Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Goniometrické funkce a jejich inverze

Goniometric functions and their inverses

Jana Šimková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2022

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Goniometrické funkce a jejich inverze potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 14.4. 2022

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc. za všestrannou pomoc, množství cenných a inspirativních rad, podnětů, doporučení, připomínek a zároveň za velkou trpělivost s obdivuhodnou ochotou při konzultacích poskytnutých ke zpracování této práce.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce ukazuje čtyři základní způsoby, jak zavést goniometrické a cyklometrické funkce. Práce je primárně určena pro žáky středních škol, kteří se s některými z těchto zavedení ve škole setkali. Cílem bakalářské práce je především ukázat ucelené definice goniometrických funkcí a cyklometrických funkcí dle různých způsobů a představit jejich základní vlastnosti. Cílem práce je také ukázat rozdíl a přechod mezi zavedeními a jejich ekvivalenci.

KLÍČOVÁ SLOVA

Goniometrické funkce, cyklometrické funkce, trigonometrie, jednotková kružnice, nekonečná řada

ABSTRACT

This bachelor thesis shows four basic ways how to introduce trigonometric and cyclometric functions. The work is primarily intended for high school students who have encountered some of these introductions at school. The aim of the bachelor thesis is to show comprehensive definitions of trigonometric functions and cyklometric functions according to various methods and to present their basic properties. The aim of the work is also to show the difference and transition between implementations and their equivalence.

KEYWORDS

Trigonometric functions, cyclometric functions, trigonometry, unit circle, infinite series

Obsah

Úvod **6**

1 Goniometrické funkce a jejich inverze **7**

2 Trigonometrický pohled na goniometrické a cyklometrické funkce **10**

2.1 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku 10

2.2 Trigonometrické vztahy a vzorce 13

2.3 Cyklometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku 15

3 Zavedení pomocí jednotkové kružnice **17**

3.1 Goniometrické funkce a jednotková kružnice 17

3.2 Cyklometrické funkce 23

4 Vlastnosti goniometrických funkcí. **25**

4.1 Funkce sinus a kosinus. 25

4.2 Funkce tangens a kotangens 31

4.3 Funkce sekans a kosekans 38

5 Vlastnosti cyklometrických funkcí **40**

5.1 Funkce arkus sinus a arkus kosinus 40

5.2 Funkce arkus tangens a arkus kotangens 43

5.3 Funkce arkus sekans a arkus kosekans 45

6 Zavedení pomocí funkcionálních rovnic **48**

7 Goniometrické vzorce **53**

8 Zavedení pomocí nekonečných řad **59**

Závěr **74**

Úvod

Goniometrie je oblast matematiky, která se zabývá studiem goniometrických funkcí. Inverzními funkcemi k funkcím goniometrickým jsou funkce cyklometrické. V první kapitole si představíme goniometrické funkce a jejich inverzi a úlohu těchto funkcí v matematice. Kapitola také obsahuje přesnou definici pojmu funkce a funkce inverzní.

Studiem goniometrických funkcí se setkáváme již na konci deváté třídy základní školy. V tomto úseku studia goniometrické funkce zavádíme pomocí pravoúhlého trojúhelníka a využíváme je k výpočtu úhlů v pravoúhlém trojúhelníku. Takto zavedené goniometrické funkce jsou omezené na definiční obor od 0° do 90°, souhrnně je nazýváme trigonometrické funkce. Funkce z pohledu trigonometrického představuji v druhé kapitole a spolu s nimi i důležité vztahy potřebné k trigonometrickým výpočtům. Mimo jiné v této kapitole zavádím i cyklometrické funkce, tedy funkce inverzní ke goniometrickým.

Ve třetí kapitole ukazuji zavedení funkcí pomocí jednotkové kružnice, které nám definiční obor goniometrických a cyklometrických funkcí rozšíří na všechna reálná čísla. Na konci této kapitoly se věnuji vlastnostmi goniometrických a cyklometrických funkcí.

Čtvrtá kapitola se zabývá zavedením funkcí pomocí funkcionálních rovnic. Na konci této kapitoly si také ukážeme důležité vzorce, které se využívají především při studiu goniometrie na středních a vysokých školách.

Jinou elegantní definici goniometrických funkcí poskytuje teorie tzv. nekonečných řad. Takto zavedené funkce představuje poslední pátá kapitola.

V této práci je mým cílem vytvořit přehlednou učební pomůcku, která poslouží především žákům středních škol, kteří chtějí látku lépe pochopit, nebo pouze chtějí doplnit své znalosti v oblasti goniometrie. Práce může posloužit i učitelům matematiky k výkladu této látky.

1 Goniometrické funkce a jejich inverze

Goniometrickými funkcemi v matematice nazýváme šestici takových funkcí, kterými můžeme počítat úhly v trojúhelníku, zejména pravoúhlém, a zkoumat různé periodické jevy. Těmi funkcemi jsou funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans. V matematice existuje mnoho způsobů, jak goniometrické funkce zavést. Mezi nejznámější patří zavedení pomocí pravoúhlého trojúhelníka, nebo zavedení pomocí jednotkové kružnice, které se vyučují především na středních školách, a to díky jejich jednoduchosti a názornosti. Kromě těchto dvou zavedení se v této bakalářské práci budeme zabývat i zavedením pomocí funkcionálních rovnic a v závěrečné kapitole si ještě ukážeme zavedení pomocí nekonečných řad. Mimo nich lze goniometrické funkce zavést i například pomocí integrálů, nebo diferenciálních rovnic, ale tato témata zařazujeme spíše do vysokoškolské matematiky, takže pro naše potřeby jsou příliš složitá.

Mimo goniometrických funkcí si ukážeme i zavedení jejich inverzních funkcí, tedy funkcí cyklometrických. Cyklometrické funkce jsou funkce arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens, arkus kotangens, arkus sekans a arkus kosekans. Než se pustíme do druhé kapitoly, vysvětlíme si nejprve pojem funkce a funkce inverzní, které definuje Michail Kuzmič Grebenča a Sergej Iosifovič Novoselov ve své knize „*Učebnice matematické analysy*“ následovně:

Jsou dány dvě množiny A a B, při čemž každému prvku x z první množiny je přiřazen nějaký určitý (jediný) prvek y z druhé množiny. Jestliže je dáno takové přiřazení, říkáme, že v množině A je definována $funkce$. Symbolicky označujeme funkci takto:

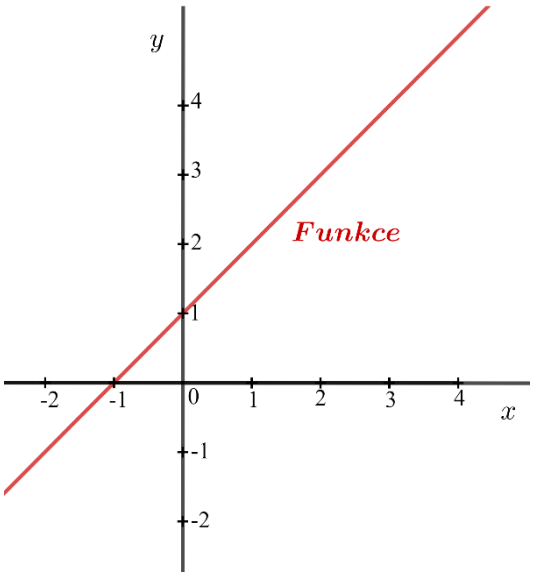
$$y = f(x).$$

Prvky x z množiny A, kterým jsou přiřazeny prvky druhé množiny B, nazýváme $hodnotami\ argumentu$ a celou množinu A hodnot argumentu nazýváme $definičním\ oborem$ dané funkce. Prvek y z množiny B, který je přiřazen hodnotě argumentu x nazýváme $hodnotou\ funkce$, odpovídající hodnotě argumentu x. Souhrn prvků

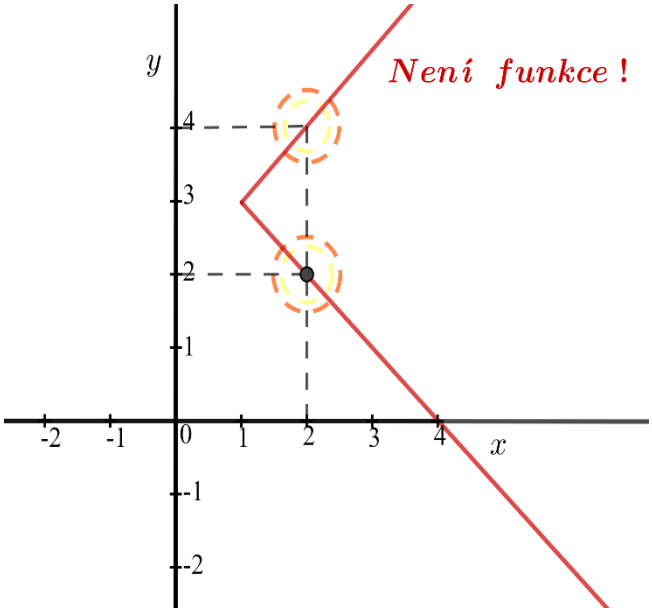
množin B, které jsou přiřazeny prvkům množiny A, nazýváme *množinou funkčních hodnot*. (Grebenča a Novoselov, 1955, s. 19)

Každou hodnotu argumentu nazýváme také *vzorem* a odpovídající funkční hodnotu *obrazem*. Místo termínu "funkce" používáme jako synonyma termínu "zobrazení". (Grebenča a Novoselov, 1955, s. 20)

Funkci můžeme popsat rovnicí, grafem nebo slovním popisem. Graf funkce lze definovat jako množina všech bodů $[x, y]$ v pravoúhlé soustavě souřadnic. Na následujícím obrázku můžeme vidět popis funkce grafem. Vlevo na obrázku (obr. 1) je zobrazena funkce, která splňuje výše zmíněnou definici. Naopak vpravo na obrázku (obr. 2) vidíme křivku, která rozhodně funkcí není, protože jednomu prvku x z množiny A jsou přiřazeny dva prvky y z množiny B.



Obrázek 1: Funkce



Obrázek 2: Křivka (není funkcí)

Při zavádění inverzní funkce budeme vycházet z předchozí definice funkce. Matematici Grebenča a Novoselov definují pojem inverzní funkce následujícím způsobem:

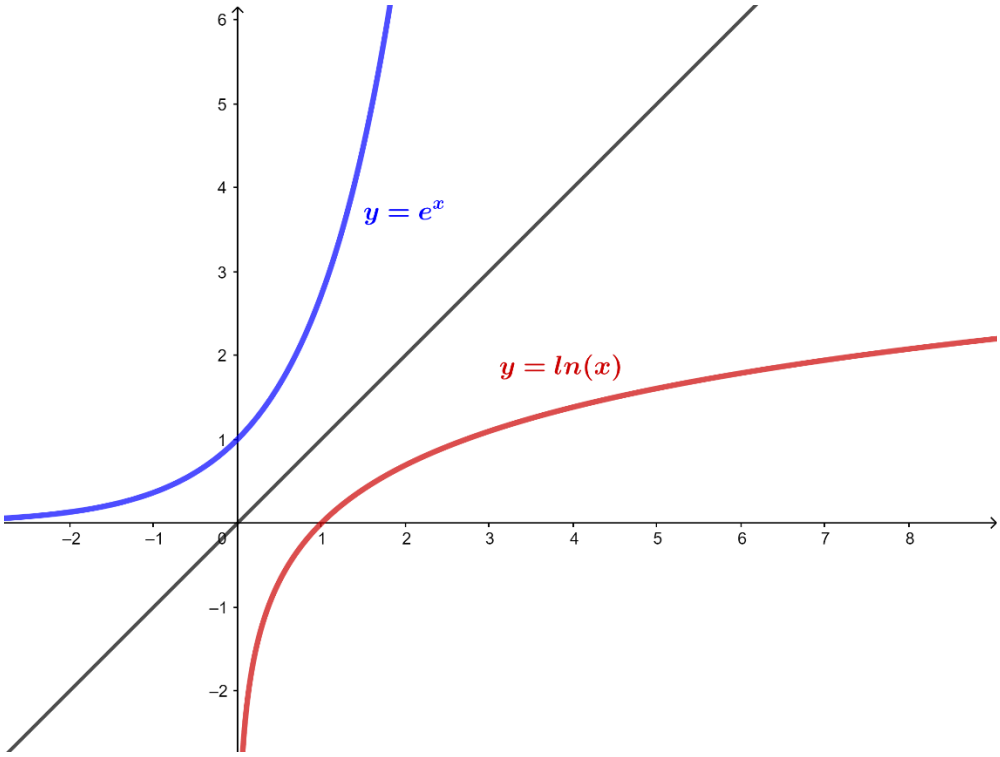
Odpovídá – li každé funkční hodnotě $y = f(x)$ v definičním oboru funkce jediný vzor x z množiny A, pak *inverzní funkcí* k funkci $y = f(x)$ nazýváme funkci

$x = f^{-1}(y)$, pro niž platí:

1. Definičním oborem je množina B funkčních hodnot $f(x)$.

2. Funkční předpis je definován tak, že každé hodnotě y z B odpovídá ta hodnota x z A, pro niž $y = f(x)$. (Grebenča a Novoselov, 1955, s. 59)

Inverzní funkci lze i snadno poznat z grafu. Graf inverzní funkce je totiž osově souměrný podle osy 1. a 3. kvadrantu. Na následujícím obrázku (obr. 3) můžeme vidět takto sestrojenou inverzní funkci, funkci exponenciální (modrá), k funkci logaritmické (červená). Lze tedy o těchto dvou funkcích říct, že jsou navzájem inverzní.



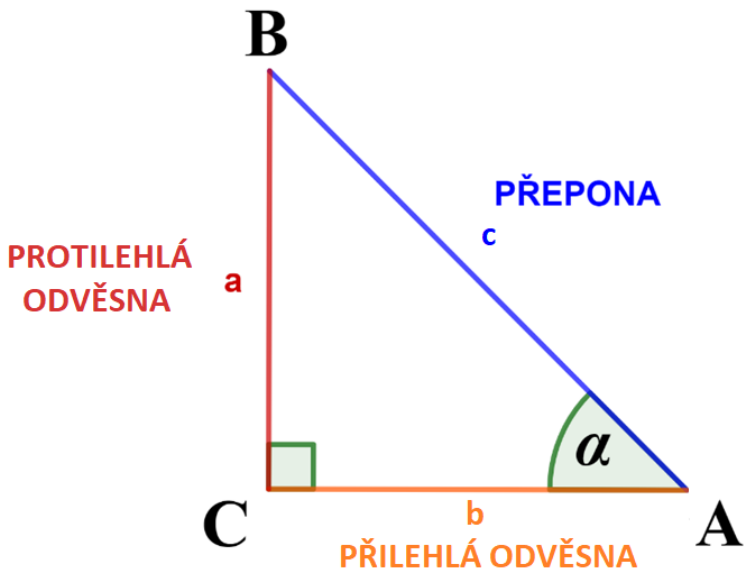
Obrázek 3: Navzájem inverzní funkce

2 Trigonometrický pohled na goniometrické a cyklometrické funkce

2.1 Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

Pro první seznámení s goniometrickými funkcemi se nejčastěji používá zavedení pomocí pravoúhlého trojúhelníka. Myšlenky a poznatky k této kapitole čerpám z knihy „*Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*“ od matematičky a pedagožky Evy Pomykalové, která vyučuje matematiku na Gymnáziu ve Zlíně a působí také jako místopředsedkyně pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků a od profesora Pavla Tlustého, který působí na pedagogické fakultě v Českých Budějovicích jako vysokoškolský profesor na katedře matematiky. Toto zavedení nese název „trigonometrie“ a má v matematice svůj účel. Představuje nám totiž goniometrické funkce, které omezíme pouze na úhly v pravoúhlém trojúhelníku, kde jsou vždy dva úhly ostré a jeden pravý. Tedy dokážeme zjistit pouze úhly větší než 0° a menší než 90°.

Nyní přejdeme k našemu zavedení. Nejlépe si to vždy představíme na obrázku pravoúhlého trojúhelníka (obr. 4), ze kterého budeme vycházet. Jak jsem již zmínila, goniometrickými funkcemi můžeme počítat úhly v trojúhelníku, které vyjadřují pro každý úhel v trojúhelníku určité poměry stran. Stranu v pravoúhlém trojúhelníku, která je proti pravému úhlu nazýváme ***přeponou***, ostatní dvě jsou odvěsny. Pokud je odvěsna proti úhlu, který chceme spočítat, říkáme, že je to ***odvěsna protilehlá***. Naopak odvěsna při tomto úhlu je ***odvěsna přilehlá***. Pro výpočet vnitřního úhlu potřebujeme znát alespoň dvě jeho strany. Podle typu zadaných stran pak vybereme vhodnou goniometrickou funkci pro výpočet.



Obrázek 4: Pravoúhlý trojúhelník

Při zavádění využívám značení z obr. 4. Začneme nejprve funkcí sinus, kterou lze definovat jako poměr délky odvěsny protilehlé úhlu α ku délce přepony. Funkci sinus značíme jako $\sin x$ a její předpis lze dle definice zapsat jako $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, kde $\alpha \in (0°, 90°)$.

Funkci kosinus nadefinujeme obdobně, ale tentokrát jako poměr délky odvěsny přilehlé úhlu α ku délce přepony. Funkci kosinus pak značíme jako $\cos x$ a její předpis zapíšeme jako $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, kde $\alpha \in (0°, 90°)$

Funkce tangens a kotangens již v zavedení nevyužívají přeponu, ale pouze dvě zbylé strany, odvěsny. Funkci tangens zavedeme jako poměr délky odvěsny protilehlé úhlu α ku délky odvěsny přilehlé úhlu α. Funkci tangens značíme zkratkou $\operatorname{tg} x$ a pro vyjádření úhlu jí zapíšeme jako $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, kde $\alpha \in (0°, 90°)$.

Funkce kotangens se v mnoha učebnicích vynechává, nebo je pouze stručně okomentovaná, protože je to převrácená hodnota funkce tangens. Tedy lze jí definovat jako poměr délky odvěsny přilehlé úhlu α ku délce odvěsny protilehlé úhlu α. Funkci kotangens značíme $\operatorname{cotg} x$ a zapíšeme ji jako $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$, kde $\alpha \in (0°, 90°)$. U funkcí tangens a kotangens je specifické to, že je lze vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus. To snadno

vyjádříme pomocí již zavedených poměrů. Tangens úhlu α je roven $\frac{a}{b}$. Dále víme, že vzorec pro sinus je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Z tohoto vzorce vyjádříme délku strany a a dostaneme $a = \sin\alpha \cdot c$. Stejně tak ze vzorce pro kosinus vyjádříme délku strany b, tedy dostaneme $b = \cos\alpha \cdot c$. Vyjádřené strany a a b dosadíme do vzorce pro tangens, tedy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha \cdot c}{\cos\alpha \cdot c}$. Z čitatele a jmenovatele můžeme zkrátit c a dostaneme konečný vzorec:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Obdobně pro funkci kotangens. V konečném vyjádření pak dostaneme vzorec:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Dále máme dvě méně známé funkce, sekans a kosekans. Funkci sekans v matematice značíme $\sec x$ a nejčastěji se definuje jako převrácená hodnota funkce kosinus. Tedy lze jí zapsat jako:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{kde } \alpha \in (0°, 90°).$$

Pomocí poměru stran tuto funkci definujeme jako poměr přepony ku odvěsně přilehlé. Tento vztah lze odvodit z předchozího vzorce po rozepsání funkce kosinus:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}, \text{kde } \alpha \in (0°, 90°).$$

Funkci kosekans naopak definujeme jako převrácenou hodnotu funkce sinus. Vyjádření pomocí poměru stran je délka přepony ku délce protilehlé odvěsny. V mnoha publikacích se setkáme se značením $\operatorname{cosec} x$, nebo $\csc x$. Já v průběhu práce užívám značení $\csc x$. Vzorec odvodíme stejně jako u funkce sekans, tedy:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}, \text{kde } \alpha \in (0°, 90°).$$

2.2 Trigonometrické vztahy a vzorce

Myšlenky a poznatky v této kapitole čerpám z knihy „*Goniometrické funkce v elementární matematice*“, jejíž autorkou je doktorka v oboru matematika Radka Smýkalová. Kniha původně vznikla jako disertační práce a poté se jej autorka rozhodla vydat i knižně. Dalším zdrojem této kapitoly je přednáška „*Syntetická geometrie I*“ od doktora Michala Zamboje, který aktivně působí na pedagogické fakultě Univerzity Karlovy jako vysokoškolský učitel.

Goniometrické funkce mají z trigonometrického pohledu mnoho využití. Jak již víme, můžeme díky nim počítat úhly v pravoúhlém trojúhelníku. My však známe i věty s goniometrickými funkcemi, které platí v obecném trojúhelníku a lze díky nim spočítat všechny potřebné strany a vnitřní úhly.

Prvním známým vztahem je sinová věta, která nám říká:

Věta (Sinová věta). Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

(Michal Zamboj, 2019)

Sinová věta je jednoduchá, a navíc velmi užitečná. Můžeme ji použít pro výpočet, kde jsou zadány dva úhly a strana. V této úloze vždy spočteme třetí úhel jakožto doplněk do $360°$. Následně pomocí sinové věty spočteme dvě neznámé strany. Další typ úlohy je takový, kdy máme zadané dvě strany a úhel. Při tomto výpočtu ze dvou stran a sinu úhlu spočítáme, pomocí sinové věty, sinus dalšího úhlu.

Sinová věta však nelze použít vždy. Takovým případem jsou výpočty, kdy jsou zadány dvě strany a úhel jimi sevřený. Pro tyto výpočty se hodí kosinová věta. Kosinová věta je opět tvrzení o obecných trojúhelnících. Celé její znění zní následovně:

Věta (Kosinová věta). Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí tři rovnosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma\,.$$

(Michal Zamboj, 2019)

Při zadání dvou stran a úhlu jimi sevřený nejprve pomocí kosinové věty spočítáme třetí stranu, následně další úhel a třetí úhel lze dopočítat do 180°. Druhý typ zadání je ten, kdy známe tři strany. Pomocí kosinové věty dopočteme dva úhly a třetí úhel je opět doplněk do 180°.

Dalším vztahem je tangentová věta. Tato věta je méně známá, protože většinu výpočtů pomocí tangentové věty lze spočítat i pomocí předchozích dvou vět. Znění tangentové věty je následující:

Věta (Tangentová věta). Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a protilehlými stranami délek a, b, c platí:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}.$$

(Radka Smýkalová, 2015, s. 72)

Typické úlohy s tangentovou větou jsou výpočty, kde známe dvě strany a úhel proti jedné z nich. Tangentovou větou vypočítáme další úhel a třetí dopočteme do 180°. Další zadání může být takové, kdy známe dva úhly a stranu proti jednomu z nich. Zde tangentovou větou dopočteme druhou stranu.

S goniometrickými funkcemi se můžeme také setkat při výpočtu obsahu trojúhelníku. Nejznámější vzorec pro obsah trojúhelníka je součin strany a výšky na tu stranu, dělené

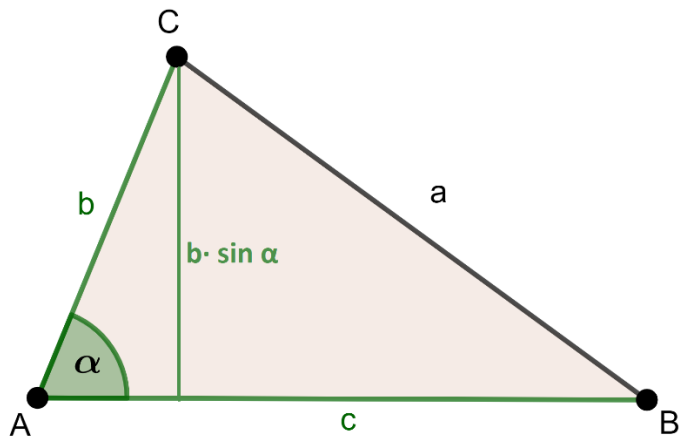
dvěma. My však výšku nahradíme stranou trojúhelníka vynásobenou sinem úhlu. Znění celé věty je následující:

Věta (Obsah trojúhelníku). Pro obsah každého trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}.$$

(Michal Zamboj, 2019)

Jinými slovy, vždy násobíme dvě strany a sinus úhlu jimi sevřený, poté dělíme dvěma. Na následujícím obrázku můžeme vidět vyznačený jeden ze tří případů, konkrétně $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$:



Obrázek 5: Trojúhelník

2.3 Cyklometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

Hodnota goniometrických funkcí bylo vždy nějaké číslo. Podrobněji si všechny hodnoty ukážeme v kapitole 3. Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní funkcím goniometrickým. Tyto funkce zavádíme hlavně proto, že jejich hodnota tentokrát není pouhé číslo, ale určují nám úhel, který při výpočtech hledáme. Začneme funkcí arkus sinus, která se značí $\arcsin x$ a je funkcí inverzní k funkci sinus. Tedy funkce $\alpha = \arcsin x$ určuje úhel, pro který platí $\sin\alpha = x$. Například chceme-li zjistit úhel, pro který platí $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Provedeme inverzní operaci, tedy $\alpha = \arcsin\frac{1}{2}$. Po dosazení do kalkulačky, která nám cyklometrické funkce nabízí, dostaneme, že $\alpha = 30°$.

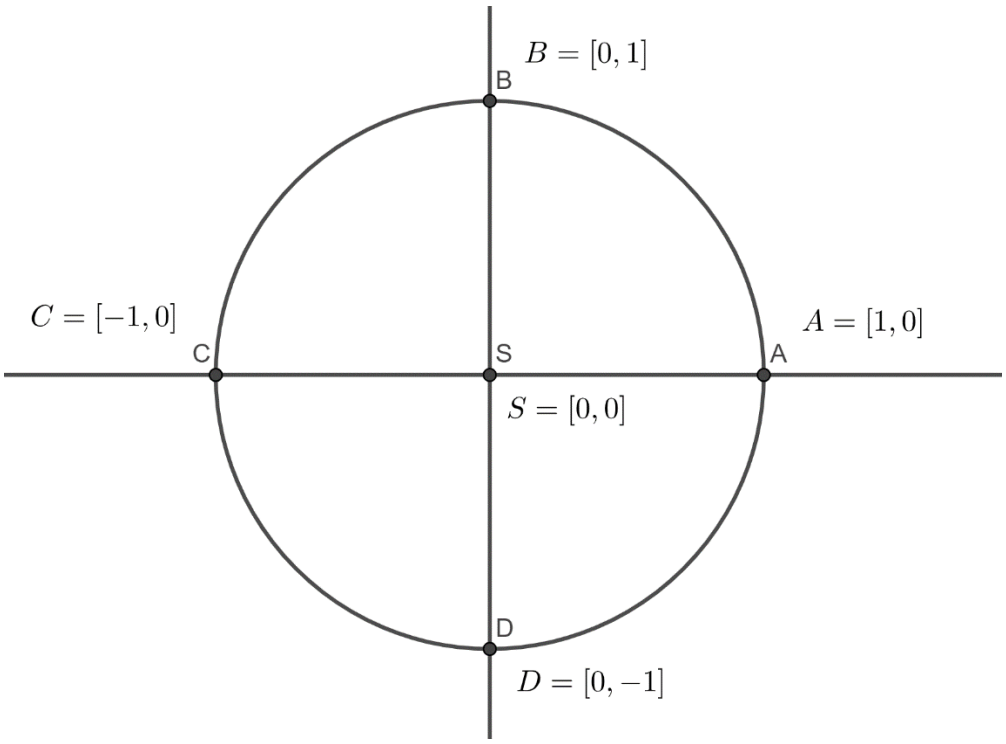
Tento vztah platí i pro všechny ostatní funkce. Arkus kosinus je funkce inverzní k funkci kosinus a značí se $\arccos x$. Dále funkce arkus tangens, kterou značíme $\operatorname{arctg} x$ a je funkcí inverzní k funkci tangens. Analogicky pak funkce arkus kotangens, arkus sekans a arkus kosekans.

Nyní přejdeme k další kapitole, která nám odhalí další vlastnosti našich funkcí, ale především rozšíří jejich definice.

3 Zavedení pomocí jednotkové kružnice

3.1 Goniometrické funkce a jednotková kružnice

Myšlenky a poznatky v této kapitole čerpám z knihy „*Matematická analýza*“ od amerického matematika a profesora na Texaské univerzitě Leonarda Gillmana a Roberta McDowella. Zavedení pomocí pravoúhlého trojúhelníka je velice užitečné pro výpočty úhlů, avšak má jedno velké mínus. Na začátku kapitoly 2 jsem zmiňovala, že jelikož funkce zavádíme na pravoúhlém trojúhelníku, omezíme se pouze na úhly z intervalu $(0°, 90°)$. My však chceme definovat funkce pro libovolné úhly, tedy nejenom větší než pravé, ale také záporné. K tomuto rozšíření definice na všechna reálná čísla nám poslouží jednotková kružnice. Jednotková kružnice je kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem 1. Takto zasazenou kružnici do soustavy souřadnic můžeme vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 6: Jednotková kružnice

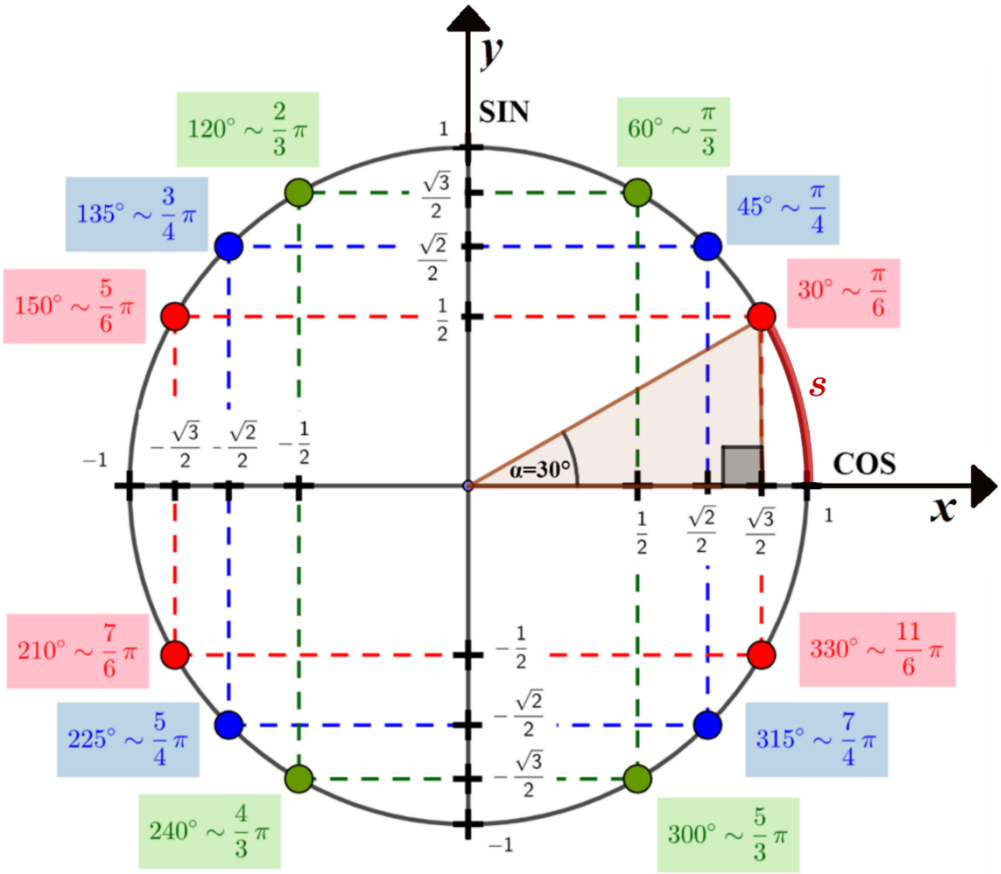
K vyjádření úhlu nám poslouží oblouk této kružnice. A zde již nastává ta změna. Na oblouku kružnice totiž lze vyjádřit libovolný úhel. Úhly začneme měřit od bodu A proti směru hodinových ručiček až k bodu B, C, D a dostaneme se zpět do A. Celková velikost kružnice je $360°$, což je plný úhel. Vzniká otázka, proč je plný úhel $360°$? Jeden z důvodů je jeho praktičnost. Číslo 360 je lehce dělitelné mnoha čísly, takže část kruhu lze snadno vyjádřit pomocí celých čísel. Dalším historickým důvodem je to, že $1°$ byla dráha, kterou Slunce opíše přibližně za 1 den.

My se však nemusíme omezit pouze na jeden oběh po kružnici. Z bodu A můžeme velikost úhlu měřit dál a dál. Můžete si to snadno představit například, když navíjíte drát, nebo strunu pořád dokola. (Gillman a McDowell, 1980, s. 274)

Měření úhlu jsme doposud dělali ve stupňové míře. Nastal však čas si představit jiný způsob, a to pomocí radiánů. Toto měření se nazývá oblouková míra. Radián je totiž středový úhel, kterému přísluší na kružnici oblouk délky poloměru. Jak již z geometrie víme, délka kružnice s poloměrem r je $2\pi r$. Tedy délka kružnice s poloměrem 1 je 2π. Z toho vyplývá vztah mezi stupni a radiány a to takový, že $360°$ je rovno 2π radiánů. Pomocí tohoto vztahu jsme schopni snadno převádět stupně na radiány a naopak.

Na následujícím obrázku (obr. 7) vidíme jednotkovou kružnice, kde už máme zaznamenané všechny stupně a jejich ekvivalentní vyjádření pomocí radiánů. Tento obrázek nám i poslouží k zavedení goniometrických funkcí. Jak si můžete všimnout, je na obrázku zakreslen i pravoúhlý trojúhelník. Sice si zde ukazujeme jiné zavedení goniometrických funkcí, avšak všechna zavedení spolu souvisí a vždy definují úplně stejné funkce.

Pozn.: Co se týče značení goniometrických a cyklometrických funkcí, užívám zde stejné jako v předchozí kapitole.



Obrázek 7: Sinus a kosinus na jednotkové kružnici

Funkci sinus jsme definovali jako poměr délky strany protilehlé ku přeponě. Zde je však přeponou poloměr jednotkové kružnice, tudíž 1. Pojmenujeme-li oblouk kružnice s, definujeme funkci sinus jako $\sin s = \frac{protilehlá}{1}$. Sinus úhlu se tedy rovná protilehlé odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku. Když však provedeme rovnoběžku s touto odvěsnou procházející počátkem soustavy souřadnic, hodnoty funkce sinus jsou znázorněny na ose y. Na obrázku (obr. 7) můžete vidět základní hodnoty funkce sinus, které si zpravidla žáci středních škol pamatují nazpaměť a jsou schopni ke každé hodnotě přiřadit odpovídající úhel. Takto definovaný sinus tedy vyjádříme předpisem:

$$y = \sin s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

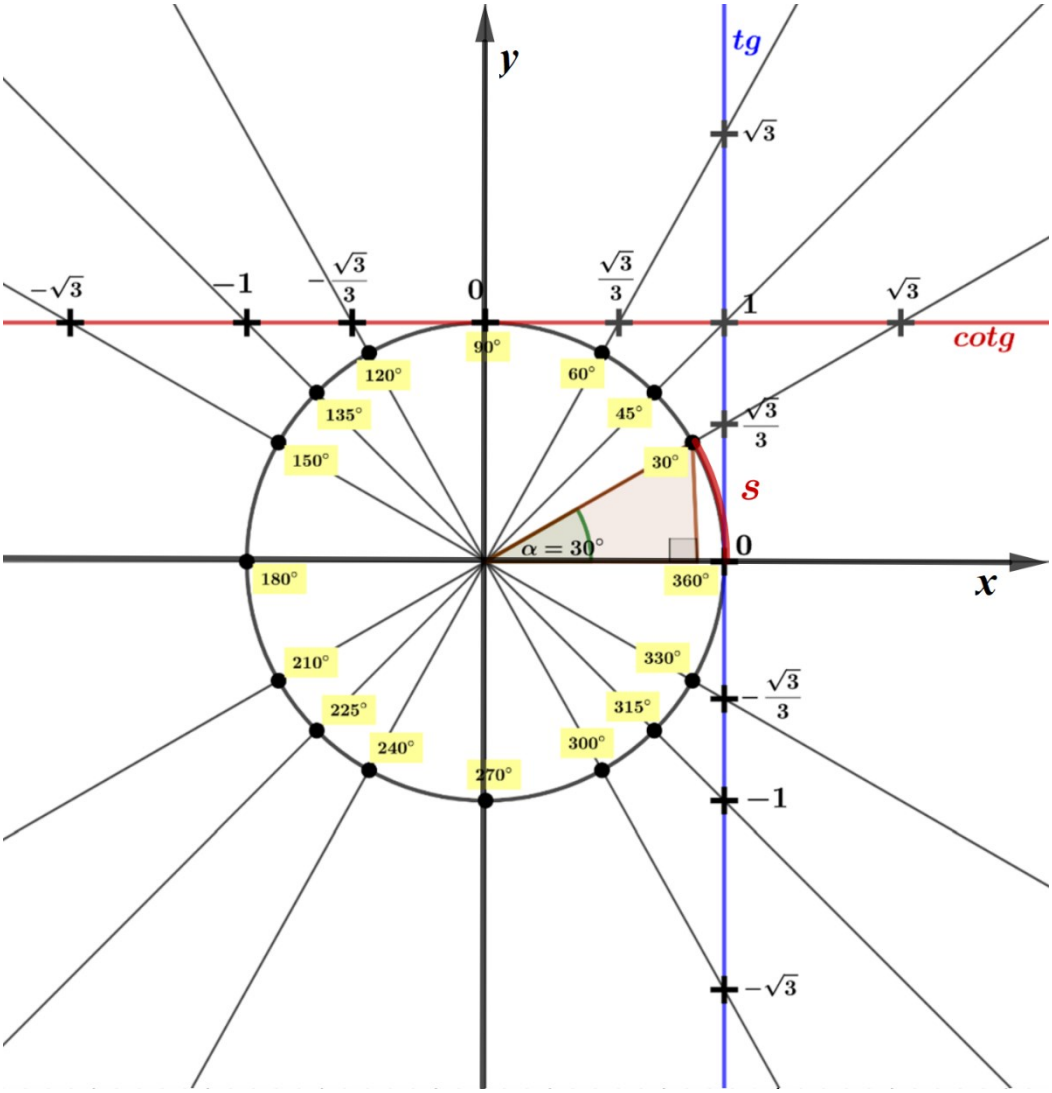
Analogicky pro funkci kosinus. Tu definujeme jako délka strany přilehlé ku přeponě a stejně jako u funkce sinus platí: $\cos s = \frac{přilehlá}{1}$. Hodnoty funkce kosinus jsou tak zobrazeny na ose x. Předpis funkce kosinus je následující:

$$x = \cos s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.$$

Na obrázku (obr. 7) můžete vidět vyznačený úhel $\alpha = 30°$, jehož hodnota pro funkci kosinus je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pro funkci sinus $\frac{1}{2}$. Osy x a y nám také rozdělují soustavu souřadnic na tzv. kvadranty. První kvadrant je oblouk vyznačující úhly od $0°$ do $90°$, další kvadranty jsou pak stejné úseky, jejíchž pořadí je proti směru hodinových ručiček. Na prvním kvadrantu jsou obě funkce kladné. Na druhém kvadrantu je funkce sinus kladná a funkce kosinus záporná. V třetím kvadrantu jsou pak obě funkce záporné a na čtvrtém je funkce kosinus kladná a funkce sinus záporná.

Podobně jako jsme definovali funkce sinus a kosinus, tak definujeme i funkce tangens a kotangens. Nejprve si ukážeme, kde na jednotkové kružnici tyto funkce nalezneme. Pro zobrazení hodnot funkcí tangens a kotangens musíme sestrojit rovnoběžky s osami souřadnic. Přímka rovnoběžná s osou y procházející bodem $\mathrm{A} = [1,0]$ (modrá přímka viz obr. 8) nám představuje hodnoty funkce tangens. Naopak přímka rovnoběžná s osou x procházející bodem $\mathrm{B} = [0,1]$ (červená přímka viz obr. 8) ukazuje hodnoty kotangens. Na následujícím obrázku (obr. 8) můžete vidět jednotkovou kružnici a vyznačený úhel $\alpha = 30°$, pro který je tangens roven $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a kotangens číslu $\sqrt{3}$.

Nastávají však dvě otázky. Co se stane, pokud bude úhel α větší než $90°$ u tangensu a větší než $180°$ u kotangensu? V takovém případě totiž přímka neprotne rameno úhlu. Odpověď je jednoduchá. Vezmeme-li si například úhel $210°$, pak polopřímka vedoucí od počátku soustavy souřadnic do bodu vyznačující daný úhel, neprotne modrou přímku, která charakterizuje funkce tangens. V takovém případě, musíme tuto polopřímku prodloužit na přímku a hodnota tangensu pro úhel $210°$ bude stejná jako pro úhel $30°$. Stejně tak pro funkci kotangens. Tedy všechny úhly, jejichž rozdíl je 180 stupňů, vyjadřují stejnou hodnotu těchto funkcí.



Obrázek 8: Tangens a kotangens na jednotkové kružnici

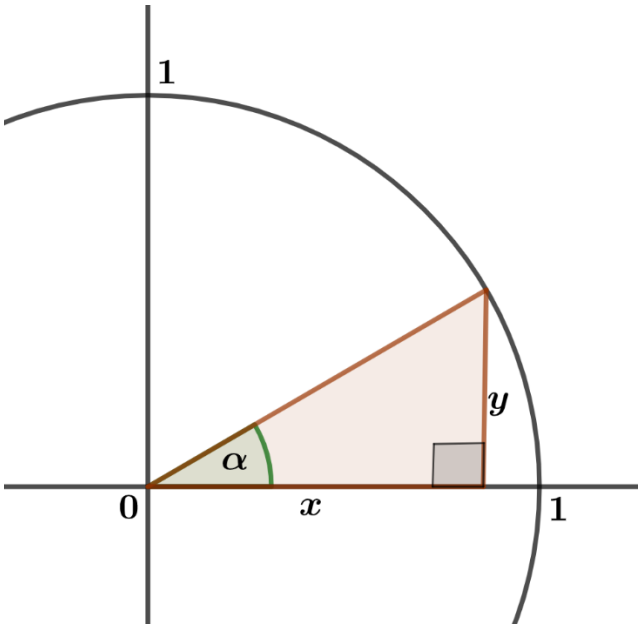
A jsou tyto funkce definované všude? Z obrázku (obr. 8) můžeme odpověď na tuto otázku vypozorovat. Odpovědí je, že nejsou. Funkce tangens není definovaná pro úhel 90°, přesněji pro každý úhel $90° + k \cdot 180°$, kde k je celé číslo. V radiánech pro každý úhel $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. Osa y totiž nikdy přímku vyjadřující hodnoty funkce tangens neprotne. Ze stejného důvodu funkce kotangens není definovaná pro každý úhel $k \cdot 180°$, kde k je celé číslo. V radiánech pro každý úhel $k \cdot \pi$. Definiční obor funkcí tangens a kotangens tedy nejsou všechna reálná čísla, ale bez výše zmíněných bodů.

Funkce zapisujeme následovně:

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}, k \in \mathbb{Z},$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Jak jsem již zmínila v druhé kapitole, funkce sekans a kosekans jsou pouze převrácené hodnoty funkcí kosinus a sinus. A právě z toho důvodu nemůžeme přesně určit, kde se na jednotkové kružnici nacházejí. Avšak stále jsme schopni jejich hodnoty určit. Zde na obrázku (obr. 9) můžeme vidět část jednotkové kružnice a v ní zakreslený pravoúhlý trojúhelník.



Obrázek 9: Sekans a kosekans na jednotkové kružnici

Pravý úhel svírají strany x a y a úhel α je vyznačen u počátku soustavy souřadnic. Funkce sinus je, jak již víme, rovna straně y. Funkce kosekans je převrácená hodnota funkce sinus, tedy je rovna hodnotě $\frac{1}{y}$, kde předpokládáme, že y není nula. Její předpis zapíšeme jako:

$$\csc \alpha = \frac{1}{y}, \qquad \text{kde } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Obdobně pro funkci sekans. Definujeme ji jako převrácenou hodnotu funkce kosinus. Funkce kosinus je v trojúhelníku rovna straně x. Funkce sekans je tedy rovna hodnotě $\frac{1}{x}$ a předpokládáme, že x není nula. Její předpis zapíšeme jako:

$$\sec \alpha = \frac{1}{x}, \qquad \text{kde } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3.2 Cyklometrické funkce

Ve druhé kapitole jsme si představili cyklometrické funkce a jejich úlohu pro výpočet úhlů v pravoúhlém trojúhelníku. V této kapitole si je představíme podrobněji. Pro zavedení cyklometrických funkcí, tedy funkcí inverzních, je potřeba nejprve omezit definiční obor, ke kterým inverzní funkci sestrojujeme. Ve čtvrté kapitole si ukážeme důležitou vlastnost goniometrických funkcí a to takovou, že tyto funkce nejsou prosté. A to je právě hlavním problémem při sestrojení inverzní funkce. Abychom mohli jakoukoli inverzní funkci zavést, musí být původní funkce prostá alespoň na nějakém intervalu z definičního oboru. Tuto podmínku pro vytvoření jakékoliv inverzní funkce nám dává samotná definice, kterou jsme si představili v první kapitole.

Začneme funkcí arkus sinus, která je inverzní funkcí k funkci sinus. Definiční obor funkce sinus je roven všem reálným číslům. My musíme tento definiční obor omezit například na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Na tomto intervalu je totiž funkce sinus prostá. Po tomto zúžení definičního oboru zavádíme funkci arkus sinus následovně:

Funkce arkus sinus se značí $\arcsin x$ a její předpis je:

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \qquad \text{kde } y \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$

Funkce arkus kosinus je inverzní k funkci kosinus. Definiční obor funkce kosinus je stejně jako u sinu roven všem reálným číslům. Její definiční obor tentokrát omezíme na interval $(0, \pi)$. Po tomto zúžení definičního oboru zavádíme funkci arkus kosinus následovně:

Funkce arkus kosinus značí $\arcsin x$ a její předpis je:

$$y = \arccos x \iff x = \cos y, \qquad \text{kde } y \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Dále máme funkci arkus tangens, která je inverzní k funkci tangens. Funkce tangens opět není prostá. Můžeme ale zase omezit definiční obor funkce, na kterém je funkce tangens prostá. Vybereme si interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Po tomto zúžení definičního oboru zavádíme funkci arkus tangens následovně:

Funkce arkus tangens se značí $\operatorname{arctg} x$ a její předpis je:

$$y = \operatorname{arctg}\ x \iff x = \operatorname{tg} y\,, \qquad \text{kde } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Další cyklometrickou funkcí je funkce arkus kotangens, která je inverzní k funkci kotangens. Jelikož je funkce kotangens převrácenou hodnotou funkce tangens, tak stejně jako všechny předešlé funkce není prostá. Omezíme tedy její definiční obor na interval $\langle 0, \pi \rangle$. Po tomto zúžení definičního oboru zavádíme funkci arkus kotangens následovně:

Funkce arkus kotangens se značí $\operatorname{arccotg} x$ a její předpis je:

$$y = \operatorname{arccotg}\ x \iff x = \operatorname{cotg} y, \qquad \text{kde } y \in (0, \pi).$$

Poslední dvě funkce arkus sekans a arkus kosekans jsou inverzní funkcím sekans a kosekans. Omezíme-li definiční obor funkce sekans na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$ a funkce kosekans na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, pak definujeme jejich inverzní funkce následovně:

Funkce arkus sekans se značí $\operatorname{arcsec} x$ a její předpis je:

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y, \qquad \text{kde } y \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle .$$

Funkce arkus kosekans se značí $\operatorname{arccsc} x$ a její předpis je:

$$y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y, \qquad \text{kde } y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

4 Vlastnosti goniometrických funkcí.

V této kapitole si ukážeme některé důležité vlastnosti goniometrických funkcí. Všechny poznatky, myšlenky a definice v této kapitole čerpám z knihy „*Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*“ od Pavla Tlustého a Evy Pomykalové.

4.1 Funkce sinus a kosinus.

Funkce sinus a kosinus jsou si vlastnostmi natolik podobné, že je dobré vyšetřovat je spolu. Při zkoumání vlastností budeme vycházet z „pohybu“ určitého bodu po jednotkové kružnici. Jak již víme, bod může takto oběhnout kružnici několikrát, avšak hodnoty funkcí po dalším takovém oběhu jsou stejné. Právě proto jsou definičním oborem funkce sinus a kosinus všechna reálná čísla.

Protože hodnoty sinu a kosinu jsou souřadnice bodu pohybující se po kružnice, musí platit: $-1 \leq \sin x \leq 1,\ -1 \leq \cos x \leq 1$. Tedy obor hodnot těchto funkcí je interval $\langle -1,1 \rangle$. Z toho vyplývá, že obě funkce jsou omezené.

Hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro nejčastěji užívané úhly shrnuje následující tabulka (tab. 1):

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Tabulka 1: Hodnoty funkce sinus a kosinus

Další důležitou vlastností je periodicita funkce. Funkci f nazveme periodickou, pokud existuje kladné reálné číslo d takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $x + d \in D(f)$ a platí: $f(x) = f(x + d)$. Nejmenší takové d se nazývá periodou funkce. Jelikož délka jednotkové kružnice je 2π, funkce jsou periodické s periodou 2π.

Další zkoumanou vlastností jsou extrémy funkce. Vyšetřujeme, v jakém bodě funkce nabývá maxima a minima, nebo zda vůbec funkce extrémy má. Řekneme, že funkce f má v bodě s maximum, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq f(s)$. Naopak řekneme, že funkce f má v bodě t minimum, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq f(t)$. Funkce $\sin x$, $x \in \langle 0,2\pi)$ nabývá maxima, tj. hodnoty 1, v bodě $\frac{\pi}{2}$ a minima, tj. hodnoty -1 v bodě $\frac{3\pi}{2}$. Funkce $\cos x$, $x \in \langle 0,2\pi)$ nabývá maxina, tj. hodnoty 1, v bodě 0 a minima, tj. hodnoty -1 v bodě π.

Znaménka funkcí jsem již zmínila u zavedení pomocí jednotkové kružnice, kde nám znaménka funkcí určovaly kvadranty kružnice. Stejně tak nám všechny možnosti znamének pro intervaly úhlů ukazuje následující tabulka (tab. 2):

	$x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$	$x \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$	$x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$

Tabulka 2: Znaménka sinu a kosinu

Funkce sinus nabývá nuly pro $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce kosinus nabývá nuly pro všechny body $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Monotonie je vlastnost, označující, zda je funkce v bodě, či na daném intervalu monotónní, tzn. zda je konstantní, rostoucí, klesající, nerostoucí, či neklesající. Tato vlastnost je důležitá při tvoření grafu funkce. Funkce f se nazývá rostoucí, resp. neklesající, [klesající, resp. nerostoucí] na nějakém intervalu I z definičního oboru funkce, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) < f(x_2)$, resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$, [$f(x_1) > f(x_2)$, resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$]. Pokud $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tak s rostoucím x se zvětšuje y-ová souřadnice bodu pohybujícím se po kružnici a naopak x-ová souřadnice tohoto bodu se zmenšuje.

Tedy pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je funkce $\sin x$ rostoucí, zatímco funkce $\cos x$ je klesající. Analogicky vyšetříme monotonii i ve zbývajících intervalech a dostaneme (tab. 3):

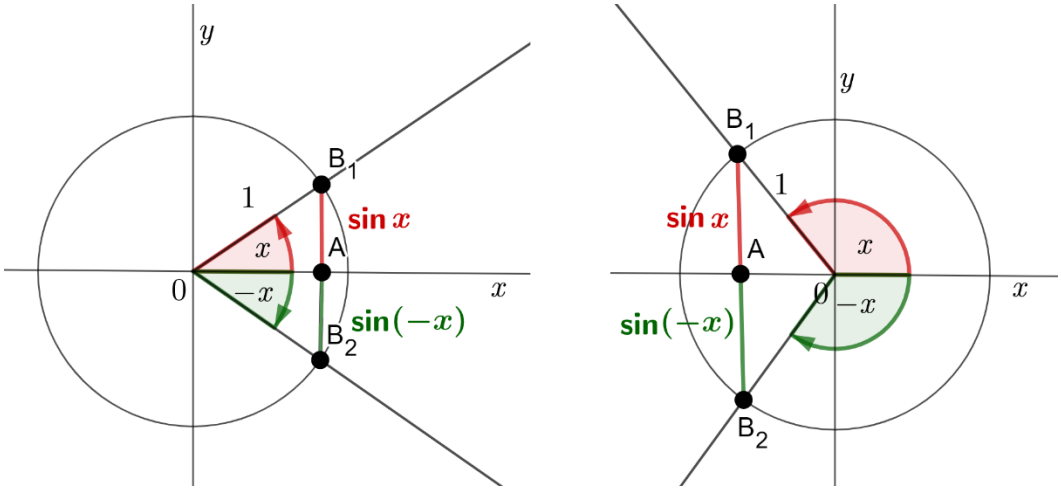
	$\boldsymbol{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$	$\boldsymbol{x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$	$\boldsymbol{x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)}$	$\boldsymbol{x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)}$
$\sin x$	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
$\cos x$	klesající	klesající	rostoucí	rostoucí

Tabulka 3: Monotonie sinu a kosinu

Dále u všech funkcí lze zjistit, zda je funkce sudá, nebo lichá, nebo zda není ani jedno. Tuto vlastnost souhrnně nazýváme parita. Funkce f se nazývá sudá funkce, pokud pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$ a platí: $f(x) = f(-x)$. Na grafu lze poznat sudou funkci tak, že je osově souměrná podle osy y. Naopak funkce f se nazývá lichá funkce, pokud pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$ a platí: $-f(x) = f(-x)$. Funkce lichá má graf středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Na následujícím obrázku (obr. 10) je naznačena parita funkce sinus. Jak již víme, funkci sinus nám na jednotkové kružnici představuje souřadnicová osa y. Pro libovolný úhel x jsou úsečky AB_1 a AB_2 stejně dlouhé, ale y-ové souřadnice bodů B_1 a B_2 mají navzájem opačná znaménka. Tedy platí:

$$-\sin x = \sin(-x).$$

Funkce sinus je lichá funkce.

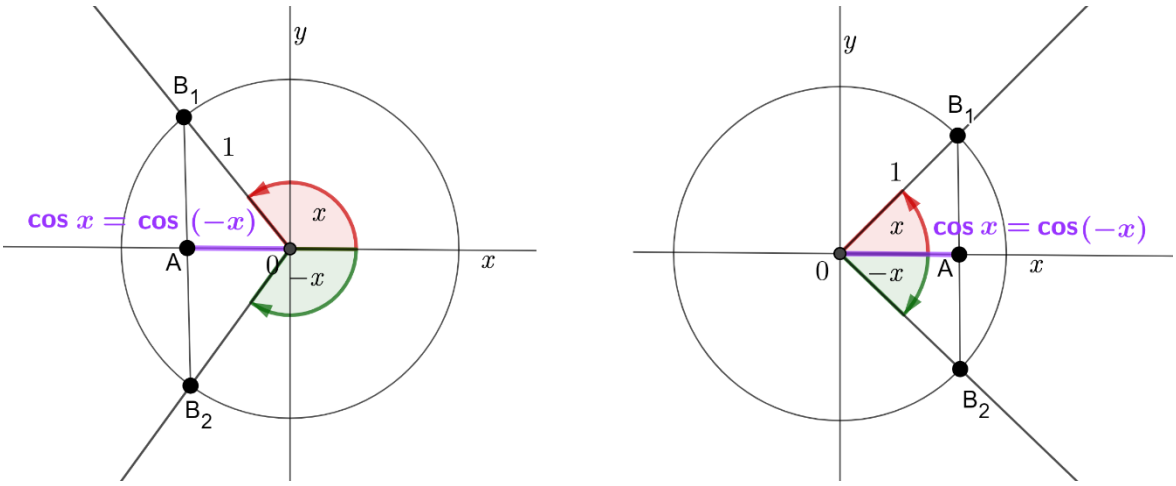


Obrázek 10: Parita funkce sinus

Stejně tak parita funkce kosinus je zobrazena na (obr. 11). Na jednotkové kružnici nám představuje funkci kosinus souřadnicová osa x. Pro libovolný úhel x jsou x-ové souřadnice bodů B_1 a B_2 stejné a tedy platí:

$$\cos x = \cos(-x).$$

Funkce kosinus je sudá funkce.

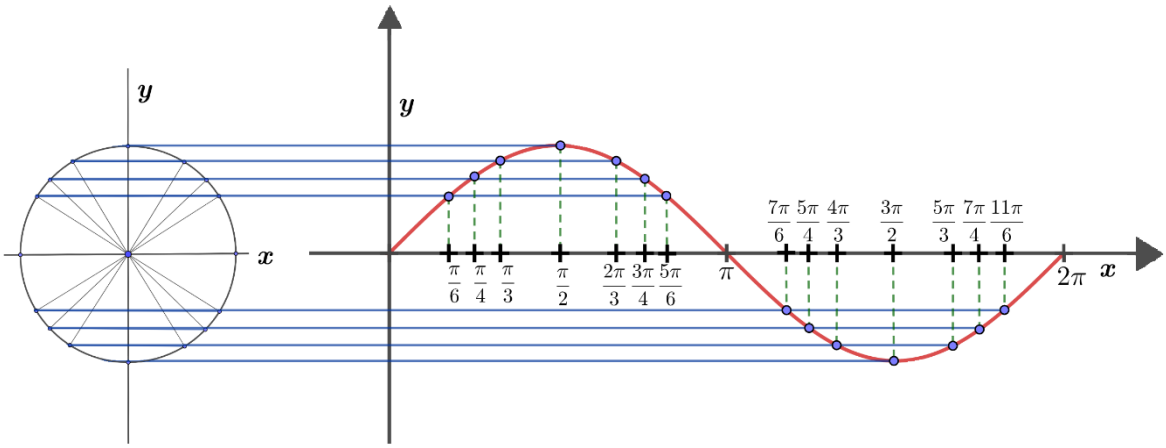


Obrázek 11: Parita funkce kosinus

Jak jsme si řekli již při zavádění inverzních funkcí, funkce sinus a kosinus nejsou prosté. Neboli pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ neplatí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

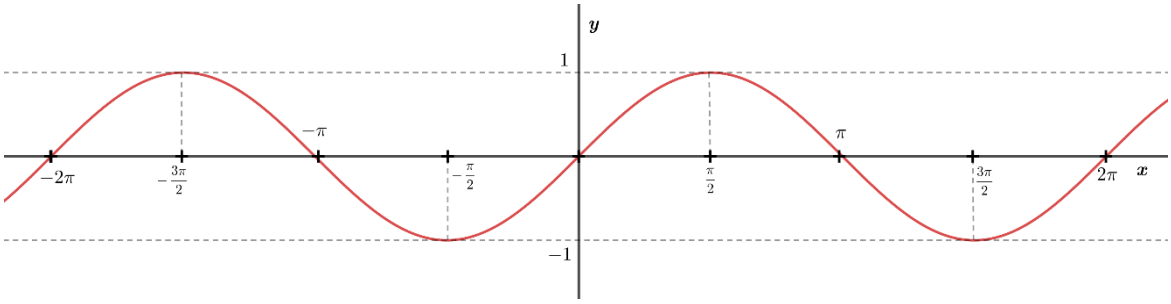
Nyní přejdeme k vytvoření grafu funkce sinus. Nejprve se omezíme na interval $\langle 0{,}2\pi \rangle$ a využijeme k sestrojení jednotkovou kružnici. Klasicky na jednotkové kružnici vyznačíme

hodnoty x a jim odpovídající hodnoty $\sin x$. Graf funkce sinus dostaneme tak, že vyznačíme body o souřadnicích $[x, \sin x]$ v soustavě souřadnic a následně je spojíme do jedné křivky. (viz obr. 12)



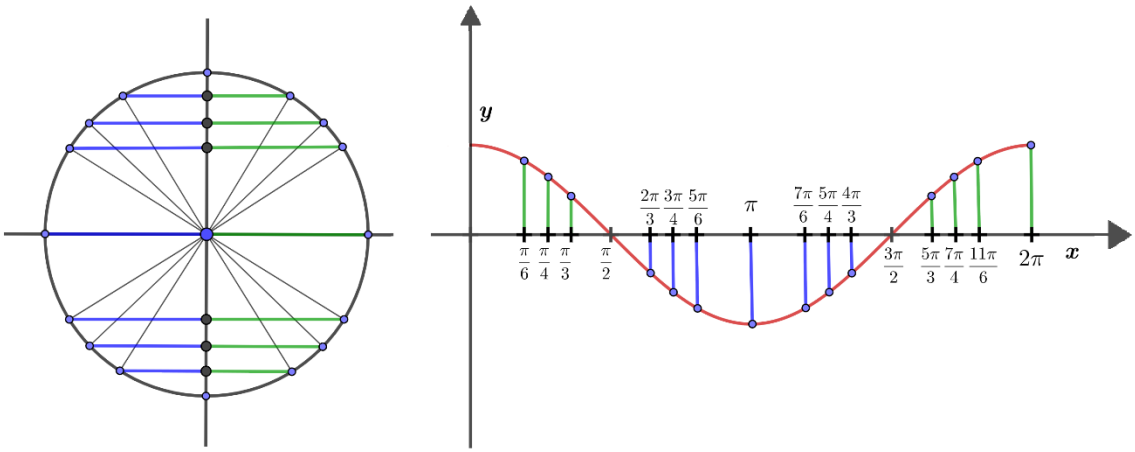
Obrázek 12: Graf funkce sinus pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Jelikož je funkce sinus periodická s periodou 2π, bude mít křivka tento stálý tvar a potáhne se z mínus nekonečna až do plus nekonečna. Křivku charakterizující funkci sinus nazýváme sinusoida a je zobrazena na následujícím obrázku (obr. 13):



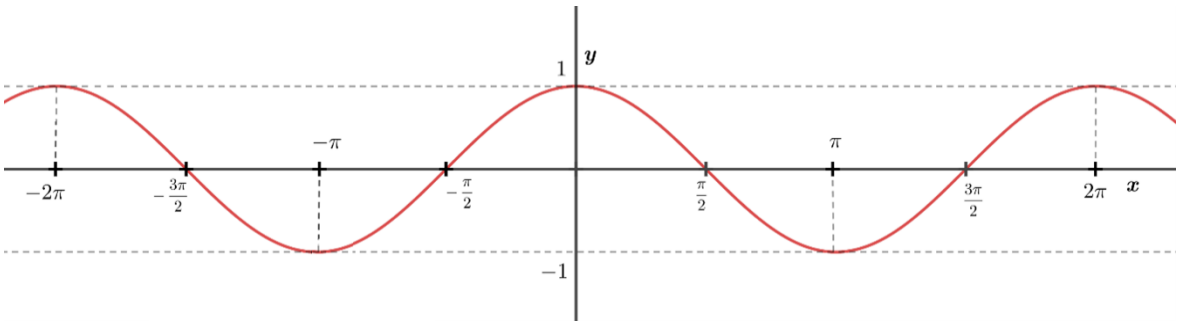
Obrázek 13: Sinusoida

U funkce kosinus postupujeme stejně jako u funkce sinus. Definiční obor omezíme interval na $\langle 0, 2\pi \rangle$, protože to odpovídá délce kružnice. Graf funkce kosinus poté dostaneme podobně jako u funkce sinus, tedy vyznačením bodů o souřadnicích $[x, \cos x]$ do soustavy souřadnic. (viz obr. 14)



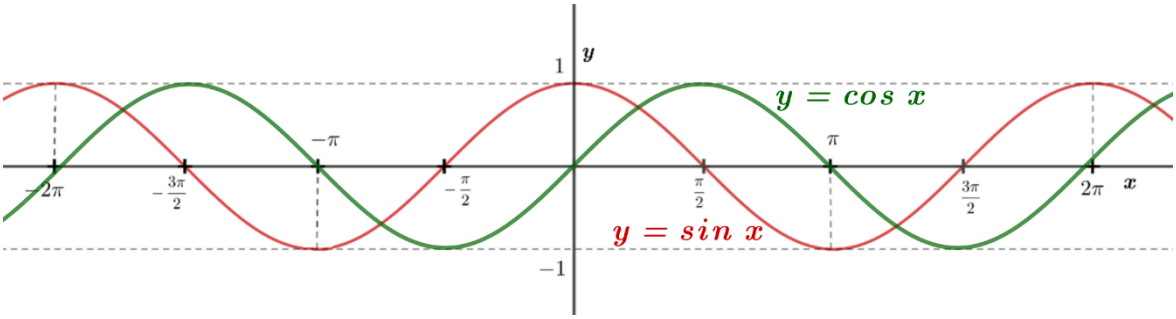
Obrázek 14: Graf funkce kosinus pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Funkce kosinus je periodická s nejmenší periodou 2π, takže křivka má následující tvar. (viz obr. 15) Křivku charakterizující funkci kosinus nazýváme kosinusoida.



Obrázek 15: Kosinusoida

Na začátku kapitoly jsem zmínila, že funkce sinus a kosinus spolu souvisí. Jejich hodnoty se totiž liší jen o úhel $\frac{\pi}{2}$. To se samozřejmě projeví i na jejich grafech, jak jsme si mohli všimnout výše. Sinusoida vznikne posunutím kosinusoidy po ose x a naopak. Na následujícím obrázku (obr. 16) můžeme vidět zakreslenou sinusoidu a kosinusoidu do jedné soustavy souřadnic:



Obrázek 16: Sinusoida a kosinusoida

Z této vlastnosti dostáváme vztahy:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

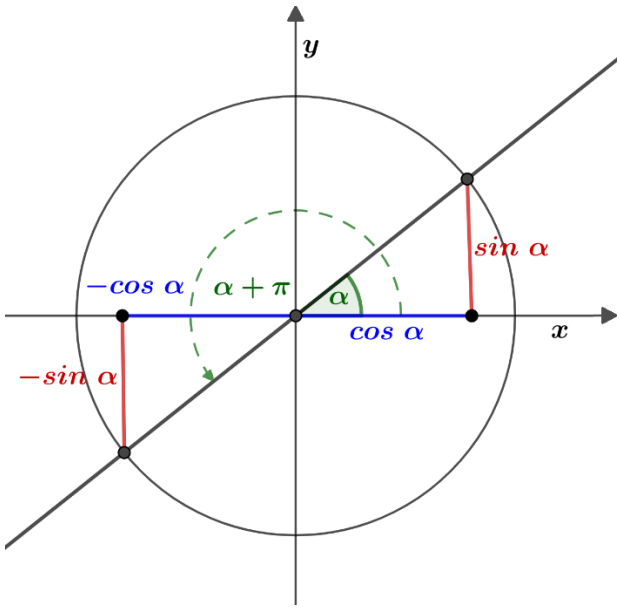
4.2 Funkce tangens a kotangens

Stejně jako u funkcí sinus a kosinus, není náhoda, že funkce tangens a kotangens budeme vyšetřovat společně. Jak již víme, funkci tangens lze zapsat jako podíl funkce sinus a kosinus. Definiční obor těchto funkcí jsme si již rozšířili na všechna reálná čísla, avšak zde je funkce kosinus ve jmenovateli, a tudíž se nesmí rovnat nule. Jak již víme z předešlé kapitoly $\cos x = 0$ pro $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Definičním oborem funkce tangens jsou tedy všechna reálná čísla s výjimkou bodů $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Stejně tak pro funkci kotangens. Tuto funkci lze zapsat jako podíl funkce kosinus a sinus. Tentokrát se funkce sinus nesmí rovnat nule. Víme, že $\sin x = 0$ pro $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Definičním oborem funkce kotangens jsou všechna reálná čísla s výjimkou bodů $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Při zavádění funkcí tangens a kotangens jsme si řekli, že jejich hodnoty jsou stejně pro úhly, které se liší o π. Důvod byl takový, že polopřímka, která byla ramenem úhlu neprotla přímku charakterizující funkce tangens a kotangens. Nyní si ukážeme, proč tomu tak je za použití funkce sinus a kosinus. Zajímá nás nejprve tangens úhlu α zvětšený o π. Z obrázku (obr. 17) nám pro sinus a kosinus vyplývají následující vztahy:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha.$$



Obrázek 17: Tangens úhlu větší o π

Odtud dostáváme:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Stejným způsobem bychom vlastnost ověřili pro úhly jiných kvadrantů.

Analogicky pro funkci kotangens dostáváme:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\pi)=\operatorname{cotg}\alpha.$$

Tato vlastnost nám především udává periodicitu funkcí. Z této skutečnosti vyplývá, že funkce tangens a kotangens jsou periodické s nejmenší periodou π.

Obor hodnot těchto funkcí jsou všechna reálná čísla, což vyplývá už jen z toho, že jejich hodnoty funkcí jsou zobrazeny na přímkách mimo kružnici, tudíž nemají žádné omezení. Funkce tangens a kotangens tudíž nejsou omezené.

Hodnoty všech důležitých úhlů můžeme spočítat pomocí již nám známých hodnot funkcí sinus a kosinus. Hodnoty funkce tangens a kotangens nám zobrazuje následující tabulka (tab. 4):

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	✕	0	✕
cotg x	✕	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	✕	0

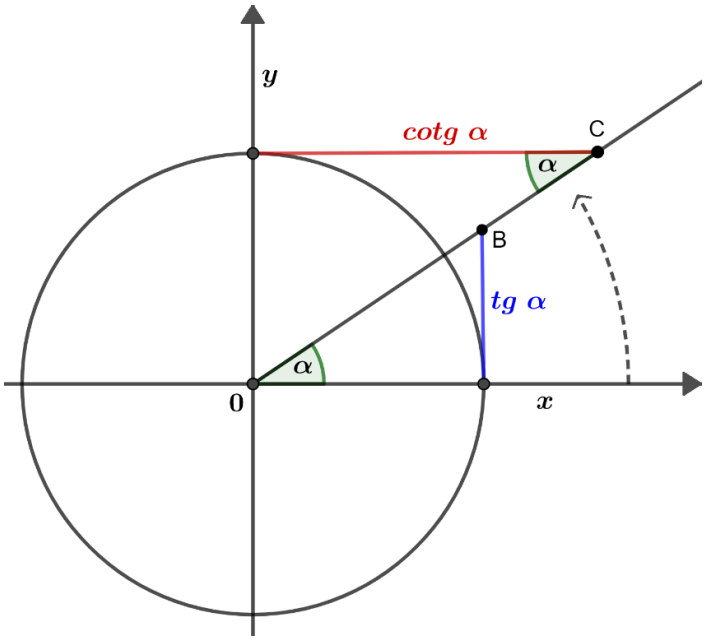
Tabulka 4: Hodnoty funkce tangens a kotangens

Znaménka funkcí tangens a kotangens v různých intervalech vyšetříme opět z funkcí sinus a kosinus, jejichž vlastnosti jsme uvedli v předchozí kapitole. Vezměme nejprve interval $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Na tomto intervalu jsou funkce sinus i kosinus kladné, a tudíž i tangens nabývá kladných hodnot. Funkce kotangens má pak stejné znaménko jako funkce tangens, tzn. buď jsou zároveň obě kladné, nebo obě záporné. Znaménka v ostatních intervalech nám udává následující tabulka (tab. 5):

	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−
cotg x	+	−	+	−

Tabulka 5: Znaménka tangentu a kotangentu

Další vlastností je monotonie. Budeme vycházet z obrázku (obr. 18). Bod B náleží funkci tangens, bod C funkci kotangens. Z obrázku jednotkové kružnice (obr. 18) je patrné, že se na intervalu $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se zvětšujícím úhlem α zvyšuje y-ová souřadnice bodu B. Z toho vyplývá, že funkce tangens je na tomto intervalu rostoucí. U funkce kotangens je to přesně naopak. Funkce kotangens je na tomto intervalu klesající, protože x-ová souřadnice bodu C se zmenšuje.



Obrázek 18: Monotonie funkce tangens a kotangens

Monotonii v ostatních intervalech popisuje následující tabulka (tab. 6):

	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
tg x	rostoucí	rostoucí	rostoucí	rostoucí
cotg x	klesající	klesající	klesající	klesající

Tabulka 6: Monotonie tangentu a kotangentu

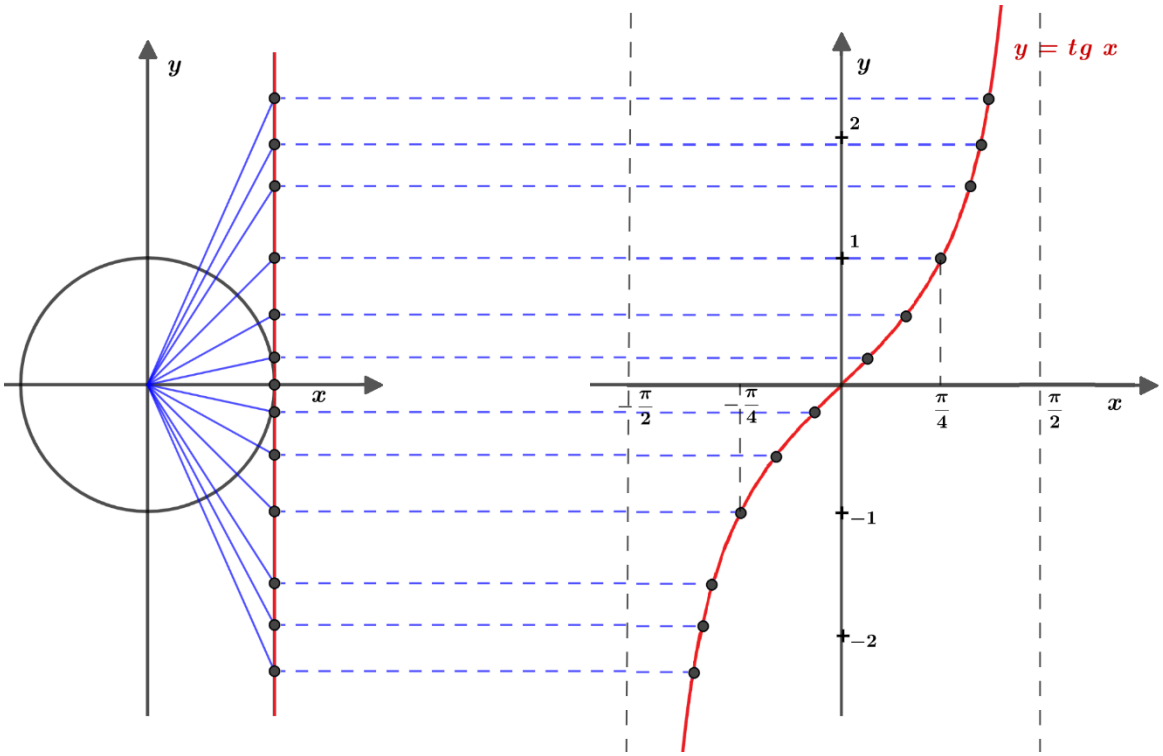
Paritu opět odvodíme z funkcí sinus a kosinus. Víme, že funkce sinus je lichá, ale funkce kosinus sudá. Po rozepsání funkcí podle definice parit dostaneme:

$$\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\, x;$$

$$\mathrm{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\mathrm{cotg}\, x.$$

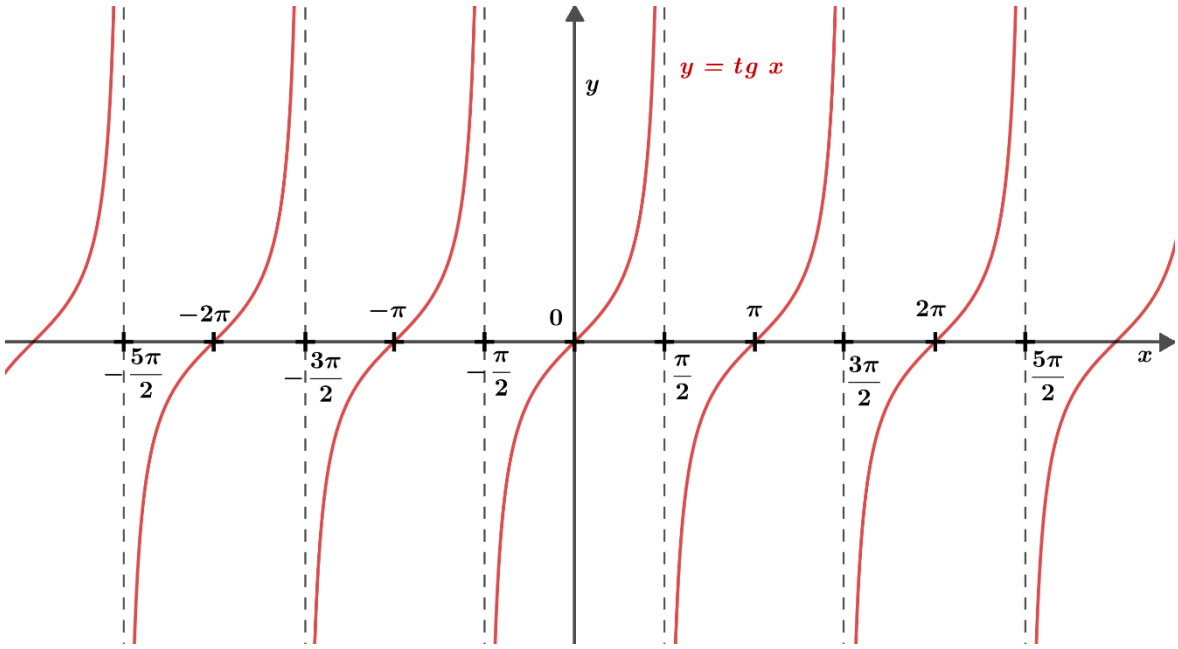
Z odvození a definice vyplývá, že funkce tangens a kotangens jsou liché funkce.

Nyní přejdeme k vytvoření grafu funkce tangens. Nejprve vytvoříme graf omezený na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, následně pak pomocí periodicity funkce graf rozšíříme na celý definiční obor funkce tangens. Na jednotkové kružnici zakreslíme hodnoty funkce tangens a k nim příslušné úhly. Do soustavy souřadnic pak vyznačíme body o souřadnicích $[x, \mathrm{tg}\, x]$, které spojíme do křivky. (viz obr. 19)



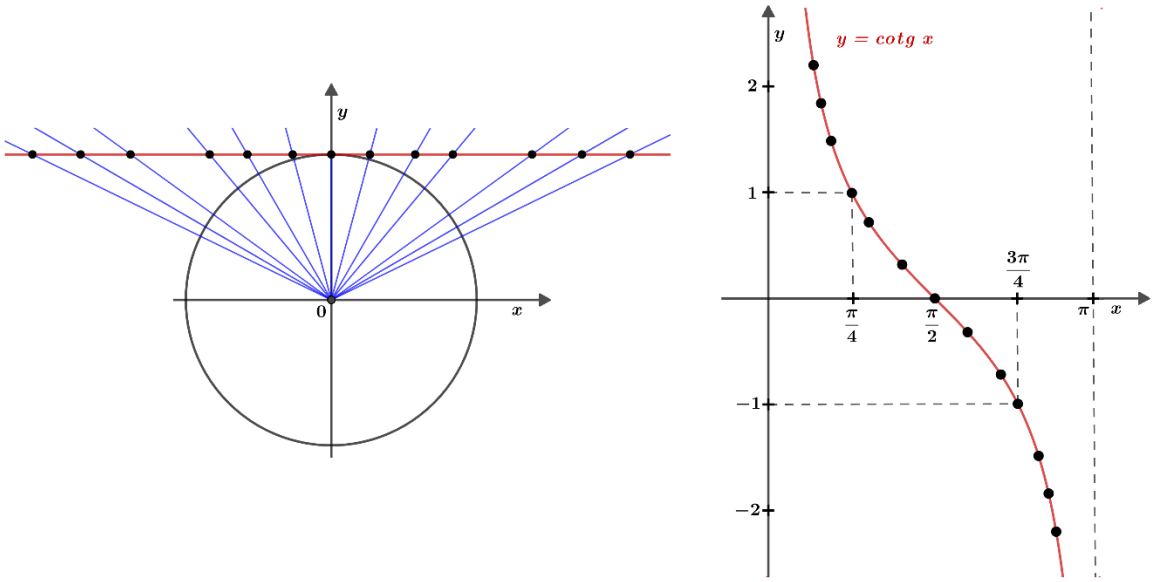
Obrázek 19: Graf funkce tangens pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Křivku charakterizující funkci tangens nazýváme tangentoida. Celý graf funkce tangens je zobrazen na následujícím obrázku: (obr. 20)



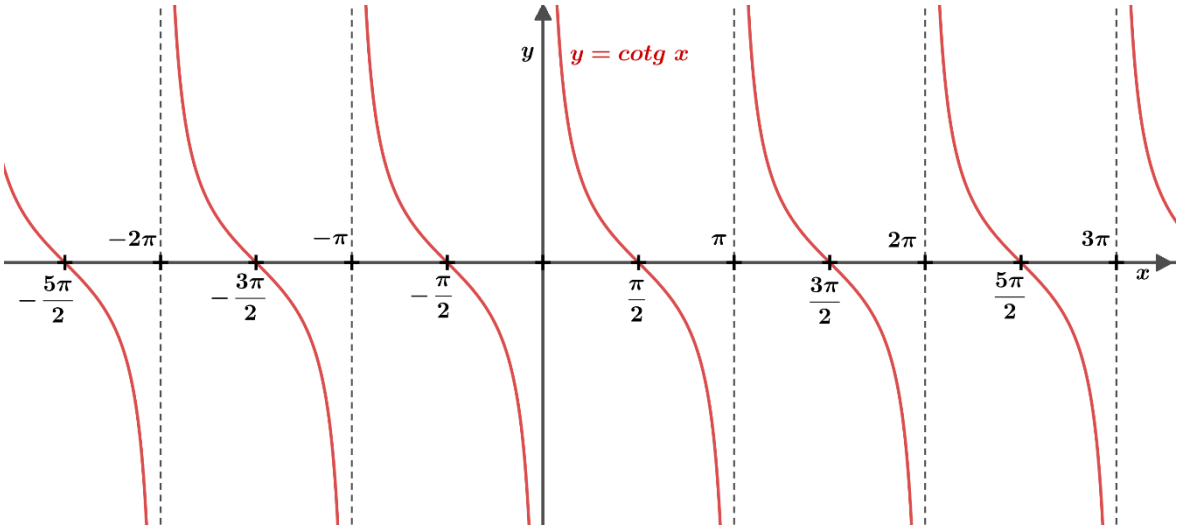
Obrázek 20: Tangentoida

U funkce kotangens postupujeme stejně jako u funkce tangens. Omezíme se nejprve na $(0, \pi)$. Na jednotkové kružnici vyznačíme hodnoty funkce tangens a jim příslušné úhly. Graf funkce kotangens poté dostaneme vyznačením bodů o souřadnicích $[x, \operatorname{cotg} x]$ do soustavy souřadnic. (viz obr. 21)



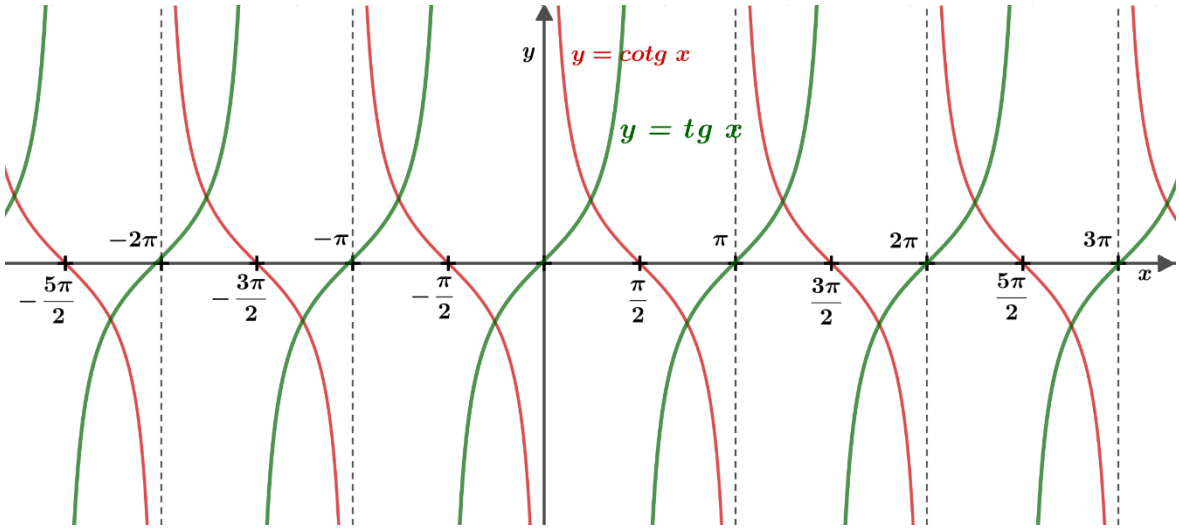
Obrázek 21: Graf funkce kotangens pro $x \in (0, \pi)$

Křivku zvanou kotangentoida rozšíříme na celý definiční obor funkce kotangens a celý graf funkce pak vypadá následovně (obr. 22):



Obrázek 22: Kotangentoida

Zakreslíme-li funkce tangens a kotangens do jednoho grafu, vidíme, jak se liší. Graf funkce kotangens je graf funkce tangens osově souměrný dle osy x a posunutý o úhel $\frac{\pi}{2}$. Na následujícím obrázku můžeme vidět zakreslenou tangentoidu a kotangentoidu do jedné soustavy souřadnic: (obr. 23)



Obrázek 23: Tangentoida a kotangentoida

4.3 Funkce sekans a kosekans

Jak již víme ze samotného zavádění funkcí, funkce sekans je převrácená hodnota funkce kosinus a funkce kosekans převrácená hodnota funkce sinus. Tedy platí:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Ze vzorců je patrný definiční obor těchto funkcí. Funkce sinus a kosinus jsou definovány pro všechna reálná čísla. Avšak v daném podílu se tyto funkce nesmí rovnat nule. Platí $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, $\sin x = 0 \iff x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Definiční obor funkce sekans jsou proto všechna reálná čísla výjimka bodů $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, funkce kosekans pak všechna reálná čísla výjimka bodů $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Obor hodnot funkcí sinus a kosinus je interval $\langle -1, 1 \rangle$. Oborem hodnot funkcí sekans a kosekans jsou převrácené hodnoty těchto hodnot, tedy interval $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Stejně jako sinus a kosinus jsou tyto funkce omezené.

Hodnoty funkcí $\csc x$ a $\sec x$ pro nejčastěji užívané úhly shrnuje následující tabulka (tab. 7):

x	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\csc x$	✗	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	✗	-1
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	✗	-1	✗

Tabulka 7: Hodnoty funkce sekans a kosekans

Periodicita se u funkcí, které představují převrácenou hodnotu, nemění. Tudíž funkce sekans a kosekans jsou periodické s nejmenší periodou 2π a zároveň nejsou prosté.

Stejně tak tomu bude pro další vlastnost a tou je parita. Funkce sinus je lichá funkce, tudíž i její převrácená hodnota bude lichou funkcí. Funkce kosekans je tedy lichá funkce a funkce sekans funkce sudá.

Globální extrémy funkce sekans ani kosekans nemají. Nalezneme zde však extrémy lokální.

Znaménka funkcí sekans a kosekans budou stejné, jako u funkcí kosinus a sinus. Pro přehlednost znaménka v různých intervalech uvádí následující tabulka (tab. 8):

	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin x/csc x	+	+	−	−
cos x/sec x	+	−	−	+

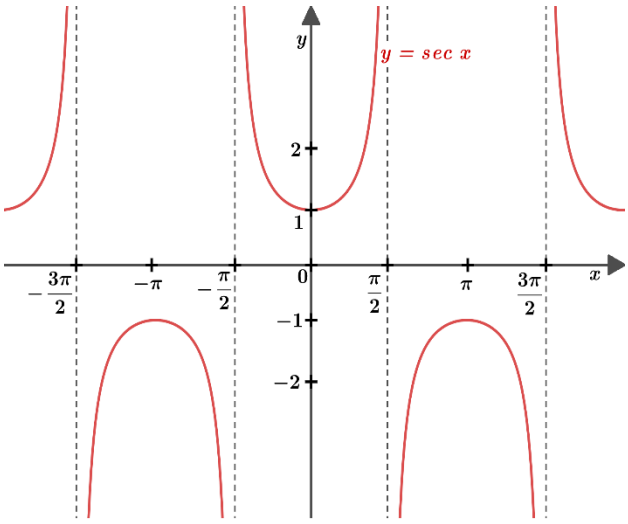
Tabulka 8: Znaménka funkce sekans a kosekans

Když na intervalu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ byla funkce sinus rostoucí, pak její převrácená hodnota bude klesající. Proto monotonie funkcí sekans a kosekans budou opačné než u funkcí sinus a kosinus. Monotonie pro různé intervaly zobrazuje následující tabulka (tab. 9):

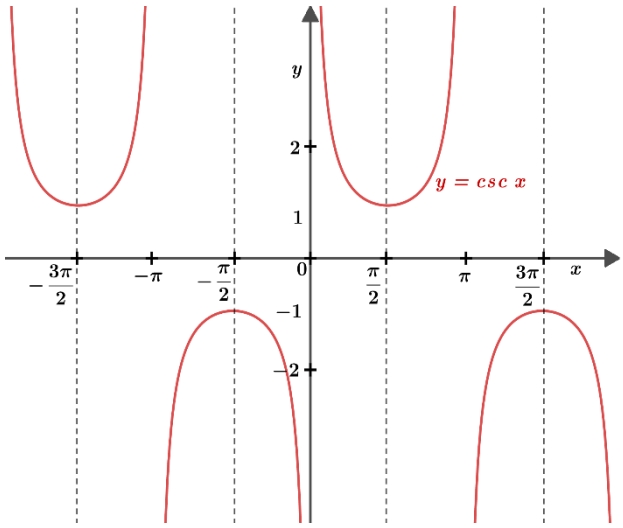
	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
csc x	klesající	rostoucí	rostoucí	klesající
sec x	rostoucí	rostoucí	klesající	klesající

Tabulka 9: Monotonie funkce sekans a kosekans

Nyní přejdeme k zakreslení grafů funkce kosekans a sekans. Vlevo na obrázku (obr. 24) vidíme graf funkce sekans a takovou křivku nazýváme sekantoida. Vpravo (obr. 25) vidíme graf funkce kosekans a křivku nazýváme kosekantoida.



Obrázek 24: Sekantoida



Obrázek 25: Kosekantoida

5 Vlastnosti cyklometrických funkcí

U cyklometrických funkcí budeme vyšetřovat úplně stejné vlastnosti jako u funkcí goniometrických a při zkoumání těchto vlastností budeme vycházet právě z nich. Některé poznatky a myšlenky v této kapitole čerpám z anglické knihy „*Calculus I*“ od Jerrolda Marsdena a Alana Weinsteina.

5.1 Funkce arkus sinus a arkus kosinus

Vlastnosti funkcí arkus sinus a arkus kosinus budeme vyšetřovat především pomocí jejich inverzních funkcí, tedy funkcí sinus a kosinus.

Začneme funkcí arkus sinus. Definiční obor funkce sinus je, jak již víme, roven všem reálným číslům. Obor hodnot je interval $\langle -1,1 \rangle$. Z definice inverzní funkce pak lze bezpochyby říct, že definičním oborem funkce arkus sinus je interval $\langle -1,1 \rangle$ a oborem hodnot interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, protože právě na tom je funkce sinus prostá. Stejně tak u funkci arkus kosinus, akorát budeme vycházet z vlastností funkce kosinus. Definiční obor funkce arkus kosinus je tedy interval $\langle -1,1 \rangle$ a obor hodnot $\langle 0, \pi \rangle$.

Hodnoty funkcí arkus sinus a arkus kosinus pro významné body ukazuje následující tabulka (tab. 10):

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Tabulka 10: Hodnoty funkce arkus sinus a arkus kosinus

Pozn.: Jde pouze o přehození x-ového a y-ového řádku u tabulky pro funkce sinus a kosinus.

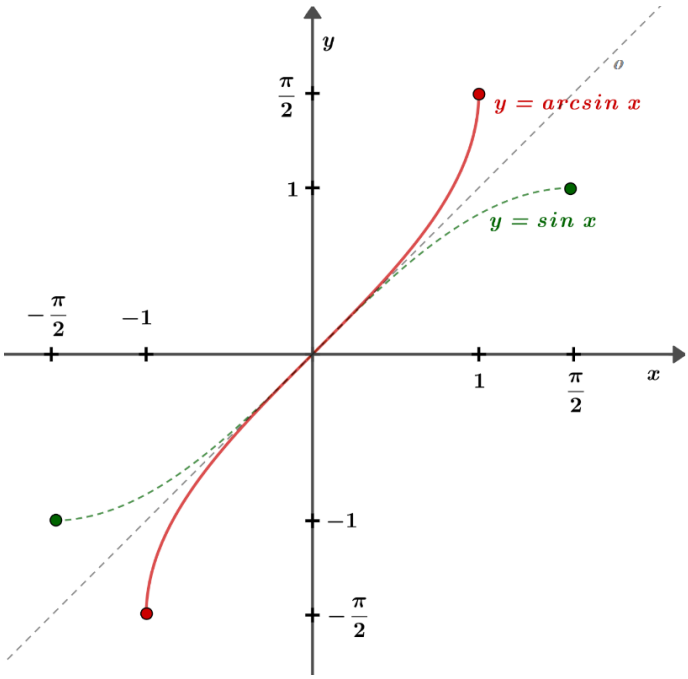
Další vlastností je periodicita funkce. Zde to bude velice stručné. Inverzní funkci tvoříme pouze pro interval, kde je původní funkce prostá. Proto funkce arkus sinus a arkus kosinus periodické nejsou.

Funkce $\arcsin x$ nabývá maxima, tj. hodnoty $\frac{\pi}{2}$, v bodě 1 a minima, tj. hodnoty $-\frac{\pi}{2}$ v bodě -1. Funkce $\arccos x$ nabývá maxima, tj. hodnoty π, v bodě -1 a minima, tj. hodnoty π v bodě 1.

Nyní budeme vyšetřovat monotonii těchto funkcí. Jelikož je funkce sinus rostoucí na omezeném definičním oboru, ze kterého inverzní funkci tvoříme, bude na tomto intervalu i funkce $\arcsin x$ rostoucí. Naopak ze stejného důvodu je funkce $\arccos x$ klesající.

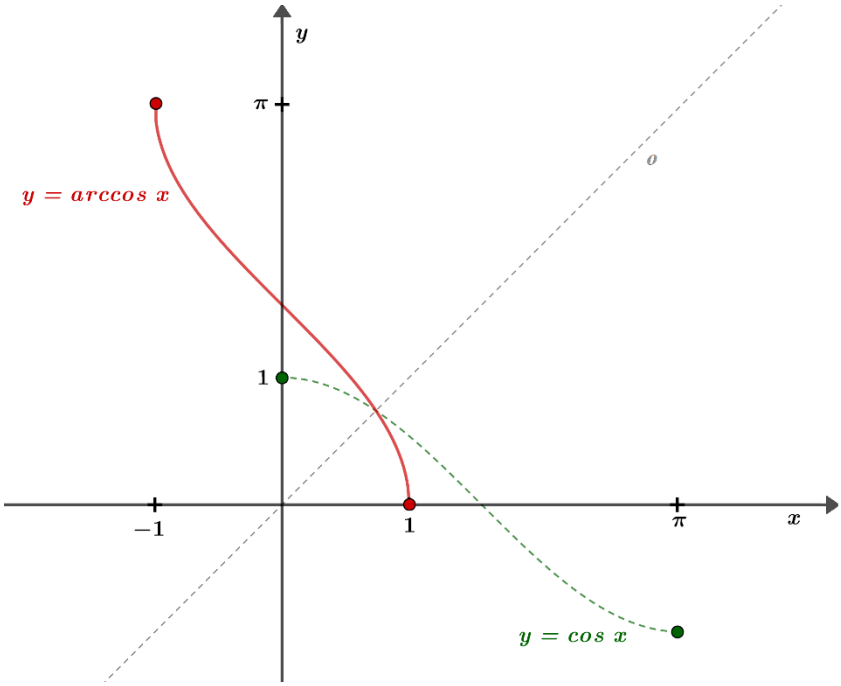
Paritu funkcí opět vyšetříme pomocí jejich inverzních funkcí. Funkce sinus je lichá, takže funkce, jejíž graf je souměrný podle osy 1. a 3. kvadrantu, bude také lichou funkcí. U funkce arkus kosinus to tak ovšem není. Kosinus je sudá funkce, avšak při tvoření inverze omezujeme její definiční obor. Právě to zapříčiní, že sudost se u funkce nepřenese na její inverzní funkci. Funkce arkus kosinus tedy není lichá ani sudá funkce.

Nyní přejdeme k zakreslení grafu funkce arkus sinus. Celé sestrojení bude velice jednoduché. Vezmeme graf funkce sinus omezený na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ (viz obr. 26, zelená křivka). Tento graf následně souměrně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu. (viz obr. 26, červená křivka).



Obrázek 26: Graf funkce arkus sinus

Graf funkce arkus kosinus sestrojíme analogicky. Vezmeme graf funkce kosinus omezený na interval ⟨0, π⟩. (viz obr. 27, zelená křivka) Tento graf následně souměrně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu. (viz obr. 27, červená křivka)



Obrázek 27: Graf funkce arkus kosinus

5.2 Funkce arkus tangens a arkus kotangens

Vlastnosti funkcí arkus tangens a arkus kotangens budeme vyšetřovat pomocí jejich inverzních funkcí, funkcí tangens a kotangens.

Začneme stejně jako v předchozích kapitolách definičním oborem a oborem hodnot. Obor hodnot funkce tangens je roven všem reálným číslům. Z definice inverzní funkce je pak jasné, že obor hodnot funkce tangens je stejný jako definiční obor funkce arkus tangens, tedy všechna reálná čísla. Funkci arkus tangens tvoříme z omezeného definičního oboru funkce tangens, tedy z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, který je oborem hodnot této funkce. Definiční obor funkce arkus kotangens je roven oborem hodnot funkce kotangens, tedy všem reálným číslům. Obor hodnot je pak interval $(0, \pi)$.

Hodnoty funkcí arkus tangens a arkus kotangens pro významné body ukazuje následující tabulka (tab. 11):

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arccotg x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Tabulka 11: Hodnoty funkce arkus tangens a arkus kotangens

Pozn.: Jde pouze o přehození x-ového a y-ového řádku u tabulky pro funkce tangens a kotangens.

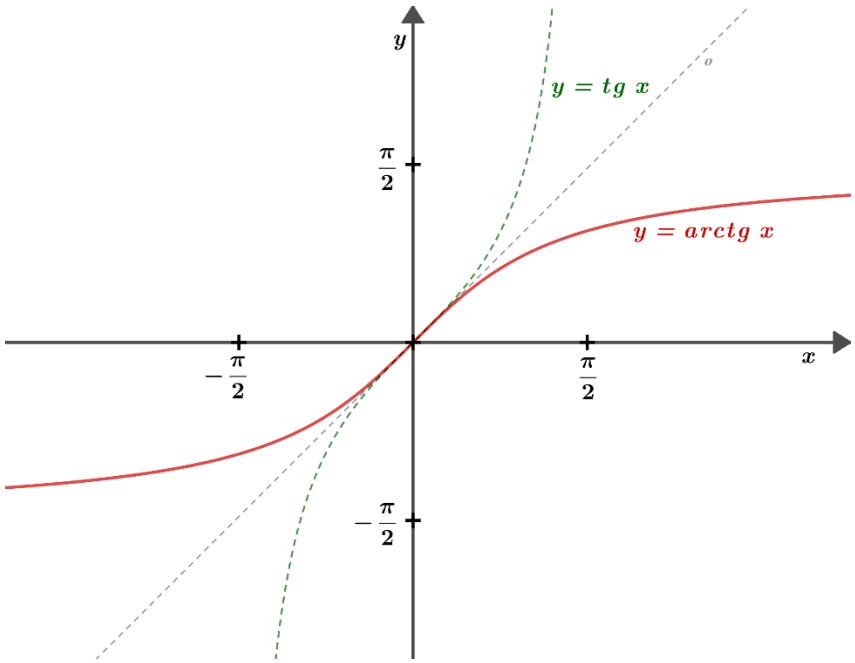
Další vlastností je periodicita a prostota funkce. Z definice inverzní funkce je zřejmé, že funkce arkus tangens a arkus kotangens nejsou periodické a jsou prosté.

Následují extrémy funkce. Funkce arkus tangens a arkus kotangens extrémy nemají, tedy v žádném bodě nenabývají maxima, ani minima. Je tomu tak proto, že tyto inverzní funkce tvoříme z otevřených intervalů $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $(0, \pi)$, tedy bez krajních bodů.

Nyní přejdeme k monotonii těchto funkcí. Jelikož je funkce tangens rostoucí na omezeném definičním oboru, ze kterého inverzní funkci tvoříme, bude na tomto intervalu i funkce $\operatorname{arctg} x$ rostoucí. Naopak ze stejného důvodu je funkce $\operatorname{arccotg} x$ klesající.

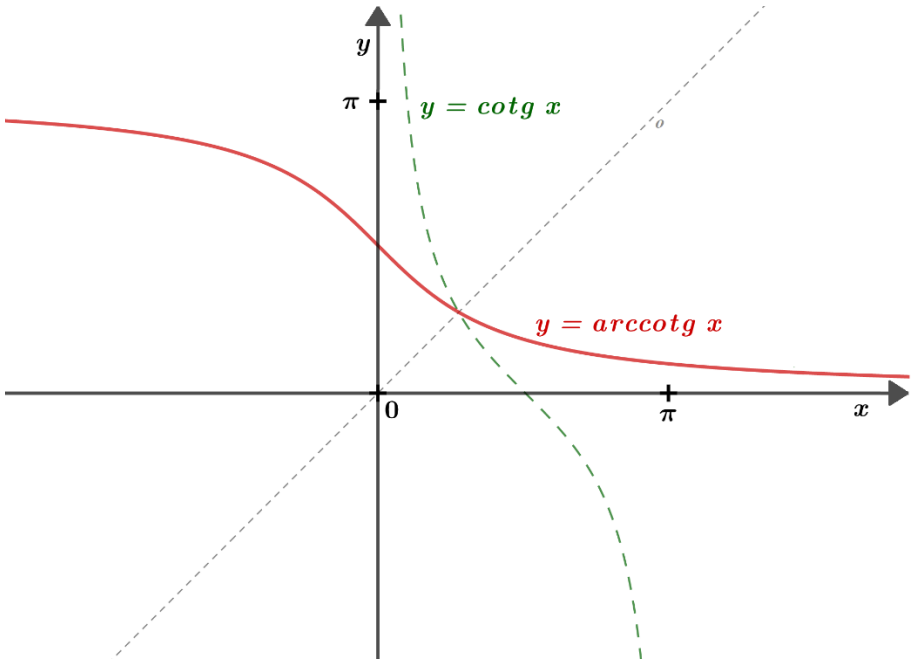
Jak již víme, funkce tangens a kotangens jsou liché funkce. Parita jejich inverzních funkcí se však bude trochu lišit, stejně jako u funkcí z předchozí kapitoly. Funkce arkus tangens je lichá funkce, což lze zjistit i z tabulky ukazující hodnoty pro příslušné úhly. Hodnoty jsou od nuly doprava stejné jako hodnoty od nuly doleva, akorát s opačným znaménkem. U funkce arkus kotangens to tak ovšem není. Funkce arkus tangens není lichá ani sudá funkce.

Nyní přejdeme k zakreslení grafu funkce arkus tangens. Zakreslení bude opět velice jednoduché. Vezmeme graf funkce tangens omezený na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, (viz obr. 28, zelená křivka). Tento graf následně souměrně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu. (viz obr. 28, červená křivka).



Obrázek 28: Graf funkce arkus tangens

Pro sestrojení grafu funkce arkus kotangens vezmeme graf funkce kotangens omezený na interval $(0, \pi)$. (viz obr. 29, zelená křivka) Tento graf následně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu. (viz obr. 29, červená křivka)



Obrázek 29: Graf funkce arkus kotangens

5.3 Funkce arkus sekans a arkus kosekans

Vlastnosti funkcí arkus sekans a arkus kosekans budeme vyšetřovat opět pomocí jejich inverzních funkcí, tedy funkcí sekans a kosekans.

Nejprve vyšetříme definiční obor a obor hodnot funkce arkus sekans. Obor hodnot funkce sekans je stejný jako definiční obor funkce arkus sekans, je to tedy interval $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Naopak definiční obor funkce sekans je oborem hodnot funkce arkus sekans, avšak omezený na interval, ve kterém je sekans prostá. Obor hodnost arkus sekans je tedy interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Stejně tak definiční obor funkce arkus kosekans je interval $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$, obor hodnot pak interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Hodnoty funkcí arkus sekans a arkus kosekans pro významné body ukazuje následující tabulka (tab. 12):

x	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2
arcsec x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arccsc x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Tabulka 12: Hodnoty funkce arkus sekans a arkus kosekans

Pozn.: Jde pouze o přehození x-ového a y-ového řádku u tabulky pro funkce sekans a kosekans.

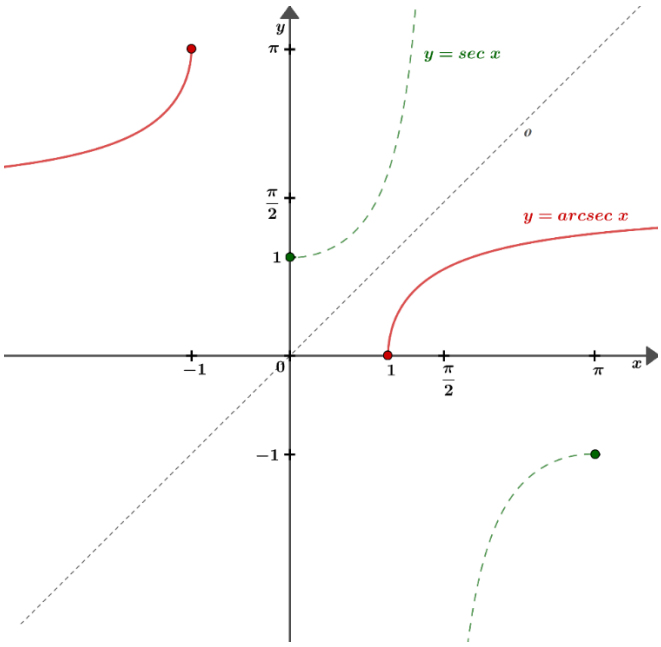
Ze stejného důvodu jako u ostatních cyklometrických funkcí, funkce arkus sekans a arkus kosekans nejsou periodické a jsou prosté.

Funkce $\operatorname{arcsec} x$ nabývá maxima, tj. hodnoty π, v bodě -1 a minima, tj. hodnoty 0 v bodě 1. Funkce $\operatorname{arccsc} x$ nabývá maxina, tj. hodnoty $\frac{\pi}{2}$, v bodě 1 a minima, tj. hodnoty $-\frac{\pi}{2}$ v bodě -1.

Následuje vlastnost zvaná monotonie. Funkce arkus sekans je na části svého definičního oboru, tj. na intervalu $(-\infty, -1\rangle$, rostoucí. Stejně tak na druhé části definičního oboru, tj. na intervalu $\langle 1, \infty)$. Naopak funkce arkus kosekans je na těchto intervalech klesající.

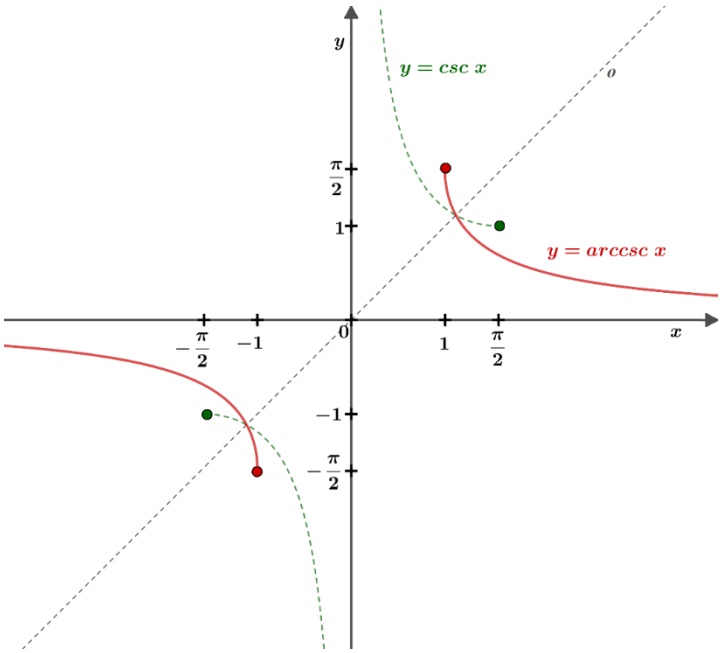
Další vlastností je parita funkce. Funkce sekans je lichá funkce, bude tedy lichou funkcí i funkce arkus sekans. Funkce arkus kosekans je sudou funkcí a jak již víme z předchozích kapitol, sudost se při tvoření inverze nepřenáší. Funkce arkus kosekans tedy není sudá ani lichá.

Nyní přejdeme k zakreslení grafu funkce arkus sekans. Vezmeme graf funkce sekans (viz obr. 30, zelená křivka), který následně souměrně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu (viz obr. 30, červená křivka).



Obrázek 30: Graf funkce arkus sekans

Pro sestrojení grafu funkce arkus kosekans vezmeme graf funkce kosekans (viz obr. 31, zelená křivka), který následně souměrně zobrazíme podle osy 1. a 3. kvadrantu. (viz obr. 31, červená křivka).



Obrázek 31: Graf funkce arkus kosekans

6 Zavedení pomocí funkcionálních rovnic

Použité pojmy a poznatky v této kapitole čerpám z knihy „*Základy matematické analýzy*“ od českého matematika a docenta Univerzity Karlovy v Praze Jiřího Veselého a knihy „*Diferenciální počet I*“ od Vojtěcha Jarníka, který patřil mezi největší české matematiky 20. století.

V této kapitole se budeme zabývat zavedením goniometrických funkcí pomocí tzv. funkcionálních rovnic. Budeme postupovat tak, že vybudujeme funkce sinus a kosinus na čtyřech základních vlastnostech a z nich pak odvodíme jejich další vlastnosti. Vlastnosti, na které se zaměřím budou především ty středoškolské. Z funkcionálních rovnic lze však odvodit i další vlastnosti jako je spojitost, nebo derivace.

Zavedeme tedy dvě funkce $s(x)$ a $c(x)$, kde $s(x)$ představuje funkci sinus a $c(x)$ funkci kosinus, ale nebylo by vhodné užívat typické značení goniometrických funkcí při jejich samotném zaváděním. Funkce $s(x)$ a $c(x)$ mají tyto vlastnosti:

1. Jsou definovány pro všechna x.
2. Pro libovolná x, y je:

   $a)\ s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y),$

   $b)\ c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y),$

   $c)\ \mathrm{c}(-x) = \mathrm{c}(x),\ \ \mathrm{s}(-x) = -\mathrm{s}(x).$
3. Existuje kladné číslo, které označíme znakem π, takové, že funkce $s(x)$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, a že $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, mimo to je $s(0) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{s}(x)}{x} = 1.$

(Jarník, 1974, s. 189)

Vysvětleme si nyní stručně, co nám dané vlastnosti říkají. První vlastnost je zřejmě jasná, tuto vlastnost pro funkce sinus a kosinus jsme si již ukázali v kapitole „Zavedení pomocí jednotkové kružnice“. Druhá vlastnost nám ukazuje vzorce, které mohou být pro

čtenáře trošku matoucí. Rovnosti a) a b) jsou právě ty funkcionální rovnice, pomocí nichž goniometrické funkce zavádíme. Žáci středních škol se s těmito vztahy mohou setkat pod pojmem „součtové vzorce“. Získali bychom je pomocí malého počtu základních formulí, zde je však budeme brát jako fakt. Rovnosti c) již známe z kapitoly, kde jsme si ukazovali vlastnosti sinu a kosinu. Tyto rovnosti nám udávají paritu funkcí, tedy to, že funkce c je sudá funkce a s je funkce lichá. Třetí vlastnost nám v podstatě zavádí matematickou konstantu π, která udává poměr délky oblouku kružnice k jejímu průměru. Toto číslo užíváme jako vyjádření $180°$ v radiánech. Dále nám tento bod říká vlastnosti funkcí $s(x)$ a $c(x)$ spojené s číslem π. Nakonec čtvrtá vlastnost nám udává limitu podílu funkce $s(x)$ a x, kde x jde k nule. Jelikož jsme se v této práci s pojmem limita ještě nesetkali, vysvětlíme si tento matematický pojem a zároveň i čtvrtou vlastnost v následujícím odstavci.

Co je to limita funkce? Pojmu limita funkce velmi často předchází pojem limita posloupnosti. Tudíž, kdo má za sebou limitu posloupnosti, tak má velmi slušný základ pro to, pochopit počítání limit u funkcí. Já se zde však pokusím stručně chování limit funkcí vysvětlit, aniž bychom měli znalosti z limit posloupností. Jednoduše řečeno limity jsou pro nás jakýsi nástroj, který nám dovoluje dívat se do bodů u funkcí, který jsou pro nás nějakým způsobem nepřístupné. Jedná se o body v nekonečnu, nebo o body, ve kterých funkce není definovaná.

Uveďme si celou situaci na příkladu. Mějme nějaký bod A na x-ové souřadnici a chceme zjistit, jaká je funkční hodnota funkce v tomto bodě, nebo zda je v tomto bodě funkce vůbec definována. Tento případ výpočtu je jednoduchý. Jednoduše dosadíme tento bod do funkce. Může ale nastat jiná situace.

Co když je tento bod A nekonečno? V tomto případě se vlastně ptáme, jak se funkce chová v nekonečnu. Zda když půjdeme po ose x až do nekonečna, tak i funkční hodnota půjde do nekonečna, nebo do nějakého konečného bodu. Pro tento případ existuje mnoho pravidel, jak limitu v nekonečnu spočítat, avšak zde pro to není dostatek prostotu.

Limitu funkce zapisujeme následovně:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Spodní index nám ukazuje, k jakému bodu se blížíme a jaký chceme vyšetřovat (a). Vpravo od limity je pak funkce, u které tento bod vyšetřujeme $(f(x))$. Za rovná se máme bod b, který nám říká, jak se funkce $f(x)$ chová u bodu a.

Vrátíme-li se k našim vlastnostem, tak čtvrtá vlastnost nám říká: $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$. Lze tedy říct, že blížíme-li se po x-ové souřadnici k nule, tak funkční hodnota výrazu $\frac{s(x)}{x}$ je 1. Neboli $\frac{s(x)}{x}$ „se blíží k jedničce".

Nyní si odvodíme další vlastnosti plynoucí z těchto čtyř základních.

Položme v rovnici $a)$ $y = 0$. Uplatněním vlastnosti z bodu 3) $s(0) = 0$, obdržíme $s(x) = s(x) \cdot c(0)$. Aby tato rovnost platila, musí platit $c(0) = 1$. Díky tomuto jsme získali funkční hodnotu funkce kosinus v nule.

(1) $$\boldsymbol{c(0) = 1}.$$

Dále položme v rovnici $b)$ $y = -x$. Podle rovností $c)$ a vlastnosti (1), dostaneme:

(2) $$\boldsymbol{1 = c^2(x) + s^2(x)}.$$

Tento vzorec pro goniometrické funkce si více představíme v kapitole 7.

Ze třetí vlastnosti víme, že $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dosadíme-li tuto rovnost do vzorce (2), dostaneme:

(3) $$\boldsymbol{c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}.$$

Položíme-li v rovnostech $a), b)$ $y = \frac{\pi}{2}$, dostaneme podle třetí vlastnosti a podle (1):

(4) $$\boldsymbol{s\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = c(x), \qquad c\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -s(x)}.$$

Tyto rovnosti nám ukazují, jaký je rozdíl mezi funkcí $s(x)$ a $c(x)$. Ten rozdíl je takový, že jejich grafy jsou posunuté o $\frac{\pi}{2}$ a tudíž funkční hodnoty funkce $c(x)$ jsou stejné jako funkční hodnoty funkce $s\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Další vlastnost, kterou odvodíme je periodicita funkce.

Pokud upravíme vlastnost (4) tak, že k výrazu $\frac{\pi}{2} + x$ přičteme $\frac{\pi}{2}$, dostaneme rovnosti:

(5)
$$\boldsymbol{s(\pi + x) = c\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -s(x),}$$
$$\boldsymbol{c(\pi + x) = -s\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -c(x).}$$

Z (5) pak přičtením hodnoty π k výrazu $\pi + x$ dostaneme rovnosti:

(6)
$$\boldsymbol{s(2\pi + x) = -s(\pi + x) = s(x),}$$
$$\boldsymbol{c(2\pi + x) = -c(\pi + x) = c(x).}$$

Z vlastnosti (6) pak vyplývá, že hodnoty funkcí $s(x)$ a $c(x)$ se nezmění zvětšíme-li číslo x o 2π. Funkce $s(x)$ a $\mathrm{c}(x)$ jsou tedy periodické s periodou 2π.

Nakonec poslední vlastnost. Změníme-li v rovnostech (4) a (5) číslo x na $-x$, z vlastnosti parity, kterou uvádí bod $3, c)$, dostaneme:

(7)
$$\boldsymbol{s\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = c(x), \qquad c\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = s(x),}$$
$$\boldsymbol{s(\pi - x) = s(x), \qquad c(\pi - x) = -c(x).}$$

Jak jsem již zmínila na začátku kapitoly, mohli bychom tímto způsobem budovat další vlastnosti funkcí $s(x)$ a $c(x)$, a dokonce lze takto odvodit i základní vzorce, se kterými pak žák pracuje v rámci počítání výrazů, rovnic, či limit. My si tyto základní vzorce ukážeme a odvodíme v další kapitole (kap. 7). Nastává však otázka, co dál. Jsou takto funkce $s(x)$ a $c(x)$ vybudované a lze je prohlásit za funkce sinus a kosinus? Proto, abychom toto mohli jednoznačně říct, nám chybí uvést další vlastnosti, ale především dokázat jejich existenci a jednoznačnost. Nelze totiž přesně říct, zda takto zavedené funkce $s(x)$ a $c(x)$ nemohou být i jinými funkcemi. Další vlastnosti zde neuvádím z toho důvodu, že jsou pro naše potřeby příliš složité. Důkaz existence a jednoznačnosti lze dokázat například pomocí rozvojů funkcí sinus a kosinus v mocninou řadu, které jsou jedním z témat následujících kapitol, ale zde se tím zabývat nebudeme.

Pro odvození dalších goniometrických funkcí nazveme funkci $s(x)$ funkcí sinus a značíme ji $\sin x$. Funkci $c(x)$ pak nazveme funkcí kosinus a značíme ji $\cos x$.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pak definujeme funkce tangens a kotangens následovně:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tangens je definovaná na množině $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$ a funkce kotangens na množině $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$.

Dále lze podobně zavést funkce sekans a kosekans. Funkci sekans značíme jako $\sec x$, funkci kosekans jako $\csc x$ a definujeme je následovně:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Funkce sekans je definovaná na množině $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ a funkce kosekans na množině $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$.

Inverzní funkce bychom zavedli stejně jako v kapitole 3 („Zavedení pomocí jednotkové kružnice“), takže je zde znovu uvádět nebudu.

Nyní přejdeme ke kapitole, ve které si ukážeme pár základních vzorců, které využíváme pro počítání s goniometrickými funkcemi a jsou nedílnou součástí matematické analýzy.

7 Goniometrické vzorce

V následující kapitole si uvedeme přehled základních vztahů mezi jednotlivými goniometrickými funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens a také připojíme jednoduché vysvětlení, jak se daný vztah odvodil. Všechny důležité myšlenka poznatky ohledně odvození čerpám z knihy „*Diferenciální počet I*“ od Vojtěcha Jarníka a knihy „*Úvod do matematické analýzy*“ od skupiny autorů, mezi které patří například Zbyněk Dlouhý nebo Karel Hruša.

Vzorce využíváme především při řešení goniometrických rovnic a nerovnic, zjednodušování výrazů s goniometrickými funkcemi a následně například i při počítání limit. Se všemi vztahy se žáci seznamují již na střední škole. Nejprve si uvedeme vztahy, které již známe z předchozích kapitol, a které využijeme pro odvození dalších vzorců.

Pro funkce sinus a kosinus a dva různé úhly x a y platí dva následující vztahy, tzv. součtové vzorce:

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}+\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{sin}\,\boldsymbol{y} \tag{1}$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}-\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{sin}\,\boldsymbol{y} \tag{2}$$

Píšeme-li v rovnicích $(1), (2) - y$ místo y, dostaneme dva další vztahy:

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{sin}\,\boldsymbol{y} \tag{3}$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}+\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{sin}\,\boldsymbol{y} \tag{4}$$

Mimo sinu a kosinu máme součtové vzorce i pro funkci tangens a kotangens:

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{tg}\,\boldsymbol{y}}{\mathbf{1}-\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{y}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{cotg}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{y}}. \tag{6}$$

Stejně jak u sinu a kosinu, píšeme-li $-y$ místo y, dostaneme:

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{tg}\,\boldsymbol{y}}{\mathbf{1}+\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{y}}, \tag{7}$$

$$\mathbf{cotg}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{y}+\mathbf{1}}{\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{y}}. \tag{8}$$

Tyto rovnosti plynou ze součtových vzorců pro sinus a kosinus. Vztah (5) dostaneme podílem součtových vzorců sinu a kosinu:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}$$

dělíme-li v posledním zlomku čitatel i jmenovatel číslem $\cos x\cdot\cos y$ (za předpokladu $\cos(x+y)\neq 0, \cos x\neq 0, \cos y\neq 0$), dostaneme:

$$\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\frac{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=\frac{\frac{\sin x\cdot\cancel{\cos y}}{\cos x\cdot\cancel{\cos y}}+\frac{\cancel{\cos x}\cdot\sin y}{\cancel{\cos x}\cdot\cos y}}{\frac{\cancel{\cos x\cdot\cos y}}{\cancel{\cos x\cdot\cos y}}+\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

(Jarník, 1956, s. 195)

Součtové vzorce pro funkci kotangens naopak dostaneme jako podíl součtových vzorců funkce kosinus a sinus.

Dále ze sudosti a lichosti funkcí platí:

$$\mathbf{\cos(-x)=\cos x,\quad \sin(-x)=-\sin x} \qquad (\mathbf{9})$$

Z posunutí grafů pak známe vztahy:

$$\mathbf{\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),} \qquad (\mathbf{10})$$

$$\mathbf{\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),}$$

$$\mathbf{\operatorname{cotg}x=\operatorname{tg}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right).}$$

Nakonec z definice funkce tangens a kotangens známe vztahy:

$$\mathbf{\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{cotg}x=\frac{\cos x}{\sin x}.} \qquad (\mathbf{11})$$

Tyto vztahy teď použijeme k zavedení nejvýznamnějšího a nejzákladnějšího vzorce:

$$\mathbf{\sin^2 x+\cos^2 x=1.} \qquad (\mathbf{12})$$

Tento vzorec dostaneme ze vztahu (3), kde dosadíme za proměnnou $y=-x$:

$$\cos(x-x)=\cos x\cdot\cos(-x)-\sin x\cdot\sin(-x).$$

Upravíme a za využití parity z (9) dostaneme:

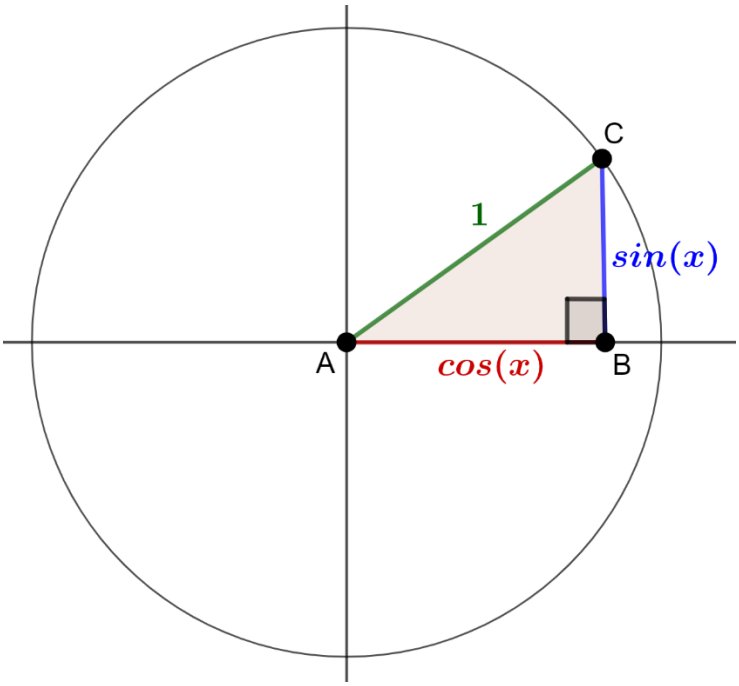
$$\cos(0) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x.$$

Poslední úpravou dostaneme:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(Jarník, 1956, s. 190)

Stejně jak ze součtových vzorců, lze tento vztah dostat i z jednotkové kružnice. Vyznačíme-li pravoúhlý trojúhelník ABC do jednotkové kružnice (viz obr. 32), x-ová souřadnice bodu C je funkční hodnota funkce kosinus, y-ová pak funkce sinus. Rovnost (12) pak dostaneme z Pythagorovy věty: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Odtud již plyne požadovaný vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.



Obrázek 32: Vzorec na jednotkové kružnici

Dále máme vzorce dvojnásobného argumentu:

$$\mathbf{\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}, \qquad (15)$$

$$\mathbf{cotg}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{cotg}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\cdot\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}}. \qquad (\mathbf{16})$$

Vztahy (13) a (14) opět dostaneme malou obměnou ze součtových vzorců. Začneme nejprve vzorcem pro sinus (13). Tento vztah plyne z rovnosti (1), kde místo proměnné y dosadíme x. Poté obdržíme rovnost:

$$\sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x\,.$$

Po úpravě:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x.$$

Poté z rovnosti (2) po dosazení $y = x$ dostaneme vztah (14) následovně:

$$\cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x.$$

Po úpravě:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(Jarník, 1956, s. 190)

Stejně tak pro rovnost (15) využijeme součtový vzorec pro tangens (5), kde za y dosadíme x. Pro rovnost (16) pak použijeme součtový vzorec pro kotangens (6), kde opět za y dosadíme x.

Stejně tak máme vzorce polovičního argumentu:

$$\left|\mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right| = \sqrt{\frac{\mathbf{1}-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}, \qquad (\mathbf{17})$$

$$\left|\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right| = \sqrt{\frac{\mathbf{1}+\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}. \qquad (\mathbf{18})$$

Tyto rovnosti dostaneme úpravou vzorce (13):

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

kde položíme místo $2x = u$, a tedy $x = \frac{u}{2}$. Vzorec můžeme přepsat ve tvaru $\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{u}{2}$ a odtud plyne:

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \qquad \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

(Dlouhý, Hruša a spol., 1965, s. 45)

Pro vyjádření vzorce (18) postupujeme obdobně. Vyjádříme funkci $\cos x$ jako součet polovičních úhlů, poté použijeme součtový vzorec a dle vzorce (12) vyjádříme funkci kosinus.

Dále máme následující méně používaný vzorec:

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cotg}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1} \qquad (\mathbf{19})$$

Tato rovnost vychází ze skutečnosti, že funkce tangens a kotangens lze vždy vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus. Rozepíšeme si tedy tuto rovnost podle vztahů (11):

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Zlomky lze zkrátit křížem a po krácení vyjde 1:

$$\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} = 1,$$

$$1 = 1.$$

Na závěr sečteme-li a odečteme rovnice (1) a (3), (2) a (4), dostaneme:

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{y}, \qquad ((\mathbf{1}) + (\mathbf{3})) = (\mathbf{20})$$

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{y}, \qquad \big((\mathbf{1}) - (\mathbf{3})\big) = (\mathbf{21})$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{y}, \qquad ((\mathbf{2}) + (\mathbf{4})) = (\mathbf{22})$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\mathbf{2} \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{y}. \qquad ((\mathbf{2}) - (\mathbf{4})) = (\mathbf{23})$$

(Jarník, 1956, s. 191)

Vyjádříme-li $x+y$ a $x-y$ jako dvě libovolná čísla α, β, tj. $x+y=\alpha, x-y=\beta$, dostaneme vzorce pro součet a rozdíl funkcí sinus a kosinus:

$$\mathbf{sin}\, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{sin}\, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{sin}\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}, \qquad (\mathbf{24})$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{25}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{26}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{27}$$

(Jarník, 1956, s. 191)

8 Zavedení pomocí nekonečných řad

Použité pojmy a poznatky v této kapitole čerpám ze skript „*Nekonečné řady*“ od Zuzany Došlé a Vítězslava Nováka a z přednášky „*Matematická analýza I*“ od doktora Derka Pilouse z 2020, kdy působil jako přednášející na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy.

V této kapitole se budeme zabývat zavedení goniometrických funkcí pomocí nekonečných řad. Nekonečné řady jsou pro nás další způsob, jak zavést nejen goniometrické funkce, ale například i logaritmické nebo exponenciální. Než přejdeme k samotnému zavedení našich funkcí, pojďme se s pojmem nekonečná řada seznámit.

Co je to nekonečná řada? S tímto pojmem se setkáváme již na střední škole, a to především s řadou geometrickou. A to až poté, co známe posloupnosti a limity. Pojem řada s posloupností totiž úzce souvisí. Definujme si tedy nejprve pojem posloupnost:

Posloupnost je určité množství reálných čísel jednoznačně seřazených za sebou.

Posloupnost může být konečná i nekonečná. Členy posloupnosti typicky zapisujeme pomocí indexů. a_n značí n − tý člen posloupnosti a.

Posloupnost můžeme zapsat různými způsoby:

- výčtem členů: $a = (7, 10, 13, 16, 19)$
- vzorcem pro n − tý člen: $a_n = 4 + 3 \cdot n$
- rekurentně: $a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 3$
- Zápis konečné posloupnost: $(a_n)_{n=1}^{k}$
- Zápis nekonečné posloupnost: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

(Pilous, Derek. 2020)

Nyní přejdeme k zavedení pojmu řada.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Výraz tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ $+a_n + \cdots$ se nazývá nekonečná číselná řada. Členy posloupnosti se nazývají členy řady. Nekonečnou řadu značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud je posloupnost

konečná, tedy $(a_n)_{n=1}^{k}$. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost reálných čísel. Výraz tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ se nazývá nekonečná číselná řada.

Členy posloupnosti se nazývají členy řady. Nekonečnou řadu značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud je posloupnost konečná, tedy $(a_n)_{n=1}^{k}$ vznikne konečná řada a zapisuje se $\sum_{n=1}^{k} a_n$. (Došlá a Novák, 2013, s…)

Nejen, že dokážeme řadu zapsat, ale umíme určit i její součet. Pro geometrickou řadu je dán pevný vzoreček, avšak obecný postup pro určení součtu řady, že určení tzv. částečných součtů a provedení limitního přechodu.

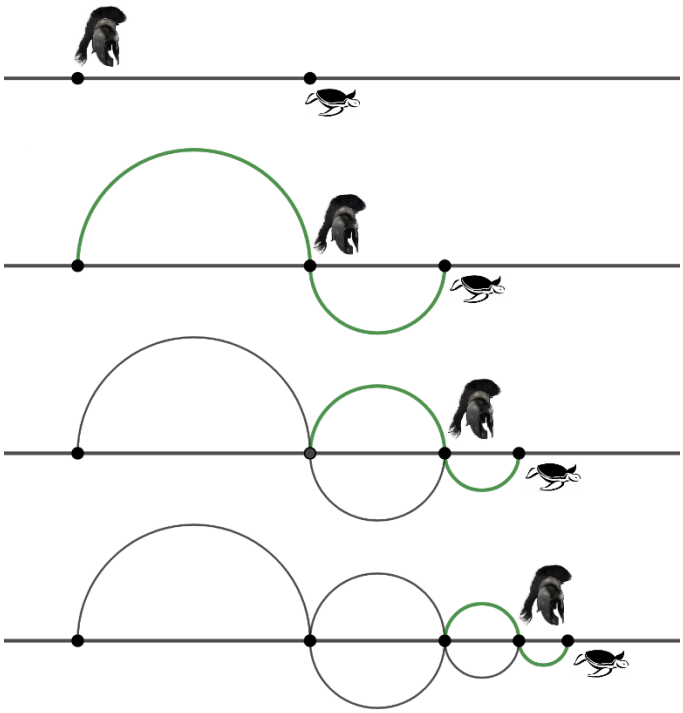
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazveme posloupností částečných součtů této řady. Existuj − li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (její součet je konečné číslo) a má součet s. Neexistuje − li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (její součet je ∞, nebo $-\infty$). Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje. (Došlá a Novák, 2013, s. 2)

Má − li konvergentní řada $\sum a_n$ součet s, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je − li řada $\sum a_n$ divergentní, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, nebo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Tyto definice možná mohou být pro čtenáře trochu abstraktní. Pojďme tedy trochu do historie a uveďme si i jeden známý paradox, který uvádí i Zuzana Došlá a Vítězslav Novák ve skriptech „*Nekonečné řady*“, a který nám může pro pochopení teorie řad značně pomoci.

Teorie nekonečných řad, tak, jak ji známe dnes, vznikla ve druhé polovině 17. století. Mnoho otázek však vyplynuly již dříve. Například Zenon z Eleje (490-430 př.n.l.) považoval ze nemožné, že by nekonečný součet kladných čísel mohl být konečné číslo. Připomeňme jeho známý paradox „Achilles a želva“, který nám říká: „Rychlonohý Achilles nikdy

nedožene želvu, jestliže se želva nachází v nějaké vzdálenosti před ním.“ Tento paradox popisuje následující obrázek (obr. 33):



Obrázek 33: Paradox – Achilles a želva

Z obrázku je jasné, že jakmile se Achilles dostane na místo želvy, ta už je opět o malý kousek před ním. Když Achilles doběhne tento malý kousek, je želva zase o kousek dál. Tento paradox nakonec vyvrací Aristotelés ve své práci „*Fysika*“ a ukazuje, že součet nekonečné řady čísel může být konečný, pokud se její členy dostatečně rychle zmenšují.

Doposud jsme se věnovali řadám, jejíž členy byly čísla. My však pro vybudování goniometrických funkcí pomocí řad potřebujeme řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, k jejichž největšímu rozvoji došlo v 18. století. Tyto řady hrají v matematice velice důležitou roli. Jak moc velkou se postupně dozvíme v průběhu této kapitoly. Členy řady funkcí jsou funkce $f_n(x)$, tedy jejími členy jsou členy nějaké posloupnosti funkcí. Jejím součtem je pak nějaká funkce $f(x)$.

Známe mnoho případů řad funkcí, jako např. Fourierovy řady, Maclaurinovy řady, nebo mocninné řady. Nás nejprve budou zajímat zmíněné mocninné řady.

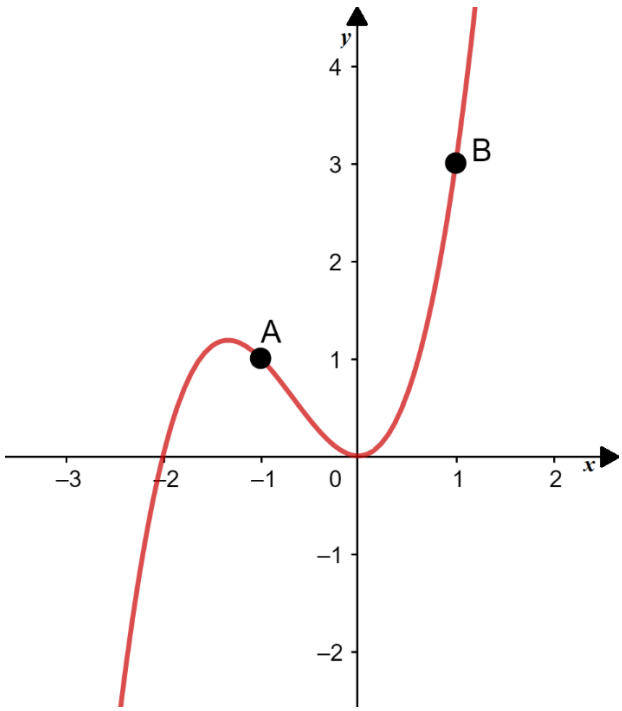
Buď $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, x_0 libovolné reálné číslo. Mocninou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru:

$$a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \cdots + a_n(x - x_o)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_o)^n.$$

(Došlá a Novák, 2013, s. 56)

Nyní si zavedeme další pojmy, jako je Taylorova a Maclaurinova řada. V předcházejícím odstavci jsme si definovali pojem mocninná řada. U těchto řad lze vždy určit jejich součet, u Taylorových a Maclaurinových řad však budeme řešit opačnou úlohu. Danou funkci budeme rozvíjet do mocninné řady, tzv. Taylorovy řady. Musíme tedy nejprve zmínit tzv. Taylorovu větu, kdy je funkce vyjádřena ve tvaru polynomu a zbytku. Tato věta obsahuje i nástroj zvaný derivace. Pojďme si tedy nejprve tento pojem vysvětlit a pak budeme pokračovat v tvrzení Taylorovy věty.

Co je to derivace? Derivace jsou jedni ze základních způsobů, jak analyzovat chování funkce. Mějme zadanou funkci předpisem $y = x^3 + 2x^2$, jejíž graf je zobrazen na následujícím obrázku (obr. 34):

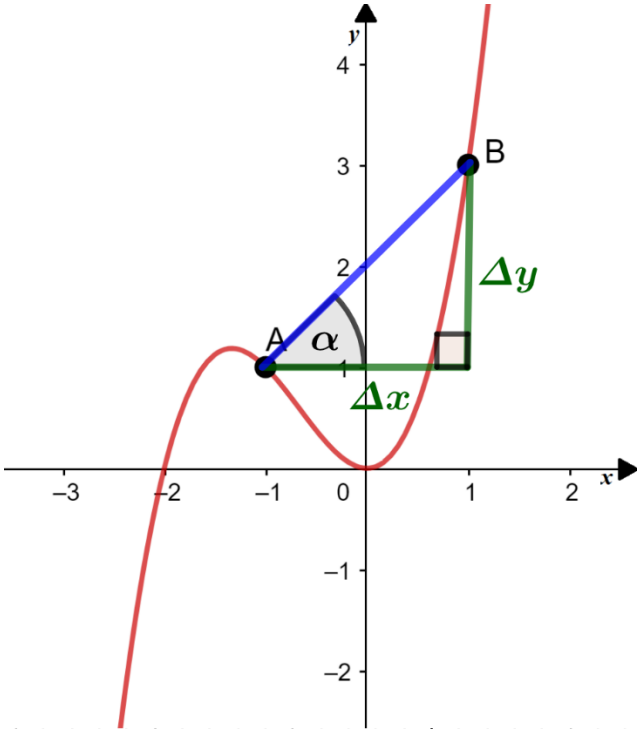


Obrázek 34: Absolutní přírůstek

Nás ale zajímá, jak z takového předpisu, aniž bychom viděli graf funkce, zjistit, kdy ta funkce klesá, kdy roste a jak moc. S tímto nám právě pomůže derivace. Mějme tedy tuto funkci $y = x^3 + 2x^2$ (viz obr. 34) a na ní si vybereme dva body $A = [-1,1], B = [1,3]$. Při cestě z bodu A do bodu B jsme na x-ové souřadnici udělali dva „kroky“ doprava. Nyní máme dva způsoby, jak zjistit o kolik nám ta hodnota funkce narostla. Jeden způsob nazveme jako „absolutní přírůstek“, tedy hodnota o kolik funkční hodnota narostla. Což spočítáme jako $3 - 1 = 2$. Funkční hodnota vzrostla o 2. Tuto hodnotu lze však vyjádřit i pomocí procent, takovému způsobu říkáme „relativní přírůstek“. Ten nám říká o kolik ta funkční hodnota narostla (Δy) vůči tomu o kolik jsme se pohnuli na ose x (Δx). Po dosazení nám vyjde hodnota 50%.

$$\text{relativní přírůstek} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tato situace je zobrazena na následujícím grafu (obr. 35): změna x (zelená úsečka), změna y (červená úsečka). Tyto úsečky mezi sebou svírají pravý úhel a když doplníme třetí stranu trojúhelníku, máme pravoúhlý trojúhelník.

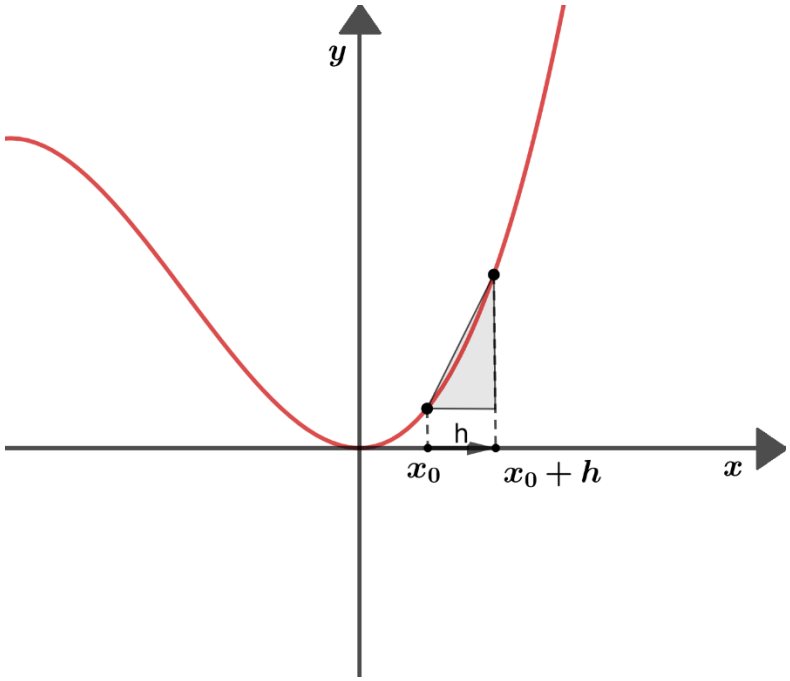


Obrázek 35: Relativní přírůstek

Na obrázku (obr. 35) je i vyznačení úhel α. Tento úhel nám vyjadřuje, jak moc prudce ta funkce roste. Ten pak mohu spočítat pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tedy hodnota toho relativního přírůstku mi popisuje tangens toho úhlu, který při té změně nastal. Avšak problém s analyzováním funkce tímto způsobem je v tom, že máme Δx relativně velké a po spočítání absolutního, nebo relativního přírůstku už nezjistíme, že ta funkce nejprve klesala a až poté rostla. (viz obr. 36) Proto bychom potřebovali Δx, co nejmenší. Vezměme tedy dva nové body o x-ové souřadnici x_0 a tomu bude příslušet nějaká funkční hodnota. Druhý pod o x-ové souřadnici $x_0 + h$ a tomu bude opět příslušet nějaká funkční hodnota, přičemž vzdálenost x_0 a $x_0 + h$ je právě to h. (viz obr. 36)



Obrázek 36: Derivace funkce

Jak jsem již uvedla, chceme to h, co nejmenší, tedy aby šlo limitně k nule. V trojúhelníku, avšak bude Δx tak malé, že bude skoro nula a nulou nelze dělit. Proto už takový případ nelze počítat pomocí relativního přírůstku. Použijeme proto nástroj, který známe z předchozí kapitoly, limity. Δy lze zapsat jako rozdíl funkčních hodnot $x_0 + h$ a x_0, Δx je pak h. Výpočet bude následující:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tento vztah je vzorec pro derivaci funkce. Derivaci funkce značíme: $f'(x)$.

Počítat všechny derivace podle definice je zbytečně složité. My si zde však ukážeme alespoň odvození derivace funkce sinus podle definice.

$$(\sin(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h},$$

nyní výraz upravíme dle vzorce pro součet goniometrických funkcí:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2},$$

a dostaneme:

$$(\sin(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{(x+h)+x}{2} \cdot \sin \frac{(x+h)-x}{2}}{h},$$

limitu součinu kosinu a sinu lze zapsat jako limitu kosinu a limitu sinu a vyšetříme je odděleně:

$$(\sin(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{(x+h)+x}{2}}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{(x+h)-x}{2}}{h},$$

limitu kosinu upravíme následovně:

$$\lim_{h \to 0} 2 \cdot \cos \frac{2x + 0}{2} = 2 \cdot \cos x,$$

limitu sinu upravíme podle vlastnosti č. 4, kterou jsme si představili v kapitole 6 (s. 48) a tvrdí nám: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dle této vlastnosti přepíšeme limitu sinu následovně:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1,$$

následně dostaneme výslednou derivaci funkce sinus:

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cos\frac{(x+h)+x}{2}\cdot\sin\frac{(x+h)-x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cos\frac{(x+h)+x}{2}}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{(x+h)-x}{2}}{h} = 2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \cos x\,.$$

Derivace ostatních goniometrických a cyklometrických funkcí jsou následující:

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivaci funkce $f(x)$, tzn. $f'(x)$, také označujeme jako derivaci prvního řádu. Funkci $f'(x)$ avšak můžeme dále derivovat. Derivaci druhého řádu pak označujeme $f''(x)$, třetího řádu $f'''(x)$ a následně derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x)$.

Nyní, když známe pojem derivace, můžeme uvést Taylorovu větu, která nám udává tzv. Taylorův rozvoj, který je jakýmsi návodem pro vyjádření funkcí pomocí řady.

Nechť f je funkce, která má derivace až do řádu $n+1$ v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0. Pak platí:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \text{zbytek.}$$

(Zuzana Došlá a Vítězslav Novák, 2013, s. 65)

Jak jsem již zmínila, Taylorova věta nám vyjadřuje funkci ve tvaru polynomu a nějakého zbytku, je to tedy nějaké jiné vyjádření funkce, než na které jsme byli doteď zvyklí. Naším cílem v této kapitole bude rozvést funkci pomocí Taylorova rozvoje do tzv. Taylorovy řady, konkrétně do tzv. Maclaurinovy řady, která je speciálním případem. Pojmy Taylorova řada a Maclaurinova řada definuje Zuzana Došlá a Vítězslav Novák ve své knize „Nekonečné řady“ následovně:

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace vyšších řádů. Mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ nazýváme Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0. Jestliže je pak $x_0 = 0$, mluvíme o Maclaurinově řadě, která je ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n$.

(Zuzana Došlá a Vítězslav Novák, 2013, s. 65)

Díky těmto Maclaurinovým řadám můžeme vyjádřit goniometrické funkce sinus a kosinus. U funkce tangens a kotangens bude vyjádření trochu složitější. Díky těmto řadám lze vyjádřit i další elementární funkce, jako je funkce logaritmická, nebo exponenciální. Rozvoje funkcí do mocninných řad mají velké aplikace, které si však ukážeme až v závěru kapitoly. Pojďme nyní k vyjádření goniometrických funkcí, a to na začátek funkcí sinus.

Abychom mohli použít Taylorovu větu, nejprve si musíme spočítat derivace funkce sinus, alespoň do čtvrtého řádu:

$$f(x) = \sin x\,, f'(x) = \cos x,\ \ f''(x) = -\sin x\,, f^3(x) = -\cos x, f^4(x) = \sin x.$$

Nyní za neznámou x dosadíme 0 (podmínka Maclaurinovy řady) a dostaneme:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^3(0) = -1, f^4(0) = 0, \dots$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do Taylorova rozvoje a dostaneme:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Stejně tak budeme postupovat u funkce kosinus. Spočítejme si tedy nejprve derivace funkce kosinus alespoň do čtvrtého řádu:

$$f(x) = \cos x\,, f'(x) = -\sin x,\ \ f''(x) = -\cos x\,, f^3(x) = \sin x, f^4(x) = \cos x.$$

Nyní za neznámou x dosadíme 0 a dostaneme:

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^3(0) = 0, f^4(0) = 1, \dots$$

Po dosazení do Taylorova rozvoje dostaneme:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Nyní si odvodíme Taylorovu řadu pro funkci tangens. Zkusme nejprve spočítat derivace:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, f^3(x) = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}, \dots$$

Po dosazení 0 dostaneme:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^3(0) = 2, \dots$$

Po dosazení do Taylorova rozvoje dostaneme:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.$$

Protože derivace vyšších řádů jsou poměrně složité, není metoda postupného počítání derivací snadná. Zkusme tedy použít jinou metodu. Využijeme známého vzorce, kde funkci tangens vyjádříme jako podíl sinu a kosinu:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nyní tyto funkce vyjádříme jako Taylorovy řady a jelikož pro funkci tangens tu správnou řadu ještě neznáme, napíšeme ji jako obecnou řadu se středem v 0.

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) = \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots)}{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots)}.$$

Nyní rovnost vynásobíme jmenovatelem a přepíšeme jako rozvoje, abychom s řadami mohli lépe pracovat.

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Teď se nabízí vynásobit jednotlivé koeficienty u stejných mocnin proměnné x, avšak nemůžeme u nekonečných řad použít klasické roznásobení, jak ho známe. Tento způsob by mohl změnit konečný výsledek. Použijeme zde tzv. Cauchyho součin, který Zuzana Došlá a Vítězslav Novák ve své knize „Nekonečné řady“ definují následovně:

Cauchyovým součinem řad $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$; $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$ rozumíme řadu $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$.

(Zuzana Došlá a Vítězslav Novák, 2013, s. 34)

Vypočítáme koeficienty Cauchyho součinem (lze určit i porovnáním konstant):

$a_0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$; $\quad a_1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$; $\quad a_2 - \frac{1}{2} a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$;

$a_3 - \frac{1}{2} a_1 = -\frac{1}{6} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$; $\quad a_4 - \frac{1}{2} a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$;

$a_5 - \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{24} a_1 = \frac{1}{120} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{15}$.

Po dosazením koeficientů do výrazu $\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dostáváme hledaný rozvoj:

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

(Došlá a Novák, 2013, s. 71, 72)

Tato metoda je rozhodně snadnější než postupné počítání derivací, ale opět to není výpočet, který by byl snadný. Máme, proto ještě jednu metodu pro počítání koeficientů u funkcí jako je tangens a tou jsou tzv. Bernoulliovy čísla. Pomocí jednoho vzorce lze koeficienty snadno zjistit, avšak toto téma zařazujeme spíše do vysokoškolské matematiky a dále se jimi zabývat nebudeme.

Nakonec vyjádříme funkci kotangens. Použijeme stejnou metodu jako u funkce tangens, a to pomocí podílu kosinu a sinu:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Nyní tyto funkce vyjádříme jako Taylorovy řady:

$$\frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots)}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right)}.$$

Nyní rovnost vynásobíme jmenovatelem a přepíšeme jako rozvoje, abychom s řadami mohli lépe pracovat:

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Vypočítáme koeficienty Cauchyho součinem:

$a_{-1} \cdot 1 = 1 \Rightarrow a_{-1} = 1;\quad a_0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_0 = 0;\quad a_1 - \frac{1}{6} a_{-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3};$

$a_2 - \frac{1}{6} a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0;\quad a_3 - \frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{120} a_{-1} = \frac{1}{24} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{45};$

$a_4 - \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{120} a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = 0;\ a_5 - \frac{1}{6} a_3 + \frac{1}{120} a_1 - \frac{1}{5040} a_{-1} = -\frac{1}{720}$

$\Rightarrow a_5 = -\frac{32}{15120} = -\frac{2}{945}.$

A následně dostáváme rozvoj pro funkci kotangens:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Nyní přejdeme k definicím cyklometrických funkcí. Zde už je postup odvození značně složitější, proto uvedu postup výpočtu pro funkci arkus sinus a arkus tangens, které uvádí i Zuzana Došlá a Vítězslav Novák v knize „*Nekonečné řady*“ v sekci příklady. Odvození pro další funkce z důvodu obtížnosti vynechám a uvedu pouze výhodnější způsob odvození.

Pro odvození cyklometrických funkcí musíme použít úplně jiný nástroj, než jsme užívali doposud. Jelikož řady cyklometrických funkcí nejsou něco, co bychom se pamatovali nazpaměť, musíme užít něco, co známe. Postupovali bychom tak, že bychom nejprve cyklometrickou funkci derivovali. Uveďme si nejprve odvození funkce arkus sinus:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Zlomek, který vyšel na pravé straně po derivaci už lze využít, protože připomíná vzorec pro součet geometrické řady, avšak vadí nám odmocnina ve jmenovateli. Výraz tedy upravíme na výraz se zápornou mocninou. Tento tvar připomíná vzorec pro binomický rozvoj. Vyjádříme tedy tento výraz jako binomickou řadu, kde položíme $-x^2 = t$ a dostaneme:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} t^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} t + \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} t^n + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2 2!} t^2 - \frac{15}{2^3 3!} t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^n + \cdots \qquad t \in (-1,1).$$

Dosazením zpět $-x^2$ za t dostaneme požadovanou Maclaurinovu řadu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2 2!} x^4 + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots \qquad x \in (-1,1).$$

Následně tuto řadu integrujeme a dostaneme řadu pro funkci arkus sinus:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1,1).$$

(Došlá a Novák, 2013, s. 68, 69)

Nyní odvodíme řadu pro funkci arkus tangens. Derivace funkce arkus tangens je racionální funkce $\frac{1}{1+x^2}$, což připomíná součet geometrické řady. Rozvoj této řady je následující: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad x \in (-1,1).$

Nyní řadu integrujeme a dostaneme řadu pro funkci arkus tangens:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1,1).$$

(Došlá a Novák, 2013, s. 69)

Pozn.: Historicky první mocninou řadu, která není geometrická, objevili indičtí matematici již v 15. století, a to právě řadu pro funkci arkus tangens. (Došlá a Novák, 2013, s. 73)

Funkce arkus kosinus a arkus kotangens lze odvodit stejně jako výše zmíněné funkce, ale jednodušší způsob je využití následujících vztahů:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Po osamostatnění $\arccos x$ a vyjádření $\arcsin x$ jako rozvoje a následně jako řady dostaneme:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Stejně pro funkci arkus kotangens. Po osamostatnění $\operatorname{arccotg} x$ a vyjádření $\operatorname{arctg} x$ jako rozvoje a následně jako řady dostaneme:

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots$$

Na závěr této kapitoly si ukážeme využití aproximace goniometrických a cyklometrických funkcí jako řady, tedy užití mocninných řad obecně. Taylorovy rozvoje funkcí lze využít pro přibližný výpočet funkčních hodnot, výpočet limit, přibližný výpočet integrálů, nebo řešení diferenciálních rovnic. My si zde ukážeme pouze výpočet funkčních hodnot.

Díky rozvojům funkcí lze určovat přibližný výpočet funkčních hodnot u úhlů, které spočítá pouze kalkulačka, která mimochodem tento algoritmus využívá. Výpočet je pouze přibližný, protože jak uvádí Taylorova věta, vyjadřujeme funkci jako polynom + nějaký zbytek. Právě ten zbytek může zapříčinit drobné chyby ve výpočtu, proto musíme vždy určit, jak velkou chybu si při výpočtu můžeme dovolit. Zkusme například spočítat přibližnou funkční hodnotu $\cos\frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-3}. Dosadíme $\frac{\pi}{10}$ za x do rozvoje pro funkce kosinus a dostaneme:

$$\cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^6}{6!} + \cdots$$

Pro to, abychom zjistili, zda je chyba menší než 10^{-3}, musí řada střídat znaménka. Tuto podmínku náš rozvoj funkce kosinus splňuje. Pak vezmeme-li v rozvoji první dva nenulové členy, musí být chyba menší než třetí nenulový člen, tj. $\frac{\frac{\pi}{10}^4}{4!} = \frac{\pi^4}{240000} < 10^{-3}$.

Hledaná hodnota je:

$$\cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{\frac{\pi}{10}^2}{2!} \doteq 0{,}95.$$

Závěr

Cílem práce bylo zavést goniometrické funkce pomocí čtyř různých zavedení a následně zavést funkce cyklometrické. Práce by měla sloužit především žákům středních škol, a proto práce nejde do detailů. Některé způsoby zavedení lze však více rozvést.

Pomocí pravoúhlého trojúhelníku se nám podařilo zavést goniometrické funkce definované pouze pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a uvést ve stručnosti cyklometrické funkce a jejich využití pro počítání úhlů v pravoúhlém trojúhelníku. V následující podkapitole jsem uvedla trigonometrické vztahy jako je sinová věta, kosinová věta a další.

V další kapitole jsme definice goniometrických funkcí rozšířili na celou reálnou osu a dodefinovali zároveň i funkce cyklometrické. Dále jsme uvedli vlastnosti goniometrických a cyklometrických funkcí. Vyšetřovali jsme definiční obor, obor hodnot, periodicitu, prostotu, extrémy, znaménka v různých intervalech, monotonii, paritu a následně sestrojili graf funkce.

Další kapitola byla věnována zavedení goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic. Tato kapitola byla pouze nástin toho, jak lze ještě goniometrické funkce zavést. Poté uvádím goniometrické vzorce, které zároveň i odvozuji.

V závěrečné kapitole ukazuji poslední možné zavedení, a to pomocí nekonečných řad a uvádím i využití goniometrických funkcí zapsané jako nekonečný rozvoj.

Všechny obrázky a grafy jsem vytvořila v počítačovém programu Geogebra, který je snadno dostupný na internetu a spousta škol ho využívá při výuce matematiky, především geometrie.

Tato bakalářská práce by měla sloužit jako učební text, díky kterému získá každý čtenář vhled do goniometrických funkcí, přehled o jejich vlastnostech, vztazích a vzorcích.

Seznam použité literatury

DLOUHÝ, Zbyněk. HRUŠA, Karel. KŮST, Jiří. aj. *Úvod do matematické analýzy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

DOŠLÁ, Zuzana. NOVÁK, Vítězslav. *Nekonečné řady*. 3.vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013.

GILLMAN, Leonard. MCDOWELL, Robert H. *Matematická analýza*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980.

GREBENČA, Michail Kuzmič. NOVOSELOV, Sergej Iosifovič. *Učebnice matematické analysy*. Praha: ČSAV, 1955.

JARNÍK, Vojtěch. Diferenciální počet (I). 6. vydání. Praha: Academia, 1974.

MARSDEN, Jerrold. WEINSTEIN, Alan. *Calculus I*. 2.vyd. New York: Springer-Verlag, 1985.

PILOUS, Derek. *Matematická analýza I* [přednáška]. Praha: PedF UK, 2020.

SMÝKALOVÁ, Radka. *Goniometrické funkce v elementární matematice*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016.

TLUSTÝ, Pavel. POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem.

VESELÝ, Jiří. *Základy matematické analýzy I*. Praha: Matfyzpress, 2009.

ZAMBOJ, Michal. *Syntetická geometrie I* [přednáška]. Praha: PedF UK, 2019.

Seznam obrázků

Obr. 1: Funkce

Obr. 2: Křivka (není funkcí)

Obr. 3: Navzájem inverzní funkce

Obr. 4: Pravoúhlý trojúhelník

Obr. 5: Trojúhelník

Obr. 6: Jednotková kružnice

Obr. 7: Sinus a kosinus na jednotkové kružnici

Obr. 8: Tangens a kotangens na jednotkové kružnici

Obr. 9: Sekans a kosekans na jednotkové kružnici

Obr. 10: Parita funkce sinus

Obr. 11: Parita funkce kosinus

Obr. 12: Graf funkce sinus pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Obr. 13: Sinusoida

Obr. 14: Graf funkce kosinus pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Obr. 15: Kosinusoida

Obr. 16: Sinusoida a kosinusoida

Obr. 17: Tangens úhlu větší o π

Obr. 18: Monotonie funkce tangens a kotangens

Obr. 19: Graf funkce tangens pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Obr. 20: Tangentoida

Obr. 21: Graf funkce kotangens pro $x \in (0, \pi)$

Obr. 22: Kotangentoida

Obr. 23: Tangentoida a kotangentoida

Obr. 24 Sekantoida

Obr. 25: Kosekantoida

Obr. 26: Graf funkce arkus sinus

Obr. 27: Graf funkce arkus kosinus

Obr. 28: Graf funkce arkus tangens

Obr. 29: Graf funkce arkus kotangens

Obr. 30: Graf funkce arkus sekans

Obr. 31: Graf funkce arkus kosekans

Obr. 32: Vzorec na jednotkové kružnici

Obr. 33: Paradox – Achilles a želva

Obr. 34: Absolutní přírůstek

Obr. 35: Relativní přírůstek

Obr. 36: Derivace funkce

Seznam tabulek

Tabulka 2: Hodnoty funkce sinus a kosinus

Tabulka 2: Znaménka sinu a kosinu

Tabulka 3: Monotonie sinu a kosinu

Tabulka 4: Hodnoty funkce tangens a kotangens

Tabulka 5: Znaménka tangentu a kotangentu

Tabulka 6: Monotonie tangentu a kotangentu

Tabulka 7: Hodnoty funkce sekans a kosekans

Tabulka 8: Znaménka funkce sekans a kosekans

Tabulka 9: Monotonie funkce sekans a kosekans

Tabulka 10: Hodnoty funkce arkus sinus a arkus kosinus

Tabulka 11: Hodnoty funkce arkus tangens a arkus kotangens

Tabulka 12: Hodnoty funkce arkus sekans a arkus kosekans