylka. Nejprve zjistíme střední hodnotu škodního poměru, kterou získáme váženým součtem škodních poměrů z jednotlivých let, kde jako váhu bereme zasloužené pojistné. Poté již samotný výpočet směrodatné odchylky

$$(55) \quad \sigma_{(U, prem, lob)} = \sqrt{\frac{1}{(n_{lob} - 1) V_{(prem, lob)}^y} \sum_y P_{lob}^y (LR_{lob}^y - \mu_{lob})^2},$$

kde střední hodnota škodního poměru je

$$(56) \quad \mu_{lob} = \frac{\sum_y P_{lob}^y \cdot LR_{lob}^y}{\sum_y P_{lob}^y}.$$

Oba vzorce vychází z odvození uvedeného výše. První vzorec můžeme srovnat s ( 51 ). Druhý je odhadem střední hodnoty.

Hodnota směrodatné odchylky rizika rezerv je v zadání QIS 3 přímo určena konkrétními hodnotami (Příloha E). V materiálech QIS 3 - kalibrace [ 4 ] je pouze řečeno, že odhad byl stanoven podobně jako u rizika pojistného. Hodnoty jsou odvozeny z anglického a francouzského trhu. Některé z nich jsou určeny na základě QIS 2. Bohužel se obecně



specifikace zadání nezabývají vysvětlováním některých fixně stanovených hodnot, a tak nebyla možnost je dále zkoumat.

### 2.3.3. Výpočet celkové směrodatné odchylky

Nyní se dostáváme ke kroku 2 – k celkové agregaci. Celkový objem již známe a nyní musíme spočítat celkovou relativní směrodatnou odchylku

$$(57) \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \left( \sum_{r,c} \text{CorrLobr}_{r,c} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c \cdot V_r \cdot V_c \right)}$$

Odvození vzorce ( 57 ) je možné pomocí vlastnosti rozptylu součtu (obdobně jako vzorec ( 13 ). Indexy  $r$  a  $c$  vyjadřují všechny dvojice (prem,lob) nebo (res,lob). Proměnné  $\sigma_r$  a  $\sigma_c$  pak vyjadřují relativní směrodatnou odchylku příslušnému  $r$  nebo  $c$  vzhledem k objemu  $V_r$  a  $V_c$ .

$\text{CorrLobr}_{r,c}$  jsou odhady prvků korelační matice mezi rizikem pojistného a rizikem rezerv. Co se týče korelační matice, podkladem pro její hodnoty byly údaje z německého trhu. U jednotlivých pojišťoven se sledovaly hodnoty nejméně v desetiletém horizontu a z těchto pozorování byly vypočteny základní hodnoty pro tuto matici. Hodnoty v této matici byly stanoveny pro účely vyhodnocení kvantitativní dopadové studie.

### 2.4. GDV - výpočet NL1

Nyní se vraťme k návrhu Německé asociace pojistitelů GDV. Rozdílný pohled nalezneme na klíčový ukazatel. Neuvažují škodní poměr jako v zadání QIS 3, ale volí kombinovaný poměr (combined ratio). Ten navíc zahrnuje i provozní náklady pojišťovny. Tento poměr by pojišťovny měly být schopné dopočítat pro jednotlivé linie obchodu i několik let nazpět

$$(58) \quad T = \frac{(S + BK)}{B}$$

$S$  ... škodní náklady očištěné o zajištění

$B$  ... zasloužené hrubé pojistné očištěné o zajištění

$BK$  ... provozní náklady

Tento ukazatel je poměrně dobře interpretovatelný. Pokud je menší než jedna, výdaje jsou menší než zasloužené pojistné a dochází k zisku. Pokud je tomu naopak, pojišťovna musí uhradit více, než obdržela zaslouženého pojistného. To ovšem ještě nemusí znamenat, že dochází ke ztrátě, neboť pojišťovna může realizovat zisk z investovaného přijatého pojistného.

V tomto ukazateli jsou zahrnuty oba dva typy rizik neživotního pojištění (pojistného a rezerv). Model spoléhá na vlastní hodnoty pojišťovny, které jsou dobře kontrolovatelné dohledem. Podle autorů modelu GDV rozdělení rizika na část pojistného a rezervy je velmi obtížné a přineslo by nepřesné výsledky. Vzhledem ke snahám o poměrně jednoduchý a transparentní model se považuje tento přístup za vhodnější.

Při odvození kapitálového požadavku v QIS 3 bylo použito logaritmicko-normálního rozdělení pravděpodobně z toho důvodu, aby lépe vystihlo svým zešikmeným tvarem podstatu škod. Německá asociace pojistitelů GDV používá při výpočtu pojistného rizika normální rozdělení a hodnotu v riziku.

Vycházíme z kombinovaného poměru  $T_V$ , který považujeme za náhodnou veličinu s prvním a druhým momentem  $(\mu_V, \sigma_V)$ . Cílem je získat solvenční kapitál  $K_V$  v procentuálním vyjádření ze zaslouženého pojistného  $B$ .

Solvenční kapitál musí splňovat podmínky hodnoty v riziku. Nežádoucí situace nastává, pokud  $T_V > 100\%$ , z toho plyne

$$(59) \quad P(T_V - 100\% > K_V) \leq \alpha.$$

Použitím kvantilu  $q_{1-\alpha}$  rozdělení  $T_V$

$$(60) \quad K_V + 100\% \geq q_{1-\alpha}.$$

Nyní se zavede „věrohodnostní faktor“  $a = \frac{q_{1-\alpha} - \mu_V}{\sigma_V}$ , který se dosadí do (60)

$$(61) \quad K_V \geq a\sigma_V + \mu_V - 100\%.$$

V případě normálního rozdělení se jedná o kvantil standardizovaného normálního rozdělení, neboť se střední hodnota odečte a směrodatná odchylka zkrátí. Podobně tomu je i pro logistické rozdělení nebo dvojně exponenciální. V příloze je uvedeno podrobnější odvození a z něj plynoucí důsledky (Příloha C).

Kombinovaný poměr za celou pojišťovnu je složen z dílčích kombinovaných poměrů z jednotlivých linií obchodů vážených podílem na celkovém hrubém pojistném  $b_j = \frac{B_j}{B_V}$ .

$$(62) \quad T_V = \sum_j b_j T_j.$$

Z čehož již plyne vyjádření pro  $a\sigma_V$  ve vzorci (61).

$$(63) \quad a\sigma_V = a \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \cdot b_i \sigma_i \cdot b_j \sigma_j} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} K_i K_j}, \quad K_i = a b_i \sigma_i, \quad \rho_{ij} = \text{cor}(T_i, T_j).$$

Dosazením do vzorce ( 61 ) a zajištěním kladné hodnoty získáváme následující relativní kapitálový požadavek

$$(64) \quad K_v \geq \max \left( \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} K_i K_j} + \mu - 100\%; 0 \right).$$

Výsledkem je podobná agregační formule pro jednotlivé linie obchodu jako v případě QIS 3. Korelační matice je odvozena ze škodních poměrů za jednotlivé linie obchodu z let 1990 – 2002. Záporné hodnoty jsou v této matici nahrazeny nulami. Hodnota  $\mu$  je vážený průměr minimálně pěti kombinovaných poměrů. V případě, že není k dispozici pět hodnot poměrů, je  $\mu = 100\%$ . Směrodatná odchylka by měla být brána z posledních patnácti let. Více o této problematice v následující části.

Co se týče volby věrohodnostního faktoru  $a$ , autoři hovoří o možnosti kontroly ze strany dohledu a navíc přizpůsobení podmínkám trhu. Záleží na zvoleném rozdělení a také na zvolené hladině  $\alpha$ . Vzhledem ke kvantilům normálního či logistického rozdělení na hladině významnosti 99% a 99,5% autoři modelu GDV volí hodnotu  $a = 3$  (viz Příloha C).

#### 2.4.1. Stanovení směrodatné odchylky

Pro výpočet je důležité určit správné hodnoty směrodatných odchylek. Počítají se z patnáctiletých dat, což u některých pojišťoven může způsobit komplikace, neboť tyto hodnoty nemají. Může to být z různých důvodů, například, že jsou příliš mladé na to, aby tato data měly k dispozici nebo je nejsou schopny ze získaných dat zpětně zjistit.

Pokud máme všechny údaje k dispozici, tak to znamená, že máme k dispozici velikosti škodních poměrů z minulých období  $c_{i,lob}$ ,  $i = 1, \dots, 15$ , pak výpočet probíhá následujícím způsobem. Nejprve spočteme průměrnou hodnotu ze škodních poměrů

$$(65) \quad c_{lob} = \frac{\sum_{i=1}^{15} B_{i,lob} c_{i,lob}}{\sum_{i=1}^{15} B_{i,lob}}.$$

A nyní odhadneme směrodatnou odchylku

$$(66) \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{14 B_{lob}} \sum_{i=1}^{15} B_{i,lob} (c_{i,lob} - c_{lob})^2}.$$

V případě, že nemáme dostatek údajů, musíme použít hodnoty, které jsou odvozeny z německého trhu. Toto odvození lze nalézt v příloze 21 GDV [ 8 ]. Ve vzorci ( 58 ) pro kombinovaný poměr se uvažuje pouze podíl škodních nákladů k zaslouženému pojistnému.

Odvoďme, jak vypadá rozptyl škodních nákladů. Předpokládáme, že má složené rozdělení.

$$(67) \quad \begin{aligned} \text{var } S &= \text{var} \left( \sum_{k=1}^N X_k \right) = \sum_{n=0}^N P(N=n) \left[ E \left( \sum_{k=1}^n X_k \right)^2 - (EN \cdot EX)^2 \right] = \\ &= \sum_{n=0}^N P(N=n) \left[ n \text{var } X + (nEX)^2 - (EN \cdot EX)^2 \right] = EN \cdot \text{var } X + \text{var } N \cdot (EX)^2. \end{aligned}$$

Což po vydělení zaslouženým pojistným (chápáno podle GDV jako objem obchodu), dostáváme

$$(68) \quad \sigma^2 = \text{var} \left( \frac{S}{B} \right) = \frac{1}{B} \frac{EN}{B} \left( \text{var } X + \frac{\text{var } N}{EN} \cdot (EX)^2 \right).$$

Zaměříme se na členy  $EN/B$  a  $\text{var } N/EN$ . Lze předpokládat, že jsou téměř nezávislé na velikosti pojistného. Pokud budeme například uvažovat pro počet škod Poissonovo rozdělení, je druhý poměr roven jedné. Na druhou stranu jsou závislé na frekvenci škod a toho využijeme. Spojíme všechny proměnné nezávislé na  $B$  do proměnné  $f^2$ . Tato umocněná proměnná má stejnou jednotku jako zasloužené pojistné. Navíc zavedeme značení pro proměnou „size factor – sf“.

$$(69) \quad \sigma \doteq \frac{1}{\sqrt{B}} f$$

$$(70) \quad sf = \frac{1}{\sqrt{B}}$$

A závěrem získáme vzorec pro výpočet variabilního faktoru pro každou linii obchodu. Je odvozen ze vzorce (69). Pro každou linii obchodu za  $B$  dosadíme průměrnou hodnotu pozorovanou na trhu

$$(71) \quad f_i \doteq \sigma_i \sqrt{\frac{B_i}{n_i}},$$

kde  $B_i$  je objem pojistného na trhu pro danou linii obchodu a  $n_i$  počet pojištěven na trhu.

Nyní jsme již schopni spočítat kapitálový požadavek pro danou linii obchodu, který můžeme dosadit do agregáční formule (64). Příloha F obsahuje číselné hodnoty.

$$(72) \quad K_i = a \cdot B_i \cdot sf \cdot f_i.$$

Popsali jsme oba dva přístupy stanovení směrodatné odchylky. GDV navrhuje i mezistupeň mezi těmito extrémními přístupy. Pokud jsou k dispozici data za více než deset let, je možné brát poměr obou zmíněných přístupů. Tento kombinovaný model je použit ve výpočtech v poslední kapitole.

## 2.5. GDV - výpočet NL2

Tato část kapitálového požadavku se týká rizika selhání zajistitele. Je založena na ratingu zajistitele. Každé kategorii je přiřazen násobitel (risk factor RF). Tímto násobitelem je pak násobena část rezerv odpovídající zajistiteli snižená o akreditivy a zajistná depozita.

Poté se použije opět kovarianční formule pro zkombinování s ostatními riziky (viz vzorec (23)). Je použita hodnota korelačního koeficientu 0,5. Nikde není vysvětleno, proč je zvolena tato hodnota a zda je tato agregace v této podobě opodstatněná.

## 2.6. $NL_{cat}$ – neživotní katastrofické riziko

Katastrofické riziko patří mezi rizika, která mohou mít velký dopad na chod pojišťovny. Mohou se totiž projevit ve více obchodních liniích najednou. Definice kapitálového požadavku pro toto riziko – opět ze směrnice Evropské komise [ 14 ].

*„Kapitálový požadavek katastrofického rizika je chápán jako požadavek na rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze značné neurčitosti předpokladů při tvorbě cen a stanovení rezerv v souvislosti s mimořádnými nebo výjimečnými událostmi.“*

Při výpočtu této části kapitálového požadavku je důležité se vyhnout dvojímu započítání rizik, která jsou již započtena v riziku pojistného a rezerv.

### 2.6.1. Výpočet podle QIS 3

Modelování tohoto rizika se provádí pomocí scénářů. Tím se výpočet liší od dřívějších návrhů GDV. Kvantitativní dopadová studie uvádí konkrétní rizika, která musí být do scénářů zahrnuta. Dále se musí brát ohled na události, které stanoví příslušný místní dohled.

Samotný výpočet probíhá podle následujícího vzorce:

$$(73) \quad NL_{CAT} = \sqrt{\sum_i CAT_i^2}.$$

Součet sumy je přes takové  $i$ , pro které scénáře přesáhly určitý práh, který byl touto kvantitativní studií stanoven na 25% nejhoršího scénáře. Ze vzorce je patrné, že se neuvažuje závislost mezi jednotlivými scénáři.

V návrhu QIS 4 je také možný standardní přístup, pokud nejsou k dispozici příslušné scénáře.

## 2.6.2. Výpočet podle GDV

Předpokládané škody se odvozují ze škod na celém pojistném trhu. Na rozdíl od popisu ve QIS 3 je zde uvedeno podrobné odůvodnění postupu výpočtu, a tak se mu můžeme blížeji věnovat.

Jak je uvedeno výše, je třeba si uvědomit, že katastrofické škody také zahrnujeme do výpočtu kombinovaného rizika. Jelikož je však nepřijatelné zahrnutí dvojího započítávání rizika, zavádí se kvantil  $\hat{q} = q_{1-\alpha} - q_{1-\alpha\omega}$ .

$q_{1-\alpha}$  je kvantil z rozdělení všech škod. Zatímco druhý kvantil  $q_{1-\alpha\omega}$  je zde přítomen, aby odstranil dvojí započítávání. Jelikož se směrodatné odchylky počítají z dat s patnáctiletým horizontem, kvantil  $q_{1-\alpha\omega}$  odpovídá rozdělení škod s dobou opakování do patnácti let.

Značení týkající se přírodních katastrof:

$S_M, S_V$  ... roční výše škod (index M označuje celkovou – tržní, index V individuální)

$V_M, V_V$  ... příslušné pojistné částky

$B_M, B_V$  ... zasloužené hrubé pojistné

Za předpokladu

$$(74) \quad S_V + BK_V \doteq (S_M + BK_M) \frac{V_V}{V_M}$$

dostaneme přibližnou hodnotu individuálního kombinovaného poměru

$$(75) \quad T_V = \frac{(S_M + BK_M) \frac{V_V}{V_M}}{B_V} = T_M \frac{B_M}{B_V} \frac{V_V}{V_M}.$$

Ve standardním modelu se zavádí zjednodušení. Přibližně můžeme předpokládat, že

$$(76) \quad \frac{B_M}{B_V} \cdot \frac{V_V}{V_M} \doteq 1 \text{ a } ET_M \doteq 1.$$

Potom ze vzorce ( 76 ) plyne, že si individuální a tržní kombinovaný poměr odpovídají a i střední hodnota individuálního kombinovaného poměru je rovna přibližně jedné.

Pokud provedeme obdobné odvození jako pro pojistné riziko a rezerv, dosadíme upravenou hodnotu kvantilu, kapitálový požadavek bude vypadat následovně

$$(77) \quad K_{NC} = \hat{q} V_V = \hat{q} V_M \frac{B_V}{B_M}.$$

Pochopitelně u tohoto typu rizik je třeba brát ještě v úvahu zajištění. Co se týče proporcionálního zajištění s poměrem  $c$ , vzorec můžeme upravit následovně

$$(78) \quad K_{NC} = (1-c)\bar{q} V_M \frac{B_V}{B_M}.$$

Pokud navíc budeme uvažovat neproporcionální typ, a to zajištění časového nadměrku škod s výší  $X$ , vzorec ještě můžeme upravit do následující podoby

$$(79) \quad K_{NC} = \max\left(\left(1-c\right) \bar{q} V_M \frac{B_V}{B_M} - X; 0\right).$$

## 2.7. Kapitálový požadavek neživotního pojištění

Pod názvem této kapitoly se neskryvá nic jiného než agregace  $NL_{pr}$  a  $NL_{CAT}$  za pomoci standardní agregační formule. Kapitálový požadavek je podle této formule vypočten následovně

$$(80) \quad SCR_{nl} = \sqrt{\sum_{rxc} CorrNL^{rxc} \cdot NL_r \cdot NL_c}.$$

Suma ve vzorci se sčítá přes všechny prvky korelační matice.  $NL_r$ ,  $NL_c$  jsou hodnoty příslušných kapitálových požadavků  $NL_{pr}$  a  $NL_{CAT}$  v závislosti na pozici v korelační matici.

$CorrNL^{rxc}$	$NL_{pr}$	$NL_{CAT}$
$NL_{pr}$	1	
$NL_{CAT}$	0	1

Tabulka 3 – Korelační matice agregace hlavních skupin neživotního pojištění

Jelikož se požadavky předpokládají nezávislé, vzorec ( 80 ) můžeme přepsat do následující podoby

$$(81) \quad SCR_{nl} = \sqrt{NL_{pr}^2 + NL_{cat}^2}.$$

### 3. IAA – Celkový rámec pro hodnocení solventnosti pojistitelů

Dokument A Global Framework for Insurer Solvency Assessment byl sepsán pracovním týmem Mezinárodní aktuárské asociace v období 2002-2004. Jeho účelem bylo popsání způsobu měření solventnosti. Mělo se jednat o podpůrný dokument, který přispěje k vybudování celosvětového přístupu výpočtu solventnosti. IAA shledala tento dokument jako velmi dobrý studijní materiál. Nás z něj bude převážně zajímat případová studie věnující se neživotnímu pojištění.

Cílem této případové studie je praktická ukázka výpočtu solventnosti. Jako standardní model je použita faktorová RBC formule. Jsou zanedbávána rizika, která nesouvisí s upisováním. Výpočet je proveden pomocí zbytkové hodnoty v riziku na hladině 99%.

Pro názornost výpočtu autoři uvádějí výpočty na dvou různých pojišťovnách a pro různé druhy zajištění. Jedna z pojišťoven je desetkrát menší. První způsob výpočtu je bez zajištění, ve druhém způsobu je kryto 95% převyšující 50 milionů dolarů (respektive 5 milionů) ze ztrát z katastrof. Třetí způsob navíc přidává miliónový limit na ostatní skupiny rizik, jiné než je katastrofické. Pro vývoj škodní rezervy během účetního období se předpokládá stejný model jako pro vývoj škod.

Line of Insurance	ABC Insurance Copany		XYZ Insurance Copany	
	Direct Premium	Loss Reserve	Direct Premium	Loss Reserve
Auto Liability	430,000,000	403,110,711	43,000,000	40,311,071
Auto Physical Damage	325,000,000	19,455,630	32,500,000	1,945,563
Homeowners	475,000,000	162,578,183	47,500,000	16,257,818
Commercial Liability	130,000,000	352,190,005	13,000,000	35,219,001
Commercial Property	200,000,000	62,204,206	20,000,000	6,220,421
<b>Total</b>	<b>1,560,000,000</b>	<b>999,538,735</b>	<b>156,000,000</b>	<b>99,953,873</b>

Tabulka 4 - modelový příklad 2 pojišťoven, převzato z [ 12 ]

#### 3.1. Faktorový model RBC

Výpočet je založen na faktorovém modelu. Pomocí něho se odvozují první dva momenty celkového rozdělení škod. Tyto hodnoty lze již poté použít k výpočtu zbytkové hodnoty v riziku. Předpokládá se, že distribuční funkce škod odpovídá logaritmickeo-normálnímu rozdělení.

Model je citlivý na velikost a volatilitu každé linie obchodu, podmínky zajištění a vztahy mezi jednotlivými liniemi obchodu vyjádřenou například korelacemi. Jako vstupní informace



je třeba mít k dispozici očekávané ztráty za každou linii obchodu. Další parametry modelu nastavuje příslušný dohled nebo pojistitel.

Popis algoritmu:

1. Pro každou obchodní linii  $i$ :

- Zvolíme náhodné číslo  $\chi_i$  z gamma rozdělení se střední hodnotou 1 a rozptylem  $c_i$ .

Gamma rozdělení:  $\frac{a^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-ax}$ ,  $x \geq 0$  s  $EX = \frac{p}{a}$ ,  $\text{var } X = \frac{p}{a^2}$ .

- Jelikož střední hodnota má být rovna jedné, dostaneme rovnost  $a = p$ . Dále můžeme

vyjádřit  $\text{var } X = \frac{1}{p} = c_i \rightarrow p = \frac{1}{c_i}$  a dostaneme rozdělení gamma  $\frac{p^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-px}$ ,  $x \geq 0$ .

- Zvolíme náhodný počet závazků  $K_i$  z Poissonova rozdělení se střední hodnotou  $\chi_i \cdot \lambda_i$ , kde  $\lambda_i$  je očekávaný počet škodních nároků pro linii obchodu  $i$  ( $EK_i = \lambda_i$  a  $\text{var } K_i = \lambda_i + c_i \lambda_i^2$ ).
- Pro každé  $i$  a  $k = 1, \dots, K_i$  zvolíme velikost škodního nároku  $Z_{ik}$  z logaritmicke-normálního rozdělení se střední hodnou  $\mu_i$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma_i$ .

2. Úhrn škod pro každou linii obchodu  $i$  je pak definován následovně  $X_i = \sum_{k=1}^{K_i} Z_{ik}$ .

Vzhledem k známým hodnotám momentů  $K_i$  pomocí Waldovy rovnosti dostaneme výpočet momentů  $X_i$ .

$$EX_i = EK_i EZ_{i1} = \lambda_i \mu_i$$

$$(82) \quad \text{var } X_i = EK_i \text{var}(Z_{i1}) + \text{var}(K_i) (EZ_{i1})^2 = \lambda_i \sigma_i^2 + (\lambda_i + c_i \lambda_i^2) \mu_i^2$$

3. Zvolíme náhodné číslo  $p$  z rovnoměrného rozdělení na  $[0, 1]$ . Pro každou linii obchodu  $i$  vybereme  $\beta_i$  jakožto  $p$ -tý kvantil rozdělení se střední hodnotou  $E[\beta_i] = 1$  a rozptylem  $\text{var}[\beta_i] = b_i$ . Tímto krokem získáme mnohorozměrné rozdělení, kde se koeficient korelace předpokládá roven jedné. Hodnoty  $\beta_i$  použijeme v dalším kroku k vyjádření závislosti mezi jednotlivými obchodními liniemi.

4. Spočteme celkový úhrn škod  $X = \sum_i \beta_i X_i$ .

- Jak jsme již řekli, budou nás zajímat momenty  $EX$  a  $\text{var } X$ . Výpočet střední hodnoty je již snadný, neboť víme, jak vypadají střední hodnoty  $X_i$  a  $\beta_i$ .

$$(83) \quad EX = \sum_i E[\beta_i X_i] = \sum_i E[X_i] = \sum_i \lambda_i \mu_i$$

Při výpočtu rozptylu musíme vzít v úvahu korelaci jednotlivých složek.

$$(84) \quad \text{var } X = \text{var} \left( \sum_i \beta_i X_i \right) = \sum_j \sum_i \text{cov} [\beta_i X_i, \beta_j X_j].$$

Pro  $i = j$ :

$$(85) \quad \begin{aligned} \text{cov} [\beta_i X_i, \beta_i X_i] &= E[\beta_i^2 X_i^2] - (E[\beta_i X_i])^2 = \\ &= E[\beta_i^2] \text{var}[X_i^2] + (E[\beta_i^2])(E[X_i])^2 - (E[\beta_i X_i])^2 = \\ &= E[\beta_i^2] \text{var}[X_i^2] + (\text{var}[\beta_i])(E[X_i])^2 \\ &= (1 + b_i) \text{var}[X_i^2] + b_i (E[X_i])^2 = \\ &= (1 + b_i) (\lambda_i \sigma_i^2 + (\lambda_i + c_i \lambda_i^2) \mu_i^2) + b_i \lambda_i^2 \mu_i^2. \end{aligned}$$

A pro  $i \neq j$  obdobně:  $\text{cov} [\beta_i X_i, \beta_j X_j] = \lambda_i \mu_i \lambda_j \mu_j \rho_{ij} \sqrt{b_i b_j}$ .

Nyní již máme vše potřebné k tomu, abychom mohli spočítat zbytkovou hodnotu v riziku. Vychází se logaritmiccko-normálního rozdělení, viz Loss Models [ 13 ].

1. Nejprve rozdělení škod  $X$  nahradíme rozdělením  $\hat{X}$  s logaritmiccko-normálním rozdělením tak, aby se střední hodnota a rozptyl rovnaly odhadnutým momentům z předchozí části.
2. Dále se určí hodnota v riziku na 99% hladině pro logaritmiccko-normální rozdělení

$$(86) \quad VaR_\alpha = \exp(v + z_\alpha \sigma) = EX \cdot \exp \left( z_\alpha \sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right).$$

3. Následuje výpočet omezené očekávané hodnoty, neboli střední hodnoty z minima veličiny  $X$  a hodnoty v riziku z  $X$  pro logaritmiccko-normální rozdělení.
4. Pak již můžeme vypočítat zbytkovou hodnotu v riziku

$$(87) \quad TVaR_\alpha = VaR_\alpha + \frac{EX - E[X \wedge VaR_\alpha]}{1 - \alpha}.$$

S tímto vyjádřením zbytkové hodnoty v riziku jsme se ještě v naší práci nesetkali. Proto si ukažme jeho odvození. Vyjdeme ze vzorce ( 7 ) a rozdělíme tento integrál na dva

$$(88) \quad TVaR_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} x dF(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) - \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} x dF(x) \right).$$

Nyní si vyjádříme, jak vypadá střední hodnota z minima náhodné veličiny  $X$  (s distribuční funkcí  $F$ ) a pevně zvolené hodnoty  $x$

$$(89) \quad E[X \wedge x] = \int_{-\infty}^x t dF(t) + \int_x^{\infty} x dF(t) = \int_{-\infty}^x t dF(t) + x(1 - F(x)).$$

Za  $x$  dosadíme hodnotu v riziku a vyjádříme integrál na pravé straně

$$(90) \quad \int_{-\infty}^x t dF(t) = E[X \wedge VaR_\alpha] - VaR_\alpha (1 - F(VaR_\alpha)) = E[X \wedge VaR_\alpha] - VaR_\alpha (1 - \alpha).$$

Dosazením (90) do (88) dostáváme hledaný vzorec (87). □

Co se týče nastavení proměnných v modelu, autoři se dále jen vyjadřují k volbě hodnot  $b_i$  a  $c_i$ . Pokud vyjádříme rozptyl škodního poměru pro veličinu  $Y$ , která je součtem  $n$  nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin  $Y_i$ , dostaneme

$$(91) \quad \text{var}\left(\frac{Y}{EY}\right) = \frac{\text{var} Y_1}{n (EY_1)^2}.$$

Rozptyl škodního poměru se pro rostoucí  $n$  snižuje, což by znamenalo jen velmi malé riziko. Model uvedený výše se tuto situaci snaží odstranit a zajišťuje jistou minimální mez ve výši  $b_i + c_i + b_i c_i$  pro každou linii obchodu

$$(92) \quad \text{var}\left(\frac{b_i X_i}{E[b_i X_i]}\right) = (1 + b_i) \left( \frac{\sigma_i^2 + \mu_i^2}{\lambda_i \mu_i^2} + c_i \right) + b_i.$$

Pokud zvyšujeme počet škodních nároků  $\lambda_i$ , rozptyl škodního poměru nikdy neklesne pod již zmíněnou hranici. Parametr  $c_i$  vnáší do modelu korelaci mezi jednotlivými závazky v rámci jedné linie obchodu, zatímco parametr  $b_i$  ovlivňuje korelaci mezi různými liniemi obchodu.

V postupu pro výpočet zbytkové hodnoty v riziku chybí přesná identifikace modelu. Tedy máme model, který se používá k výpočtu, ale již se autoři nezbyvají tím, zda je opravdu tento model možno použít na daná data. Pomocí modelu dostaneme rozložení pravděpodobnosti s parametry dle záměru uživatele, ale již model dále nezkoumáme.

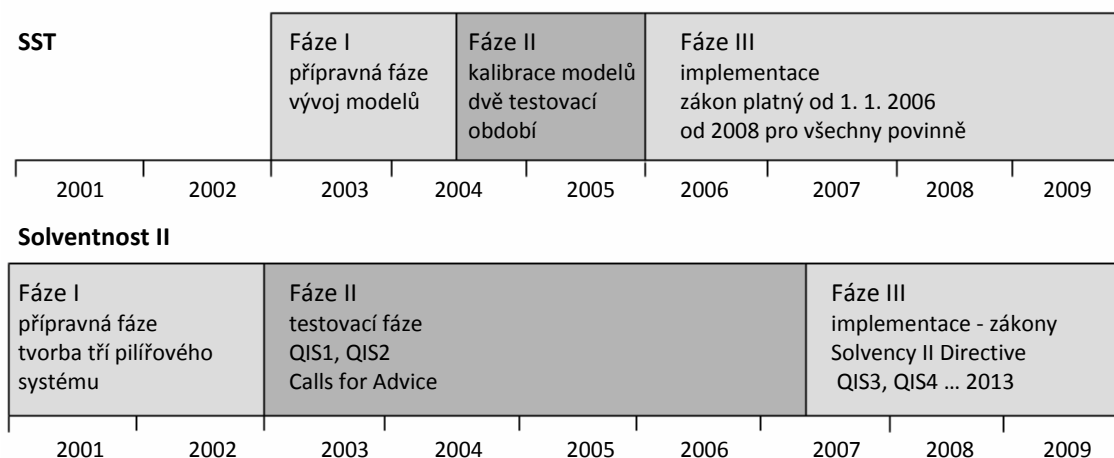
## 4. Švýcarský solvenční test

V této kapitole se zaměříme na vývoj a současný stav výpočtu solventnosti ve Švýcarsku. Jelikož tato země není členem Evropské unie, mohlo by se zdát, že se o vývoj Solventnosti II nemusí zajímat. Opak je pravdou. V této zemi započal vývoj nového přístupu k regulaci a měření rizik ve zhruba stejné době jako zájem o Solventnost II v Evropě. Avšak v současné době je již v této zemi zaveden plně funkční systém pod názvem „Švýcarský solvenční test“ (SST – Swiss Solvency Test). Celá kapitola byla vypracována dle následujících textů [ 10 ], [ 11 ], [ 15 ], [ 16 ].

První podnět k novému regulačnímu mechanismu přinesl Herbert Lüthy (ředitel FOPI - Federal Office for Private Insurers) koncem roku 2002. Hlavním cílem tohoto přístupu byla ochrana pojištěnců a finanční stabilita pojišťoven a zajišťoven. Na počátku roku 2003 byly započaty diskuze ohledně podoby solvenčního testu. Byla vydána tzv. Bílá kniha (White papers), ve které jsou ustanoveny hlavní myšlenky nového přístupu. Do konce roku 2005 trvala testovací a kalibrační fáze. Od počátku roku 2006 je v platnosti zákon, který upravuje danou problematiku. S tímto zákonem vstupuje v platnost povinnost pro velké životní a neživotní pojišťovny vykazovat podle nových pravidel. Od roku 2008 se těmito pravidly již musí řídit všechny pojišťovny i zajišťovny ve Švýcarsku bez výjimek.

### 4.1. Porovnání Solventnosti II a SST

Nejprve se podívejme na zajímavé srovnání časového vývoje obou projektů. Vidíme, že projekt SST začal o něco později, přesto je již v platnosti. Zajisté to může být velikostí a jednotností švýcarského trhu ve srovnání s celou Evropou.



Obrázek 3 – Časové porovnání SST a Solventnosti II

Jak již bylo řečeno, Švýcarsko není členem Evropské unie, přesto SST byl vyvíjen s ohledem na konzistenci se Solventností II. Můžeme však pozorovat rozdíly, z nichž některé shrnuje následující tabulka.

SST	Solventnost II
99% TVaR	99,5% VaR
MCR stanoveno jako 60% SCR	Dosud nerozhodnuto, zda MCR bude určen jako podíl SCR nebo zda bude probíhat individuálním výpočtem
Nejsou stanoveny podmínky na „kvalitu“ kapitálu	Je brán ohled na „kvalitu“ kapitálu – tzv. tiers I, II, III
Nekvantifikuje operační rizika	Kvantifikuje operační rizika
V platnosti od 1. 1. 2006	Ve vývoji, současná fáze QIS4
Principal-based – možné rozšíření – motivace na zlepšení	Rule-based – přesně specifikované, – možnost interních modelů
Prospektivní (také holandský a kanadský model)	Retrospektivní (většina)

**Tabulka 5 – Porovnání SST a Solventnosti II**

Společných znaků mezi těmito modely nalezneme bezesporu hodně. Rozhodně mezi ně patří smysl a cíl obou projektů. V případě Solventnosti II se navíc autoři musejí potýkat s odlišnými normami v jednotlivých zemích. Další shodnou vlastností je možnost výběru standardního či interního modelu. Ve Švýcarsku je však kladen důraz na vývoj vlastních modelů. Na standardní modely je pohlíženo jako na něco velmi jednoduchého, což je u zvláště velkých společností nevhodné. Zatímco v projektu Solventnosti II je na standardní model kladen velký důraz. Autoři SST považují tvorbu interních modelů za něco velmi pozitivního, co přispěje k porozumění vlastním rizikům. Naopak odsuzují použití předem stanoveného modelu bez dalších úvah.

Mezi další společné vlastnosti patří modernizace zastaralého systému, tří-pilířový systém podobně jako v bankovníctví, finanční stabilita trhu a v neposlední řadě ochrana spotřebitele. Co se týče rizik, oba testy berou v potaz různé druhy rizika a ne pouze riziko pojistné. Oba testy jsou svým účelem a strukturou velice podobné. Dále se podíváme blíže na způsoby výpočtu a v souladu s tématem této práce se zaměříme i na výpočet solvenčního požadavku neživotního pojištění.

## 4.2. Principy a hlavní cíle SST

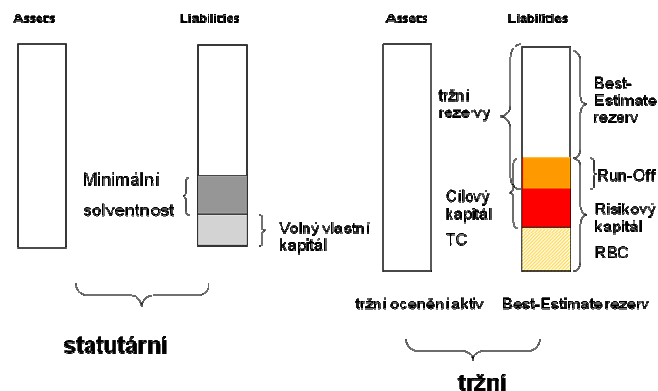
V této kapitole uvedeme hlavní principy Švýcarského solventního testu. Některé z nich jsme již naznačili v předchozí kapitole.

- Aktiva i závazky jsou oceňovány tržně konzistentním způsobem – je důležité obě skupiny ocenit pomocí stejných metod. Pokud je to možné, aktiva jsou ohodnocena dle tržních hodnot, jinak pomocí srovnatelných hodnot s ohledem na likviditu a další parametry.

U závazků se jako tržní odhad bere součet nejlepšího odhadu (best-estimate) a rizikové marže (risk margin).

- Kompatibilita s EU a Solventností II – dva různé testy, obdoba MCR a SCR.
  - Minimální solventnost = Minimum solvency (statutární)
  - Cílový kapitál = Target capital (tržně konzistentní)

Minimální solventnost je založena na statutární rozvaze, její výpočet je jednoduchý, ale neodráží celkovou rizikovou situaci na rozdíl od cílového kapitálu spočteného na základě tržního přístupu.



Obrázek 4 – Rozdíl mezi statutárním a tržním přístupem, převzato z prezentace SST [ 15]

- Kapitálová přiměřenost je považována za dostačující, pokud je cílový kapitál menší než risk-bearing kapitál.  $TC \leq RBC$  – více v následující kapitole.
- Kompatibilita s ostatními účastníky – výpočet kreditního rizika dle BASEL II v těch oblastech, kde mají společné podmínky s bankovním sektorem.
- Pokud není možno použít standardní model, musí se použít částečně nebo zcela vlastní model.
- SST se týká všech společností a skupin, které mají sídlo ve Švýcarsku.

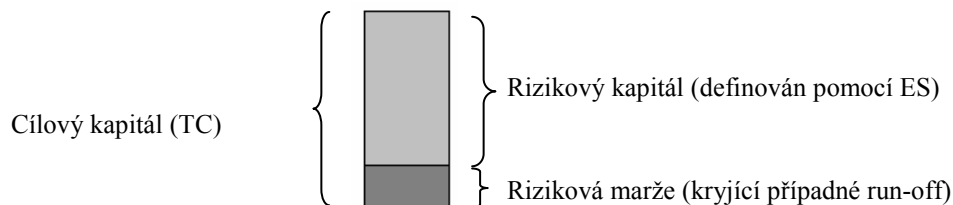
- Společnost je povinna zajistit transparentní zprávu – přehlednost, smysluplnost a odůvodnění zvolených modelů a metod.
- Od 1. 1. 2006 je ve Švýcarsku zavedena funkce odpovědného pojistného matematika, který je za tuto zprávu a celý výpočet zodpovědný.

#### 4.2.1. Cílový a rizikový kapitál

Již známe rozdíl mezi statutárním a tržním přístupem. Nyní se podrobněji podíváme na výpočet cílového kapitálu v tržním přístupu. Cílový kapitál je složen ze dvou hodnot, a to z rizikové marže a zbytkové hodnoty v riziku z rizikového kapitálu s obdobím jednoho roku a hladinou 99% (ve švýcarské terminologii používána veličina expected shortfall). Přestože se jedná o hodnotu v riziku, je třeba dát pozor, že tato veličina není definovaná pro pravý okraj rozdělení výše škod. Zajímáme se o levý okraj rozdělení rizikového kapitálu. Pro rozlišení budeme tuto hodnotu značit  $ES_\alpha$  a můžeme ji definovat následovně

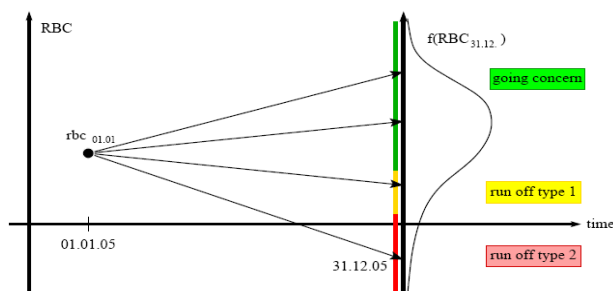
$$(93) \quad ES_\alpha(X) = [X \mid X \leq VaR_\alpha^{SST}(X)], \text{ kde } VaR_\alpha^{SST}(X) = \sup(x : P(X \leq x) \leq \alpha).$$

Riziková marže představuje diskontovanou hodnotu hypotetického budoucího run-off všech pojistných závazků. Vyjadřuje případnou kompenzaci pro třetí stranu za převzetí závazků v případě nepříznivé situace.



Obrázek 5 – Rozklad cílového kapitálu

Rizikový kapitál (Risk Bearing Capital – RBC) je definován jako rozdíl mezi tržně konzistentní hodnotou aktiv a diskontovanou hodnotou nejlepšího odhadu závazků (viz Obrázek 6). Dále ukážeme, jak se chová RBC v čase.



Obrázek 6 – Chování RBC v čase, převzato z [ 16 ]

Na obrázku vidíme vývoj hodnoty RBC na začátku a na konci účetního období. Zatímco na počátku je hodnota dána, na konci její hodnotu neznáme. V podstatě mohou nastat tři možnosti, kterých může RBC nabýt. V případě horní části není žádný problém, tržní hodnota aktiv je větší než tržní hodnota závazků.

Ve zbylých dvou případech se dostáváme do problémů. Obě situace znamenají situaci, kdy nastává run-off. V případě prostřední části je situace zvládnutelná, neboť je hodnota aktiv dostatečně vysoká na to, aby pokryla očekávanou hodnotu budoucích závazků. Ve spodní části bohužel nejsou tyto prostředky k dispozici a není možno plně uspokojit závazky. Hranici mezi prostřední a spodní částí lze vyjádřit pomocí rizikové marže, která je popsána výše.

Nyní již můžeme přistoupit k popisu výpočtu cílového kapitálu. Ten se má rovnat současné hodnotě  $RBC_0$ , přičemž víme, že zbytková hodnota v riziku  $RBC_1$  je rovna současné hodnotě rizikové marže  $RM_0$

$$(94) \quad ES_\alpha(RBC_1 | RBC_0 = TC) = RM_0.$$

Ve Švýcarském solvenčním testu se používá aproximace (odvozeno Gisler [ 9 ])

$$(95) \quad TC = -ES_\alpha\left(\frac{RBC_1}{1+r} - RBC_0\right) + RM_0,$$

kde  $r$  je roční bezriziková úroková míra v čase 0.

#### 4.2.2. Neživotní pojištění v SST

Jelikož je celá práce zaměřena na neživotní pojištění, i v kapitole SST se tomuto tématu budeme věnovat podrobněji. Přestože je v Švýcarsku kladen velký důraz na interní modely, v této kapitole popíšeme principy standardního modelu. Způsob výpočtu solvenčního testu je v této zemi založen na jiném principu než v Solventnosti II. Jedná se o model, který pracuje s různými druhy pravděpodobnostních rozdělení, které následně agreguje dohromady. Cílem je dosáhnout konkrétního rozdělení vyjadřující možné změny rizikového kapitálu v období jednoho roku.

Mezi faktory ovlivňující tento výpočet patří výše zaslouženého pojistného, náklady pojišťovny, budoucí závazky a změny v rezervách. Rezervy jsou modelovány pro všechny linie obchodu dohromady a pomocí pouze jednoho rozdělení. Co se týče budoucích závazků vzniklých škodami, dělí se na tři kategorie. První z nich jsou škody velké, které jsou méně časté, druhou skupinu tvoří naopak škody menší respektive normální, ale frekventovanější.



Do poslední skupiny patří katastrofické události, které jsou ve SST modelovány pomocí scénářů.

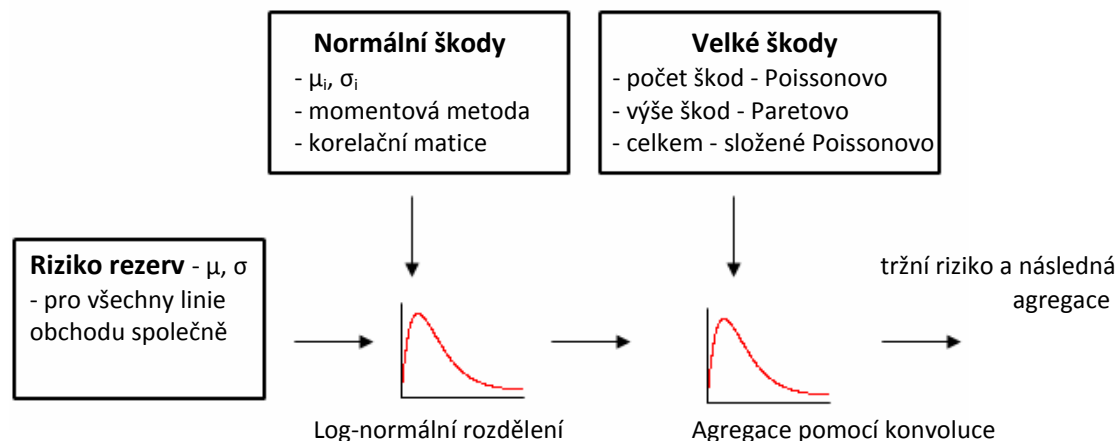
Z hlediska časového období můžeme budoucí ztráty rozdělit na ty, co vznikly ze závazků aktuálního roku nebo předešlých. Pro ztráty ze závazků z aktuálního roku máme již výše zmíněné dělení na větší a menší škody. Výpočet se odvíjí v rámci jednotlivých LoB. Odhaduje se výše zaslouženého pojistného a variabilita škodního poměru. S pomocí těchto dat a dané korelační matice pro LoB se následně odvodí celkové rozdělení menších či normálních ztrát. Toto celkové rozdělení může být například gamma rozdělení.

Velké ztráty jsou také modelovány v rámci skupin LoB. Lze předpokládat, že tyto ztráty jsou nezávislé. Modelují se pomocí složeného Poissonova rozdělení. Výše škod může být například pomocí Paretova rozdělení s prahovou hodnotou.

Nesmíme zapomenout, že se jedná o škody, které nastanou v budoucnu. Při jejich vyčíslení musíme uvažovat tuto časovou souvislost a diskontovat je použitím bezrizikové úrokové míry.

Autoři SST předpokládají nezávislost mezi jednotlivými LoB, a tak nemusejí používat korelační matici pro agregaci rozptylů. V případě předpokládané nezávislosti platí, že výsledný rozptyl je součtem rozptylů LoB.

Výše popsany přístup přehledně shrnuje následující obrázek.



**Obrázek 7 – Schéma agregace jednotlivých rozdělení škod neživotního pojištění**

V obrázku není zahrnuto modelování za pomoci scénářů. Je důležité, aby se kategorie velkých škod a scénáře nepřekrývaly, tj. že nebudeme počítat stejný typ škody do obou skupin. Stejně tak tomu je u Solventnosti II. Tuto problematiku rozebereme poněkud podrobněji v další

části. Agregace normálních a velkých škod probíhá pomocí konvoluce, neboť se předpokládá, že tyto škody jsou navzájem nezávislé.

### 4.2.3. Scénáře

Již v předchozí kapitole jsme se zmínili o dalším možném přístupu, a tím jsou scénáře. Také v projektu Solventnosti II jsme se již setkali se scénáři, a to v případě rizika katastrofického. Principiálně se jedná o ten samý přístup. Pomocí scénářů se snažíme vyjádřit velmi málo pravděpodobné události, které mají negativní vliv na rizikový kapitál. V případě SST rozlišujeme dva druhy scénářů v závislosti na tom, zda jsme je již zahrnuli do agregace nebo nikoliv.

Do první skupiny patří ty scénáře, které již byly vyčísleny a zároveň agregovány do celkové distribuční funkce. Proč tyto scénáře vyčíslovat, když je vlastně poté neuvažujeme? Mohou například sloužit jako podpůrné prostředky pro kontrolu z předchozího výpočtu. Do druhé skupiny patří scénáře, které ještě nebyly vyčísleny. Ty musí být zahrnuty do celkové agregace.

Ve standardním modelu je připraveno několik scénářů, které je nutné aplikovat. V této práci je však nebudeme podrobně rozebírat. Naopak se podíváme na to, jak je možné tyto scénáře spojit v jednu distribuční funkci.

Ve SST se předpokládá, že pravděpodobnost realizace scénáře je natolik malá, že se nestane více než jedna událost za rok. Máme-li  $m$  scénářů, potom můžeme označit  $S_k, 1 \leq k \leq m$  situaci, kdy scénář  $k$  nastane, a  $S_0$ , kdy žádný nenastane. Příslušné pravděpodobnosti uskutečnění stavu  $S_k$  označíme  $p_k$ .

Dále označíme  $c_j$  efekt daného scénáře  $S_j$ . Jelikož se rizikový kapitál zmenší po nastání scénáře, hodnota  $c_j$  je záporná.

$$(96) \quad c_j = [RBC_1(S_j) - RBC_1(S_0)], \quad j = 1, \dots, m.$$

Nyní můžeme definovat distribuční funkci změny rizikového kapitálu pro období, kdy žádný ze scénářů nenastane

$$(97) \quad F_0(x) = P \left[ \frac{RBC_1}{1+r} - RBC_0 \leq x \mid S_0 \right].$$

Obdobnou distribuční funkci chceme odvodit i pro období, kdy se scénář naplní. Můžeme ji zapsat podobným způsobem jako  $F_0(x)$ . Dále si uvědomíme, že pokud nastane scénář  $S_j$ ,

jeho velikost máme vyjádřenou pomocí  $c_j$ . Jelikož předpokládáme nezávislost s jinými typy rizika, realizace scénáře se projeví pouze jako posun o hodnotu  $c_j$

$$(98) \quad F_j(x) = P \left[ \frac{RBC_1}{1+r} - RBC_0 \leq x \mid S_j \right] = F_0(x - c_j).$$

Posledním krokem je agregace všech scénářů dohromady do jedné distribuční funkce, která vyjadřuje změnu rizikového kapitálu

$$(99) \quad F(x) = \sum_{j=0}^m p_j F_j(x) = \sum_{j=0}^m p_j F_0(x - c_j).$$

Z této distribuční funkce již pak můžeme spočítat očekávanou ztrátu (ES) (viz vzorec (93)).

## 5. Numerické porovnání jednotlivých metod

V předchozích kapitolách jsme se věnovali teoretickému popsání různých metod výpočtu solventnosti. V této kapitole se budeme věnovat konkrétním výpočtům. Cílem této kapitoly není pouhé srovnání modelů, ale především pochopit chování modelů na změnu vstupních dat. Konkrétně se nám bude jednat o první tři návrhy, a to QIS 3, návrh Německé asociace GDV a v neposlední řadě americký návrh.

Tato kapitola je rozdělena na dvě části. První je věnována všem třem modelům a je založena na výpočtu solventnosti z dat pouze z jednoho roku. Ve druhé části nás budou zajímat jen evropské modely a výpočty pomocí dat s delší historií. K výpočtu v první části byly použity hodnoty obsažené v americkém studii IAA [ 12 ]. Jelikož v tomto návrhu jsou hodnoty pouze za jeden rok, bylo nutné pro další výpočty a porovnání použít jiná data. Vzhledem k tomu, že nemáme přístup k žádným reálným údajům, bylo nutné navrhnout hodnoty vlastní. Cílem bylo dodržet smysluplnost a věrohodnost výpočtů, avšak přesto zvolit takovou strukturu, abychom ukázali silné a slabé stránky modelů.

Samotný výpočet byl proveden v programu Mathematica. Volba tohoto programu nebyla v tomto případě nutná. Například výpočet QIS 3 je uzpůsoben tak, aby ho bylo možné provést i v programu Excel od společnosti Microsoft. Přesto práce s Mathematicou umožňuje snazší manipulaci s daty a skýtá mnoho dalších předností. V této práci neuvádíme vstupní kód výpočtu, neboť neobsahoval žádné speciální příkazy, které by bylo nutné komentovat či se jim blížeji věnovat. Pro úplnost všechny soubory můžete nalézt na přiloženém CD-ROMu s naprogramovanými výpočty a výsledky. Popis struktury souborů je detailně popsán v příloze (Příloha H). V práci se omezíme pouze na výstupy a komentáře k nim.

Americký model	GDV	QIS 3	Skupina neživotního pojištění
Auto Liability	Motor liability	Motor, third party liability	Pojištění motorových vozidel
Auto Physical Damage	Accident, health, motor accident	Motor, other classes	Pojištění motorových vozidel
Homeowners	General property	Fire and other damage property	Pojištění požáru a jiných majetkových škod
Commercial Liability	Liability	Accident and health – workers compensation	Pojištění odpovědnosti za škodu
Commercial Property	Industrial property	Fire and other damage property	Pojištění požáru a jiných majetkových škod

**Tabulka 6 – Přibližné srovnání linií obchodu pro různé modely**

Při porovnání modelů jsme narazili na některé problémy, které by mohly do jisté míry srovnání ovlivnit. Jedním z nich byly linie obchodu. Všechny tři modely obsahují jiné typy linií obchodu. Největší rozdíl představoval americký model, kde je trh zaměřen odlišným způsobem než v Evropě. Přestože snahou bylo přiřadit skupiny co nejlépe, musíme brát v úvahu, že se jedná jen o přibližné srovnání (Tabulka 6).

### 5.1. Data bez dostatečné historie

Americký model pracuje s daty pouze z jednoho předchozího roku. Proto se i u evropských modelů omezíme na tuto skutečnost. To znamená, že nebudou použity vlastní hodnoty pro výpočet rozptylu a využijí se hodnoty odhadnuté z trhu.

Jako první datový soubor byly použity hodnoty z tabulky z americké studie IAA [ 12 ]. Přestože pro výpočet zbytkové hodnoty v riziku v americkém modelu máme k dispozici výsledky, pro kontrolu jsme výpočty provedli znovu. Jelikož se v evropských modelech pracuje s hodnotou v riziku, pro srovnání jsme spočítali také tuto hodnotu i pro americký model. Standardní kombinace volby hladiny spolehlivosti pro srovnání hodnoty v riziku a zbytkové hodnoty v riziku je 0,995 a 0,99. Pokud si však připomeneme závěry z první kapitoly týkající se volby spolehlivosti pro odpovídající hodnoty v riziku, zjistíme, že srovnatelná volba hladin je 0,9962 a 0,99. Proto jsme pro americký model spočetli 6 výsledků, které můžeme porovnat. Stejná data jsme vložili i do ostatních dvou modelů. Výsledky shrnuje následující tabulka.

Model ( $\alpha$ )	IAA (0,99)	IAA (0,995)	IAA (0,9962)
<b>VaR</b>	2,731	2,796	2,821
<b>TVaR</b>	2,821	2,882	2,906

**Tabulka 7 – Souhrn výsledků pro vstupní data z americké studie, výsledky v mld.**

Nejprve si všimneme, že v souladu s první kapitolou opravdu platí, že zbytková hodnota v riziku je vždy větší než hodnota v riziku. Pro porovnání v rámci amerického modelu nás nejvíc zajímají světle šedé buňky (Tabulka 7). Obecně je považováno, že stačí vzít hladinu o pět tisícín větší pro VaR a hodnoty si pak odpovídají. Jak vidíme z výsledků, není tomu tak. Musíme vzít ještě o něco větší hladinu spolehlivosti, abychom dosáhli rovnosti (hodnoty 2,821 v tabulce i tak nejsou totožné, ale až po zaokrouhlení).

Oba dva evropské modely neposkytují hodnotu v riziku přímo, ale pouze kapitálový požadavek. Proto pro porovnání amerického modelu s evropskými potřebujeme znát hodnotu kapitálového požadavku místo hodnot v riziku. Soustředili jsme se pouze na kapitálový

požadavek odvozený z hodnoty v riziku, neboť na této hodnotě jsou oba dva evropské modely založeny. Kapitálové požadavky shrnuje následující tabulka (hladina spolehlivosti ve všech případech 0,995):

Model	IAA	GDV	QIS 3
<b>Kapitálový požadavek</b>	531,0	189,0	320,1

**Tabulka 8 – Souhrn výsledků pro vstupní data z americké studie, výsledky v mil.**

V tabulce vidíme poměrně vysoké absolutní rozdíly. Ovšem jak již bylo řečeno, modely jsou nastaveny pro různé trhy a také vznikly v jiné době. Nastavení konstant modelu nemusí být pro všechny modely srovnatelné.

Pokud budeme předpokládat, že se hodnoty opravdu dají takto porovnat, vidíme, že americký model by byl nejpřísnějším. Z porovnání evropských modelů je opatrnější QIS 3. Tento model je novější než GDV, a tak lze předpokládat, že bylo zvoleno přísnější nastavení modelu. Ovšem učinit obecné závěry pomocí těchto tří výsledků nemůžeme.

Do této doby jsme porovnávali modely s daty s historií pouze za poslední rok. V další kapitole srovnáme mezi sebou evropské modely s použitím delších historických dat. Především se soustředíme na hlubší prozkoumání modelů a vliv vstupních dat na chování modelů.

## **5.2. Data s dostatečnou historií**

Jelikož předností obou evropských modelů je používání vlastních dat k upřesnění výpočtu, v předchozí kapitole jsme zdaleka nemohli využít jejich potenciál. Americký model pracoval pouze s jedním rokem, a tak při výpočtech evropských modelů musely být použity tržní odhady na místo vlastních ukazatelů. Tyto ukazatele je totiž možné použít pouze při znalosti delších časových úseků. Nepoužití vlastních hodnot vnášelo do modelů mnoho nepřesností a navíc rozdílů mezi nimi, díky různě odhadnutým parametrům modelu z trhu. Proto se v této kapitole zaměříme na evropské modely s daty s delší historií a budeme zkoumat jejich chování pro různá vstupní data.

Aby se projevil vliv vlastních dat, je zapotřebí mít k dispozici historické údaje nejméně za 7 let v případě QIS 3 a 9 let v případě modelu GDV. Jelikož jsme neměli tato data k dispozici, bylo nutné navrhnout data vlastní. To nám na druhou stranu přineslo dostatečnou volnost ve volbě hodnot. Období bylo zvoleno pro všechny výpočty 12 let. Vycházeli jsme ze stejných skupin pojištění jako v předchozí kapitole. Použili jsme stejné pojistné a pouze jsme měnili

výši ztrát z jednotlivých let. Tento předpoklad není příliš omezující. Velmi důležitý je poměr mezi výší škod a pojistným a ten můžeme dostatečně měnit i jednou z obou veličin. Ztráty jsme generovali náhodně s ohledem na výši pojistného v daném roce, a zároveň aby příslušné škodní poměry měly požadovanou strukturu.

Testování modelů jsme rozdělili na tři části a to podle volby velikosti a váženého rozptylu škodního poměru. Nejprve jsme stanovili meze pro škodní poměr a měnili velikost vážené směrodatné odchylky. Poté jsme naopak zachovali stejnou strukturu škodního poměru a pouze měnili jeho velikost. Nakonec jsme zafixovali obě hodnoty a pouze měnili časovou strukturu.

### 5.2.1. Proměnlivá směrodatná odchylka

Nejprve jsme se zaměřili na stejnou výši a různou váženou směrodatnou odchylku škodního poměru ( $\sigma^w$ ). V tabulce najdeme jednotlivé výsledky. Hodnota v záhlaví tabulky pouze označuje přibližnou hodnotu, okolo které se skutečné hodnoty pohybovaly.

škodní poměr 0,6 – 0,8	$\sigma^w = 0,011$		$\sigma^w = 0,020$		$\sigma^w = 0,029$	
	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3
kapitálový požadavek	-6,328	3,178	-4,285	3,355	-5,791	3,564

Tabulka 9 – Souhrn výsledků pro proměnlivou směrodatnou odchylku, výsledky v mil.

Na první pohled nás zaujmou záporné hodnoty. Ve skutečnosti by zde měly být nuly (viz vzorec ( 64 )), avšak pro lepší pochopení jsme ponechali záporný výsledek. Nulový kapitálový požadavek není špatně, bohužel v tomto případě se nám toto chování nejeví zcela správné. Největší možná vážená směrodatná odchylka pro škodní poměr v intervalu 0,6 - 0,8 může být přibližně 0,030 a i pro ni nám model GDV poskytne zápornou respektive nulovou hodnotu. Z čehož plyne, že při téměř libovolné volbě hodnot škodního poměru v tomto intervalu dostaneme vždy nulový kapitálový požadavek.

Co je příčinou takto nízkých hodnot? Odpověď nalezneme poměrně snadno, a to pohledem opět na vzorec ( 64 ). Pro připomenutí ho uvádíme znovu

$$K_v \geq \max \left( \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} K_i K_j} + \mu - 100\%; 0 \right).$$

Vidíme zde dvě části. První z nich pod odmocninou odpovídá za kombinaci směrodatných odchylek a druhá za střední hodnotu. Problém záporných hodnot je způsoben příliš malou střední hodnotou  $\mu$  škodního poměru, neboť jsme volbou úzkého pásma pro škodní poměr dosáhli malé celkové směrodatné odchylky. Při volbě škodního poměru ve vyšších hladinách

již tento problém nevzniká. Model pracuje s kombinovaným poměrem, a tak je logické, že reaguje až pro vyšší hodnoty na rozdíl od QIS 3. Přesto tento fakt vidíme jako slabé místo modelu.

Na druhou stranu Výsledek pro QIS 3 je mnohem uspokojivější. Pro rostoucí směrodatnou odchylku roste i kapitálový požadavek, což odpovídá větší nestabilitě v budoucím vývoji škodního poměru. Proto nám výsledky modelu QIS 3 přijdou opodstatněné.

### 5.2.2. Proměnlivá výše škodního poměru

Jak již bylo řečeno v úvodu této kapitoly, další výpočty jsou zaměřeny na změnu výše škodního poměru při zachování stejné struktury škodního poměru a tedy i směrodatné odchylky. Opět jsme zachovali stejnou výši pojistného jako v předchozích případech. Výsledky jsou v následující tabulce.

$\sigma^w = 0,020$	poměr 0,4 – 0,6		poměr 0,6 – 0,8		poměr 0,8 – 1,0		poměr 1,0 – 1,2	
	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3
<b>kapitálový požadavek</b>	-13,534	3,335	-6,138	3,335	1,258	3,335	8,654	3,335

Tabulka 10 – Souhrn výsledků pro proměnlivou výši škodního poměru, výsledky v mil.

První komentář můžeme opět věnovat modelu GDV. Vidíme rostoucí hodnotu kapitálového požadavku v závislosti na rostoucím škodním poměru. Tento výsledek je v souladu se zjištěním z minulého výpočtu.

Pokud se podíváme na hodnoty z modelu QIS 3, zjistíme, že se pro různé hodnoty škodního poměru nemění. Z hlediska výpočtu modelu je tento výsledek správný, ale je otázka, zda by se takto model měl opravdu chovat.

Na závěr těchto dvou výpočtů ještě uvedeme hodnoty kapitálových požadavků pro oba dva modely, kdybychom k výpočtu nepoužili hodnoty vlastní, ale pouze hodnoty tržní. Potom by hodnota kapitálového požadavku byla 10,711 mil. pro GDV a 6,427 mil. pro QIS 3. Obě dvě hodnoty výrazně převyšují všechny naše výpočty. Fakt, že hodnoty s tržními odhady jsou větší, se zdá být správný. Otázkou je, zda jejich absolutní výše není příliš velká. Odpověď na tuto otázku se však nedá říci na základě použitých dat. Bylo by zapotřebí podrobnější studie založené na reálných datech.

### 5.2.3. Časová struktura škodního poměru

Posledním předmětem zkoumání se stala časová struktura škodního poměru. Tímto pojmem myslíme vývoj škodního poměru v čase. Pro jednoduchost, avšak názornost, byl použit



příklad pouze s jednou linií obchodu, ve které máme pouze dvě velikosti škodního poměru (0,6 a 0,9) a konstantní velikost pojistného. Provedeme dva výpočty. V prvním z nich bude vývoj škodního poměru nejprve 0,6 a potom 0,9, tedy zhoršení situace vzhledem k současnosti a ve druhém přesně naopak. Výsledky jsou opět v následující tabulce.

	1. výpočet		2. výpočet	
	GDV	QIS 3	GDV	QIS 3
<b>kapitálový požadavek</b>	25,964	148,094	25,964	148,094

**Tabulka 11 – Souhrn výsledků pro různou časovou strukturu, výsledky v tis.**

Vidíme, že ani jeden z modelů nereaguje na vývoj škodního poměru. Tento fakt je slabým místem obou modelů. Model by měl odrážet, jestli se vývoj škodního poměru zlepšuje nebo zhoršuje. To by se mělo projevit ve změně kapitálového požadavku, ale ani v jednom případě tomu tak není.

Závěrem této kapitoly bych rád poznamenal, že porovnávání těchto dvou modelů by bylo zajímavé provést mnohem podrobněji. Mnohem účinnější by však bylo provést tento rozbor na reálných datech, podobně jak je to realizováno v rámci kvalitativních dopadových studií. Vzhledem k tomu, že však nemáme k dispozici reálná data, ukončíme praktický rozbor modelů na tomto místě.

## Závěr

Hlavním cílem této práce bylo popsat a zhodnotit různé přístupy výpočtu kapitálového solvenčního požadavku pro neživotní pojištění. Důraz měl být kladen především na současný vývoj Solventnosti II. Přesto jsme se v této práci neomezili jen na tento model a porovnávali jej s jinými přístupy. Pro lepší pochopení navrhovaných modelů jsme si také za úkol stanovili provést konkrétní výpočty.

Téma týkající se solventnosti je velmi široké a i přesto, že jsme se omezili jen na neživotní pojištění, nebylo se možné věnovat všem tématům do detailu. Cílem bylo ukázat různé přístupy, popsat podrobněji či vysvětlit některé části, které v daných dokumentech a návrzích nebylo možné nalézt. V mnohých případech jsme dospěli ke správnému výsledku. Bohužel v některých případech nebylo možné návrhy prozkoumat blíže, protože neobsahovaly podrobné informace o získaných hodnotách či postupech. Bylo tomu především u odhadů hodnot z trhu, kde však nepředpokládáme žádné problémy. Na druhou stranu mnoho odhadů korelací mezi liniemi obchodu bylo v návrzích naprosto bez odůvodnění.

V poslední části jsme se věnovali konkrétním výpočtům, a to na americkém a obou evropských modelech. Výpočty byly provedeny ve velmi zjednodušené podobě, aby bylo možné pochopit jednotlivé vztahy v modelu. Podrobnější porovnání evropských modelů přineslo zajímavé závěry, které odhalily některé slabosti obou modelů. Pravděpodobně této části lze vytknout charakter dat. Pro reálnější a podrobnější studii by bylo lepší mít skutečná data a různé přístupy testovat přímo na nich.

Vývoj Solventnosti II je velmi dlouhým a náročným procesem. Mohlo by se zdát, že se ani neblíží ke svému konci. V současné době probíhá čtvrtá kvantitativní studie, jejíž některé změny oproti třetí studii byly také zmíněny v této práci. Je otázkou, zda takto dlouhé přípravy neohrožují celý projekt. Odpověď by měla pravděpodobně znít „Ne.“. Zavedení takto rozsáhlého regulačního nástroje pro celou Evropu nesmí být ukvapeným a neopatrným krokem. Dále je nutné, aby pojišťovny či zajišťovny měly dostatek času se na nový systém připravit. Průběžné kvantitativní studie jim v tom mohou jistě pomoci.

Závěrem poznamenejme, že projekt Solventnosti II je jistě velmi smělým projektem. Sjednotit velmi různorodé pojistné trhy v Evropě pomocí jednoho modelu je velmi náročné. Na druhou stranu, pokud Evropská Unie chce zavést jednotnou kontrolu nad pojistným trhem, pak je asi toto jedinou možností. Nezapomínejme, že projekt Solventnosti II, podobně jako model

ve Švýcarsku, umožňuje použití interních modelů, kde se jistě skýtá mnoho výzev pro pojišťovny po celé Evropě.

Jak již bylo několikrát řečeno, projekt ještě není u konce. Návrh bude zajisté ještě mnohokrát změněn a upravován, a proto je nutné ho stále sledovat a být připraven na konečnou podobu. Ať již bude dokončen dříve nebo později, měli bychom být připraveni na jeho implementaci do zákonů a hlavně do běžné praxe v pojišťovnách.

## Literatura

- [ 1 ] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D.: *Coherent measures of risk*, 1998.
- [ 2 ] Bühlmann, H. a Straub, E.: *Glaubwürdigkeit für Schadenssätze*, Bulletin of the Association of Swiss Actuaries 70, (111-133).
- [ 3 ] Bühlmann, H.: *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
- [ 4 ] CEIOPS, Comité of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *QIS 3 – Calibration of underwriting risk, market risk and MCR*, 2007.
- [ 5 ] CEIOPS, Comité of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *Consultation paper 20*, 2006.
- [ 6 ] CEIOPS, Comité of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *QIS 3 – Technical specifications, PART I – Instructions*, 2007.
- [ 7 ] Centeno, L.: *The Bühlmann-Straub Model with the premium calculated according to the variance principle*, Insurance: Mathematics and Economics 8 (3-10), 1989.
- [ 8 ] GDV, Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V.: *Discussion Paper for a Solvency II Compatible Standard Approach (Pillar I)*, 2005.
- [ 9 ] Gisler, A., Zur Frage der Berücksichtigung der Finanzerträge und zur Definition des Zielkapitals im SST, 2005.
- [ 10 ] FOPI, Federal Office of Private Insurance: *Technical document on the Swiss Solvency Test*, 2006.
- [ 11 ] FOPI, Federal Office of Private Insurance: *Whitepaper on the Swiss Solvency Test*, 2004.
- [ 12 ] IAA Insurer Solvency Assessment Working Party: *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, 2004.
- [ 13 ] Klugman S., Panjer H., Willmot G.: *Loss Models: From Data to decisions*, Wiley, 1988.
- [ 14 ] Komise evropských společenství: *Směrnice Evropského parlamentu a Rady o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu SOLVENTNOST II*, Brusel, 2007.
- [ 15 ] Koubová A.: *Švýcarský solvenční test*, Praha, 2006.
- [ 16 ] Luder T.: *Swiss Solvency Test in Non-life Insurance*, FOPI, 2005.
- [ 17 ] Pflug G. Ch.: *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, University of Vienna, 2000.

# Přílohy

## Příloha A

Odvození vztahu mezi rovnostmi ( 41 ) a ( 42 ). Viz také [ 7 ].

Zavedeme nové centrované proměnné

$$Y_{ik} = X_{ik} - \mu(\theta_i), k = 1, \dots, t_i \text{ a } \bar{Y}_i = \bar{X}_i - \mu(\theta_i) = \sum_{j=1}^{t_i} \frac{P_{ij}}{P_i} Y_{ik}.$$

Pro dané  $\theta_i$  mají proměnné  $Y_{ik}$  i  $\bar{Y}_i$  nulovou střední hodnotu, totožný rozptyl a čtvrtý centrální moment jako proměnné  $X_{ik}$  a  $\bar{X}_i$ . Navíc jsou  $Y_{ik}$  a  $Y_{ij}$  nezávislé pro  $k \neq j$ .

Nyní si odvodíme několik pomocných rovností, které dále využijeme při důkazu ( 41 ) a ( 42 ). Při tomto odvození budeme využívat výše zmíněných vlastností.

$$(A.1) \quad E[Y_{ik} \bar{Y}_i | \theta_i] = \frac{P_{ik}}{P_i} E[Y_{ik}^2 | \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_i}.$$

$$(A.2) \quad \begin{aligned} E[Y_{ik}^2 \bar{Y}_i^2 | \theta_i] &= E \left[ Y_{ik}^2 \left( \sum_{i \neq k} \frac{P_{il}}{P_i} Y_{il} + \frac{P_{ik}}{P_i} Y_{ik} \right)^2 | \theta_i \right] = \\ &= E \left[ Y_{ik}^2 \left( \sum_{i \neq k} \frac{P_{il}}{P_i} Y_{il} \right)^2 + 2 \frac{P_{ik}}{P_i} Y_{ik}^3 \sum_{i \neq k} \frac{P_{il}}{P_i} Y_{il} + \frac{P_{ik}^2}{P_i^2} Y_{ik}^4 | \theta_i \right] = \\ &= \frac{\sigma^4(\theta_i)}{P_{ik}} \sum_{i \neq k} \frac{P_{il}}{P_i^2} + \frac{3}{P_i^2} \sigma^4(\theta_i) = \frac{\sigma^4(\theta_i)}{P_{ik} P_i^2} (P_i - P_{ik}) + \frac{3}{P_i^2} \sigma^4(\theta_i) = \sigma^4(\theta_i) \left[ \frac{1}{P_{ik} P_i} + \frac{2}{P_i^2} \right]. \end{aligned}$$

Obdobně lze dovodit i následující vzorce

$$(A.3) \quad \begin{aligned} E[Y_{ik} \bar{Y}_i^3 | \theta_i] &= \frac{1}{P_i^3} E \left[ Y_{ik} \left( \sum_{i \neq k} P_{il} Y_{il} \right)^3 + 3 Y_{ik} \left( \sum_{i \neq k} P_{il} Y_{il} \right)^2 P_{ik} Y_{ik} + 3 Y_{ik} \sum_{i \neq k} P_{il} Y_{il} (P_{ik} Y_{ik})^2 + P_{ik} Y_{ik}^4 \right] = \\ &= \frac{3 \sigma^4(\theta_i)}{P_i^3} \sum_{i \neq k} P_{il} + \frac{3 \sigma^4(\theta_i)}{P_i^3} P_{ik} = \frac{3}{P_i^2} \sigma^4(\theta_i). \end{aligned}$$

$$(A.4) \quad E[Y_{ik}^3 \bar{Y}_i | \theta_i] = \frac{3}{P_{ik} P_i} \sigma^4(\theta_i),$$

$$(A.5) \quad E[Y_{ij}^2 Y_{ik} \bar{Y}_i | \theta_i] = \frac{1}{P_{ij} P_i} \sigma^4(\theta_i) \text{ pro } j \neq k,$$

$$(A.6) \quad E[Y_{ij} Y_{ik} \bar{Y}_i^2 | \theta_i] = \frac{2}{P_i^2} \sigma^2(\theta_i) \text{ pro } j \neq k.$$

Navíc budeme potřebovat

$$(A. 7) \quad \begin{aligned} E\left[(X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i\right] &= E\left[(Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \mid \theta_i\right] = \text{var}[Y_{ik} \mid \theta_i] - 2E[Y_{ik}\bar{Y}_i \mid \theta_i] + \text{var}[\bar{Y}_i \mid \theta_i] = \\ &= \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{ik}} - 2\frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_i} + \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_i} = \left[\frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i}\right] \sigma^2(\theta_i), \end{aligned}$$

obdobně

$$(A. 8) \quad \begin{aligned} E\left[(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i\right] &= E\left[(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \mid \theta_i\right] = \\ &= \left[\left[\frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i}\right] \cdot \left[\frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i}\right] + \frac{2}{P_i^2}\right] \sigma^4(\theta_i), \end{aligned}$$

$$(A. 9) \quad E\left[(X_{ik} - \bar{X}_i)^4 \mid \theta_i\right] = E\left[(Y_{ik} - \bar{Y}_i)^4 \mid \theta_i\right] = 3\left[\frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i}\right]^2 \sigma^4(\theta_i).$$

V dalších výpočtech budeme využívat následující vlastnost kovariance

$$(A. 10) \quad \begin{aligned} \text{cov}(U, V) &= E\left\{E[(U - EU)(V - EV)] \mid \theta\right\} = \\ &= E\left\{E[(U - E[U \mid \theta]) + E[U \mid \theta] - EU)(V - E[V \mid \theta]) + E[V \mid \theta] - EV] \mid \theta\right\} = \\ &= E\left\{\text{cov}(U, V) \mid \theta\right\} + E\left\{(E[U \mid \theta] - EU)(E[V \mid \theta] - EV) \mid \theta\right\} = \\ &= E\left\{\text{cov}(U, V) \mid \theta\right\} + \text{cov}(E[U \mid \theta], E[V \mid \theta]). \end{aligned}$$

Nyní již máme vše připravené a můžeme tak odvodit přechod od ( 41 ) k ( 42 ). Nejprve se podíváme na levou stranu. Při úpravách budeme využívat vzorec (A. 10) a (A. 7).

$$(A. 11) \quad \begin{aligned} \text{cov}\left[\sigma^2(\theta_i), (X_{ik} - \bar{X}_i)^2\right] &= E\left[\text{cov}\left[\sigma^2(\theta_i), (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i\right]\right] + \text{cov}\left[\sigma^2(\theta_i), E\left[(X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i\right]\right] = \\ &= \text{cov}\left[\sigma^2(\theta_i), \left[\frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i}\right] \sigma^2(\theta_i)\right] = \left[\frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i}\right] \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \end{aligned}$$

Nyní opět použitím (A. 10), (A. 7), (A. 8) a definicí kovariance ukážeme rovnost pravých stran. Nejprve spočteme kovarianci pro různé  $k \neq j$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{cov} \left[ (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \right] = \\
 \text{(A. 12)} \quad & = \text{E} \left[ \text{cov} \left[ (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \right] + \text{cov} \left[ \text{E} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right], \text{E} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \right] = \\
 & = \text{E} \left[ \text{E} \left[ (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \right] - \text{E} \left[ (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \text{E} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] + \\
 & \quad + \text{cov} \left[ \left[ \frac{1}{P_j} - \frac{1}{P_i} \right] \sigma^2(\theta_i), \left[ \frac{1}{P_k} - \frac{1}{P_i} \right] \sigma^2(\theta_i) \right] = \\
 & = \left[ \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] \cdot \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] + \frac{2}{P_i^2} - \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] \cdot \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \right] \text{E} \left[ \sigma^4(\theta_i) \right] + \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] \cdot \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \text{var} \left[ \sigma^2(\theta_i) \right] = \\
 & = \frac{2}{P_i} \text{E} \left[ \sigma^4(\theta_i) \right] + \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] \cdot \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] \text{var} \left[ \sigma^2(\theta_i) \right].
 \end{aligned}$$

A nyní pro  $k = j$ , čímž se od kovariance dostáváme k výpočtu rozptylu. Navíc využijeme (A. 9).

$$\begin{aligned}
 \text{(A. 13)} \quad & \text{var} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \right] = \text{E} \left[ \text{var} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \right] + \text{var} \left[ \text{E} \left[ (X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \mid \theta_i \right] \right] = \\
 & = \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right]^2 \left[ 2\text{E} \left[ \sigma^4(\theta_i) \right] + \text{var} \left[ \sigma^2(\theta_i) \right] \right].
 \end{aligned}$$

Dosazením (A. 12) a (A. 13) do pravé strany rovnice (41) dostaneme pravou stranu (42). Tímto je důkaz proveden.

## Příloha B

Důkaz rovnosti ( 52 )

$$\text{var}[\Sigma_i^2] = \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)} \text{E}[\sigma^4(\theta_i)].$$

Vyjdeme z levé strany rovnice a dosadíme za  $\Sigma_i^2$  z ( 51 ).

$$\begin{aligned} \text{var}[\Sigma_i^2] &= \text{var}\left[\frac{1}{t_i - 1} \sum_{j=1}^{t_i} P_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2\right] = \\ \text{(B. 1)} \quad &= \frac{1}{(t_i - 1)^2} \left[ \sum_{j=1}^{t_i} P_{ij}^2 \text{var}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} P_{ij} P_{ik} \text{cov}\left[(X_{ij} - \bar{X}_i)^2, (X_{ik} - \bar{X}_i)^2\right] \right] = \end{aligned}$$

Nyní použijeme již dříve odvozené vztahy v příloze A – (A. 12) a (A. 13).

$$\begin{aligned} \text{(B. 2)} \quad &= \frac{1}{(t_i - 1)^2} \left[ \left[ 2\text{E}[\sigma^4(\theta_i)] + \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \right] \sum_{j=1}^{t_i} \left[ 1 - \frac{P_{ij}}{P_i} \right]^2 + 2 \text{E}[\sigma^4(\theta_i)] \sum_{j \neq k} \frac{P_{ij} P_{ik}}{P_i^2} + \right. \\ &\quad \left. + \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \sum_{j \neq k} \left[ 1 - \frac{P_{ij}}{P_i} \right] \left[ 1 - \frac{P_{ik}}{P_i} \right] \right] = \\ &= \frac{1}{(t_i - 1)^2} \left[ \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] \sum_{j,k} \left[ \frac{1}{P_{ij}} - \frac{1}{P_i} \right] \cdot \left[ \frac{1}{P_{ik}} - \frac{1}{P_i} \right] + 2 \text{E}[\sigma^4(\theta_i)] \left[ \sum_{j=1}^{t_i} \left[ 1 - \frac{P_{ij}}{P_i} \right]^2 + \sum_{j \neq k} \frac{P_{ij} P_{ik}}{P_i^2} \right] \right] = \\ &= \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)^2} \text{E}[\sigma^4(\theta_i)] \left[ \sum_{j=1}^{t_i} \left[ 1 - \frac{P_{ij}}{P_i} - \frac{P_{ik}}{P_i} \right] + \sum_{j,k} \frac{P_{ij} P_{ik}}{P_i^2} \right] = \\ &= \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)^2} \text{E}[\sigma^4(\theta_i)] [t_i - 2 + 1] = \text{var}[\sigma^2(\theta_i)] + \frac{2}{(t_i - 1)} \text{E}[\sigma^4(\theta_i)]. \end{aligned}$$



## Příloha C

V dokumentu Německé asociace pojistitelů nalezneme následující hodnoty:

Věrohodnostní faktor	Normální rozdělení	Logistické rozdělení	Dvojně-exponenciální
$a_{100}$	2.33	2.53	2.77
$a_{200}$	2.58	2.92	3.26
$a_{1/\alpha}$	$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(2\alpha)$

**Tabulka 12 – věrohodnostní faktor, převzato z [ 4 ] (vyjma poslední řádek)**

Výpočet věrohodnostního faktoru je dáno vzorcem:  $a = \frac{q_{1-\alpha} - \mu_V}{\sigma_V}$ , kde

pro normální rozdělení:  $q_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_V + \mu_V$ ,

pro logistické rozdělení:  $q_{1-\alpha} = b \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + \mu_V$ , kde  $b = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_V$ ,

pro dvojně-dvojně exponenciální (Laplaceovo):  $\alpha \leq 0,5$ :  $q_{1-\alpha} = -b \ln(2\alpha) + \mu_V$ , kde  $b = \frac{\sigma_V}{\sqrt{2}}$ .

Proměnné  $b$  jsou určeny z vyjádření směrodatné odchylky pro příslušné rozdělení. Po dosazení za kvantil se ve všech případech odečte střední hodnota a zkrátí směrodatná odchylka. Poté již stačí dosadit příslušnou hladinu věrohodnosti a získáme požadované výsledky.

Poslední řádek v tabulce je obecným vyjádřením výpočtu věrohodnostního faktoru pro dané rozdělení. Jak je z tabulky vidět, ke zjištění věrohodnostního faktoru nepotřebujeme znát momenty kombinovaného poměru. Navíc může být tento faktor interpretován nejen jako hodnota v riziku, ale i zbytková hodnota v riziku, a to v případě dostatečně konzervativní volby hladiny věrohodnosti (více první kapitola – porovnání VaR a TVaR).

## Příloha D

Korelační matice mezi hlavními skupinami rizik při výpočtu kapitálového požadavku v QIS 3.

CorrSCR	$SCR_{mkt}$	$SCR_{def}$	$SCR_{def}$	$SCR_{health}$	$SCR_{nl}$
$SCR_{mkt}$	1				
$SCR_{def}$	0,25	1			
$SCR_{def}$	0,25	0,25	1		
$SCR_{health}$	0,25	0,25	0,25	1	
$SCR_{nl}$	0,25	0,25	0	0	1

Tabulka 13 – korelační matice, převzato z [ 6 ]

## Příloha E

Směrodatné odchytky rizika rezerv pro všechny linie obchodu při výpočtu kapitálového požadavku v QIS 3.

LOB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma_{(res,lob)}$	15%	7,5%	15%	12,5%	7,5%	15%	10%	15%	10%	10%	10%	15%	15%	20%	20%

Tabulka 14 – směrodatná odchytky rizika rezerv, převzato z [ 4 ]

## Příloha F

Gross premiums earned per LoB	Size factor sf
Up to EUR 0.1 million	4,50
EUR 0.1 million and up	3,16
EUR 0.2 million and up	2,24
EUR 0.5 million and up	1,41
EUR 1 million and up	1,00
EUR 2 million and up	0,71
EUR 5 million and up	0,45
EUR 10 million and up	0,32
EUR 20 million and up	0,22
EUR 50 million and up	0,14
EUR 100 million and up	0,10

LoB	Variability factor
Accident + health + motor accident	0,136
Liability + aviation liability	0,269
Motor liability	0,621
Comprehensive cover + assistance	0,998
Legal expenses	0,314
Industrial property + engineering	0,649
General property	1,079
Transport + aviation comprehensive cover	0,552
Credit & suretyship	1,768
NatCat	-
Indirect business	0,626

**Tabulka 15 – hodnoty pro stanovení odhadu směrodatné odchylky, převzato z [ 8 ]**

## Příloha G

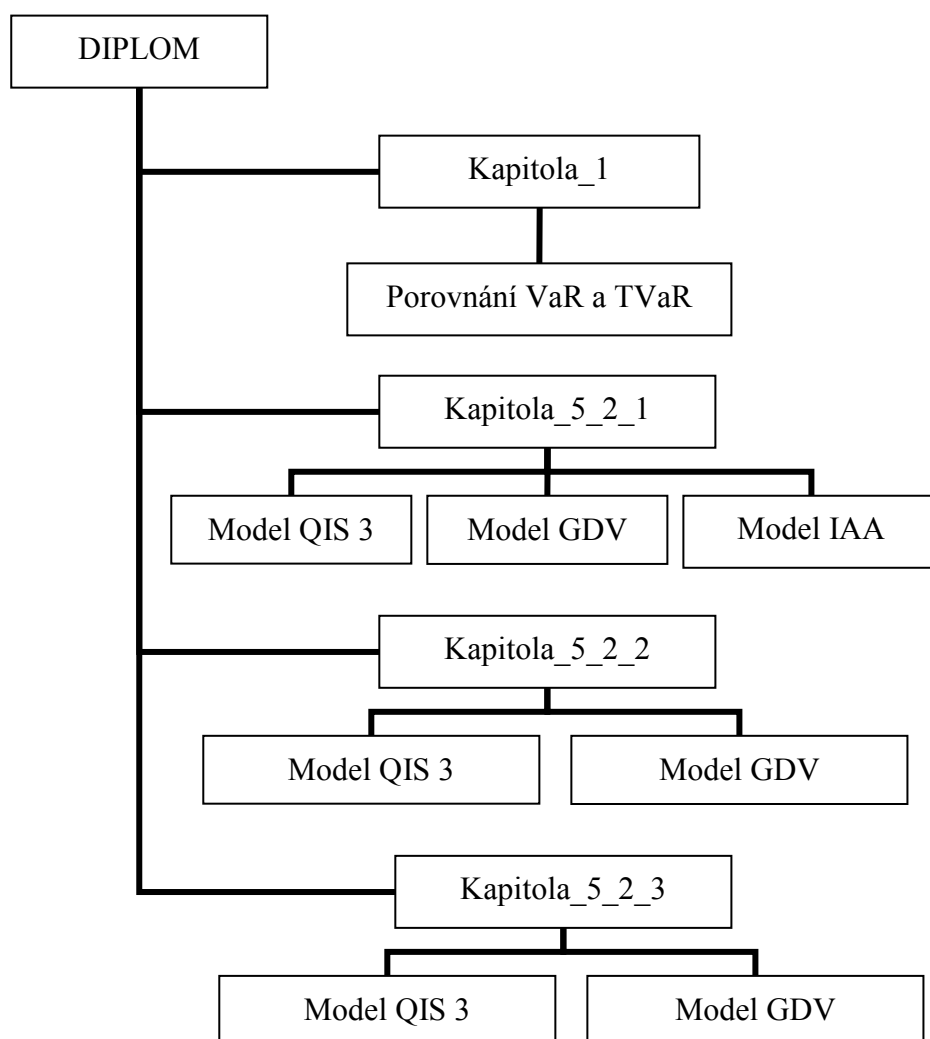
LoB SST	LoB Standard
UVG	Obligatorische Berufsunfallversicherung Obligatorische Nichtberufsunfallversicherung Freiwillige UVG Versicherung
Unfall ohne UVG	Einzelunfallversicherung UVG Zusatzversicherung Motorfahrzeuginsassen-Unfallversicherung Übrige Kollektivunfallversicherungen
Einzel Kranken	Obligatorische Einzelkrankenversicherung Freiwillige Einzelkrankenversicherung
Kollektiv Kranken	Kollektivkrankenversicherung
Sach	Feuerversicherung Elementarschadenversicherung Bauwesenversicherung Unternehmenssachversicherung Engineering, Maschinenversicherung Diebstahlversicherung Hausratversicherung (falls trennbar von Privathaftpflicht) Übrige Versicherungen gegen Sachschäden
Haftpflicht	Gebäudehaftpflichtversicherung, Privathaftpflichtversicherung, Unternehmenshaftpflichtversicherung Bauherrenhaftpflichtversicherung Allgemeine Haftpflichtversicherungen
MFK	Motorfahrzeugkaskoversicherung
MKH	Motorfahrzeughaftpflichtversicherung
Finanz und Kautio	Kreditversicherung Kautionsversicherung Baugarantieversicherung Versicherungen gegen finanzielle Verluste
Luftfahrt	Luftfahrzeugkaskoversicherung Luftfahrzeughaftpflichtversicherung
Transport	Transportgüterversicherung Schienenfahrzeugkaskoversicherung Wasserfahrzeugkaskoversicherung Wasserfahrzeughaftpflichtversicherung
Andere	Reise-, Touristen-, Verkehrsserviceversicherung Rechtsschutzversicherung Epidemieversicherung

Tabulka 16 – Linie obchodu Švýcarského solvenčního testu

## Příloha H

Tato příloha obsahuje stručný popis struktury souborů na přiloženém CR-ROMu. Na tomto médiu můžete nalézt text této diplomové práce ve formátu .pdf.

Dále je rozčleněno na 4 adresáře, které obsahují soubory z programu Mathematica (.nb). Jeden z nich obsahuje výpočet z první kapitoly, a to porovnání hladin významnosti pro hodnotu a zbytkovou hodnotu v riziku. Další tři adresáře odpovídají částem z páté kapitoly. V těchto třech adresářích najdeme 3 různé druhy souborů (QIS 3, GDV, IAA model).



Obrázek 8 – schéma obsahu přiloženého CD-ROMu