UNIVERZITA KARLOVA – PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

POSUDEK OPONENTKY BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor práce	*Jana Šimková*
Název práce	*Goniometrické funkce a jejich inverze*
Autor posudku	*Mgr. Kristýna NIŽŇANSKÁ*

Cíle (stanovení, splnění, reflexe splnění)

Stanoveným cílem práce je vytvořit přehlednou učební pomůcku, která poslouží především žákům středních škol, kteří chtějí látku goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzním lépe pochopit, nebo pouze chtějí doplnit své znalosti v oblasti goniometrie.

Práce představuje středoškolské zavedení goniometrických a cyklometrických funkcí včetně vizualizací, odvození jejich vlastností a goniometrické vzorce, z nichž některé jsou odvozeny. Navíc obsahuje odvození pomocí funkcionálních rovnic a odvození rozvojů goniometrických a cyklometrických funkcí do nekonečných řad, které bychom mohli považovat za zajímavou nadstavbu.

Oceňuji vizualizace, které jsou v práci obsaženy a které do vhodné učební pomůcky nepochybně patří. Dále oceňuji odvození vybraných geometrických vzorců v 7. kapitole, která by mohla být dále doplněna o odvození dlaších vzoců, jako například odvození vzorců pro sinus a kosinus součtu úhlů. Na některých místech (např. věta o obsahu trojúhelníku na str. 15) je vysvětlení podáno čistě formou popisu výpočtu. Zde by bylo vhodnější odůvodnit, proč daný postup funguje. Přínosné by bylo doplnit také vizualizace funkcí sekans a kosekans, jejichž zahrnutí do práce hodnotím kladně.

Chybí množství příkladů konkrétního užití goniometrických a cyklometrických funkcí, které do učební pomůcky nepochybně patří. Na mnoha místech se zavádějícím způsobem uvádí, že se goniometrické funkce využívají k výpočtu úhlů v pravoúhlém trojůhelníku, což by odpovídalo spíše užití cyklometrických funkcí. Zde by bylo nepochybně přínosné ilustrovat tyto základy na konkrétních příkladech. Pěkný příklad konkrétního užití uvedené látky nalezneme na konci poslední kapoly ve výpočtu přibližné hodnoty $\cos(\pi/10)$.

Cíl byl splněný částečně. K plně uspokojivému splnění cíle by bylo potřeba práci výše uvedeným způsobem doplnit.

Obsahové části (úplnost, relevance, řazení)

V úvodu práce je uvedeno zaměření a cíl práce a jsou představeny jednotlivé části práce. Číslování kapitol, uvedené v úvodu práce, neodpovídá číslování ve vlastním textu a obsahu práce. První kapitola nese název Goniometrické funkce a jejich inverze, týká se však spíše funkcí a inverzních funkcí obecně. Následují kapitoly 2 Trigonometrický pohled na goniometrické a cyklometrické funkce, 3 Zavedení pomocí jednotkové kružnice, 4 Vlastnosti goniometrických funkcí, 5 Vlastnosti cyklometrických funkcí, 6 Zavedení pomocí funkcionálních rovnic, 7 Goniometrické vzorce a 8 Zavedení pomocí nekonečných řad. Rozdělení obsahu práce do kapitol jejich řazení má logickou strukturu. Název poslední kapitoly je poněkud nepřesný, protože pojednává o rozvojích funkcí s pomocí řad a to, že jejich pomocí skutečně získáme řečené funkce, kapitola neukazuje. Podobně v šesté kapitole chybí důkaz existence a jednoznačnosti funkcí zavedených pomocí funkcionálních rovnic, jsou zde však odvozeny alespoň některé vlastnosti. Přesto poslední kapitolu považuji za nejzajímavější a nejpřínosnější z celé práce, neboť představuje propojení s dalšími partiemi matematiky a překračuje hranice základních středoškolských poznatků o goniometrických funkcí, kterým se věnuje naprostá většina ostatních kapitol. Zajímavé je jak odvození rozvoje funkcí do řad, tak aplikace goniometrických vzorců při odvození derivace sinu.

Odborná část (matematika/didaktika: náročnost, správnost, výstavba, konzistence apod.)

Většina práce se týká středoškolských základů goniometrie. Nadstavbu, která se dotýká vysokoškolské matematiky, představuje poslední kapitola.

Práce obsahuje několik věcných chyb:

- str. 22, 23 – předpis funkcí kosekans a sekans;
- str. 24 - definiční obor funkce kotangens nemůžeme omezit na uzavřený interval $\langle 0, \pi \rangle$, protože pro hodnoty 0 a π není kotangens definován;
- str. 31 – Obrázek 16 – prohozené označení funkcí sinus a kosinus;
- str. 38 – funkce sekans a kosekans nejsou omezené;
- str. 41 – arkus kosinus má minimum rovné 0, nikoli π;
- str. 45 – obor hodnot funkce sekans zahrnuje také π;
- str. 60 – řada diverguje (její součet je ∞, nebo -∞) „existuje-li nevlastní limita“, nikoli „neexistuje-li vlastní limita“;
- str. 65 – dokud je kosinus v limitě, není přesné nahrazovat v argumentu h za 0.

Na mnoha místech v práci není jasné rozlišení mezi tím, čím se pojmy zavádí a co se z těchto definic dále vyvozuje. Příkladem je zavedení funkcí tangens a kotangens na straně 20. Myslím, že by pomohlo, kdyby byly definice v textu jasně a explicitně vyzdviženy. Definice pojmu řada na straně 59 a 60 je zmatená.

V poslední kapitole by bylo přínosné upřesnit poloměr konvergence mocninných (Taylorových, Maclaurinových) řad, doplnit odvození rozvoje arcsin o vysvětlení binomického rozvoje a odůvodnění, za jakých předpokladů můžeme integrovat nekonečnou řadu funkcí.

Přínos (originalita, použitelnost apod.)

Práce je kompilací poznatků o goniometrických a cyklometrických funkcí. Přínos vidím v jejich uvedení na jenom místě a v doplnění o vhodné ilustrace.

Formální náležitosti (gramatika, styl, typografie, grafické části, odkazy a citace, úprava)

Práce obsahuje mnoho překlepů a několik gramatických chyb. Některé formulace jsou nesrozumitelné či nepřesné, jako například:

- str. 21 – „Definiční obor funkcí tangens a kotangens tedy nejsou všechna reálná čísla, ale bez výše zmíněných bodů.“
- str. 30 – „Na začátku kapitoly jsem zmínila, že funkce sinus a kosinus spolu souvisí. Jejich hodnoty se totiž liší jen o úhel $\pi/2$.“
- str. 43 – „Funkci arkus tangens tvoříme z omezeného definičního oboru funkce tangens, tedy z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, který je oborem hodnot této funkce.“
- str. 65 – „limitu součinu kosinu a sinu lze zapsat jako limitu kosinu a limitu sinu“ – patrně se má hovořit o součinu obou limit.

Slovní popis na straně 63 neodpovídá obrázku, ve kterém je jak přírůstek x, tak přírůstek y vyznačen zelenou úsečkou – na rozdíl od popisu, kde se na změnu y odkazuje jako na červenou úsečku.

Citace nemají standardní formu. Odkazy na literatury jsou uvedeny v proudu textu a často zahrnuji doplňující informace o autorech použité literatury, které nejsou pro bakalářskou práci nezbytné.

Zdroje (reprezentativnost, relevance, použití)

Autorka čerpá z relevantní literatury. Obecně známé informace jako například definice funkce, sinová či kosinová věta není potřeba citovat.

Vyjádření ke shodám v systému Theses: Nalezené dokumenty mají celkovou podobnost 8 %. Jednotlivé dokumenty mají míru podobnosti nejvýše 2 %.

Vyjádření ke shodám v systému Turnitin: Je uvedena celková podobnost 14 %, nalezené dokumenty mají max. 1 % shody.

Otázky k obhajobě:

- str. 28 – Co jste chtěla říct následující větou? Jak byste ji přeformulovala, aby byla přesnější?

  „Neboli pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ neplatí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.“

- str. 63 – Opravdu je hodnota relativního přírůstku rovna 50 %? Proč ano/ne?
- str. 70 – Proč se v odvozen řady pro cotg x objevuje také člen a_{-1}/x?
- str. 73 – Co jste myslela následující větou?

  „Pro to, abychom zjistili, zda je chyba menší než 10^{-3}, musí řada střídat znaménka.“

- Jak byste vysvětlila a odůvodnila následující?
  - Proč jsou grafy funkcí f a f^{-1}, která je k f inverzní, symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu?
  - Proč můžeme při výpočtu obsahu trojúhelníku nahradit výšku stranou trojúhelníku vynásobenou sinem úhlu? (str. 15, věta o obsahu trojúhelníku)
  - Proč se u funkcí, které představují převrácenou hodnotu, zachovává periodicita a parita? Proč se mění monotonie?
  - Proč se zachovává monotonie u inverzních funkcí? Proč se nezachovává omezenost?

Hodnocení: Práce splňuje podmínky kladené na bakalářskou práci. Práci s výhradami doporučuji k obhajobě.

Datum a podpis autora posudku: 9. 5. 2022