Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úvod do strategické teorie her a řešené úlohy pro žáky středních škol

Introduction to strategic game theory and a collection of solved problems for high school students

Ondřej Hrdý

Vedoucí práce:	doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice (B7507)
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání (7504R015)

2022

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Úvod do strategické teorie her a řešené úlohy pro žáky středních škol potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Benešově 19. dubna

Zde bych rád poděkoval panu docentovi RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D. nejen za pečlivé vedení a nápomocné komentáře, které mi k psaní práce poskytoval, ale i za skvělý seminář, jenž mě k volbě tématu této práce přivedl.

ABSTRAKT

Práce se zabývá strategickou teorií her a obsahuje teoretickou a praktickou část v podobě sbírky úloh. Cílem je poskytnout základní informace týkající se této matematické disciplíny a sepsat úlohy, které mohou použít středoškolští učitelé. V návaznosti na úvod je pro lepší orientaci v problematice ve stručnosti popsána historie, základní pojmy a klasifikace této matematické disciplíny. Dále je teoretická část rozdělena na antagonistické a neantagonistické hry, v nichž je čtenář seznámen mj. i s řešením ilustračních úloh. Poté následují kooperativní hry a nakonec hry evoluční. V teoretické části se nachází řada příkladů evoluční teorie her, která má za cíl čtenáři přiblížit dané pojmy a užitečnost této disciplíny. Praktická část obsahuje úlohy rozdělené do dílčích kapitol a seřazené po jednotlivých tématech tak, jak jsou vysvětleny v teoretické části. Ke každé úloze je zvlášť napsán její cíl a její řešení. Práce může být použita jako pomocný text pro středoškolské učitele při výuce či jako materiál pro žáky střední školy.

KLÍČOVÁ SLOVA

teorie her, hra v normálním tvaru, Nashovo ekvilibrium, vězňovo dilema, evolučně stabilní strategie

ABSTRACT

This thesis deals with strategic game theory and contains both theoretical and practical part. The aim is to provide basic information about this mathematical discipline and to make a corresponding collection of problems that can be used by secondary school teachers. In the introduction, the history, basic concepts and classification of this mathematical discipline are briefly described for better orientation in the issue. Furthermore, the theoretical part is divided into matrix and bi-matrix games, in which the reader is acquainted, among other things, with the solution of illustrative problems. Then continue cooperative and evolutionary games. In the theoretical part there is a number of examples of evolutionary game theory, which is meant to explain the concepts and demonstrate the usefulness of game theory. The practical part contains problems divided into sub-chapters and arranged by individual topics as explained in the theoretical part. For each task, its goal and solution are written. The work can be used as a text for high school teachers, or as a material for high school students.

KEYWORDS

game theory, normal-form game, Nash equilibrium, Prisoner's dilemma, Evolutionary stable strategy

Obsah

Úvod

K roku 2022 získalo již 17 teoretiků her Nobelovu cenu za ekonomii, z toho 15 za posledních 30 let. Uplatnění a aktuálnost této matematické disciplíny je patrná. Jsem tedy přesvědčen, že by žáci středních škol (především potom gymnázií a středních škol s ekonomickým zaměřením) ze základních znalostí teorie her profitovali a domnívám se, že je vhodné jejími poznatky obohatit tradiční hodiny matematiky či je použít ve středoškolských seminářích. Práce si tedy klade za cíl shrnout základní pojmy a principy teorie her a poskytnout sbírku autorských úloh.

V teoretické části jsem se hodně inspiroval knihou *Teorie her a její aplikace* od M. Maňase. Podle něj jsem zvolil, které termíny do práce zařadit a v jakém pořadí je vysvětlit. Teoretická část mj. obsahuje ilustrační příklady s podrobně sepsaným řešením. Příklady je mnohdy možné řešit různými způsoby. Snažil jsem se vždy uvést ten nejjednodušší z nich. Výjimka nastala u dvou příkladů. Příklad 5 obsahuje i grafické řešení a řešení Příkladu 10 je popsáno dvěma různými způsoby.

Práci jsem se pro její didaktické účely rozhodl obohatit o evoluční teorii her, neboť právě tato disciplína obsahuje názorné příklady ze života zvířat, u kterých jsem přesvědčen, že samotnou teorii her značně oživují a učitelé je mohou zařadit do výuky. Více takových příkladů je vysvětleno v samostatné kapitole *Evoluční teorie her*. Ta nebyla součástí zadání této práce, její aplikace ale považuji za krásné a z tohoto důvodu jsem se rozhodl ji v práci zahrnout. Učitelé mohou tuto kapitolu bez újmy přeskočit.

Na teoretickou část navazuje praktická část. Ta je rozdělena do tří kapitol. První obsahuje jednoduché úlohy ověřující znalost pojmů. Druhá kapitola se zaměřuje na práci s maticovými hrami a třetí kapitola na dvojmaticové hry. Náročnost úloh ve sbírce po tématech stoupá. Některé úlohy by žáci měli zvládnout i bez znalostí textu z teoretické části, jiné vyžadují alespoň základní znalost pojmů a způsobů řešení. Úlohy lze často řešit různými způsoby, musí ale vést ke stejnému výsledku. Správnost řešení lze ověřit porovnáním s výsledkem dané úlohy.

1 Teoretická část

1.1 Úvod

Čím se tedy teorie her zabývá? Teorie her je matematická disciplína popisující rozhodovací situace, ve kterých vystupují hráči a činí rozhodnutí nejčastěji na základě svého nejlepšího úsudku. Takové situace bývají velmi složité, proto si teorie her vzala za cíl především zjednodušení těchto situací, jejich matematický popis a poskytnutí nástrojů na formulování správné strategie, která vede k maximalizaci zisku (resp. minimalizaci ztráty) jednotlivých hráčů.

Pojem „rozhodovací situace“ je velmi obsáhlý, což je jeden z důvodů, proč se teorie her uplatňuje v mnoha různých oborech. Zejména pak v ekonomice, politologii, sociologii, psychologii, biologii (evoluční teorie her), zemědělství, armádě apod.

1.1.1 Historie

Teorie her vznikla jako samostatná matematická disciplína až roku 1944, když matematik John von Neumann a ekonom Oskar Morgenstern společně publikovali knihu *Theory of Games and Economic Behavior* sloužící k nalezení řešení deskových her. [19] Tomu ale předcházel dlouhý vývoj, zpočátku inspirován především hazardními hrami. První důležitý milník nastal už v 17. století, když si spisovatel Antoine Gombaud, také známý jako rytíř de Méré, nedokázal vysvětlit, proč se mu nedaří vyhrávat peníze ve dvou hazardních hrách, jenž sám vytvořil a obrátil se s tímto nezdarem na svého přítele, známého matematika Blaise Pascala. Ten správné řešení v roce 1654 konzultoval se svým přítelem Pierrem de Fermatem ve svých dopisech a tato korespondence dala základ moderní teorii pravděpodobnosti. [19]

V roce 1713 popsal James Waldegrave ve spolupráci s N. Bernoullim a P. R. de Montemortem první známou smíšenou (pravděpodobnostní) strategii ve hře dvou hráčů zvané *Le Her* [19], která měla za úkol maximalizovat pravděpodobnost hráčova vítězství bez ohledu na to, jakou strategii zvolí oponent. Správné řešení této hry je nalezeno a popsáno až v roce 1934 statistikem R. A. Fisherem. [9]

Později, v roce 1738, přednesl Daniel Bernoulli tzv. *Petrohradský paradox*, pomocí něhož napadl hodnocení hry podle střední hodnoty finančního zisku. Roku 1838 vydal Antoine Augustin Cournot *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*.

V jedné z kapitol popisuje Cournot ve svém modelu duopolu koncept velmi blízký Nashovu ekvilibriu, které bylo pojmenováno o více než 100 let později. [9]

V roce 1930 uplatnil sir R. A. Fisher nástroje teorie her v kombinaci s biologií a teorií přirozeného výběru, když se pokoušel popsat evoluci poměru pohlaví živočišných druhů. Roku 1961 na něj navázal R. Lewontin, který jako první propojil teorii her a evoluční teorii her. Podle něj živočišné druhy hráli tzv. *hru proti přírodě* a hledali strategie na minimalizaci pravděpodobnosti vyhynutí. [25, str. 2]

Dalším průkopníkem teorie her byl francouzský matematik Émile Borel. Ten publikoval hned několik článků o pokeru [19]. V roce 1921 zavedl pojem metoda hry odpovídající dnešnímu pojmu ryzí strategie a pokusil se o první moderní matematizaci pojmu strategická hra. Tento pojem zavedl o 7 let později matematik John von Neumann, jehož nyní považujeme za zakladatele teorie her. [9]

Kromě již zmíněné publikace, jež dala teorii her své jméno, stojí za zmínku především jeho důkaz věty o minimaxu, známé také jako základní věta teorie maticových her. [16, str. 11]

Velký vliv na posun teorie her měla výzkumná instituce *RAND Corporation* (její člen byl mj. i J. von Neumann) pracující pro Letectvo Spojených států amerických. [19] Na začátku roku 1950 pro ni zrealizovali matematici Melvin Dresher a Merrill Flood experiment, který dal vznik hře dnes známé jako *Vězňovo dilema*. Experiment měl za cíl popsat reálnou situaci dvou velmocí vlastnících jaderné zbraně a předejít hrozícímu nebezpečí. [13]

V 50. a 60. letech 20. století se začala uplatňovat teorie her v kasinech[1] (např. ve hře blackjack) a dodnes ji používají někteří hráči pokeru (např. matematik Edward O. Thorp nebo Chris “Jesus” Ferguson, jeden z nejlepších pokerových hráčů pyšnící se doktorátem z počítačových věd). [19]

Vůbec nejdůležitější pojem v teorii her zvaný Nashova rovnováha, nebo také Nashovo ekvilibrium je pojmenován po matematikovi Johnu F. Nashovi. Za přínos k nekooperativní teorii her mu v roce 1994 byla společně s Reinhardem Seltenem a Johnem C. Harsanyim udělena Nobelova cena za ekonomii, v roce 2015 i Abelova cena za práci na parciálních diferenciálních rovnicích, čímž se stal jediným člověkem, který získal obě tato ocenění, a roku 2001 byl o něm natočen životopisný oscarový film *Čistá duše*. Jedním z

---

[1] Jedním z prvních byl zaměstnanec RAND Corporation Jess Marcum, který je považován za průkopníka počítání karet. [19]

dalších laureátů Nobelovy ceny je americký ekonom Thomas Schelling (autor tzv. ohniskového bodu), který ji dostal společně s Robertem J. Aumannem v roce 2005. [19]

V roce 1982 publikoval biolog John M. Smith knihu *Evolution and the Theory of Games* [25] (česky doslova Evoluce a teorie her), ve které shrnul aplikace teorie her v evoluční biologii a popsal nový koncept zvaný *evolučně stabilní strategie*. Předchůdcem tohoto konceptu je tzv. *unbeatable strategy* (česky doslova neporazitelná strategie), kterou zveřejnil už o 15 let dříve W. D. Hamilton [25, str. 23].

Z českých a slovenských publikací stojí za zmínku knihy *Teoria hier* od F. Turnovce a M. Chobota, *Teorie her a optimální rozhodování* a *Teorie her a její aplikace* od M. Maňase [16] či *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás* od Martina Chvoje [10].

1.1.2 Základní pojmy

Hra

Hrou pro nás bude libovolná konfliktní situace. Slovo „konfliktní“ nemusí nutně implikovat, že zájmy hráčů jsou protichůdné (takové konflikty bychom označili za „antagonistické“). Jedná se spíše o libovolný střet vícero hráčů, jejichž jednání ovlivňuje výsledek této situace. Na konci bakalářské práce uvádím kooperativní typ her, ve kterém hráči zpravidla spolupracují.

Hráč

Hráčem nazveme účastníka hry (někdy též nazývaného „agent“), který může svými rozhodnutími ovlivnit konečný výsledek hry. [16, str. 15] Může se jednat např. o člověka, firmu, živočicha, přírodní jev atd.

Prostor strategií

Množina, která je jednoznačně přiřazena ke každému hráči. Jinými slovy je to soubor všech povolených tahů hráče. Prostor strategií hráče i označíme S_i.

Strategie

Strategií[2] nazveme konkrétní rozhodnutí hráče volené z prostoru strategií. Zvolenou strategii hráče i budeme značit s_j^i a zapisovat do n-tice všech zvolených strategií $s = (s^1, s^2, \dots, s^n)$, kterou nazýváme *profil strategií*. [16, str. 15] Dělíme ji na ryzí a smíšenou.

Výplata

Výplatou označíme číselně vyjádřený výsledek přiřazený hráči závisející na zvolené strategii každého z hráčů. Čísla pak odpovídají jejich preferencím. Platí, že strategii vedoucí k výsledku, který hráč preferuje více, vyjadřujeme větší hodnotou a naopak. Je-li výplata daného hráče kladná, hovoříme o zisku, je-li záporná, hovoříme o ztrátě. [9]

1.1.3 Matematizace reálného světa

Hlavním uplatněním teorie her je poskytnutí nástrojů pro nalezení optimální strategie vedoucí k maximalizaci zisku či minimalizaci ztráty. Tedy postup, kterým daný hráč dosáhne nejlepšího výsledku. K tomu ale potřebujeme být schopni ohodnotit konfliktní situace a přepsat komplexní situace z reálného života do světa matematiky. Takový přepis bývá problematický zejména z toho důvodu, že vyhodnocování prospěchu je ryze subjektivní a záleží na tom, jak danou hru vnímají jednotliví hráči.

Může se kupříkladu stát, že zloději ukradnou méněcenný obraz, neboť známější obrazy bývají i přes svou vyšší cenu neprodejné na černém trhu. Cena takového obrazu může být tedy méně podstatná než šance na prodej a nebylo by tedy vhodné zahrnout do rozhodování pouze prestiž obrazů.[3]

Výše zmíněné problémy řeší i vyhledávače na internetu. Například společnost Google musí být schopna správně vyhodnotit webové stránky pro zefektivnění vyhledávání. *„Pokud na stránku odkazují jiné prominentní weby zabývající se daným tématem, je to signál, že stránka obsahuje kvalitní informace.“* [8] Google tedy každé webové stránce přiřazuje specifickou hodnotu, kde jedním z faktorů je právě počet kvalitních webů odkazujících na tuto stránku, a při uživatelském vyhledávání seřazuje webové stránky v závislosti na této hodnotě.

---

[2] Pojem strategie budu používat i v tradičním významu jako hráčův plán. Prvek množiny S_i později bude definován jako *ryzí strategie*.

[3] Velmi překvapivé bylo zjištění, že zloději neukradli obraz *Únos Europy* malíře Tiziana, který byl popsán jako jeden z nejlepších v Americe. Přeloženo z [3].

My budeme postupovat podobným způsobem. Abychom je nemuseli rozepisovat ve stylu *„Adam si cení výletu do Chorvatska více než výletu na Moravu, ale méně než zážitkového pobytu v Karibiku,“* budeme pracovat s výplatami hráčů, což nám usnadní práci s různorodostí preferencí a přiblíží reálný svět matematice.

Pro zjednodušení rozhodování, kam letět na dovolenou, by si Adam mohl sestavit žebříček preferencí, ve kterém by podle svého uvážení seřadil jednotlivé destinace a každé z nich přiřadil číslo vyjadřující jeho touhu tuto zemi navštívit. Řekněme, že výlet do Chorvatska ohodnotil číslem 2, výlet na Moravu 1 a zážitkový pobyt v Karibiku 3.

Všimněme si, že u každé destinace uvedl kladné číslo. Jedná se tedy o země, kam by se rád podíval. Zároveň je vidět, že do Karibiku by se podíval raději než do Chorvatska. Nulou můžeme zcela intuitivně v tomto případě popsat stav, kdy se Adam rozhodne neletět vůbec nikam a zápornými čísly můžeme ohodnotit to, kam se Adamovi v tomto rozhodování *kde strávit dovolenou* nechce. Pro lepší představu můžeme sestavit následující tabulku.

Destinace	Výplata
Rusko	-2
žádná	0
Morava	1
Chorvatsko	2
Karibik	3

Tabulka 1 – Adamovy preference

Tato čísla přiřazená k destinacím můžeme považovat za Adamovy výplaty. Tento pojem je obecně užíván v literatuře teorie her. Může být ale v některých situacích zavádějící. Budu tedy často v souvislosti s výplatami používat pojem „užitek“. (Další důvod pro toto rozhodnutí uvádím v kapitole o střední hodnotě finančního zisku.) Nyní by se nám hodilo vytvořit způsob, který by automaticky Adamovi přiřadil danou výplatu na základě zvolené destinace. S tím nám pomůže následující pojem.

Výplatní funkce

Výplatní funkcí nazveme funkci, která přiřazuje danému hráči výplatu na základě zvolených strategiích všech hráčů. Výplatní funkci hráče i budeme značit $u_i(s)$, kde s je profil strategií.

Liší se v závislosti na zvolených strategiích všech hráčů. Jsou to tedy funkce definovány na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ [16, str. 16]

Důležité je poznamenat, že různí hráči mohou za stejnou strategii získat jinou výplatu, neboť užitek je zcela subjektivní.[4] I kdyby za stejnou práci byli všichni ohodnoceni stejným způsobem, každý si takové částky bude cenit jinak. Pro člověka bez peněz často mívají peníze větší hodnotu.

1.1.4 Principy v BP

V celé práci budeme pracovat s určitými principy, které, pokud nebude uvedeno jinak, ve hrách předpokládáme. Kromě konečnosti her, hráčů a prostoru strategií budeme předpokládat, že jsou hráči (vyjma náhodných mechanismů) racionální. V našem prostředí racionalita znamená konzistentnost a snaha o maximalizaci užitku nezávisle na velikosti užitku ostatních hráčů. Znamená to také, že se takový hráč rozhodne pro spolupráci, hraje-li hru více hráčů a je možné a pro něj výhodné spolupracovat. Jinými slovy neuvažujeme například takový typ hráče, kterého bychom označili za pomstychtivého, tedy hráče, který by upřednostnil újmu či ztrátu jiného z hráčů před svým ziskem.

V úlohách také předpokládáme, že každý hráč ví, že se ostatní hráči budou rozhodovat racionálně, že každý hráč ví, že ostatní hráči vědí, že se každý hráč bude rozhodovat racionálně atd. Říkáme, že racionalita je obecnou znalostí. Dále budeme předpokládat, že všichni hráči mají úplné informace. Znají tedy počet hráčů, jejich možné strategie a výplaty.

Racionalita hráčů

- Racionální hráč – Hráč konající strategické rozhodnutí s úmyslem maximalizovat svůj zisk.
- P-racionální hráč – Rozhoduje se racionálně s pravděpodobností $p \in (0,1)$.
- Náhodný mechanismus – Typ hráče, který neprosazuje své zájmy (např. příroda).

Hra proti přírodě

V závislosti na racionalitě hráčů potom rozlišujeme speciální případy her, kterým říkáme *hry proti přírodě*. Ta si není vědoma hráčova rozhodnutí a je k němu lhostejná, můžeme ji tedy považovat za iracionálního hráče. Takto nazýváme hru 1 racionálního hráče a 1

---

[4] Jedná se o tzv. *asymetrické hry*.

iracionálního hráče. Např. člověk rozhodující se, zda večer zatopí v kamnech či nikoli na základě venkovní teploty. Pokud zná racionální hráč prostor strategií iracionálního hráče, pak hru nazýváme rozhodování při riziku. Pokud jeho prostor strategií nezná, říkáme, že se jedná o rozhodování při nejistotě. [10, str. 19]

1.1.5 Klasifikace teorie her

I přes svou novotu je teorie her obsáhlá matematická disciplína a jednotlivé hry se často rozdělují do různých skupin. Pro snazší orientaci v problematice zde uvedu jednu z možných klasifikací a stručné vysvětlení základních odlišností. Nejedná se o úplné a ani jediné rozdělení. Následující klasifikace vychází z literatur [10] a [16].

- **Počet hráčů**
    - Hra dvou hráčů
    - Hra více[5] hráčů
- **Rozdílnost rolí hráčů**
    - Symetrická hra – Hráči mají stejné role a vybírají tedy strategii (např. bojuj/uteč) ze stejného prostoru strategií. Při výměně zvolené strategie s jiným hráčem dochází k prohození výplaty.
    - Asymetrická hra – Hráči mají rozdílné role (např. muž/žena nebo vlastník/vetřelec) a vědí, kterou z rolí hrají. [25, str. 94]
- **Součet výplat hráčů**
    - Hra s nulovým součtem – Součet výplat všech hráčů je roven nule (např. šachy).
    - Hra s nenulovým součtem – Součet výplat všech hráčů není roven nule (např. Věžňovo dilema).
- **Dostupnost informace**
    - Hra s úplnými informacemi – Mezi takové hry řadíme například hru šachy a go. Obecně se jedná o hry, ve kterých má každý hráč k dispozici úplné a stejné informace a mohou tedy znát všechny možné průběhy hry.
    - Hra s neúplnými informacemi – Sem bychom mohli zařadit hru poker, neboť v ní hráči neznají karty ostatních hráčů.

---

[5] Slovo „více“ zde označuje počet větší než 2.

- **Návaznost**
    - Sekvenční hra – Hra, ve které se hráči střídají po tazích. Hráči tedy znají nějakou informaci o předchozím tahu ostatních hráčů a své rozhodnutí pak volí v závislosti na této informaci (např. hra go).
    - Simultánní hra – Hra, ve které se všichni hráči rozhodují v jeden okamžik, nebo neznají výsledek předchozích tahů ostatních hráčů.
- **Možnost spolupráce**
    - Kooperativní hra – Hráči mají možnost spolupracovat a uzavírat vynutitelné dohody.
    - Nekooperativní hra – Hráči nemají tyto možnosti.

Náplní této práce jsou pouze tzv. *strategické hry*. Způsobů, kterými lze popsat takové hry, existuje několik. Dle wikipedie jsou strategické hry obecně definovány jako rozhodování množiny hráčů, kteří mají každý vlastní množinu strategií a ohodnocení. [29] Jelikož se ve strategických hrách rozhodují hráči ve stejný okamžik, či o volbě ostatních hráčů nemají žádné informace, je vhodné použít zápis těchto her v tzv. *normálním tvaru* občas také nazývaném *strategický tvar*. Opakem strategické teorie her je kombinatorická teorie her.

Možností, jakým způsobem postupovat při popisu strategické teorie her je ovšem spousta. Já jsem se rozhodl začít stejně jako Maňas v [16] nekooperativními hrami, neboť možnost spolupráce hry paradoxně komplikuje, a to nejprve antagonistickými hrami 2 hráčů, jelikož jejich maticový zápis a řešení považuji za nejjednodušší na pochopení. Poté jsem přirozeně zvolil jejich doplněk – neantagonistické hry popsané dvomaticemi, ve kterých objasňuji nejzásadnější pojem – Nashova rovnováha (také zvaná Nashovo ekvilibrium či rovnovážný bod) a jednu z nejznámějších her – Vězňovo dilema. Neantagonistické hry 2 hráčů jsou poté v krátkosti rozšířeny o kooperativní hry. Pro jednoduchost se budeme zabývat především hrami dvou hráčů, tedy $n = 2$. Hry více hráčů jsou modelovány a řešeny podobným způsobem, nebo z něj přímo vycházejí.

1.2 Antagonistické hry (dvou hráčů)

„Antagonistickou hrou budeme rozumět rozhodovací situaci, v níž vystupují dva racionální hráči, kteří se po volbě svých strategií rozdělí o pevnou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaké strategie zvolili.“ [16, str. 28] Jinými slovy se jedná o hry v normálním tvaru s konstantním součtem.

Hráčů uvažujeme vždy konečný počet a hraje vždy alespoň jeden hráč. Můžeme je tedy jednoznačně očíslovat přirozenými čísly 1,2 ... n. Množinu *n* hráčů označíme

$$H = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Poskládáním množiny hráčů, jejich prostorů strategií $S_1, S_2, \dots, S_n$ a výplatních funkcí $u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)$ vznikne hra v normálním tvaru.

Definice 1 (hra v normálním tvaru) [10, str. 17]: Říkáme, že hra n hráčů[6] v *normálním tvaru* je $(2n + 1)$-tice

$$[H; S_1, S_2, \dots, S_n; u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)],$$

kde s je profil strategií.

Definice 2 (hra s konstantním součtem) [16, str. 24]: Hru v normálním tvaru označíme *hra s konstantním součtem*, pokud existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$u_1(a, b) + u_2(a, b) = c$$

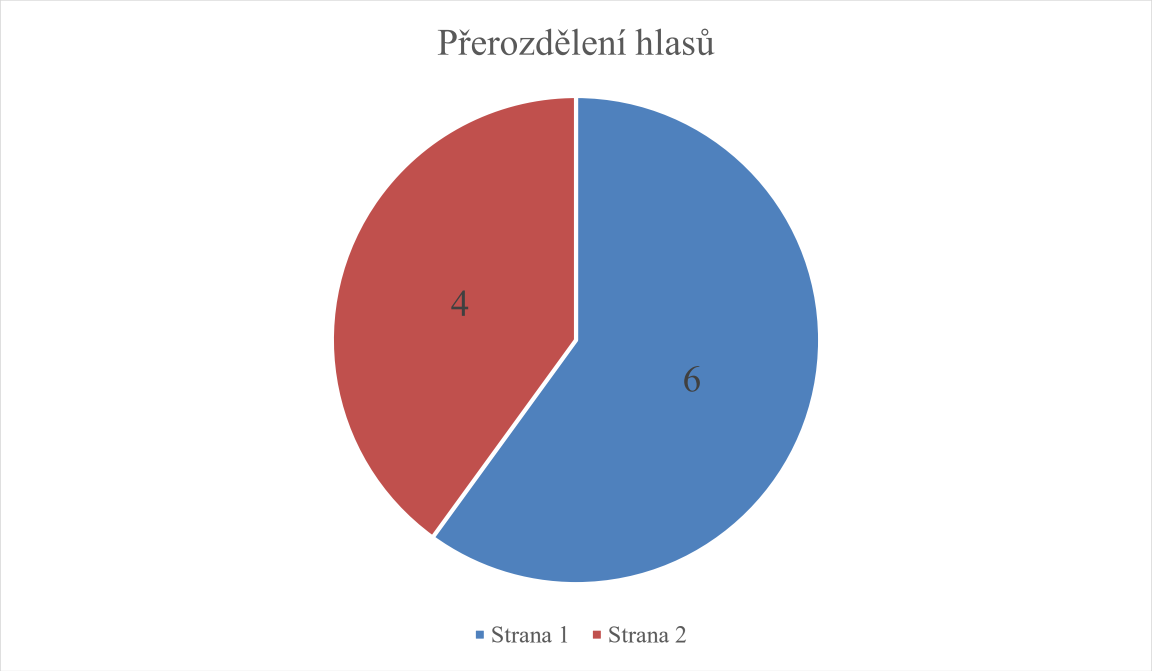
pro každé $(a, b) \in S_1 \times S_2$.

Hra Volby

Příkladem antagonistické hry mohou být politické volby. Představme si hru 2 hráčů (politických stran), kterým jsou přiřazeny hlasy deseti voličů na základě předvolební kampaně, jenž může být vnímána jako jejich zvolená strategie. Strany si rozdělují konkrétní počet mandátů odpovídající počtu voličů a strana s většinou hlasů potom rozhoduje o zákonech. Jedná se tedy o hru s konstantním součtem. V našem případě je součet roven 10. Jestliže jedna politická strana (modrá) dostane 6 hlasů, pak druhá politická strana (červená) získává zbylé 4 hlasy. Přerozdělení jednotlivých hlasů můžeme vyjádřit kruhovým diagramem, z něhož lze jednoduše vypozorovat, že jakmile jeden hráč obdrží víc, druhý o to přijde. Jinými slovy, čím větší je červená část grafu, tím menší je modrá část a naopak.

---

[6] Pro hry dvou hráčů platí $n = 2$.



Graf 1 – hra Volby

Je patrné, že nezáleží na celkovém počtu voličů, ale pouze na poměru počtu hlasů. Stejně rozdělený diagram bychom dostali pro 5 voličů, kteří by rozdělili hlasy v poměru $3:2$, neboť $6:4 = 3:2$.

1.2.1 Hra s nulovým součtem

Hry s nulovým součtem jsou speciálním případem her s konstantním součtem pro $c = 0$.

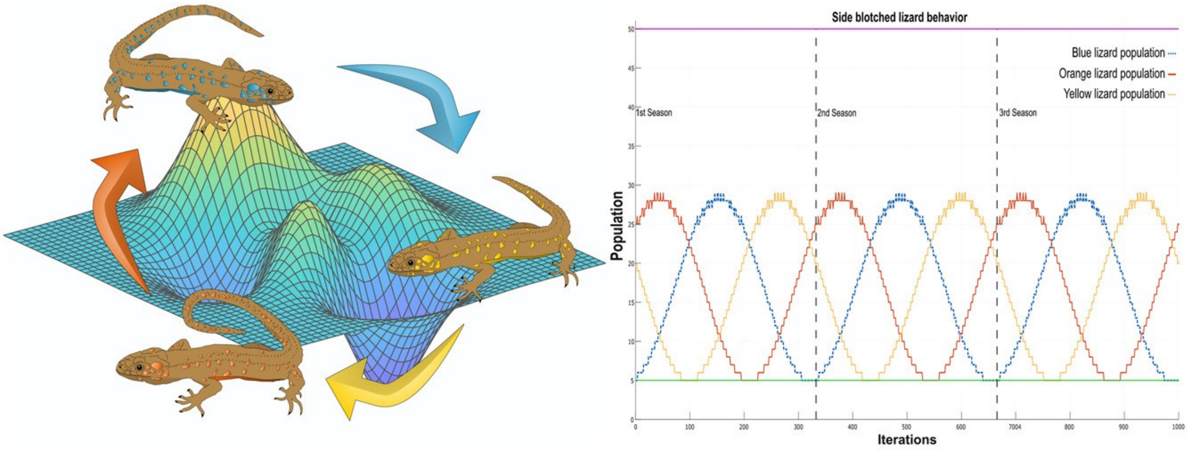
Definice 3 (hra s nulovým součtem): Hru v normálním tvaru označíme *hra s nulovým součtem*, pokud

$$u_1(a,b) + u_2(a,b) = 0$$

pro každé $(a,b) \in S_1 \times S_2$.

Šikovnost tohoto zápisu spočívá především v tom, že v případě hry 2 hráčů stačí zapisovat výplaty pouze jednoho z hráčů (BÚNO hráče 1), neboť odpovídající výplaty druhého hráče budou mít akorát opačná znaménka. Pokud *hráč 1* zvolí strategii a a *hráč 2* strategii b, pak $u_1(a,b) = -u_2(a,b)$.

Pro všechny hry s nulovým součtem tedy obecně platí, že to, co vyhraje jeden hráč, prohrává druhý z hráčů a naopak. Příkladem takového typu her je známá hra *Kámen, nůžky, papír.* Nemusí se ovšem jednat pouze o uměle vytvořené hry s pravidly vymyšlenými člověkem. *„Existuje druh středoamerického leguána se třemi různobarevnými variantami, jejichž* *reprodukční strategie mezi sebou hrají hru podobnou hře Kámen, nůžky, papír. Podivuhodné je, že se poměr jejich populací mění v podobném cyklu, takže je vždy jedna z variant na pokraji vyhynutí.“* [2, str. 40] Každá ze tří variant je reprezentována strategií, z nichž oranžová agresivní varianta poráží méně agresivní modré leguány, ale prohrává proti lstivé žluté variantě, ta naopak prohrává proti modré a princip je tedy shodný se známou hrou *Kámen, nůžky, papír.*



Obrázek 1 – střídání preferenčních barev leguánů [15]

Vraťme se na chvíli zpátky ke hře *Volby.* Jelikož politické strany v této hře o hlasy voličů soupeří a platí, že čím víc hlasů dostane jedna strana, tím méně hlasů dostane strana druhá, mohli bychom situaci následujícím způsobem popsat jako hru s nulovým součtem. Obě strany chtějí dostat většinu hlasů, tedy víc než polovinu. Modrá strana získala o 1 hlas více, než potřebovala, oranžové straně naopak 1 hlas chybí. Tento přepis můžeme aplikovat na všechny hry s konstantním součtem. Říkáme, že se dají přepsat na hru s nulovým součtem.

Přepis hry s konstantním součtem na hru s nulovým součtem

Víme, že platí:

$$u_1(a,b) + u_2(a,b) = c.$$

Na obou stranách rovnice odečteme konstantu c a rozdělíme ji na poloviny:

$$u_1(a,b) - \frac{c}{2} + u_2(a,b) - \frac{c}{2} = 0.$$

Zvolíme substituce: $u_1(a,b) - \frac{c}{2} = v_1(a,b)$, $u_2(a,b) - \frac{c}{2} = v_2(a,b)$.

Dostáváme:

$$v_1(a,b) + v_2(a,b) = 0.$$

Později je uvedena Věta 1, která říká, že tento přepis nemá vliv na řešení hry.

Hra *Penalta*

Uvažujme následující hru:

„Fotbalový hráč kope pokutový kop (alias penalta) a rozhoduje se, zda střelí míč vlevo či vpravo (pro jednoduchost vypustíme ostatní možnosti a budeme předpokládat, že výsledek pokutového kopu je závislý pouze na zvolené strategii hráčů). Brankář vybírá ze stejného prostoru strategií jako fotbalista. Může skočit buď vlevo či vpravo. Obojí z pohledu fotbalisty.“

Jedná se o jeden z možných modelů známé hry *Panna-orel*, kterou jsme si uváděli v kapitole diskoordinační hry. Nejčastěji bývá popisována tak, že jeden z hráčů chce trefit stejnou stranu mince jako druhý hráč (brankář), ten chce naopak zvolit opačnou strategii (fotbalista). Mohou nastat čtyři situace:

1. fotbalista střelí míč vlevo a brankář skočí vlevo,
2. fotbalista střelí míč vlevo a brankář skočí vpravo,
3. fotbalista střelí míč vpravo a brankář skočí vlevo,
4. fotbalista střelí míč vpravo a brankář skočí vpravo.

Z první a čtvrté situace profituje brankář, neboť správně odhadl strategii fotbalisty, ten se zvolenou strategií naopak spokojen není. Ze druhé a třetí pro změnu profituje fotbalista a brankář by rád svou strategii změnil. Tabulka 2 popisuje spokojenost s výsledkem z pohledu kopajícího fotbalisty. Zelené plusy odpovídají výsledkům, které fotbalista preferuje, červené minusy naopak. Brankář by měl hodnoty přesně opačné.

Hráč		**Brankář**	
	Strategie	vlevo	vpravo
Fotbalista	vlevo	−	+
	vpravo	+	−

Tabulka 2 – hra Penalta

1.2.2 Strategie

Definice 4 (ryzí strategie): *Ryzí strategií* hráče i nazýváme každou jeho strategii s_j^i (i jako hráč a j jako j-tý prvek množiny S_i). Jedná se tedy o každý prvek prostoru strategií S_i.

Např. ve hře *Penalta* mají hráči na výběr dvě ryzí strategie: *vlevo* a *vpravo*. Strategie s_j^1 a s_k^2, které hráči zvolí ze svého prostoru strategií, zapisujeme jako prvky profilu strategií $s = (s_j^1, s_k^2)$. Pokud se tedy ve hře *Penalta* rozhodne fotbalista střelit míč vlevo a brankář skočit vpravo, pak bychom řekli, že profil strategií s této hry je roven *(vlevo, vpravo)*. Je zřejmé, že v této hře není moudré volit vždy stejnou ryzí strategii, neboť by se druhému hráči vyplatilo svou strategii přizpůsobit a pokaždé vyhrát. Je tedy potřeba strategie střídat. Z tohoto důvodu se zavádí následující pojem.

Definice 4 (smíšená strategie) [9]: Předpokládejme, že hráč i má na výběr n ryzích strategií $s_1^i, s_2^i, \dots, s_n^i$. *Smíšená strategie* (občas také pravděpodobnostní) hráče i je vektor p^i, pro který platí, že jeho j-tá složka určuje pravděpodobnost, se kterou hráč i volí j-tou ryzí strategii ze svého prostoru strategií $S_i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_n^i)$. Platí tedy

$$p^i = \left(p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i\right),$$

kde $p_j^i \in \langle 0,1 \rangle$ pro všechna $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1.$$

Každá ryzí strategie je tedy speciální případ smíšené strategie, ve které je jedna složka rovna 1 a všechny ostatní jsou rovny 0. Pokud by se například ve hře *Penalta* kopající fotbalista rozhodl pokaždé střelit míč vlevo, zapsali bychom jeho smíšenou strategii $p^{fotbalista} = (1,0)$. Jak už je uvedeno v předchozí kapitole, je zřejmé, že tato strategie není vhodná, neboť brankář by pak volil strategii *vlevo* a pokaždé míč chytil. Fotbalistovi bychom tedy doporučili ryzí strategie střídat – a to ideálně v poměru $1:1$[7] – aby brankář nemohl jeho strategii prokouknout a přizpůsobit své rozhodnutí. Formálně $p^{fotbalista} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pokud by se fotbalista rozhodl pro tuto smíšenou strategii, mohli bychom předpokládat, že ze 100 penalt střelí přibližně 50 vlevo a 50 vpravo. Své rozhodnutí, zda střelí míč vlevo či vpravo, může fotbalista učinit například hodem mincí, jinak je šance že protihráč odhalí jeho taktiku. Je totiž podstatné, aby v každém dalším pokutovém kopu fotbalista volil každou ze strategií s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ nehledě na to, na jakou stranu střelil míč posledně či kdykoli

---

[7] Proč $1:1$ je vysvětleno v kapitole rovnovážná strategie.

předtím. Jakákoli snaha o dorovnávání pravděpodobností může vést k výhodě soupeře. Smíšená strategie $p^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i)$ tedy znamená, že hráč i hraje v každé nové hře (kole) ryzí strategie $s_1^i, s_2^i, \dots, s_n^i$ s pravděpodobnostmi $p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i$, nehledě na to, jakou ryzí strategii zvolil ve hře předchozí.

Je zřejmé, že různé strategie hráčů mohou vést k různým výplatám, jinak by nemělo smysl strategie zkoumat. V případě ryzích strategií je řešení hry jasné, jedná se o funkční hodnotu výplatní funkce, ke které ryzí strategie směřují. Jak už jsme si ale ukázali ve hře *Penalta*, ne vždy budeme moct pracovat s ryzími strategiemi. Hodilo by se nám tedy nalézt způsob, kterým bychom i smíšené strategie vedoucí k různým výplatám mohli ohodnotit a následně doporučit hráčům rozhodnout se pro tu, která tuto hodnotu maximalizuje.

Střední hodnota zisku

Představme si následující situaci, ve které náhodný člověk volí mezi třemi alternativami a rozhoduje se, která z nich je nejvýhodnější:

1. Obdrží 500 tis. Kč.
2. Se stejnou pravděpodobností obdrží buďto 900 tis. Kč, nebo 0 Kč.
3. S pravděpodobností 2/5 obdrží 300 tis. Kč, s pravděpodobností 3/5 obdrží 600 tis. Kč.

O žádné variantě nemůžeme s jistotou prohlásit, že je nejlepší, neboť někdy lidé upřednostňují velký obnos s malou pravděpodobností před malým obnosem s velkou pravděpodobností, jindy zase naopak. Zároveň může záležet i na tom, zda se jedná o jednorázovou či opakovanou nabídku. Jeden ze způsobů, jakým lze rozhodnout, kterou alternativu zvolit, je spočítat střední hodnotu finančního zisku každé z nich. Tím získáme 3 částky a ty už můžeme porovnat. V takovéto hře bychom tedy zvolili 1. možnost a obdrželi jistých 500 tis. Kč, neboť střední hodnota této varianty je největší.

Petrohradský paradox

Střední hodnota finančního zisku není bohužel všespásná. Kritikou jejího používání je tzv. *„Petrohradský paradox“*. Představme si hru, ve které se hází mincí. Hra končí hned jakmile padne hlava a v závislosti na pořadí hodu, kdy hlava padne, je hráči udělena odměna následujícím způsobem. Padne-li hlava hned v prvním hodu, hráč obdrží 1 dukát, pokud padne ve druhém, hráč obdrží dvojnásobek, tedy 2 dukáty, padne-li v n-tém hodu, hráč obdrží 2^{n-1} dukátů.

Otázkou je, kolik dukátů by měl hráč zaplatit za možnost takovou hru hrát. Je rozumné, aby hráč zaplatil minimálně hodnotu průměrné výhry, ale pokud bychom vycházeli z logiky střední hodnoty finančního zisku, tak by průměrná výhra činila nekonečno dukátů.

Jeden z důvodů, proč nás tento paradox ale nemusí trápit, je, že se budeme zabývat pouze konečnými hrami, a to zejména z toho důvodu, že lidé jsou smrtelní. Dalším důvodem je fakt, že pro nás je odlišnost subjektivního vnímání financí zahrnuta v samotných výplatách. Střední hodnotu finančního zisku tedy nahrazujeme střední hodnotou užitku.

Definice 5 (Střední hodnota) [17]: *Střední hodnotou* (užitku) hráče 1 pro dvojici smíšených strategií $p^1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1)$ a $p^2 = (p_1^2, p_2^2, \dots, p_m^2)$ označíme vážený průměr

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_1(s_j^1, s_k^2) \cdot \ p_j^1 \cdot p_k^2.$$

Příklad 1: Uvažujme speciální verzi hry *Penalta*, ve které fotbalista získá jeden milion korun, pokud penaltu promění, a naopak milion ztratí, pokud se mu nepodaří střelit gól. O brankáři víme, že preferuje skok vlevo dvakrát více než vpravo a jeho smíšená strategie p^2 je tedy rovna $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Fotbalista naopak dvakrát radši střílí vpravo a jeho smíšená strategie p^1 je $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Vypočítej střední hodnotu užitku obou hráčů.

Řešení: Dosazením do vzorce pro střední hodnotu získáváme

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} u_1(s_j^1, s_k^2) \cdot \ p_j^1 \cdot p_k^2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Střední hodnota užitku je $\frac{1}{3}$ a fotbalista získá v průměru třetinu jednoho milionu korun za každou penaltu. Z příkladu je zřejmé, že tento profil strategií více prospívá fotbalistovi a brankář by tedy rád svou strategii změnil. Obě ryzí strategie jsou ale důležité, určitě by ani jeden z hráčů nechtěl přijít o možnost střílet (resp. skákat) vlevo či vpravo. V některých hrách ovšem budeme moct s jistotou prohlásit, že jedna z ryzích strategií je vždy lepší či horší než jiná ryzí strategie.

Představme si následující situaci. V nejmenované televizní reality show máte za úkol vybrat jednu ze 3 možností:

1. Otevřít tajemnou krabici, ve které se nachází buď 5 000 Kč, nebo nic.
2. Otevřít tutéž tajemnou krabici a jako bonus získat 1 000 Kč.
3. Okamžitý zisk 10 000 Kč.

Jestliže chcete maximalizovat svůj finanční zisk, zvolíte 3. možnost, neboť odpovídá největšímu finančnímu obnosu nehledě na to, jestli skutečně je v tajemné krabici 5 000 Kč, či nikoli. Z tohoto důvodu nedává smysl rozhodovat se pro první 2 možnosti. Pokud bychom tuto situaci popsali jako rozhodování při riziku, ve kterém má racionální hráč na výběr 3 ryzí strategie, potom je rozumné první 2 eliminovat. O těchto 2 ryzích strategiích prohlásíme, že jsou dominované 3. strategií odpovídající okamžitému zisku 10 000 Kč.

Definice 6 (slabě dominovaná a slabě dominantní strategie): Ryzí strategii s_j^1 hráče 1 nazveme *slabě dominovanou strategií* a budeme říkat, že je slabě dominována ryzí strategií s_k^1, pokud platí:

$$u_1(s_j^1, s_a^2) \leq u_2(s_k^1, s_a^2)$$

pro každé $s_a^2 \in S_2$ volené hráčem 2, s_k^1 je potom *slabě dominantní strategie.*

Dle [2, str. 57] je *"jedna strategie je slabě dominována druhou tehdy, jestliže nikdy nevede k lepšímu výsledku než dominantní strategie bez ohledu na to, jaké strategie použiji ostatní hráči"*. Někteří autoři (např. [19]) ještě přidávají podmínku, že slabě dominantní strategie musí alespoň v jednom případě vést k lepšímu výsledku než slabě dominovaná strategie. Tedy pro alespoň jedno $s_a^2 \in S_2$ platí:

$$u_1(s_j^1, s_a^2) < u_2(s_k^1, s_a^2).$$

Definice 7 (silně dominovaná a silně dominantní strategie) [24]: Ryzí strategii s_j^1 hráče 1 nazveme *silně dominovanou strategií* a budeme říkat, že je silně dominována ryzí strategií s_k^1, pokud platí:

$$u_1(s_j^1, s_a^2) < u_2(s_k^1, s_a^2)$$

pro každé $s_a^2 \in S_2$ volené hráčem 2, s_k^1 je potom *silně dominantní strategie.*

Eliminace silně dominované strategie

Silně dominantní strategie je tzv. výnosově dominantní, neboť vždy vede k větší výplatě, než dominovaná strategie nehledě na strategii protihráče a racionální hráč by se tedy nikdy nerozhodl pro strategii, která je silně dominována jinou. Z tohoto důvodu ji můžeme eliminovat a uvažovat hru, která tuto silně dominovanou strategii neobsahuje. U slabě dominovaných strategiích je to složitější, neboť by tento proces mohl vést ke ztrátě řešení (viz [23, str. 6-7]).

Může se stát, že po eliminaci jedné dominované strategie vzniknou další. Proces eliminace tedy vypadá tak, že nejdříve eliminujeme jednu silně dominovanou strategii s_k^1 z prostoru strategií

$$S_1 = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_m^1),$$

získáme nový prostor strategií

$$S_1 = (s_1^1, \dots, s_{k-1}^1, s_{k+1}^1, \dots, s_{m-1}^1)$$

bez strategie s_k^1 a proces opakujeme, dokud nezbydou pouze nedominované strategie. Viz následující hra.

Hra *Na odhad*

Dva hráči mají za úkol nezávisle na sobě napsat na papírek jedno číslo od 0 do 100. Jejich cílem je zvolit polovinu průměru těchto dvou čísel. Pokud se rozhodnou pro stejné číslo, vyhrává každý polovinu. Pokud tedy jeden zvolí například číslo 60 a druhý se rozhodne pro 40, vyhrává druhý hráč, neboť průměr vychází 50 a polovina tohoto průměru je blíž k číslu 40 než k číslu 60.

Pro zjednodušení použijeme k řešení funkci, jejíž vstupní hodnoty jsou obě čísla (x, y) zvolena hráči a výstupem je polovina průměru těchto dvou čísel.

$$f(x, y) = \frac{x + y}{2} : 2 = \frac{x + y}{4}$$

Funkce f je rostoucí a jelikož jsme omezeni na interval $x, y \in \langle 0,100 \rangle$, můžeme prohlásit, že tato funkce nabývá minima v hodnotě $f(0,0) = \frac{0+0}{4} = 0$ a maxima v hodnotě $f(100,100) = \frac{100+100}{4} = 50$. Z tohoto důvodu nedává smysl volit jakékoli číslo větší než 50, čísla z intervalu $(50,100\rangle$ jsou tedy silně dominována čísly $\langle 0,50 \rangle$ a můžeme je vyřadit z prostoru strategií obou hráčů. Pokud předpokládáme, že oba hráči jsou racionální a racionalita je obecná znalost, pak hráči ze stejného důvodu nebudou volit ani čísla z intervalu $(25,50\rangle$ a omezí se na interval $\langle 0,25 \rangle$, neboť čísla větší než 25 jsou silně dominována. Tímto způsobem postupně eliminujeme všechna čísla větší než 0 a v prostoru strategií obou hráčů zbyde pouze jedna strategie. Jelikož hráči nemají jinou možnost, než napsat na papírek číslo 0, budeme ho považovat za řešení této hry.

Tímto procesem se můžeme dostat k řešení, pokud zbyde právě jedna dvojce strategií jako ve hře *Na odhad*, případně nalézáme řešení ze zredukovaného prostoru strategií, neboť u každého racionálního hráče předpokládáme snahu o maximalizaci zisku. Ovšem pozor, pokud množina všech strategií není konečná, může se stát, že žádná strategie po tomto procesu eliminace silně dominovaných strategiích nezbyde. Např. ve hře *Vysoká čísla* [12, str. 3], kde je cílem vybrat co největší přirozené číslo, vede tento proces k eliminaci všech strategií (důkaz se opírá o Peanovy axiomy přirozených čísel – každé přirozené číslo má následovníka a je tedy silně dominováno). Ne vždy vede tento proces k řešení, např. ve hře *Penalta* není ani jedna z ryzích strategií dominantní a je tedy potřeba zavést následující pojem.

Definice 8 (rovnovážná strategie) [16, str. 30]: *Rovnovážnou strategií* (někdy také optimální) $\bar{s}^i$ hráče i volenou z prostoru strategií S_i nazveme strategii, která hráči i přiřazuje maximální možnou výhru nehledě na volbu strategie ostatních hráčů. Dvojici strategií $\bar{s}^1 \in S_1$ a $\bar{s}^2 \in S_2$ nazveme rovnovážnou dvojicí, pokud platí

$$u_1(s^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$$
$$u_2(\bar{s}^1, s^2) \leq u_2(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$$

současně pro všechna $s^1 \in S_1$ a $s^2 \in S_2$.

Pro rovnovážnou strategii platí, že zvolením jiné strategie hráč nemůže nic získat, ale naopak ztratit. Nutno poznamenat, že může být jak ryzí, tak smíšená rovnovážná strategie. Například ve hře *Na odhad* je rovnovážnou strategií ryzí strategie zvolit číslo 0 a ve hře *Penalta* je rovnovážnou strategií smíšená strategie $p^i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \bar{s}^i$, neboť zvolením jiné strategie nemohou hráči nic získat, pouze ztratit.[8]

Věta 1 [16, str. 31]: Každou hru s konstantním součtem lze přepsat na hru s nulovým součtem a každá dvojice strategií která tvoří rovnovážné strategie ve hře původní, tvoří rovnovážné strategie v odpovídající hře s nulovým součtem a obráceně.

---

[8] Předpokládáme, že fotbalista nemá žádné preference a není například lepší ve střílení na levou stranu, podrobnou studii o penaltových kopech popsal Ignacio Palacios-Huerta v článku *Professionals Play Minimax* [18], ve kterém zohlednil lateralitu fotbalistů a výpočtem došel k rovnovážnému řešení, které poté srovnal s 1417 penaltami a dospěl k závěru, že nástroje a výpočty teorie her odpovídají realitě.

Lemma 1: Pro každou hru s nulovým součtem

$$u_1(s^1, s^2) + u_2(s^1, s^2) = 0$$

platí, že lze podmínky pro rovnovážné strategie přepsat do tvaru

$$u_1(s^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, s^2).$$

Důkaz [16, str. 32]: Chceme dokázat, že všechny rovnovážné strategie ve hře s konstantním součtem budou rovnovážnými strategiemi v adekvátní hře s nulovým součtem a naopak. Důkaz vychází z definic hry s konst. součtem, hry s nul. součtem, rovnovážné strategie a Lemma 1.

Pro rovnovážné strategie $\bar{s}^1, \bar{s}^2$ hry s konstantním součtem

$$u_1(s^1, s^2) + u_2(s^1, s^2) = c$$

vyplývají z definice rovnovážných strategií následující nerovnosti pro hráče 1 a 2:

1. $u_1(s^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$
2. $u_2(\bar{s}^1, s^2) \leq u_2(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$.

Z 1. nerovnosti dostaneme nerovnost č. 3

3. $u_1(s^1, \bar{s}^2) - u_2(s^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) - u_2(s^1, \bar{s}^2)$.

Protože

$$c - u_1(s^1, \bar{s}^2) = u_2(s^1, \bar{s}^2) \geq u_2(\bar{s}^1, \bar{s}^2) = c - u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2),$$

dostáváme z 3. nerovnosti nerovnost

4. $u_1(s^1, \bar{s}^2) - u_2(s^1, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) - u_2(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$,

což je levá nerovnost z dvojice nerovností v Lemma 1 pro $u(s^1, s^2) = u_1(s^1, s^2) - u_2(s^1, s^2)$. Pravou nerovnost dostaneme zcela obdobně. Nechť obráceně $\bar{s}^1, \bar{s}^2$ jsou rovnovážné strategie ve hře s nulovým součtem. Potom pro ně platí obě nerovnosti z Lemma 1, a tedy i 4. nerovnost, která je levou nerovností z Lemma 1 pro $u(s^1, s^2) = u_1(s^1, s^2) - u_2(s^1, s^2)$. 4. nerovnost můžeme přepsat jako

$$u_1(s^1, \bar{s}^2) - \left(c - u_1(s^1, \bar{s}^2)\right) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) - \left(c - u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)\right).$$

Odtud již snadno dostaneme 1. nerovnost pro definici rovnovážné strategie. 2. nerovnost odvodíme zcela obdobně. Tím je věta dokázána.

1.2.3 Výplatní matice

Antagonistické hry 2 hráčů s nulovým součtem se zpravidla zapisují ve formě tzv. výplatní matice. Ryzí strategie hráčů můžeme očíslovat přirozenými čísly, neboť uvažujeme pouze hry s konečným počtem strategií. Hráč 1 tedy volí z prostoru strategií $S_1 = \{s_1^1, s_2^1, \dots, s_m^1\}$, hráč 2 z $S_2 = \{s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2\}$. Výplatní funkce $u_i(s)$ hráče i, kde s je profil strategií, nabývá konečně mnoha hodnot, konkrétně $m \times n$. Můžeme ji tedy zapsat ve formě tabulky zvané výplatní matice o velikosti $m \times n$, ve které čísla řádků $(1,2, \dots, m)$ odpovídají indexům strategií hráče 1 a čísla sloupců $(1,2, \dots, n)$ indexům strategií hráče 2. Prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci výplatní matice odpovídá hodnotě výplatní funkce (výplatě) hráče i při zvolení strategií s_j^1 a s_k^2. [16, str. 33]

Hráč 2

		s_1^2	s_2^2	…	s_m^2
Hráč 1	s_1^1	$u_1(s_1^1, s_1^2)$	$u_1(s_1^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_1^1, s_m^2)$
	s_2^1	$u_1(s_2^1, s_1^2)$	$u_1(s_2^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_2^1, s_m^2)$
	…	…	…	…	…
	s_n^1	$u_1(s_n^1, s_1^2)$	$u_1(s_n^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_n^1, s_m^2)$

Výplatní matice 1 – obecná

Jako příklad uvádím výplatní matici hry *Penalta*:

Brankář

		vlevo	vpravo
Fotbalista	vlevo	-1	1
	vpravo	1	-1

Výplatní matice 2 – hra Penalta (fotbalista)

Jelikož se jedná o hru s nulovým součtem, budou hodnoty výplatních funkcí hráčů pro každý profil strategií opačné. Platí, že pokud hráč 1 zvolí strategii s_j^1 a hráč 2 strategii s_k^2, pak $u_1\left(s_j^1, s_k^2\right) = -u_2(s_j^1, s_k^2)$. Stačí tedy změnit znaménka u každé výplaty. Z tohoto důvodu si vystačíme s výplatní maticí jednoho z hráčů. Ve hře *Penalta* by vypadala výplatní matice z pohledu brankáře následovně:

Fotbalista

		vlevo	vpravo
Brankář	vlevo	1	−1
	vpravo	−1	1

Výplatní matice 3 – hra Penalta (brankář)

Některá literatura (např. Maňas) používá tradiční maticový zápis lineární algebry, který opomíjí názvy strategií. Pokud bychom fotbalistu ze hry *Penalta* označili A a brankáře B, mohli bychom Výplatní matici 1 této hry zapsat jako

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ či}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obecně

$$A = \begin{bmatrix} u_1(s_1^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_1^1, s_m^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(s_n^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_n^1, s_m^2) \end{bmatrix}.$$

Jelikož se hráči prohodí a jejich výplaty jsou pro každý profil strategií opačné, platí $B = -A^T$. Pokud bychom tedy znali matici hráče A a hledali výplatní matici hráče B, stačí matici A transponovat a změnit znaménka.

Příklad 2:

Hra s nulovým součtem je reprezentována maticí

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak bude vypadat matice druhého hráče?

Řešení:

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = -A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uvedli jsme si dva způsoby zápisu antagonistických her dvou hráčů s nulovým součtem, z nichž každý se hodí v jiných situacích. Z didaktických účelů doporučuji používat především zápis ve formě tabulky, neboť je přehlednější a hodí se při ilustraci pojmů a úloh. Obzvlášť pokud žáci neznají pojem matice. Maticový zápis bych naopak doporučil používat při výpočtech, neboť je prostorově méně náročný a jednodušší na zápis.

Dominovaný řádek (resp. sloupec)

Jelikož jsou ryzí strategie prvního (resp. druhého) hráče antagonistické hry 2 hráčů s nulovým součtem reprezentovány řádkami (resp. sloupci) výplatní matice, můžeme proces odstraňování silně dominovaných strategií nahradit procesem odstraňování řádků (resp. sloupců) výplatní matice, což nám řešení her značně usnadní.

Při eliminaci dominovaného řádku (resp. sloupce) porovnáváme výplaty hráče 1 (resp. hráče 2) s výplatami jiného řádku (resp. sloupce) v příslušném sloupci (resp. řádku). Pokud jsou všechny výplaty v některém řádku (resp. sloupci) menší (resp. větší) než v jiném řádku (resp. sloupci), můžeme bez újmy řádek (resp. sloupec) vyřadit a uvažovat nově vzniklou hru bez této ryzí strategie.

V předchozí matici z Příkladu 2 je 1. řádek silně dominován 2. řádkem. Odstraněním 1. řádku vznikne nová matice typu 1×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

s jednou ryzí strategií a hráči 1 bychom tedy doporučili hrát 2. strategii odpovídající 2. řádku původní matice. V této nové matici je 1. sloupec dominován 2. sloupcem, neboť výplaty hráče 2 jsou opačné a jeho nově vzniklá výplatní matice vypadá následovně

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hráči 2 bychom tedy doporučili hrát 2. strategii odpovídající 2. sloupci původní matice a oba hráči by tedy konvergovali k prvku

$$u_1(s_2^1, s_2^2) = 1.$$

1.2.4 Řešení maticových her

Nyní nastává otázka, co bychom mohli v maticových hrách s nulovým součtem označit za řešení. Optimistický hráč by se rád rozhodl pro ryzí strategii reprezentovanou řádkem ve výplatní matici, která obsahuje největší výplatu. Ve hře reprezentovanou maticí $A = (a_{ij})$ by rád volil takový řádek i, pro který je hodnota výrazu $\max_j a_{ij}$ maximální. [9]

Situaci značně komplikuje fakt, že se jedná o hry s nulovým součtem. V nich mají hráči opačné výplaty. Oba hráči jsou racionální a budou chtít volit strategii vedoucí k největší možné výplatě. Rozhodnutí každého tedy musí vyplývat z této obecné znalosti.

Pesimistický hráč by si rád zajistil co největší výplatu za nejhorší možné situace, což více odpovídá hrám s nulovým součtem, neboť výhra jednoho hráče je současně prohra druhého. Jeden ze způsobů, kterým toto lze učinit, je nalézt nejmenší možné výplaty pro každou ryzí strategii hráče, výplaty porovnat a zvolit tu strategii, která vede k největší z těchto výplat. Tato hodnota se nazývá *maximin*, neboť hráč vybírá maximum z minim, a odpovídá nalezení největšího z nejmenších prvků každého řádku matice.

Příklad 3: Hra je zadána Výplatní maticí 4. Nalezněte maximinovou strategii hráče 1.

Hráč 2

		A	B	C
	A	2	3	4
Hráč 1	B	1	−1	−2
	C	0	−2	−1

Výplatní matice 4 – k příkladu 3

Řešení: V každém řádku porovnáme jednotlivé výplaty a vybereme tu s nejmenší hodnotou. V prvním řádku porovnáváme čísla 2, 3 a 4, dále tedy budeme pracovat s výplatou 2. Podobně pro ostatní řádky. Nejmenší prvky každého řádku jsou odlišeny barevně.

Hráč 2

		A	B	C	Minimum
	A	2	3	4	2
Hráč 1	B	1	−1	−2	−2
	C	0	−2	−1	−2

Výplatní matice 5 – k příkladu 3

Z těchto výplat poté hledáme maximum. Maximinová výplata je tedy 2 a *Hráč 1* se k ní dostane pomocí ryzí strategie *A* (povšimněme si, že ryzí strategie *B* a *C* jsou silně dominované).

Druhá možnost je nalézt co největší výplatu pro každou strategii protihráče, výplaty porovnat a zvolit strategii, která vede k té nejmenší z nich. Tato hodnota se nazývá *minimax* a odpovídá porovnání všech výplat každé ryzí strategie protihráče zapsané ve sloupci, identifikace té největší a následnému výběru té nejmenší z nich. Maxima v řádcích Výplatní matice 4 z Příkladu 3 jsou odlišena barevně ve Výplatní matici 6.

		Hráč 2		
		A	B	C
Hráč 1	A	2	3	4
	B	1	-1	-2
	C	0	-2	-1
	Maximum	2	3	4

Výplatní matice 6

Minimaxní hodnota této výplatní matice je $\min(2,3,4) = 2$ a *Hráč 1* se k ní dostane pomocí ryzí strategie *A*. Je zřejmé, že minimaxní hodnota je vždy větší, nebo rovna maximinní hodnotě téže hry.

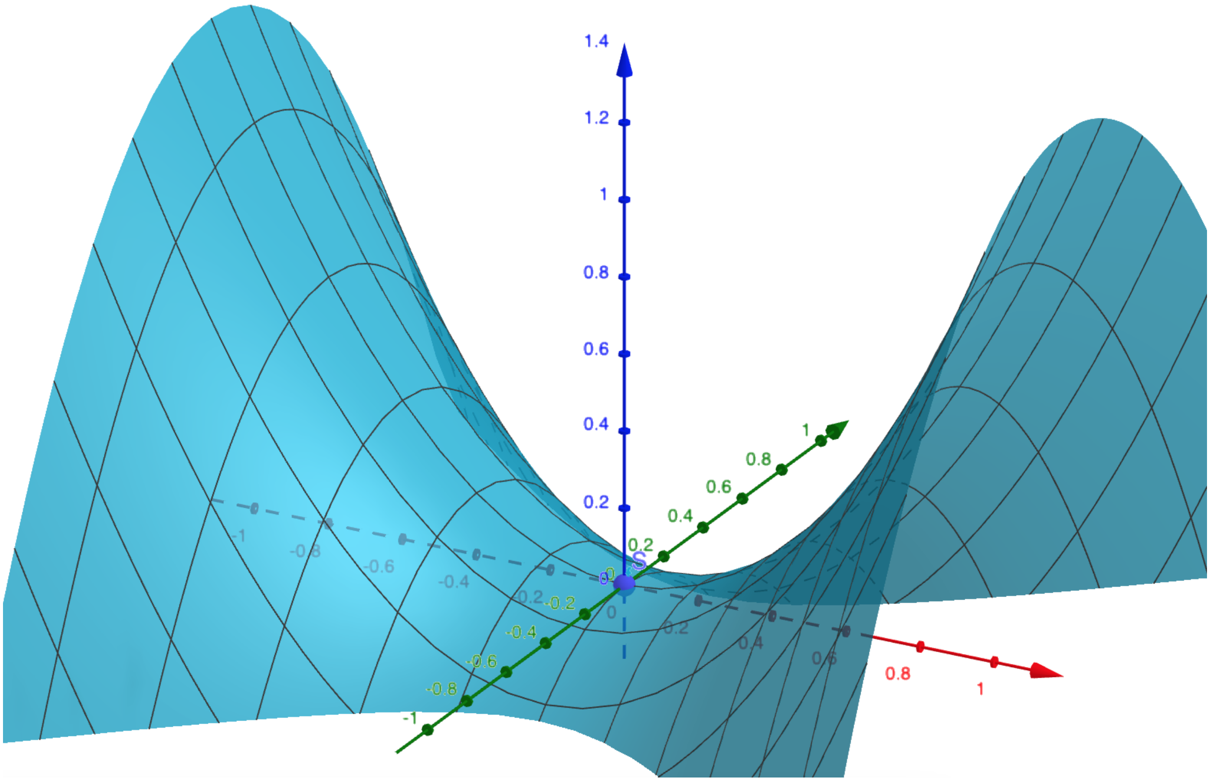
Pokud se hodnoty minimax a maximin rovnají, pak odpovídající prvek výplatní matice nazýváme sedlový bod. Jelikož musí platit vlastnosti minimaxu a maximinu zároveň, jedná se o prvek, který je nejmenší na řádku, v němž se nachází, a současně největší ve sloupci.

Definice 9 (sedlový bod) [1]: Nechť $\bar{s}^1 \in S_1$ a $\bar{s}^2 \in S_2$ jsou rovnovážné strategie. Říkáme, že $u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$ je *sedlový bod* výplatní matice hráče 1, pokud

$$u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) = \max_{s_i} \min_{\mathrm{s_j}} u_1\left(s_i^1, s_j^2\right) = \min_{s_i} \max_{\mathrm{s_j}} u_1\left(s_i^1, s_j^2\right).$$

Sedlový bod pak představuje tzv. cenu hry, kterou můžeme chápat jako střední hodnotu užitku, pokud se hráči chovají racionálně. Podle ceny hry potom dělíme hry na spravedlivé a nespravedlivé. Spravedlivé, pokud je cena hry rovna nule a nespravedlivé, pokud zvýhodňuje jednoho z hráčů.

Název *sedlový bod* nejspíš pochází z tvaru grafu funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ připomínající sedlo. [20] Viz Obrázek 2. Sedlový bod této funkce dvou proměnných leží v počátku souřadnicového systému.



Obrázek 2 – sedlový bod

Výplatní matice mohou mít libovolný počet sedlových bodů. Ve Výplatní matici 4 je jediným sedlovým bodem prvek $u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) = 2$, jedná se tedy o nespravedlivou hru, jelikož si hráč 1 odnáší větší výplatu než druhý z hráčů. Ve výplatní matici hry *Penalta* neexistuje žádný sedlový bod, a naopak v následující matici jsou sedlové body dva (označeny barevně).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Při hledání sedlového bodu je vhodné si nejmenší prvek v každém řádku zvýraznit jedním způsobem a největší prvek v každém sloupci jiným způsobem. Sedlovému bodu potom odpovídá ten prvek výplatní matice, který je zvýrazněn oběma způsoby.

Příklad 4: Zjistěte, zda následující výplatní matice hry obsahuje sedlový bod, poté určete cenu hry a rozhodněte, zda se jedná o spravedlivou hru či nikoli.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Řešení: Nejmenší prvek v každém řádku zakroužkujeme a barevně označíme největší prvek v každém sloupci:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \boxed{-2} \\ \boxed{0} & 1 & 2 \\ -2 & 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}.$$

Oběma způsoby je označen pouze prvek $u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) = 0$. Cena hry je 0 a jedná se tedy o spravedlivou hru.

Věta 2: Eliminace silně dominované strategie nemá vliv na sedlový bod.

Důkaz (sporem): Předpokládejme, že existuje strategie s_j^1, která je silně dominována strategií s_k^1 a zároveň je $u_1(s_j^1, \bar{s}^2)$ sedlovým bodem. Z definice sedlového bodu vyplývá, že je $u_1(s_j^1, \bar{s}^2) > u_1(s_k^1, \bar{s}^2)$, což je spor s tvrzením, že s_j^1 je silně dominovaná strategií s_k^1. Tím je věta dokázána.

Povšimněme si, že důkaz závisí na ostré nerovnosti. Eliminace slabě dominované strategie tedy může vést ke ztrátě některé rovnovážné strategie, zůstane tam ale vždy alespoň jedna. [23]

Zatím jsme pracovali pouze s rovnovážným řešením v ryzích strategiích. V některých hrách ovšem sedlový bod neexistuje (např. hra *Penalta*). Pojďme si tedy ukázat, jak pracovat s maticemi, které nemají ani jeden sedlový bod.

Věta 3 (základní věta maticových her) [16, str. 36]): Každá maticová hra má rovnovážné řešení ve smíšených strategiích.

Důkaz této věty je uveden např. v [16, str. 36–37]. Zde jenom prozradím, že se opírá o tzv. *Weierstrassovu větu* a větu, která říká, že přičtení konstanty nemá vliv na řešení.

Hledání rovnovážného řešení ve smíšených strategií není tak jednoduché, jako hledání rovnovážného řešení v ryzích strategií (sedlového bodu). Způsobů řešení je více a vyplývají přímo z důkazu věty. Zde uvedu pouze jedno čistě algebraické, neboť víc pro řešení maticových her dvou hráčů typu 2 × 2 není potřeba, a poté na stejném příkladu ještě ukážu grafické řešení, jelikož některým žákům může být bližší.

Řešení maticové hry typu 2 × 2

Pro obecnou výplatní matici hry

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

nalezneme dvojici rovnovážných strategií $\bar{s}^1 = (p_1, p_2)$, $\bar{s}^2 = (q_1, q_2)$ hráče 1, 2 a cenu hry následujícím způsobem:

Pokusíme se nalézt sedlový bod. Dle [4, str. 21] nastávají 3 možnosti:

1. Existuje jeden sedlový bod matice a nachází se v i-tém řádku a j-tém sloupci. Řešením je dvojice ryzích strategií $\bar{s}^1 = s_i^1, \bar{s}^2 = s_j^2$ a platí $p_i = q_j = 1$. Cena hry je rovna funkční hodnotě $u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$.
2. Existuje více sedlových bodů matice, pak mají stejnou cenu hry a řešením je tedy libovolná dvojice ryzích strategií vedoucích k některému z nich.
3. Pokud neexistuje sedlový bod, řešení nalézáme následovně:
   a. vypočítáme konstantu $D = (a + d) - (b + c)$,
   b. nalezneme $\bar{s}^1 = (p_1, p_2) = \left(\frac{d-c}{D}, \frac{a-b}{D}\right)$[9],
   c. nalezneme $\bar{s}^2 = (q_1, q_2) = \left(\frac{d-b}{D}, \frac{a-c}{D}\right)$,
   d. vypočítáme cenu hry pomocí vzorce $\frac{ad-bc}{D}$.

Důkaz správnosti tohoto algoritmu je popsán například zde [6].

Příklad 5: Nalezni dvojici rovnovážných strategií $\bar{s}^1$, $\bar{s}^2$ a cenu hry zadanou následující maticí

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Pokusíme se nalézt sedlový bod. Ani jedno z čísel není nejmenší na řádku, v němž se nachází a současně největší ve sloupci. Matice tedy nemá sedlový bod a její řešení nalézáme ve smíšených strategiích.

a. $D = (2 + 3) - (-1 + (-1)) = 7$
b. $\bar{s}^1 = \left(\frac{3-(-1)}{7}, \frac{2-(-1)}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$
c. $\bar{s}^2 = \left(\frac{3-(-1)}{7}, \frac{2-(-1)}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$[10]
d. $\frac{ad-bc}{D} = \frac{2\cdot 3-(-1)\cdot(-1)}{7} = \frac{5}{7}$

Jedná se o hru *nespravedlivou* vedoucí ve prospěch hráče 1, neboť cena hry je větší číslo než nula. Pokud by výplaty matice v příkladu představovaly koruny, mohli bychom předpokládat, že hráč 1 obdrží od hráče 2 v každé hře průměrně $\frac{5}{7}$ koruny.

---

[9] Můžeme předpokládat, že $D \neq 0$, neboť pro $D = 0$ by matice hry měla sedlový bod.

[10] Platí $\bar{s}^1 = \bar{s}^2$, neboť matice hry je symetrická.

Grafické řešení: Maticové hry dvou hráčů, ve kterých hráč 1 vybírá pouze ze 2 ryzích strategií, můžeme řešit grafickou metodou dle [16, str. 46]. Smíšená strategie hráče 1 se skládá pouze ze dvou složek, a můžeme psát $p^1 = (x, 1 - x)$, kde $x \in \langle 0,1 \rangle$ udává pravděpodobnost, že hráč 1 zvolí 1. ryzí strategii a jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1$$

musí platit, že se hráč 1 pro svou 2. ryzí strategii rozhoduje s pravděpodobností $1 - x$.

Nyní si ukážeme, jak popsat a vyjádřit řešení hry z předchozího příkladu graficky za pomocí nástrojů analytické geometrie. Střední hodnoty užitku hráče 1 v této hře jsou

$$f_1(x) = 2 \cdot x + (-1) \cdot (1 - x) = 3x - 1,$$

pokud hráč 2 zvolí **první** ryzí strategii a

$$f_2(x) = -1 \cdot x + 3 \cdot (1 - x) = -4x + 3,$$

pokud hráč 2 zvolí **druhou** ryzí strategii.

Obecně

$$f_j(x) = u_1\left(s_1^1, s_j^2\right) \cdot x + u_1\left(s_2^1, s_j^2\right) \cdot (1 - x),$$

pokud hráč 2 zvolí ***j*-tou** ryzí strategii. Jedná se o lineární funkce s definičním oborem $x \in \langle 0,1 \rangle$, jejichž funkční hodnoty jsou střední hodnoty užitku. Nyní hledáme takové $\bar{x}$, pro které platí

$$\bar{x} = \arg \max_{\mathrm{x} \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j=1,\ldots,n} f_j(x)$$

a cenu hry

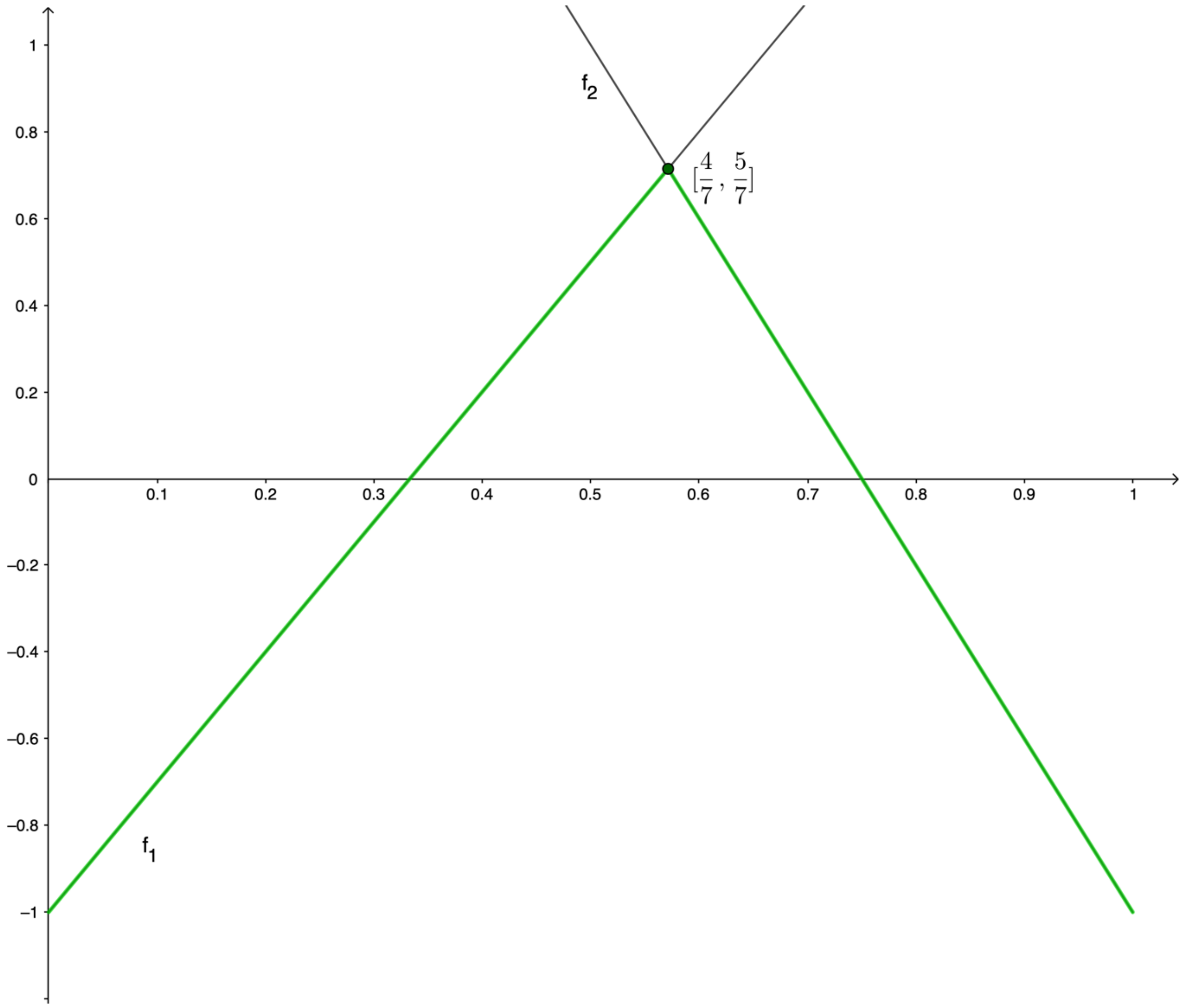
$$v = \max_{\mathrm{x} \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j=1,\ldots,n} f_j(x).$$

Na vodorovnou osu budeme nanášet argumenty funkcí $f_j(x)$ a na svislou osu hodnoty odpovídající středním hodnotám užitku.

Funkce

$$\phi(\bar{x}) = \min_{j=1,\ldots,n} f_j(x)$$

je na Obrázku 3 vyznačena zeleně.



Obrázek 3 – k Příkladu 5

X-ová souřadnice bodu $\left[\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right]$ představuje x-ovou souřadnici vektoru $\bar{p}^1 = (x, 1 - x)$ a y-ová souřadnice průsečíku $\left[\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right]$ představuje cenu hry v. Rovnovážná strategie této hry je $\bar{p}^1 = (x, 1 - x) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$ a cena hry je $v = \frac{5}{7}$. Podobně pro hráče 2.

1.3 Neantagonistické hry (dvou hráčů)

Ne vždy se hráči setkají v situaci, ve které je zisk jednoho ekvivalentní se ztrátou druhého. Jelikož v takových situacích nelze jednoznačně určit hodnotu výplatní funkce hráče na základě výplatní funkce druhého z hráčů, nebude nám stačit zápis pomocí jedné výplatní matice. Z tohoto důvodu zavádíme následující pojem.

1.3.1 Výplatní dvojmatice

Známe-li výplatní matici hráče 1

$$A = \begin{bmatrix} u_1(s_1^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_1^1, s_m^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(s_n^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_n^1, s_m^2) \end{bmatrix}$$

a hráče 2

$$B = \begin{bmatrix} u_2(s_1^1, s_1^2) & \cdots & u_2(s_1^1, s_m^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_2(s_n^1, s_1^2) & \cdots & u_2(s_n^1, s_m^2) \end{bmatrix},$$

můžeme je zapsat do tzv. výplatní dvojmatice

$$\begin{bmatrix} u_1(s_1^1, s_1^2), u_2(s_1^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_1^1, s_m^2), u_2(s_1^1, s_m^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(s_n^1, s_1^2), u_2(s_n^1, s_1^2) & \cdots & u_1(s_n^1, s_m^2), u_2(s_n^1, s_m^2) \end{bmatrix}.$$

Výplatní dvojmatice ve formě tabulky pak vypadá následovně:

Hráč 2

		s_1^2	s_2^2	…	s_m^2
Hráč 1	s_1^1	$u_1(s_1^1, s_1^2), u_2(s_1^1, s_1^2)$	$u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_1^1, s_m^2), u_2(s_1^1, s_m^2)$
	s_2^1	$u_1(s_2^1, s_1^2), u_2(s_2^1, s_1^2)$	$u_1(s_2^1, s_2^2), u_2(s_2^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_2^1, s_m^2), u_2(s_2^1, s_m^2)$
	…	…	…	…	…
	s_n^1	$u_1(s_n^1, s_1^2), u_2(s_n^1, s_1^2)$	$u_1(s_n^1, s_2^2), u_2(s_n^1, s_2^2)$	…	$u_1(s_n^1, s_m^2), u_2(s_n^1, s_m^2)$

Výplatní dvojmatice 1 – obecná

Příkladem může být hra *Souboj pohlaví* [27, str. 80], ve které se manželský pár nezávisle rozhoduje, co bude dělat večer. Oba chtějí strávit večer společně, ale muž preferuje box a žena preferuje balet. Výplatní dvojmatice této hry vypadá následovně:

Žena

	box	balet

Muž	box	2,1	0,0
	balet	0,0	1,2

Výplatní dvojmatice 2 – hra Souboj pohlaví

Jelikož se výplatní dvojmatice skládá ze dvou výplatních matic, platí, že pojmy definované v antagonistických hrách často odpovídají pojmům neantagonistických her. Definice rovnovážné strategie dvojmaticové hry je shodná s definicí rovnovážné strategie maticové hry. To samé platí pro dominantní a dominované strategie. Proto můžeme silně dominované strategie eliminovat i ve hrách zadaných dvojmaticí a postup při odstraňování řádků a sloupců zůstává.[11]

Příklad 6: Hra je zadána následující výplatní dvojmaticí.

Hráč 2

		s_1^2	s_2^2	s_3^2
Hráč 1	s_1^1	1,2	1,3	3,1
	s_2^1	−1,0	0,5	3,3
	s_3^1	0,3	2,4	5,3

Výplatní dvojmatice 3

Eliminujte všechny silně dominované strategie této hry.

Řešení: 3. řádek silně dominuje 2. řádku a 2. sloupec silně dominuje 1. a 3. sloupci. Po odstranění dostáváme

Hráč 2

		s_2^2
Hráč 1	s_1^1	1,3
	s_3^1	2,4

Výplatní dvojmatice 4

Nyní můžeme odstranit 1. řádek nově vzniklé Výpl. dvojmatice 4, neboť je silně dominován 2. řádkem a zůstávají pouze nedominované ryzí strategie s_3^1 a s_2^2.

---

[11] Existuje jeden malý rozdíl v odstraňování sloupců u dvojmaticových her. Na rozdíl od maticových her zde hráč 2 nemá zaručené opačné výplaty pro daný profil strategií a tím pádem nemůžeme pouze na základě výplat hráče 1 rozhodnout, který sloupec odstranit. Pro eliminaci ryzích strategií hráče 2 je potřeba uvažovat pouze jeho výplaty a odstranit sloupec s menšími výplatami, nikoli většími. Podobně jako tomu je při odstraňování řádků. Viz Příklad 6.

1.3.2 Nashovo ekvilibrium

Obrázek 4 – *Centris Pallida* [30]

Nashovo[12] ekvilibriem (někdy také rovnovážný bod či Nashova rovnováha) budeme rozumět volbu strategií, pro kterou platí, že změnou své strategie si žádný hráč nemůže polepšit, pokud druhý z hráčů svou strategii nezmění.

Hledání Nashova ekvilibria nevědomky čelí druh samotářské včely zvaný *Centris Pallida*. Samičky se při krmení svých samčích potomků rozhodují, kolik potravy jim obstarají. Potomci, kteří jsou během stádia vývoje krmeni více, dosahují větších rozměrů, opak platí pro ty, kteří jsou krmeni méně. Velikost této včely má následně vliv na její rozmnožování. Ty větší při námluvách hledají samičí včely s hrozbou, že dojde ke střetu. Menším nezbývá než počkat, jak se situace vyvine a vyhlédnout samičky, které nejsou oplodněny. Obecně bývají úspěšnější větší včely. Původní dospělá včela se tedy musí rozhodnout, jaké množství jídla bude pro jejího potomka ideální a přirozeně hledá Nashovo ekvilibrium. [25, str. 72]

Vidíme, že k Nashovo ekvilibriu (dále jen NE) směřují i organismy, které bychom stěží mohli považovat za racionální. Pokud ovšem ve hrách vystupují pouze racionální hráči, můžeme předpokládat, že NE zvolí okamžitě.

Definice 10 (Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích) [9]: Uspořádanou dvojici ryzích strategií $(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$ nazveme *Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích*, právě když jsou splněny podmínky

$$u_1(a, \bar{s}^2) \leq u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$$

$$u_2(\bar{s}^1, b) \leq u_2(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$$

pro všechna $a \in S_1$ a všechna $b \in S_2$.[13] Strategie $\bar{s}^1$ a $\bar{s}^2$ jsou potom rovnovážné strategie.

Důvod, proč se jedná o dobrý model rovnovážného bodu, je jednoduchý. Pokud strategie neodpovídají Nashovo ekvilibriu, potom se alespoň jednomu hráči vyplatí své rozhodnutí změnit. Při opakování téže hry se hráči od tohoto řešení odchýlí a pokud hra obsahuje Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích, potom se jejich volba strategie zastaví pouze v momentě, kdy na něj narazí a následně volí pouze ryzí strategii vedoucí k tomuto řešení.

---

[12] Pojem byl pojmenován po J. F. Nashovi. Viz *Historie*.

[13] Povšimněme si, že se definice velmi podobná definici dominantní strategie.

Pro ověření, zda je daný prvek Nashovo ekvilibriem v ryzích strategiích (dále jen NE v RS), je potřeba prozkoumat, zda se některému z hráčů vyplatí odchýlit či nikoli. Jedná se tedy o argumentaci kruhem. Nejdřív předpokládáme, že se oba hráči rozhodnou pro jednu dvojici ryzích strategií ze svého prostoru strategií a poté teprve zkoumáme, zda je tato varianta rovnovážným bodem. Takto postupujeme u každého prvku výplatní dvojmatice.

Příklad 7: Nalezněte Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích (NE v RS) ve hře *Souboj pohlaví*.

Řešení: Postupně prověříme každý prvek dvojmatice. Předpokládejme nejprve, že oba hráči zvolí strategii *box*. Ani jednomu se nevyplatí svou strategii změnit, neboť by se jejich výplata zmenšila a tuto dvojici tedy můžeme považovat za NE v RS. To samé platí pro strategii *balet* volenou oběma hráči. Ovšem dvojice strategií $(box, balet)$ a $(balet, box)$ nemůžeme označit za NE v RS, neboť se oběma hráčům vyplatí od své strategie odchýlit. Tato hra má tedy dvě NE v RS, a to (box, box) a $(balet, balet)$.

Koordinační hra

Právě jsme si ukázali případ, ve kterém je rovnovážných bodů více. Takové hry jsou občas nazývány *koordinační hry*, neboť je vyžadována určitá koordinace mezi hráči, aby správně rozhodli, ke kterému rovnovážnému bodu směřovat. V běžném životě se může jednat například o stěhování nábytku, neboť v takové situaci se vyplatí všem stěhujícím pohybovat se stejným směrem stejně rychle. Snaží se tedy zvolit stejnou strategii, kterou zde může být například zahnutí vlevo. V případě, že by se jejich strategie lišily, ani jeden nebude s výsledkem spokojen.

Koordinačními hrami se zabýval ekonom a držitel Nobelovy ceny za ekonomii Thomas Schelling. Ve své knize *The Strategy of Conflict* [22] popisuje tzv. *ohniskový bod* na základě tzv. *Schellingových otázek*. Otázky pokládal veřejnosti a snažil se vypátrat, zda je možné, aby hráči zvolili stejnou strategii na základě konvencí bez možnosti se předem domluvit. Jedna z otázek zněla takto: „Máš za úkol rozdělit 100 dolarů na 2 hromádky – A a B. Pokud zvolíš stejné rozdělení, jako tvůj partner, dostaneš tolik peněz, kolik bude v hromádce A a tvůj partner dostane peníze z hromádky B. Jakým způsobem přerozdělíš peníze?“ Výsledky ukazují, že se 80 % lidí rozhodlo pro rozdělení 50:50. [28, str. 25] Případy, ve kterých se hráčům nepodaří zvolit stejnou strategii v koordinačních hrách, nazýváme *koordinační chybou*.

Opakem koordinační hry je *antikoordinační hra*. V ní si narozdíl od koordinačních her hráči konkurují. Takové hry jsou v běžném životě velmi časté. Při čekání ve frontě na lístky na koncert hrají lidé hru, ve které soupeří o lístky. Musí přemýšlet, v kolik se vyplatí přijít, aby jim lístky ostatní nevykoupili, ale zase nemuseli čekat příliš dlouho. Jedním z nejtypičtějších příkladů antikoordinační hry je aukce. Zájemci zde mezi sebou soupeří, neboť je v jejich zájmu předmět aukce vydražit za co nejmenší hodnotu. Pokud se jeden z hráčů pokouší o koordinaci (tedy zvolit stejnou strategii jako druhý hráč) a druhý hráč se snaží zvolit strategii opačnou, hru nazýváme *diskoordinační hra*. Příkladem diskoordinační hry je hra *Penalta.*

Vraťme se ještě ke hře *Souboj pohlaví.* Z jejího řešení je zřejmé, že se výplaty rovnovážných bodů pro daného hráče nemusí rovnat. Rovnovážný bod (box, box) je výhodnější pro *muže*, naopak $(balet, balet)$ více vyhovuje v této hře *ženě*, ovšem pro oba je lepší volit stejnou strategii. Tímto se rovnovážné řešení dvojmaticových her liší od rovnovážného řešení maticových her, ve kterých sice mohlo existovat sedlových bodů více, ovšem jejich hodnota (cena hry) zůstala stejná.

Striktní NE v RS

Kvůli neostré nerovnosti v definici NE v RS se může stát, že změnou strategie pro dané NE v RS některý hráč nic nezíská a ani nic neztratí. Takové NE v RS označíme za *nestriktní*. Pokud by naopak každý z hráčů mohl při změně strategie pouze ztratit, říkáme, že je toto NE v RS *striktní*.

Příklad 8: V následující výpl. dvojmatici označte tyrkysově striktní NE v RS a zeleně nestriktní NE v RS.

Hráč 2

		zvednout	nezvednout
Hráč 1	zvednout	1,1	0,0
	nezvednout	0,0	0,0

Výplatní dvojmatice 5 – k Příkladu 8

Řešení:

Hráč 2

		zvednout	nezvednout
Hráč 1	zvednout	1,1	0,0
	nezvednout	0,0	0,0

Výplatní dvojmatice 6 – k Příkladu 8

$(zvednout, zvednout)$ označeno tyrkysově je striktní NE v RS, $(nezvednout, nezvednout)$ označeno zeleně je nestriktní NE v RS.

Na konci kapitoly věnované ryzím strategiím v maticových hrách jsme si uváděli jako příklad hru *Penalta*, ve které neexistovalo rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Jelikož maticové hry jsou speciálními případy dvojmaticových her, je logické, že taková situace může nastat i u dvojmaticových her. Je potřeba tedy zavést jejich řešení i ve smíšených strategiích.

Definice 11 (Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích): Uspořádanou dvojici smíšených strategií $(\bar{p}^1, \bar{p}^2)$ nazveme Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích (dále jen NE ve SS), právě když jsou splněny podmínky

$$u_1(a, \bar{p}^2) \leq u_1(\bar{p}^1, \bar{p}^2)$$

$$u_2(\bar{p}^1, b) \leq u_2(\bar{p}^1, \bar{p}^2)$$

pro všechna $a \in S_1$ a všechna $b \in S_2$.[14] Strategie $\bar{p}^1$ a $\bar{p}^2$ jsou potom rovnovážné strategie. Povšimněme si, že a a b jsou ryzí strategie hráčů a dle definice tedy stačí porovnat danou smíšenou strategii pouze s ryzími strategiemi, nikoli se smíšenými strategiemi.

Příklad 9:

Rozhodněte, zda je dvojice smíšených strategií $p^{fotbalista} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), p^{brankář} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ve hře *Penalta* NE ve SS.

Řešení:

Pro nalezení řešení stačí porovnat smíšené strategie ze zadání se všemi ryzími strategiemi hráčů. Pokud některá nerovnost z definice NE ve SS nevyhovuje, potom smíšené strategie nemohou být rovnovážné. Musí platit nerovnost

$$u_{fotbalista}\left(vlevo, p^{brankář}\right) \leq u_{fotbalista}\left(p^{fotbalista}, p^{brankář}\right).$$

---

[14] V některé literatuře bývá zvolena definice, která srovnává rovnovážné strategie se všemi smíšenými strategiemi, včetně těch smíšených. Dále potom uvádí větu, která říká, že porovnávání pouze s ryzími strategiemi je postačující podmínka.

Levá strana nerovnosti

$$u_{fotbalista}\left(vlevo, p^{brankář}\right) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pravá strana nerovnosti

$$u_{fotbalista}\left(p^{fotbalista}, p^{brankář}\right) = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}.$$

Jelikož $\frac{1}{3} > -\frac{1}{9}$, můžeme prohlásit, že smíšené strategie $p^{fotbalista}, p^{brankář}$ nejsou rovnovážné a tudíž $\left(p^{fotbalista}, p^{brankář}\right)$ není NE ve SS.

Racionální hráč vždy počítá s každou strategií, kterou může zvolit protihráč. Pokud by například fotbalista ve hře *Penalta* věděl, že se brankář rozhodne skočit vlevo, bylo by od něj iracionální rozhodnout se zvolit stejnou strategii a střelit míč na tuto stranu. Přirozeně by tedy zvolil strategii střelit míč vpravo, neboť jeho úmyslem je maximalizovat svůj zisk. Jinými slovy, pokud víme, kterou ze strategií zvolí protihráč, potom je naší nejlepší odpovědí právě ta strategie, která nám v reakci na ní poskytne největší užitek.

Definice 12 (nejlepší odpověď): Nechť hráč 2 zvolí strategii b. Potom je strategie s^1 nejlepší odpovědí hráče 1 na strategii b, pokud

$$u_1(s^1, b) \geq u_1(a, b)$$

pro každé $a \in S_1$. Množinu všech nejlepších odpovědí hráče 1 na strategii b budeme značit R_1. Podobně pro hráče 2. Následující věta může být brána jako definice NE.

Věta 4 [9]: Dvojice $(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$ je NE, právě když je $\bar{s}^1$ nejlepší odpovědí na $\bar{s}^2$ a $\bar{s}^2$ je nejlepší odpovědí na $\bar{s}^1$.

Důkaz [9]: Podle definice je $\bar{s}^1$ nejlepší odpovědí na $\bar{s}^2$ právě tehdy, když pro každé $a \in S_1$ platí

$$u_1(\bar{s}^1, \bar{s}^2) \geq u_1(a, \bar{s}^2).$$

Obdobně pro $\bar{s}^2$. Z nerovností přímo dostáváme podmínky pro Nashovo ekvilibrium. Tím je věta dokázána.

V živočišné říši hledá nejlepší odpověď například sladkovodní ryba *slunečnice velkoploutvá*. Při rozmnožování se rozhoduje, zda si postaví hnízdo (podobně jako většina ptáků), nebo naklade vajíčka do cizího (podobně jako kukačky). Je-li v okolí spousta hnízd, je pro ni nejlepší odpovědí naklást vajíčka do cizího hnízda. Takto postupně vzroste populace ryb fungující paraziticky, nových hnízd ubude a po určité době se stane nejlepší odpovědí postavit nové hnízdo. [25, str. 90]

Před odhalením postupu pro nalezení NE ve SS si uvedeme větu podobnou Větě 3, kterou jako první uveřejnil a dokázal v roce 1951 J. F. Nash.

Věta 5 [16]: Ve smíšených strategiích má každá konečná hra alespoň jedno Nashovo ekvilibrium.

Důkaz je uveden v [16, str. 102]. Zde jenom prozradím, že se opírá o Brouwerovu větu o pevném bodu spojitého zobrazení. Dále platí, že pokud hra obsahuje pouze jednu dvojici rovnovážných strategií či je ve hře jediná dominantní dvojice rovnovážných strategií, můžeme ji považovat za řešení (Nashovo ekvilibrium) dvojmaticové hry. [16, str. 97]

Povšimněme si, že tvrzení je pouze implikace, nikoli ekvivalence, takže se může stát, že eliminací dominované strategie zmizí i některé NE. Nemůže se ale stát, že zmizí všechna NE. Podobně platí, že přidání silně dominované strategie do původní hry nezmění její řešení, neboť NE nemůže být silně dominovanou strategií. [5]

Nyní se tedy můžeme podívat na řešení dvojmaticových her 2 hráčů. Postupujeme podle následujícího návodu:

1. nejprve eliminujeme silně dominované strategie,
2. poté sestrojíme reakční křivky množin R_1, R_2 a nalezneme jejich průsečík (alternativní způsob je popsán na konci následujícího ilustračního příkladu).

Příklad 10:

Hra je dána následující výplatní dvojmaticí:

Hráč 2

		s_1^2	s_2^2	s_3^2
Hráč 1	s_1^1	2,3	5,2	$5,-2$
	s_2^1	$-4,4$	4,5	100,0
	s_3^1	5,3	3,6	2,5

Výplatní dvojmatice 7 – k Příkladu 10

Nalezněte NE ve SS.

Řešení č. 1:

Nejprve se zbavíme dominovaných sloupců a řádků.

$$\begin{bmatrix} (2{,}3) & (5{,}2) & \cancel{(5,-2)} \\ \cancel{(-4{,}4)} & \cancel{(4{,}5)} & \cancel{(100{,}0)} \\ (5{,}3) & (3{,}6) & \cancel{(2{,}5)} \end{bmatrix}$$

Třetí sloupec je dominován druhým sloupcem a po jeho odebrání druhému řádku dominuje první řádek.

Ryzí strategii s_1^1 reprezentovanou prvním řádkem hraje *hráč 1* s pravděpodobností p. Z dominance plyne, že druhý řádek *hráč 1* zvolí s pravděpodobností 0 a třetí tedy s pravděpodobností $1 - p$. Druhý hráč hraje ryzí strategii s_1^2 s pravděpodobností q a jelikož třetí sloupec nepřipadá v úvahu, tak bude *hráč 2* hrát strategii q_2 s pravděpodobností $1 - q$. Můžeme tedy zapsat $\bar{p}^1 = (p, 0{,}1 - p), \bar{p}^2 = (q, 1 - q, 0)$ a střední hodnota užitku

$$\pi_1 = 2pq + 5p(1-q) + 5(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$$

$$\pi_1 = (-5q + 2)p + 2q + 3$$

Pro zjištění nejlepší odpovědi $R_1(p^2)$ *hráče 1* nalezneme maximum této lineární funkce v závislosti na parametru q.

1. $q < \frac{2}{5} \Rightarrow p = 1$
2. $q = \frac{2}{5} \Rightarrow p = \langle 0{,}1 \rangle$
3. $q > \frac{2}{5} \Rightarrow p = 0$

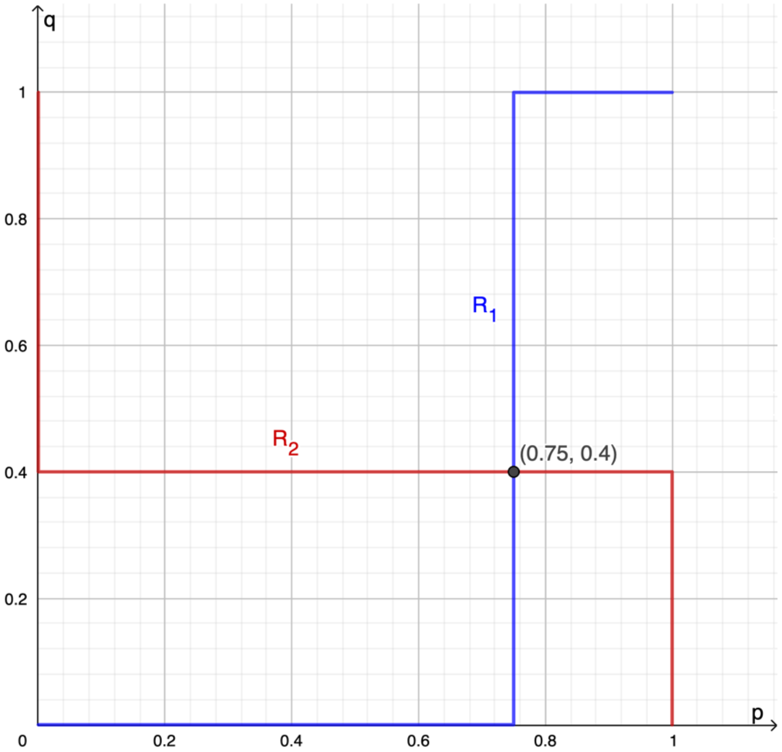
Podobně pro *hráče 2*.

$$\pi_2 = 3pq + 2p(1-q) + 3(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$$

$$\pi_2 = (4p - 3)q - 4p + 6$$

Nejlepší odpověď $R_2(p^1)$:

1. $p < \frac{3}{4} \Rightarrow q = 0$
2. $p = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \langle 0{,}1 \rangle$
3. $p > \frac{3}{4} \Rightarrow q = 1$



NE ve SS je $\left(\left(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right),\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0\right)\right)$.

Řešení č. 2:

Eliminujeme silně dominované strategie stejným způsobem. Poté hledáme q, pro které je *hráč 1* indiferentní mezi první a třetí strategií:

$$2q + 5(1-q) = 5q + 3(1-q)^{15}$$
$$5 - 3q = 3 + 2q$$
$$q = \frac{2}{5}.$$

Obdobně pro p.

1.3.3 Vězňovo dilema

Jak už bylo popsáno v kapitole *Historie*, jedná se o vůbec nejznámější[16] modelovou hru. Název *Vězňovo dilema* a vymodelovanou situaci s vězni jako první použil Albert Tucker, původně ale vznikla v *RAND Corporation* kvůli hrozbě jaderné války. [13]

---

[15] Povšimněme si, že pokud by zde byla ostrá nerovnost, tak by se jednomu z hráčů vyplatilo změnit strategii a pak by řešení nebylo NE.

[16] Vyhledání „prisoner’s dilemma“ na Google Scholar obsahuje více než 157 000 výsledků.

Obecně se jedná o každou symetrickou hru 2 hráčů:

		Hráč 2	
		s_1	s_2
Hráč 1	s_1	a, a	c, b
	s_2	b, c	d, d

Výplatní dvojmatice 8 – hra Vězňovo dilema

pro kterou platí nerovnosti

$$c < d < a < b.$$

Jelikož se jedná o modelovou hru, je možné jí reprezentovat různými situacemi. V případě hrozby jaderného konfliktu je s_2 pokus o vývoj jaderné zbraně a s_1 odmítnutí tohoto vývoje a doufání, že druhý hráč také nebude jadernou zbraň vyvíjet. Nejčastěji se hra uvádí na základě následujícího scénáře.

Alice a Bob jsou pachateli závažného trestního činu. Policie je zadržela a vyslýchá je v oddělených místnostech. Nemá ale dostatek důkazů pro jejich odsouzení za tento čin (pouze za drobný přestupek), takže oběma nabídne možnost svědčit proti svému spolupachateli, výměnou za snížení trestu. Jestliže se rozhodnou nabídku odmítnout, jsou odsouzeni na 1 rok za drobný přestupek. Pokud nabídku přijme pouze jeden z nich, pak je propuštěn a druhý stráví 8 let ve vězení. Jestliže se oba rozhodnout vypovídat, potom je oběma odňata svoboda na dobu 3 let. Výplatní matice této hry vypadá následovně:

		Hráč 2	
		s_1	s_2
Hráč 1	s_1	$-1, -1$	$-8, 0$
	s_2	$0, -8$	$-3, -3$

Výplatní dvojmatice 9 – příklad hry Vězňovo dilema

Věta 6: Ryzí strategie s_2 je rovnovážná strategie obou hráčů každého modelu hry *Vězňovo dilema*.

Důkaz: Z definice víme, že platí

$$c < d < a < b.$$

Z nerovností $a < b$ a $c < d$ vyplývá, že je 1. řádek silně dominován 2. řádkem. Jelikož se jedná o symetrickou hru, je 1. sloupec silně dominován 2. sloupcem. Platí, že rovnovážné strategie nemohou být zároveň silně dominovanými strategiemi, můžeme tedy ryzí strategii s_1 obou hráčů odstranit. Po eliminaci zbývá pouze dvojice ryzích strategií (s_2, s_2), což můžeme označit za NE v RS a tím pádem jsou $\bar{s}^1 = \bar{s}^2 = s_2$, tím je věta dokázána.

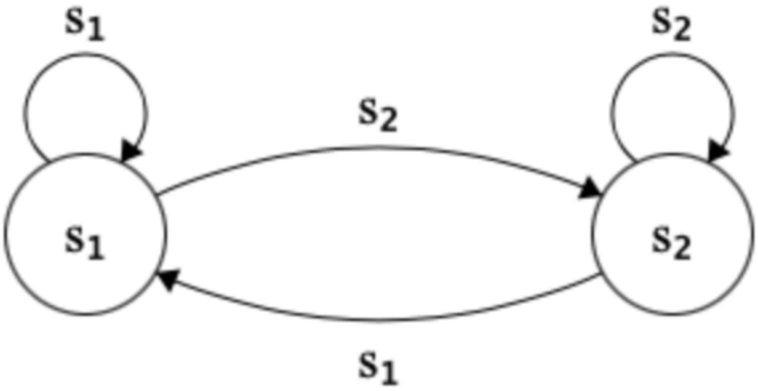
Maňas řešení hry *Vězňovo dilema* popisuje následovně. *"Řešení pro obě strany výhodné sice existuje, ale je nedostupné vzhledem k tomu, že jednostranné porušení solidárního jednání vede k podstatné výhodě pro toho, kdo se odchýlil a k nevýhodě pro toho, kdo na oboustrannou solidárnost spoléhal."* [16, str. 107]

Tohoto problému (prosazování individuálního zájmu na úkor každého jednotlivce ve skupině) si všiml spisovatel William Forster Lloyd a ve své knize *Two Lectures on the Checks to Population* [14] ho nazval *Společná tragédie* (z anglického *Tragedy of the commons).* V knize popisuje, jak farmáři prosazující individuální zájmy likvidují společné pole a doplácí na to všichni. Z tohoto důvodu se hra považuje za dilema, neboť rovnovážné strategie jsou ve výsledku pro všechny zúčastněné hráče horší než kdyby se všichni rozhodli ve *Vězňovo dilematu* zapírat. Představě, že hraním něčeho jiného než NE v této hře, se říká omyl racionality. [2, str. 199]

Dosud jsme chápali *Vězňovo dilema* pouze jako jednokolovou hru. Hráči tedy mohli volit svou strategii pouze jednou a neměli žádné informace o volbě druhého hráče. Jiné výsledky mohou nastat, pokud hráči ve *Vězňovo dilematu* hrají opakovaně a znají předchozí volby strategií protihráče.

Axelrodův turnaj

V roce 1981 uspořádal R. Axelrod turnaj, do kterého lidé mohli posílat své návrhy algoritmů hrající opakované *Vězňovo dilema.* Jedním z nich byl například algoritmus, který vždy (v každém kole) volil pouze ryzí strategii s_2, již jsme si uváděli jako rovnovážnou či algoritmus, jenž hrál smíšenou strategii $p^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Celkem se do turnaje přihlásilo 15 algoritmů, které se utkali formou „každý s každým“ v celkem 200 kolech. Turnaj nakonec vyhrál algoritmus zvaný „*Půjčka za oplátku*“ (z anglického „*Tit for tat*“). Ten v prvním kole volil vždy ryzí strategii s_1 a následně kopíroval předchozí ryzí strategii protihráče. [10, str. 34] Automat tohoto algoritmu vypadá následovně:



Obrázek 5 - automat algoritmu *Půjčka za oplátku*

Zvláštnost *Půjčky za oplátku* spočívá především v tom, že nikdy nemůže získat v žádné hře vice bodů než protihráč. I tak ale vyhrála celý turnaj. V závislosti na toto zjištění pořádal Axelrod stejný turnaj znovu, ve kterém již bylo obecně známo, který algoritmus vyhrál minule, a i přesto *Půjčka za oplátku* vyhrála znovu. V následující fázi simuloval na algoritmech Axelrod efekt evoluce a *Půjčka za oplátku* se stala jedním z 5 algoritmů, které přežily. [2, str. 103] J. M. Smith později ve své knize *Evoluce a teorie he*r dokázal, že je *Půjčka za oplátku* tzv. *evolučně stabilní strategie*. [25, str. 202-203] V závislosti na úspěch tohoto jednoduchého algoritmu a výsledcích turnaje Axelrod uvedl, že aby byl algoritmus úspěšný, musí splňovat následující 3 podmínky:

1. začít ryzí strategií s_1,
2. vracet protihráčovi strategii s_2,
3. odpouštět.

1.4 Kooperativní hry

Dosud jsme uvažovali pouze hry, ve kterých se hráči nemohli předem domlouvat a uzavírat vynutitelné dohody. Takové hry se nazývají *nekooperativní.* Opakem jsou *kooperativní hry.* V nich mohou hráči mezi sebou uzavírat dohody. Jedná se tedy o jakousi modifikaci nekooperativních her. [10, str. 28] Pokud navíc připustíme hry více hráčů, vyskytne se příležitost formovat tzv. koalice.

Definice 13 (koalice): Koalicí nazveme libovolnou podmnožinu množiny hráčů H.

Maximální společná výhra koalice n hráčů je definována jako

$$v(\{1,2,\dots,n\}) = \max_{s^1 \in S_1, s^2 \in S_2, \dots, s^n \in S_n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} u_k(s^1, s^2, \dots, s^n) \right\}.$$

Maňas dělí kooperativní hry na hry s:

1. přenosnou výhrou,
2. nepřenosnou výhrou.

Pro kooperativní hry s přenosnou výhrou platí, že se hráči mohou domluvit na přerozdělení výhry. Dle Maňase bývá tento typ hry používán častěji, neboť hráči mají možnost vyjednávat. [16]

Vyjednávání nastává v kooperativních hrách, když hráči soupeří o rozdělitelný zdroj a je pro ně výhodnější si zdroj rozdělit. [25, str. 151-152]

Smith dále dělí kooperativní hry s přenosnou výhrou na hry s úplnými a neúplnými informacemi. Rozdíl jsme si vysvětlili na začátku v klasifikaci. Hry s úplnými informacemi s možností vyjednávání se účastní např. krab poustevník při výměně ulit, neboť všichni přítomní krabi znají velikost ulity každého zúčastněného kraba. [25, str. 161] Příkladem hry s nekompletní informací s možností vyjednávání je výměna vajíček a spermat u hermafroditních ryb. [25, str. 160]

Hlavním problémem kooperativních her bývá vynutitelnost strategií. I přes vzniklou dohodu v rámci koalice se hráči mohou rozhodnout pro jinou strategii. Tomuto problému lze ve vícekolových hrách předejít potrestáním hráče v následujícím kole, a to hned největším možným trestem, čímž se hráč dostane na svou maximinovou hodnotu. [2, str. 101] Ve hře 2 hráčů je maximinová výplata hráče 1

$$v(\{1\}) = \max_{a \in S_1} \min_{b \in S_2} (a, b).$$

Podobně postupuje algoritmus *Půjčka za oplátku*. Jedna z možných aplikací takového trestu je veřejně dostupné ohodnocení. Např. při koupi produktu často může zákazník ohodnotit zkušenosti s prodávajícím a při porušení předem domluvené strategie udělit prodavači negativní hodnocení, čímž jej poškodí a sníží tak počet zákazníků.

Je zřejmé, že každý z hráčů si bude chtít zajistit aspoň svoji maximinovou hodnotu. Pokud neplatí podmínka

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) < v(\{1,2\}),$$

není pro hráče racionální vyjednávat a úloha se stává nekooperativní hrou.

Pokud se hráči rozhodnou vyjednávat, vyvstává otázka, jakým způsobem si přerozdělí výhru.

1.4.1 Rozdělení výhry

Jedno z prvních řešení je popsáno už v židovském Talmudu. Ten poskytuje konzistentní přerozdělení majetku mezi 2 hráče. Viz [28, str. 47–56]. Maňas rozdělení výhry definuje následovně.

Definice 14 (rozdělení výhry): *„Označme a_1 částku, kterou dostane ze společné výhry $v(\{1,2\})$ hráč 1, a podobně označme a_2 částku, kterou dostane hráč 2. Vektor (a_1, a_2) nazveme rozdělením výhry,“* pokud platí podmínky:

$$a_1 + a_2 = v(\{1,2\}),$$

$$a_1 \geq v(\{1\}), a_2 \geq v(\{2\})$$

říkající, že si hráči musí přerozdělit celou výhru, a že kooperace musí nabídnout takové rozdělení, které je výhodnější než maximinová strategie. Množina všech rozdělení splňující tyto podmínky se nazývá *jádrem* hry. [16, str. 113]

Potíž při hledání ideálního rozdělení spočívá v tom, že hráč 1 si bude prosazovat částku

$$a_1 = v(\{1,2\}) - v(\{2\})$$

a hráč 2 naopak částku

$$a_2 = v(\{1,2\}) - v(\{1\}).$$

Maňas navrhuje řešení přiřazující každému hráči jeho maximinovou hodnotu a polovinu zbytku společné výhry. Toto řešení je dáno vzorci

$$a_1 = v(\{1\}) + \frac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}$$

$$a_2 = v(\{2\}) + \frac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}.$$

1.4.2 Paretovo optimum

U kooperativních her je důležitým pojmem *Paretovo optimum* pojmenované po Vilfredovi Paretovi. Ve hře n hráčů se jedná o n-tici smíšených strategií, pro kterou neexistuje žádná jiná n-tice, kde by každý z hráčů dosáhl stejné, nebo větší výplaty a výplata alespoň jedno z nich byla větší. [21]

Tento pojem může připomínat NE, jedná se ale o zcela jiné řešení hry. Za předpokladu, že se hráči mohou předem domlouvat na strategii, hledáme Paretovo optimum jako prvek dvojmatice hry, který následně srovnáváme s ostatními prvky dvojmatice. V případě hledání NE jsme porovnávali hráčovo strategie.

Uvažujme obecnou Výpl. dvojmatici 8 hry *Vězňova dilematu*. NE této hry je dvojice (s_2, s_2). Můžeme tuto dvojici ryzích strategií označit za Paretovo optimum? Dle definice musí platit, že neexistuje žádná jiná dvojice, z které aspoň jeden z hráčů profituje více a druhému hráči zůstane aspoň stejná výplata. Jelikož platí

$$u_1(s_1, s_1) > u_1(s_2, s_2) \wedge u_2(s_1, s_1) > u_2(s_2, s_2),$$

dvojice (s_2, s_2) není Paretovo optimum. Naopak dvojice ryzích strategií (s_1, s_1) je tzv. *Paretovsky optimální*, neboť každá jiná dvojice vede k menší výplatě pro aspoň jednoho hráče.

Ne vždy je Paretovo optimum odlišné od NE. V životopisném filmu *Čistá duše* se objevuje scéna, ve které mladý J. Nash společně se 4 kamarády pozorují skupinku 5 žen, v níž se nachází 1 blondýna a 4 brunety. Každý z nich má v plánu oslovit blondýnu, neboť ji považují za nejatraktivnější. J. Nash vysvětluje, proč je toto řešení nevhodné[17] a navrhne všem oslovit méně atraktivní brunety. Tvůrci chtěli touto slavnou scénou demonstrovat Nashův objev rovnovážného bodu, ovšem popsané řešení není Nashovo ekvilibrium, jelikož se každému z nich vyplatí svou strategii změnit a oslovit atraktivnější blondýnu. Pokud by se všichni kamarádi domluvili, že pouze jeden z nich osloví blondýnu a ostatní osloví brunety, jednalo by se NE, které je zároveň Paretovsky optimální. V takovém případě říkáme, že je NE tzv. *výnosově dominantní.*

---

[17] Ve filmu se předpokládá, že v případě většího zájmu by blondýna odmítla všechny, kdo by ji oslovil.

1.5 Evoluční teorie her

Jedno z vůbec nejvýznamnějších uplatnění teorie her najdeme v evoluční biologii. Ukázalo se totiž, že jsou nástroje této matematické disciplíny vhodné pro popis konfliktních situací živočichů. Ať už se jedná o boj o teritorium krabů houslistů [7], jelení námluvy [25, str. 110] či známý parazitismus kukaček.

Přestože nemůžeme očekávat, že se živočichové snaží rozhodovat v konfliktních situacích vědomě a vybírat tak nejlepší možnou strategii (podobně jako si světlo nepočítá nejkratší cestu z bodu A do bodu B), jsou nástroje teorie her vhodné, neboť živočichové jsou k volbě nejvhodnější strategie dotlačeni evolucí a racionální chování je tedy zajištěno evoluční stabilitou. [25, Preface]

V evoluční teorii her (dále jen ETH) se pojem výplata hráče často nahrazuje navýšením či snížením tzv. „fitness“ jedince vyjadřující počet potomků, které jedinec bude mít, pokud zvolí danou strategii. Hodnoty výplatních funkcí už tedy na rozdíl od předchozích her nebývají arbitrárně zvoleny, ale mají reálný podklad, neboť je zde jasně dáno, jakou hodnotou budou hráči za svou strategii odměněni. Platí, že čím více potomků získají hráči při zvolení konkrétní strategie, tím větší je jejich výhra a šance na přežití.

Výplata rovna 0 neznamená, že se hráč přestane rozmnožovat. Pokud například 2 jedinci soupeří o výhodnější teritorium poskytující možnost rozmnožit se a získat 5 potomků, ale poražený má stále šanci zůstat v horším prostředí a dát život 3 potomkům, potom je výplata $v = 5 - 3 = 2$. [25, str. 12]

1.5.1 Evolučně stabilní strategie

Vůbec nejdůležitějším pojmem ETH je tzv. *evolučně stabilní strategie* (dále jen ESS). Smith popisuje ESS jako strategii, pro kterou platí, že pokud ji přijmou všichni členové populace, potom je imunní vůči všem cizím strategiím.[18] [25, str. 10]

Definice 15 (ESS) [25, str. 14]: Mějme nekonečnou populaci (či populaci, ve které není velikost limitujícím faktorem), v níž se jednotlivci střetávají po dvojicích a množí asexuálně. Pak je strategie *I* ESS, pokud vyhovuje jedné z podmínek

1. $u_1(I,I) > u_1(J,I)$
2. $u_1(I,I) = u_1(J,I) \wedge u_1(I,J) > u_1(J,J)$

---

[18] Smith tyto strategie označuje pojmem „mutant strategies“.

pro každé $J \neq I$.

Jedná se o jakési zjemnění pojmu NE. Platí, že pokud je strategie *I* ESS, pak je dvojice (I, I) NE. Obrácené tvrzení platit nemusí (viz hra *Jestřábi a hrdličky).* Podobně jako v případě NE rozlišujeme ESS v ryzích a smíšených strategiích. Pro ESS také platí, že každá hra se 2 ryzími strategiemi obsahuje řešení ESS ve smíšených strategiích (dále jen ESS ve SS). Důkaz je uveden např. v [25, str. 180]. Dále platí, že pokud je *I* ESS ve SS volící ryzí strategie *A*,*B*,*C*... s nenulovou pravděpodobností, pak

$$u_1(A, I) = u_1(B, I) = u_1(C, I) \dots = u_1(I, I).$$

Jedná se o tzv. „Bishop-Canningsovu větu“. Důkaz této věty je uveden v [25, str. 182]. Opírá se o fakt, že pokud by jedna z hodnot výplatních funkcí byla větší (tedy např. $u_1(A, I) > u_1(I, I)$), pak by bylo rozumnější volit příslušnou strategii (strategii *A*) a *I* by potom nemohla být ESS.

1.5.2 Hra Jestřábi a hrdličky

Nejznámější model ETH zvaný *Jestřábi a hrdličky* (z angl. *Hawk-Dove game*) představil John M. Smith společně s Georgem R. Pricem v článku *The Logic of Animal Conflict* [26] z roku 1973. Model popisuje zjednodušenou situaci, ve které se dva ptáci dostanou ve stejný čas ke kořisti a vybírají ze dvou ryzích strategií:[19]

1. *jestřáb* (*J*) – bojuj vždy, vzdej se až při vážném zranění,
2. *hrdlička* (*H*) – předstírej hrozbu, ale při eskalaci konfliktu uteč.

Strategie *jestřáb* ve srovnání se strategií *hrdlička* reprezentuje agresivní chování. Kořist poskytuje navýšení fitness jedince o hodnotu $v > 0$. Předpokládáme dále, že jsou oba hráči stejně silní a pokud dojde ke střetu hráčů, jenž zvolili stejnou strategii, pak si kořist rozdělí rovným dílem. Hrdličky mezi sebou nezápasí, naopak jestřábi ano a utrpí tedy zranění vyjádřené hodnotou c. Výplatní dvojmatice této hry vypadá následovně:

Hráč 2

		J	H
Hráč 1	J	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
	H	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

---

[19] Jedná se pouze o obrazné pojmenování 2 různých strategií, nikoli o druh ptactva.

Výplatní dvojmatice 10 – hra Jestřábi a hrdličky

Jedná se o symetrickou hru jejíž řešení závisí na parametrech v a c. Pokud platí $\frac{v-c}{2} > 0$ a tedy $v > c$, pak je hra shodná s hrou *Vězňovo dilema,* a NE bude dvojice (*J,J*). Strategie *jestřáb* zároveň vyhovuje podmínkám ESS a tudíž platí, že populace hrající strategii *jestřáb* nemůže být narušena populací hrající strategii *hrdlička.* Ve světě zvířat se tomuto modelu blíží souboje rypoušů sloních. Výhrou je celý harém samiček a poražení se nemohou rozmnožovat.

Zajímavější případ nastane, pokud $v \leq c$. V takovém modelu neexistuje ESS v RS, je proto potřeba hledat ESS ve SS. Víme, že musí existovat $I = (p, 1 - p)$ takové, že

$$u_1(J, I) = u_1(H, I).$$

[25, str. 15]

Platí tedy

$$p \cdot u_1(J, J) + (1 - p) \cdot u_1(J, H) = p \cdot u_1(H, J) + (1 - p) \cdot u_1(H, H).$$

Při dosazení vznikne

$$p \cdot \frac{(v - c)}{2} + (1 - p) \cdot v = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot \frac{(v - c)}{2},$$

neboli

$$p = \frac{v}{c}.$$

ESS ve SS pro $v \leq c$ je tudíž $I = \left(\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c}\right)$. Z výsledku lze vyčíst, že ryzí strategie *hrdlička* nemůže být ESS, neboť by muselo platit $\frac{v}{c} = 0$ pro $v \neq 0$.

Jestliže při střetu dochází k velkému zranění, bývá lepší se boji vyhnout, případně je na místě rozhodovat se na základě jiného faktoru, který by nejspíš vedl k výhře. Nejčastěji se jedná o velikost těla, ovšem u některých živočichů se můžeme setkat i s jinými signály, které korelují s výhodou v boji. Může to být například velikost rohů u některých druhů ovcí, hloubka kuňkání u ropuch či špičáky u paviánů. Tyto signály jsou účinné pouze tehdy, když je obtížné či nemožné je falšovat a jejich posouzení netrvá dlouho. [25, str. 114]

Alternativní strategie

Zajímavý případ nastane, pokud připustíme novou ryzí strategii zvanou *podvodník*, která při střetu dává falešný signál, že bude volit strategii *jestřáb*. Dle Smithe [25, str. 15] je tato strategie nejprve součást ESS ve SS, jakmile ovšem zmizí strategie *hrdlička*, začne být signál zbytečný a strategie *podvodník* se stává shodnou s původní strategií *hrdlička*.[20] Smith dále popisuje další alternativní evolučně stabilní strategie doplňující hru *Jestřábi a hrdličky*. Zde uvedu v krátkosti pouze dvě z nich.

Pokud připustíme asymetrii hry umožňující rozhodnout, který z hráčů je vlastníkem či se u kořisti nebo teritoriu vyskytl dříve, je možné přidat do hry *Jestřábi a hrdličky* novou ESS zvanou *„bourgeois"*. Hráč volící tuto strategii se rozhoduje pro strategii *jestřáb*, jestliže je u kořisti či teritoria první a strategii *hrdlička*, pokud se na místo dostaví později než protihráč. Dle Smithe je tato strategie ESS právě tehdy, když platí $c > v$.

Strategii *bourgeois* v přírodě kopíruje např. africký motýl zvaný *okáč pýrový*. Motýli tohoto druhu soupeří o místa, na která svítí sluníčko. Jakmile je toto místo obsazeno a přiletí další, sehrají motýli krátký souboj připomínající tanec a ten, který přiletěl později, zpravidla prohrává a odlétá pryč. Problém může nastat, jakmile se oba domnívají, že byli na místě jako první. V takovém případě bojují typicky desetkrát déle [25, str. 97]. Výhodu strategie *bourgeois* potvrzují další živočichové. Např. pavián pláštíkový či babočky paví oko [25, str. 99]. Další možná ESS doplňující hru *Jesřábi a hrdličky* je strategie zvaná *„retaliator*" (česky doslova „*odplatník*"), který kopíruje strategii protihráče podobně jako algoritmus *Půjčka za oplátku* ve hře *Vězňovo dilema*. Tedy pokud protihráč zaútočí, retaliator zvolí strategii *jestřáb*, jinak volí strategii *hrdlička.*

V ETH lze smíšenou strategii ve hře 2 hráčů zaměňovat s přerozdělením populace. [25, str. 17] Pokud strategie *jestřáb* a *hrdlička* ztotožníme s konkrétním druhem ptactva v hejnu, které se skládá z x jestřábů a y hrdliček, potom je $\frac{x}{x+y}$ pravděpodobnost, že nově příchozí hráč narazí na jestřába a $\frac{y}{x+y}$, že narazí na hrdličku. Pro vnějšího hráče je tedy situace stejná, jako kdyby hrál hru s jedním protihráčem, jehož smíšená strategie je $p^2 = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right)$ pro ryzí strategie *jestřáb*, *hrdlička*. [2, str. 162]

---

[20] Velmi zajímavý experiment je popsán v [25, str. 83]. Vědci v něm zkoumali strategie vrabců. Tmaví vrabci kopírovali strategii *jestřáb* a světlí naopak *hrdlička.* V experimentu se rozhodli vědci změnit jejich vzezření tak, že některé přebarvili na opačnou barvu a zkoumali, zda se změní jejich chování či nikoli.

Dědičnost

Jestliže navíc hráč hraje smíšenou strategii $p^1 = (z, 1 - z)$ a úspěšně předá své geny dál, potom jeho potomek zdědí tuto smíšenou strategii. [25, str. 15] Nezáleží ovšem na tom, v kolika konfliktech volil ryzí strategie s_1^1 či s_2^1. Tento fakt potvrzuje například vosa zvaná severoamerická kutilka. Tato vosa klade vajíčka do země společně s potravou (sarančaty) a čelí tedy rozhodnutí, zda vykopat vlastní díru či použít již existující, jenž může či nemusí být obsazena. Pokud obsazena není, vosa je zproštěna práce a může přichystat sarančata a naklást vajíčko. Pokud ale díra obsazena je, potom musí vosa bojovat.[21]

Rozhodnutí tohoto druhu vos je konzistentní se smíšenou strategií, která vede k ESS. Dle výzkumu H. J. Brockmann v New Hampshire [11] kope vlastní díru 59 % vos a zbylých 41 % používá již vykopanou. Úspěšnost těch, které kopaly vlastní díru byla 0,96 vajíček za 100 hodin a těch zbývajících pak 0,84 vajíček za 100 hodin. Jelikož vosy nemají dostatek času na zkoušení, která ze strategií je výhodnější a svou strategii mění v průběhu svého života (nemají tendenci hrát čistou strategii celý svůj život), je tento příklad potvrzením dědičnosti smíšené strategie p^1. [25, str. 74-75]

---

[21] Vosa se nedozví, zda je díra obsazena okamžitě. Nejdříve vajíčka naklade a poté jde lovit sarančata. To, že je díra obsazena jinou vosou, se ukáže, až když se na místě potkají. Poté začíná boj, jehož délka se odvíjí od počtu ulovených sarančat. Většinou vítězí ta vosa, která jich ulovila a zahrabala víc, neboť investovala více a nechce se toho vzdát. To bývá častěji ta, která díru vyhrabala. Délka souboje tedy závisí pouze na počtu sarančat, které přinesla poražená vosa. [25, str. 38]

2 Praktická část – Sbírka úloh

Úvod

Pro lepší orientaci v problematice, pochopení základních pojmů a procvičení si metod řešení úloh jsem se rozhodl doplnit bakalářskou práci o úlohy, které mohou použít učitelé matematiky např. ve středoškolském semináři. Zvolené úlohy nestaví důraz na mechanické počítání, ale spíš na kreativní řešení. Jsem tedy přesvědčen, že by řešení těchto úloh mohlo žáky i bavit. Dále si uvedené úlohy kladou za cíl také rozvíjet logické uvažování, které nemusí být podepřeno vysokými matematickými znalostmi a mají tedy potenciál oslovit i žáky, kterým matematika nejde či je nebaví.

Sbírka je rozdělena do dílčích kapitol a seřazena po jednotlivých tématech tak, jak jsou vysvětleny v teoretické části. Náročnost úloh postupně roste a úlohy by měly aspoň částečně vést k pochopení pojmů. Například k pochopení pojmu *dominantní strategie* je žák veden pomocí vhodně zvolených otázek. U některých úloh je potřeba, aby žák znal postup řešení. Jindy jsem se snažil úlohy zvolit tak, aby si žák dovedl řešení odvodit sám. V případě potřeby je možné nahlédnout do teoretické části, v níž je řešení náročnějších úloh podrobně popsáno. Z důvodu rostoucí náročnosti a návaznosti úloh je nutné sbírku vnímat jako celek.

2.1 Základní pojmy

Úvod

Sbírka začíná jednoduchými úlohami sloužící k připomenutí a lepšímu uchopení základních pojmů používaných nejen v dalších úlohách, ale i v problematice teorie her. Žáci by měli být schopni po splnění těchto úloh pojmy vysvětlit a pracovat s nimi. Zvolené úlohy jsou záměrně jednoduché, aby žáci neztratili motivaci hned na začátku.

<table>
<tr><td>Téma</td><td>Hráč</td></tr>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák vnímá rozmanitost pojmu <i>hráč</i> a situace, ve kterých se poznatky z teorie her uplatňují.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vyškrtej pojmy, které nepředstavují racionálního hráče:
a) fotbalista v zápase Sparta – Slavia
b) krupiér ve hře poker</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">c) traktor orající pole
d) zemětřesení na Haiti v r. 2010
e) člověk hrající PC hru Call of Duty
f) hladový lev vyhledávající kořist
g) dražitel na aukci
h) exekutor vykonávající rozhodnutí soudu</td></tr>
<tr><td>Řešení</td><td>Nevyškrtané – a), e), f), g)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Téma</td><td>Strategie</td></tr>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák umí „matematizovat“ jednoduché úlohy, což se později využívá při tvorbě výplatní matice.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Červeně podtrhni části vět, které v následujících hrách označují hráče a zeleně ty, které označují jejich strategie:
a) Adam chce jet vlakem z Benešova do Prahy a rozhoduje se, zda si koupí lístek na vlak či nikoli.
b) Prodavač v obchodě s telefony se rozhoduje, zda bude nabízet vybraný mobil za 20 tisíc Kč, nebo 19 tisíc Kč.
c) Bob chce koupit své přítelkyni dárek k narozeninám. V obchodě může koupit kytku, boty a poukaz na nákup v hodnotě 2500 Kč.
d) Alice, Bára a Cecílie hrají deskovou hru Dostihy a sázky. Alice přemýšlí, zda se jí více vyplatí koupit koně s názvem „Napoli“, nebo má zahrát akční kartu a poslat Báru na políčko Distance.</td></tr>
<tr><td>Řešení</td><td>a) Adam chce jet vlakem z Benešova do Prahy a rozhoduje se, zda si koupí lístek na vlak či nikoli.
b) Prodavač v obchodě s telefony se rozhoduje, zda bude nabízet vybraný mobil za 20 tisíc Kč, nebo 19 tisíc Kč.
c) Bob chce koupit své přítelkyni dárek k narozeninám. V obchodě může koupit kytku, boty a poukaz na nákup v hodnotě 2500 Kč.</td></tr>
</table>

	d) Alice, Bára a Cecílie hrají deskovou hru Dostihy a sázky. Alice přemýšlí, zda se jí více vyplatí koupit koně s názvem „Napoli“, nebo má zahrát akční kartu a poslat Báru na políčko Distance.

Téma	Výplata
Cíl	Žák rozumí vztahu mezi čísly (body) a osobními preferencemi.

Číselně ohodnoť následující sporty dle svého uvážení (1 – nesnáším, 10 – miluji), potom je seřaď od svého nejméně oblíbeného po svůj nejoblíbenější.

Sport	Body
Fotbal	
Basket	
Hokej	
Tenis	
Šachy	

Téma	Výplata
Cíl	Žák vnímá subjektivnost preferencí hráčů v úlohách teorie her a umí k nim vhodně přiřadit čísla, se kterými poté může pracovat.

Parta pěti kamarádů se rozhoduje, kterou hru si zahrají. Adam má nejraději karetní hru *Poker* a nechce hrát *Monopoly*. Bob preferuje *Monopoly* víc než *Člověče, nezlob se!* a *Poker* víc než *Monopoly*. Cecílie nechce hrát žádnou hru s figurkami, Denisa si chce zahrát jakoukoli hru a Emil chce hrát to samé, co Bob. Ke každému z kamarádů připiš všechny výše uvedené hry a ohodnoť je příslušnými čísly z množiny $\{-1, 0, 1\}$ vyjadřující počet bodů v závislosti na jejich subjektivních preferencí. Kladně ty, které daný hráč chce hrát, záporně ty, které hrát nechce. Víc bodů by měla získat ta hra, která je v očích daného hráče lepší. Pokud se k některé z her nijak nevyjádřil, můžeme předpokládat, že je k ní lhostejný a ohodnotit tak tuto volbu hodnotou 0. Poté rozhodni, kterou hru bys partě doporučil a svou odpověď odůvodni.

Řešení

	Poker	Monopoly	Člověče

Adam	1	−1	0
Bob	1	0	−1
Cecílie	0	−1	−1
Denisa	1	1	1
Emil	1	0	−1

Jednou z možností je sečíst jednotlivé preference a zvolit hru, které odpovídá největší číslo. Tímto způsobem vyhrává hra *Poker,* neboť mu přísluší nejvíce hlasů.

Téma	Výplata
Cíl	Žák umí ukázat na příkladu, kterým problémem se teorie her může zabývat a dovede pracovat ve skupině.

Přiřaď do následující tabulky svých 5 nejoblíbenějších filmů a porovnej je se svými spolužáky. Poté se zamysli, jakým způsobem může větší skupina lidí rozhodnout, na který film se večer společně podívají. Jakými nedostatky trpí většinový volební systém, ve kterém každý zvolí jednu možnost a vyhraje ta, která získá většinu hlasů? Řeší tebou navržený systém tento nedostatek?

Pořadí	Film
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Téma	Klasifikace
Cíl	Prověření znalostí základního rozdělení teorie her a připomenutí toho, co všechno může být považováno za hru, a tedy kde všude se žáci s tímto oborem mohou setkat.

Přiřaď následující hry do tabulky vedle pojmů, ke kterým patří (někdy více možností):

a) Poker
b) Šachy
c) Ruleta
d) Kámen, nůžky, papír
e) Běžný typ aukce, ve které lidé přihazují po 100 korunách a ten, kdo dá nejvíce, dostane za tu cenu předmět aukce
f) Fotbalová penalta

Hry 2 hráčů		Hry (3 a) více hráčů	
Symetrické hry		Asymetrické hry	
Hry s konstantním součtem		Hry s nenulovým součtem	
Hry úplnými informacemi		Hry s neúplnými informacemi	
Sekvenční hry		Simultánní hry	
Kooperativní hry		Nekooperativní hry	

Řešení

Hry 2 hráčů	a), b), c), d), e), f)	Hry (3 a) více hráčů	a), d), e)
Symetrické hry	a), b), d), e)	Asymetrické hry	f)
Hry s konstantním součtem	vše	Hry s nenulovým součtem	
Hry úplnými informacemi	b), c)	Hry s neúplnými informacemi	a), d), e), f)
Sekvenční hry	a), b), e)	Simultánní hry	d), f)
Kooperativní hry		Nekooperativní hry	vše

Téma	Klasifikace
Cíl	Žák rozumí základnímu rozdělení teorie her a umí uvést u jednotlivých druhů příklad.

Uveď příklady jednotlivých her:

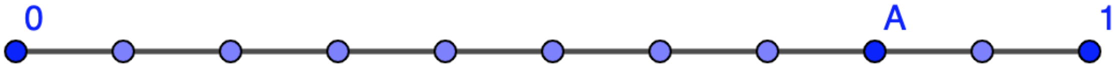
a) symetrická hra 2 hráčů

b) kooperativní hra s úplnými informacemi
c) koordinační hra
d) antikoordinační hra
e) sekvenční hra s nulovým součtem

Téma	Dominantní strategie
Cíl	Žák chápe pojem *dominantní strategie,* k němuž byl doveden bez užití jeho definice za pomocí vhodně zvolených otázek.

Dva obchodníci si chtějí na pláži otevřít stánek se zmrzlinou. Turisté vyhledávající zmrzlinu jsou rovnoměrně rozmístěni po pláži a vždy si vybírají stánek, který je blíže (pokud je vzdálenost stejná, tak se rozhodují náhodně). Pláž je reprezentována následujícím intervalem:

a) První obchodník se rozhodl zvolit pozici blíže k jedničce a jeho volba je označena písmenkem A. Červeně vybarvi části úsečky, které by pro druhého obchodníka znamenaly menší příjem a zeleně ty, které druhému obchodníkovi zaručí více turistů.



b) Pokud by si druhý obchodník postavil stánek v levé polovině zeleného intervalu, mohl by si první obchodník polepšit? Jak?
c) Po vyčerpávajícím přesouvání se z místa na místo se oba obchodníci rozhodli vyřešit problém následující dohodou. Oba dva si postaví stánek vedle sebe uprostřed pláže. Vyplatí se jednomu z nich dohodu porušit?
d) Jak by se situace změnila, kdyby na jeden konec pláže přijel autobus, který by přivezl stejný počet cestujících, jako byl původně na celé pláži?

e) Jak by se původní situace bez příjezdu autobusu změnila, kdyby na pláž dorazil třetí obchodník? Znamenalo by to, že by uprostřed pláže měli stánek vedle sebe všichni tři? Proč?	
Řešení	a) interval mezi bodem 0,2 a bodem A b) ano, postavil by si stánek napravo hned vedle druhého obchodníka c) ne d) oba stánky by se přemístili na kraj intervalu e) ne, protože jeden z nich by musel být uprostřed a neměl by tedy žádné zákazníky

Téma	Dominantní strategie
Cíl	Žák umí pracovat s pojmem dominantní a dominovaná strategie a na základě těchto znalostí řeší úlohy teorie her.
Prodávající se rozhodne dražit stokorunu a stanoví podmínky. Přihazovat se smí po 10 korunách, aukce končí, jakmile už žádný zájemce nehodlá přihodit. Zájemce s nejvyšší nabídkou (vydražitel) zaplatí svou nabídku a obdrží stokorunu. Zájemce s druhou největší nabídkou také zaplatí svou nabídku, ale neobdrží nic. Předpokládejme, že jsou všichni hráči racionální. Zamysli se, zda se vyplatí do aukce vstoupit a přihodit tak 10 Kč jako první. (Nápověda: Pro řešení úlohy je vhodné pojmenovat si strategii přihodit a nepřihazovat a rozdělit hru na jednotlivá kola) (inspirováno z [28])	
Řešení	Pokud předpokládáme, že jsou hráči racionální a nikdo tedy nechce skončit s druhou největší nabídkou a přijít tak o peníze, pak se vyplatí přihodit 10 Kč jako první a obdržet tak 90 Kč. Strategie *nepřihazovat* a počkat na další kolo, než přihodí ostatní, je tedy dominována strategií *přihodit* jako první. Další kolo je strategie *nepřihazovat* dominantní strategií strategie *přihodit.*

Téma	Dominantní strategie

<table>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák dokáže vhodně aplikovat definici pojmu dominantní strategie v dané situaci.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Alice a Bob mají za úkol napsat na papírek ve stejný okamžik jedno z čísel: 1, 2, 3, nebo 4. Ten, jehož číslo bude blíže 2/3 průměru obou čísel dostane 100 Kč. V případě, že dojde ke shodě, si stokorunu rozdělí a každý si odnese 50 Kč. Vyřaď dominované strategie. (inspirováno z [19])</td></tr>
<tr><td>Řešení</td><td>Pro řešení této úlohy sice není potřeba aparát teorie her, ale hodil by se například přepis do tabulky. Pak se úloha stává výrazně jednodušší. Rozhodl jsem se ji tedy připomenout později v kapitole Výplatní matice, aby žáci viděli, že znalost metod teorie her usnadňuje řešení takovýchto úloh. Zbyde jen jedna dominantní strategie, a to číslo 1.</td></tr>
</table>

2.2 Maticové hry

Úvod

Výplatní matice je jeden ze základních pojmů teorie her, který slouží především k jednoduššímu popisu dané situace a následnému řešení, neboť v ní jsou obsaženy všechny důležité informace, které k řešení potřebujeme. Z tohoto důvodu jsem se rozhodl některé úlohy v této kapitole věnovat právě tvorbě výplatní matice a práci s ní. Později na to navazují úlohy vedoucí k řešení konkrétních výplatních matic.

Téma	Výplatní matice
Cíl	Žák umí pracovat s pojmem *výplatní matice*.

Z následující výplatní matice (tabulky) antagonistické hry s nulovým součtem urči:

a) počet hráčů,
b) počet ryzích strategií každého hráče,
c) velikost výplaty hráče *Lorem*, pokud oba zvolí strategii B,
d) velikost výplaty hráče *Ipsum*, pokud hráč *Lorem* zvolí strategii A a hráč *Ipsum* strategii C.

		Ipsum		
		A	B	C
Lorem	A	1	3	5
	B	2	4	6

Řešení	a) 2 b) Lorem – 2, Ipsum – 3 c) 4 d) -5

Téma	Výplatní matice
Cíl	Žák umí pracovat s pojmem *výplatní matice* a rozumí pojmu *hra s nulovým součtem*.

1) Rozhodni, jak bude vypadat výplatní matice antagonistické hry s nulovým součtem *hráče 2,* pokud víš, že výplatní matice *hráče 1* je:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	0	-1
	B	-1	2

2) Rozhodni, jak bude vypadat výplatní matice antagonistické hry s nulovým součtem *hráče 2,* pokud víš, že výplatní matice *hráče 1* je:

		Hráč 2	
		C	D
Hráč 1	A	a	c
	B	b	d

3) Vymysli situaci, která může být reprezentována následující výplatní maticí hry s nulovým součtem:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	1	-1
	B	-1	1

Řešení

1) Podobně jako původní výplatní matice, akorát všechny výplaty budou mít opačné hodnoty.
2)

		Hráč 1	
		A	B
Hráč 2	C	$-a$	$-b$
	D	$-c$	$-d$

<table>
<tr><td></td><td>3) Řešením může být například penalta ve fotbale. Hráč 1 je brankář a snaží se skočit na správnou stranu. Strategie A může být např. „vlevo“, strategie B pak „vpravo“.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Téma</td><td>Výplatní matice</td></tr>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák umí vytvořit <i>výplatní matici</i> pro slovně zadanou úlohu.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rozhodni, jak by mohla vypadat výplatní matice následující hry: <i>„Alice a Bob hrají hru Panna-orel. Každý vlastní jednu pětikorunu a rozhodují se s rukama za zády, zda si ji v ruce ponechat, či nikoli. Naráz nastaví ruce v pěst naproti sobě a ve stejný moment dlaně otevřou. Jestliže jeden z nich v ruce pětikorunu drží a druhý nikoli, dostává Bob od Alice její pětikorunu. Pokud se Alice i Bob rozhodli stejně, musí Bob předat Alici svou pětikorunu.“</i></td></tr>
<tr><td>Řešení</td><td><table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Bob</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>otevřít</td><td>zavřít</td></tr>
<tr><td>Alice</td><td>otevřít</td><td>5</td><td>−5</td></tr>
<tr><td></td><td>zavřít</td><td>−5</td><td>5</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Téma</td><td>Výplatní matice – (a)symetrická hra</td></tr>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák rozumí pojmům <i>symetrická</i> a <i>asymetrická hra</i>.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rozhodni u každé z následujících matic, zda popisuje symetrickou či asymetrickou hru:
<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Hráč 2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>Hráč 1</td><td>A</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>B</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>
Hráč 2</td></tr>
</table>

		A	B
Hráč 1	A	0	4
	B	0	4

Hráč 2

		A	B	C
Hráč 1	A	1	1	1
	B	1	1	1
	C	1	1	1

Hráč 2

		A	B	C
Hráč 1	A	1	1	1
	B	1	1	1

Řešení	Symetrická Asymetrická Symetrická Asymetrická (hráči nemají stejný prostor strategií)

Téma	Výplatní matice – symetrická hra Lov jelena
Cíl	Žák rozumí pojmům *symetrická* a *asymetrická hra* a umí u takových her vytvořit *výplatní matici*.
Rozhodni, zda se jedná o symetrickou či asymetrickou hru a své rozhodnutí odůvodni. *„Dva lovci se nezávisle rozhodují, zda ulovit jelena či zajíce. Pokud se oba rozhodnou pro jelena, tak jsou odměněni výplatou 3. Pokud se oba rozhodnou pro zajíce, tak jsou odměněni výplatou 1. Pokud se jeden rozhodne ulovit zajíce a druhý jelena, tak oba získají výplatu 0.“*	
Řešení	**Lovec 2**

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>jelen</td><td>zajíc</td></tr>
<tr><td>Lovec 1</td><td>jelen</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>zajíc</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
Symetrická hra
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Téma</td><td>Smíšená strategie</td></tr>
<tr><td>Cíl</td><td>Žák rozumí pojmu <i>smíšená strategie</i> a umí rozhodnout u jednoduché úlohy, jakou strategii s jakou pravděpodobností zvolit. Žák zná základní pojmy, ví, jak vypadá výplatní matice a co musí obsahovat.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Navrhni, jak by mohla vypadat matice hry <i>Kámen, nůžky, papír</i> pro 2 hráče, ve které musí poražený hráč zaplatit výherci 100 Kč. Vhodně pojmenuj všechny strategie.
a) Kterou ze tří strategií bys hráčům doporučil?
b) Hráči se rozhodli, že budou hrát 10 kol. Vyplatí se volit neustále stejnou strategii?
c) K jednotlivým strategiím připiš pravděpodobnost, se kterou mají hráči volit danou strategii:
<table>
<tr><th>Strategie</th><th>Pravděpodobnost</th></tr>
<tr><td>Kámen</td><td></td></tr>
<tr><td>Nůžky</td><td></td></tr>
<tr><td>Papír</td><td></td></tr>
</table>
d) Kolikrát můžeme očekávat, že <i>hráč 1</i> zahraje za 10 kol strategii <i>nůžky</i>, pokud je jeho smíšená strategie p^1 pro strategie <i>kámen, nůžky papír</i> v tomto pořadí rovna $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Viz tabulka:
<table>
<tr><th>Strategie</th><th>Pravděpodobnost</th></tr>
<tr><td>Kámen</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Nůžky</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>Papír</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

e) Jak by se matice změnila, kdyby *kámen* porážel nejen *nůžky*, ale i *papír*? Mělo by potom smysl hrát jinou strategii, nežli pokaždé *kámen*? Vyjádři tuto smíšenou strategii pomocí rozložení pravděpodobností.

f) Jak by se matice změnila, kdyby v původní hře výherce za zvolení strategie *kámen* proti strategii *nůžky* obdržel od poraženého hráče dvojnásobek peněz? Doporučil bys hráčům změnit strategii?

Řešení	a) libovolnou b) ne c) všude 1/3 d) 5krát e) (1,0,0) f) ano, hrát častěji kámen a méně častěji nůžky

Téma	Smíšená strategie
Cíl	Žák rozumí pojmu *smíšená strategie* a umí nalézt rovnovážnou strategii maticové hry.

U každé z následujících matic nalezni rovnovážnou strategii hráče 1:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	1	2
	B	2	1

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	0	4
	B	4	4

Hráč 2

Hráč 1

	A	B	C
A	1	1	1
B	2	2	2
C	3	3	3

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	-1	1
B	3	-1

Řešení	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $(0,1)$ $(0,0,1)$ $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

Téma	Sedlový bod
Cíl	Žák umí nalézt maximum a minimum z množiny porovnatelných prvků.

V následujících maticích zeleně zvýrazni prvky, které jsou maximální ve sloupci a modře ty, které jsou minimální v řádku.

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	1	2
B	3	4

Hráč 2

	A	B

Hráč 1	A	−1	1
	B	3	−1

Hráč 2

		A	B	C
Hráč 1	A	3	2	3
	B	−2	1	−2
	C	5	1	3

Řešení

Hráč 2

		A	B
Hráč 1	A	1	2
	B	3	4

Hráč 2

		A	B
Hráč 1	A	−1	1
	B	3	−1

Hráč 2

		A	B	C
Hráč 1	A	3	2	3
	B	−2	1	−2
	C	5	1	3

Téma	Sedlový bod
Cíl	Žák rozumí pojmu *sedlový bod* a umí nalézt rovnovážné řešení maticové hry.

U každé z následujících matic rozhodni, zda existuje rovnovážné řešení (sedlový bod). Pokud ano, zvýrazni prvek, který reprezentuje toto řešení a urči cenu hry:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	1	2
	B	3	4

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	−1	1
	B	3	−1

			Hráč 2	
		A	B	C
Hráč 1	A	3	2	3
	B	−2	1	−2
	C	5	1	3

Řešení

Ano:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	1	2
	B	3	4

Cena hry = 3.

Ne:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	−1	1
	B	3	−1

Ano:

		Hráč 2		
		A	B	C
Hráč 1	A	3	2	3
	B	−2	1	−2
	C	5	1	3

Cena hry = 2.

2.3 Dvojmaticové hry

Úvod

Následujícími úlohami se pokouším navázat na předchozí kapitolu *Výplatní matice*. První úlohy tedy mají za úkol slepit porozumění výplatní matice s výplatní dvojmaticí, teprve poté dostává žák za úkol takové úlohy řešit. Podobně jako v kapitole *Výplatní matice* zde kladu důraz i na tvorbu dvojmatice ze slovního zadání.

Téma	Hra s nulovým a konstantním součtem
Cíl	Žák umí převádět dvojmatice s konstantním součtem na dvojmatice s nulovým součtem a naopak. Trojice úloh by měla vést také k porozumění, že všechny výplatní matice se dají přepsat do výplatní dvojmatice.

1) Doplň hodnoty (výplaty) *hráče 2* do tabulky (výplatní dvojmatice), jestliže víš, že se jedná o hru s **nulovým** součtem.

Hráč 2

		A	B
Hráč 1	A	1,	3,
	B	2,	4,

Hráč 2

		A	B
Hráč 1	A	$a,$	$c,$
	B	$b,$	$d,$

2) Doplň zbylé hodnoty (výplaty) *hráče 2* do tabulky (výplatní dvojmatice), jestliže víš, že se jedná o hru s **konstantním** součtem.

Hráč 2

		A	B
Hráč 1	A	3,9	3,
	B	$-5,$	0,

3) Přepiš následující matice her s **konstantním** součtem na hry s **nulovým** součtem:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	1,1	0,2
	B	1,1	2,0

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	−1,11	3,7
	B	−3,13	8,2
	C	4,6	0,10

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	a, b	e, f
	B	c, d	g, h

Řešení

1)

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	$1, -1$	$3, -3$
	B	$2, -2$	$4, -4$

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	$a, -a$	$c, -c$
	B	$b, -b$	$d, -d$

2)

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	$3,9$	$3,9$
B	$-5,17$	$0,12$

3)

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	$0,0$	$-1,1$
B	$0,0$	$1,-1$

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	$-6,6$	$-2,2$
B	$-8,8$	$3,-3$
C	$-1,1$	$-5,5$

Pro $a+b=c+d=e+f=g+h=K$

Hráč 2

Hráč 1

	A	B
A	$a-\frac{K}{2}, b-\frac{K}{2}$	$e-\frac{K}{2}, f-\frac{K}{2}$
B	$c-\frac{K}{2}, d-\frac{K}{2}$	$g-\frac{K}{2}, h-\frac{K}{2}$

Téma	Výplatní dvojmatice
Cíl	Žák dovede pracovat s výplatní dvojmaticí.

Z následující dvojmatice urči:

a) Počet hráčů.
b) Jména hráčů.
c) Počet ryzích strategií každého hráče.
d) Hodnotu x, pokud lev získává při zvolení strategie *Útok* pokaždé opačnou hodnotu výplaty anakondy.
e) Velikost výplaty anakondy, pokud oba zvolí strategii *Útok.*
f) Zda se jedná o hru s konstantním součtem.
g) Zda se jedná o symetrickou hru.

		Lev	
		Řev	Útok
Anakonda	Obrana	$0,1$	$-5,5$
	Útok	$2,-5$	$-2,2$
	Zastrašování	$0,0$	$1,x$

Řešení	a) 2 b) Anakonda, Lev c) Anakonda – 3, Lev – 2 d) -1 e) -2 f) ne g) ne

Téma	Výplatní dvojmatice – tvorba
Cíl	Žák dovede vytvořit vhodnou tabulku či dvojmatici pro danou situaci.

Alice a Bob k sobě chovají vzájemnou nenávist, ale mají spoustu společných kamarádů. Oba chtějí uspořádat večírek a pozvat tam všechny své kamarády. V úvahu přichází pouze pátek a sobota. Oba preferují sobotu, ale pokud budou pořádat večírek ve stejný den, tak jejich kamarádi nebudou vědět, na který z večírků přijít a pro Alici i Boba by to byla katastrofa, kterou bychom mohli vyčíslit výplatou – 10 pro oba. Pokud jeden z nich uspořádá večírek v pátek a druhý v sobotu, tak ten, kdo zvolí sobotu, bude odměněn výplatou 5 a ten, kdo zvolí pátek, bude odměněn výplatou 4. Navrhni výplatní dvojmatici této hry. (inspirováno z [19])

Řešení

		Bob	
		Pátek	Sobota
Alice	Pátek	−10, −10	4,5
	Sobota	5,4	−10, −10

Téma	Dominantní strategie
Cíl	Žák dovede rozpoznat a eliminovat všechny dominované strategie ve výplatní dvojmatici.

Eliminuj všechny **silně** dominované strategie v následujících dvojmaticích:

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	0,1	0,3
	B	1,2	1,4

		Hráč 2	
		A	B
Hráč 1	A	−1,1	2,99
	B	0, −1	3,0

			Hráč 2	
		A	B	C
Hráč 1	A	1,1	1,1000	1,10
	B	2,1	2,1	2, −1000
	C	3,1	3,1	3, −5

Řešení

Hráč 2

		~~A~~	B
Hráč 1	~~A~~	~~0,1~~	~~0,3~~
	B	~~1,2~~	1,4

Hráč 2

		~~A~~	B
Hráč 1	~~A~~	~~−1,1~~	~~2,99~~
	B	~~0, −1~~	3,0

Hráč 2

		A	B	~~C~~
Hráč 1	~~A~~	~~1,1~~	~~1,1000~~	~~1,10~~
	B	2,1	2,1	~~2, −1000~~
	C	3,1	3,1	~~3, −5~~

Téma	Dominantní strategie
Cíl	Žák dovede vytvořit tabulku či dvojmatici dané hry a rozpoznat a eliminovat všechny dominované strategie.

K následující úloze vytvoř tabulku (výplatní dvojmatici) a poté vyřaď dominované strategie. Alice a Bob mají za úkol napsat na papírek ve stejný okamžik jedno z čísel: 1, 2, 3, nebo 4. Ten, jehož číslo bude blíže 2/3 průměru obou čísel dostane 100 Kč. V případě, že dojde ke shodě, si stokorunu rozdělí a každý si odnese 50 Kč. (inspirováno z [19])

Řešení

Bob

		1	~~2~~	~~3~~	4
Alice	1	50,50	~~100,0~~	~~100,0~~	~~100,0~~
	~~2~~	~~0,100~~	~~50,50~~	~~100,0~~	~~100,0~~
	~~3~~	~~0,100~~	~~0,100~~	~~50,50~~	~~100,0~~
	4	~~0,100~~	~~0,100~~	~~0,100~~	~~50,50~~

Téma	Dominantní strategie
Cíl	Žák dovede vytvořit tabulku či dvojmatici dané hry, rozpoznat a eliminovat všechny dominované strategie a řešit jednodušší úlohy teorie her.

1) Ve městě jsou dvě hospody. Obě si mohou účtovat za pivo vlastní cenu, a to 20 Kč, 40 Kč, nebo 50 Kč (cena výroby je zanedbatelná). Turisté v tomto městě vypijí dohromady 6000 piv každý měsíc. Pro ně cena není rozhodující, a tak volí jednu ze dvou hospod náhodně. Lokální štamgasté vypijí celkem 4000 piv měsíčně, ale vybírají si pečlivě hospodu, kde je pivo levnější. Pokud pivo v obou hospodách stojí stejně, pak si vybírají hospodu náhodně podobně jako turisté. Kterou z cen má každá z hospod zvolit, aby vydělala co nejvíce? (Nápověda: vytvoř si výplatní dvojmatici) (inspirováno z [19])
2) Je vidět, že absence turistů zvyšuje konkurenci hospod. Pokud lokální štamgasté vypijí 4000 piv měsíčně, jaký je maximální počet piv, které by museli vypít turisté, aby cena piva klesla na 20 Kč a jaký je jejich minimální počet, aby cena vzrostla na 50 Kč? (inspirováno z [19])

Řešení

1) Výplaty odpovídají desetitisícům Kč:

Hospoda 2

		~~20 Kč~~	40 Kč	~~50 Kč~~
Hospoda 1	~~20 Kč~~	~~10,10~~	~~14,12~~	~~14,15~~
	40 Kč	~~12,14~~	20,20	~~28,15~~
	~~50 Kč~~	~~15,14~~	~~15,28~~	~~25,25~~

2) Pro x tisíc turistů:

Pro $x > 16$ je strategie 40 Kč dominována strategií 50 Kč.

Hospoda 2

		20 Kč	~~40 Kč~~	50 Kč
Hospoda 1	20 Kč	$4 + x, 4 + x$	~~$8 + x, 2x$~~	$8 + x; 2{,}5x$
	~~40 Kč~~	~~$2x, 8 + x$~~	~~$2 \cdot (4 + x, 4 + x)$~~	~~$16 + 2x; 2{,}5x$~~

50 Kč	$2{,}5x; 8+x$	~~$2{,}5x; 16+2x$~~	$2{,}5\cdot(4+x, 4+x)$

Strategie 20 Kč nikdy nebude dominovat strategii 50 Kč, neboť $10+2{,}5x$ je vždy větší než $8+x$ pro kladná x. Takže pro žádný počet turistů nebude výhodné nabízet pivo za cenu 20 Kč.

Nabízet pivo za cenu 50 Kč se vyplatí v případě, že turisté vypijí více než 16 tisíc piv měsíčně.

Téma	Nejlepší odpověď
Cíl	Žák rozumí pojmům *nejlepší odpověď hráče* a *dominovaná strategie*.

Je možné, aby nejlepší odpověď jednoho z hráčů byla současně jeho silně dominovaná strategie?

Řešení	Ne.

Téma	Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích
Cíl	Žák dovede nalézt Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích.

Nalezni všechna Nashova ekvilibria v ryzích strategiích ve hře, která je dána touto výplatní maticí:

Hráč 2

Hráč 1		A	B	C
	A	1,0	1,1	4,2
	B	2,1	3,0	2, −1000
	C	3,1	9,0	3, −5

Řešení

Hráč 2

Hráč 1		A	B	C
	A	1,0	1,1	4,2

B	2,1	3,0	2, −1000
C	3,1	9,0	3, −5

Téma	Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích
Cíl	Žák dovede vypočítat Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích.

Dva lovci se nezávisle rozhodují, zda ulovit jelena či zajíce. Pokud se oba rozhodnou pro jelena, tak jsou odměněni výplatou 3. Pokud se oba rozhodnou pro zajíce, tak jsou odměněni výplatou 1. Pokud se jeden rozhodne ulovit zajíce a druhý jelena, tak lovec jelena získá výplatu 0 a lovec zajíce získá výplatu 2. Rozhodni, zda se ve hře vyskytuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Pokud ano, tak napiš, které dvojice strategií k rovnovážnému řešení vedou a rozhodni, zda se jedná o koordinační či antikoordinační hru.

Řešení

Lovec 2

		Jelen	Zajíc
Lovec 1	Jelen	3,3	0,2
	Zajíc	2,0	1,1

Koordinační hra

Téma	Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích
Cíl	Žák dovede vypočítat Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích.

Ve filmu *Rebel bez příčiny* se dva teenageři rozhodnou ukázat svou kuráž tak, že se bok po boku rozjedou svými auty k útesu a ten, kdo první zabrzdí, je považován za sraba. Pokud nezabrzdí ani jeden, situace skončí katastrofou a oba zemřou. Urči, jak by mohla vypadat matice/dvojmatice této hry a nalezni rovnovážné řešení (Nashovo ekvilibrium) v ryzích strategiích. V čem se tato hra oproti hře předchozí liší? Zkus vymyslet jiný příklad antikoordinační hry.

Řešení

Teenager 2

		Zabrzdit	Počkat
Teenager 1	Zabrzdit	$-1,-1$	$-10,10$
	Počkat	$10,-10$	$-100,-100$

Antikoordinační hra

Téma	Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích
Cíl	Žák dovede vypočítat Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích.

Vytvoř tabulku/dvojmatici následující hry a urči, zda obsahuje Nashovu rovnováhu v RYZÍCH strategiích. Pokud ne, nalezni Nashovu rovnováhu ve SMÍŠENÝCH strategiích: *„Alice a Bob hrají hru Panna-orel. Každý vlastní jednu pětikorunu a rozhodují se s rukama za zády, zda si ji v ruce ponechají, či nikoli. Naráz nastaví ruce v pěst naproti sobě a ve stejný moment dlaně otevřou. Jestliže jeden z nich v ruce pětikorunu drží a druhý nikoli, dostává Bob od Alice její pětikorunu. Pokud se Alice i Bob rozhodli stejně, musí Bob předat Alici svou pětikorunu.“*

Řešení

Bob

		Panna	Orel
Alice	Panna	$5,-5$	$-5,5$
	Orel	$-5,5$	$5,-5$

N. E. v ryzích strategiích zde neexistuje, rovnovážné řešení ve smíšených strategiích je $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Téma	Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích
Cíl	Žák dovede vypočítat Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích a rozumí pojmu nejlepší strategie a reakční křivky.

Pro dvojmatici hry *Souboj pouhlaví*

Žena

	box	balet

Muž	box	2,1	0,0
	balet	0,0	1,2

a) Urči nejlepší odpověď hráče *Muž* na ryzí strategii *balet* hráče *Žena.*

b) Narýsuj reakční křivky a nalezni rovnovážný bod (NE)

Řešení	a) *balet* b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Téma	Vězňovo dilema
Cíl	Žák dovede vypočítat Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích.

Nalezni všechna $x \in \mathbb{Z}$, pro která x je (x, x) Nashovým ekvilibriem a zamysli se, v čem je tato hra netradiční.

		Hráč 2	
		Strategie 1	Strategie 2
Hráč 1	Strategie 1	$0,0$	$-100,1$
	Strategie 2	$1,-100$	x,x

Řešení	$\{x \in \mathbb{Z}, x \geq -100\}$

Téma	Vězňovo dilema
Cíl	Žák zná hru *Vězňovo dilema* a umí vypočítat Nashovo ekvilibrium.

Policie zadržela dva podezřelé – Adama a Boba – a drží je odděleně. Důkazy, které má policie, nejsou dostatečné pro usvědčení, takže se musí spoléhat na přiznání obviněných. Adam a Bob mají možnost toho druhého udat. Pokud budou oba svědčit proti sobě, délka jejich trestu bude 6 let. Pokud první udá druhého a druhý nebude vypovídat, udavač bude osvobozen a druhý odsouzen na plných 10 let. Pokud oba odmítnou vypovídat, budou odsouzeni oba za drobnější přestupky jen na 2 roky. (inspirováno z [31])

a) Vytvoř dvojmatici, která vhodně popisuje tuto situaci.
b) Rozhodni, zda se jedná o symetrickou hru s nulovým součtem.
c) Urči, zda se ve hře nachází dominantní strategie. Pokud ano, napiš která.
d) Nalezni rovnovážný bod (Nashovo ekvilibrium).
e) Nalezni Paretovo optimum.
f) Jaký je maximální počet let ve vězení, který by policie stále ještě mohla nabídnout Adamovi, aby se mu vyplatilo rozhodnout se udat Boba, v případě, že se Bob rozhodl mlčet? (Mějme na paměti, že si policie nepřeje nechat oba zloděje na svobodě)

Řešení

a)

Bob

		Mlčet	Svědčit
Adam	Mlčet	−2, −2	−10,0
	Svědčit	0, −10	−6, −6

b) Jedná se o symetrickou hru, ale ne o hru s nulovým součtem.
c) Svědčit
d) Nashovo ekvilibrium je označené zeleně.
e) Paretovo optimum je označené modře.
f) 1 rok.

Téma	Paretovo optimum
Cíl	Žák dovede nalézt Paretovo optimum.

Nalezni Paretovo optimum ve hře zadané následující dvojmaticí:

Hráč 2

		C	D
Hráč 1	A	3,3	0,2
	B	2,0	1,3

Řešení	(A, C)

Závěr

Cílem této práce bylo poskytnout vhodný text strategické teorie her a vytvořit odpovídající sbírku úloh včetně řešení. Tento cíl byl dle mého názoru splněn. Dnes je předmět teorie her široce vyučován především na ekonomických vysokých školách. Zájemci se s ním ale setkají už na střední škole, ať už kvůli přípravě na VŠ nebo z osobních důvodů. Jsem tedy přesvědčen, že práce může posloužit nejen žákům středních škol, ale i středoškolským učitelům v přípravě semináře či při snaze obohatit standardní hodiny matematiky.

Velkou část práce tvoří sbírka úloh. Sbírku jsem se snažil členit podobně jako teoretickou část práce, aby jí úlohy odpovídaly. Úlohy jsou seřazeny po tématech se stoupající náročností. První úlohy jsou záměrně jednoduché, aby jejich řešení žáky neodradilo.

Zde je nutné podotknout, že řešení těch úloh, které bychom mohli považovat za triviální, není explicitně vysvětleno v teoretické části. S jejím řešením by ale žáci neměli zápasit a v případě potřeby je u všech úloh uvedeno správné řešení. Řešení jsem se rozhodl neuvést jen u 3 úloh, neboť pro ně neexistuje pouze jedno správné řešení. Nejprve u 2 úloh na subjektivní přiřazení číselných hodnot ke sportům a filmům, poté u úlohy na vymyšlení vlastních her.

Řešením úloh ze sbírky se žáci učí pracovat nejen s pojmy teorie her, ale rozvíjí si především matematické dovednosti. Učí se zacházet s matematickými definicemi, přepisovat slovně zadaný text do jazyka matematiky a uplatňovat naučené postupy při počítání. Zároveň věřím, že řada úloh (především ty, které vedou k tvorbě a práci s maticí) má potenciál v jednoduchosti ilustrovat, kde se žáci s těmito matematickými pojmy mohou setkat a odpovědět na otázky typu „K čemu nám to je?“.

Seznam nositelů Nobelovy ceny za ekonomii za přínos k teorii her:

1.	Paul R Milgrom	2020
2.	Robert B Wilson	2020
3.	Jean Tirole	2014
4.	Lloyd S. Shapley	2012
5.	Alvin E. Roth	2012
6.	Roger B. Myerson	2007
7.	Leonid Hurwicz	2007
8.	Eric S. Maskin	2007
9.	Robert J. Aumann	2005
10.	Thomas C. Schelling	2005
11.	William Vickrey	1996
12.	Robert E. Lucas Jr.	1995
13.	John C. Harsanyi	1994
14.	John F. Nash Jr.	1994
15.	Reinhard Selten	1994
16.	Kenneth J. Arrow	1972
17.	Paul A. Samuelson	1970

Použité zdroje

[1] BERKA, Petr. *Teorie her* [online]. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://sorry.vse.cz/~berka/docs/4iz430/P03-Teorie%20her.pdf

[2] BINMORE, K. G. *Teorie her: --a jak může změnit váš život*. Praha: Dokořán, 2014. Aliter (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-549-7.

[3] BUTTERFIELD, Fox. *Boston Museum Says It Was Uninsured for Theft* [online]. The New York Times. [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://www.nytimes.com/1990/03/20/arts/boston-museum-says-it-was-uninsured-for-theft.html

[4] DLOUHÝ, Martin a Petr FIALA. *Úvod do teorie her*. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1273-0.

[5] DÓCZY, Aneta. *Hra o trhy* [online]. 2017 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=147873. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně.

[6] FERGUSON, Thomas S. *Game theory* [online]. 2000 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15859-f01/www/notes/mat.pdf

[7] GARY W., Hyatt a Salmon MICHAEL. *Combat in the Fiddler Crabs Uca Pugilator and U. Pugnax: a Quantitative Analysis* [online]. B.m.: Brill. 1978. Dostupné z: doi:10.1163/156853978x00602

[8] *How Search algorithms work* [online]. Google LLC. [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://www.google.com/search/howsearchworks/algorithms/

[9] HYKŠOVÁ, Magdaléna. *Teorie her* [online]. Praha: ČVUT, Fakulta dopravní[cit. 2022-04-14]. Dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/hry_t.pdf

[10] CHVOJ, Martin. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.

[11] JANE BROCKMANN, H., Alan GRAFEN a Richard DAWKINS. *Evolutionarily stable nesting strategy in a digger wasp* [online]. B.m.: Elsevier BV. 1979. Dostupné z: doi:10.1016/0022-5193(79)90021-3

[12] KONEČNÝ, Jan. *Teorie her – 1. díl* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2017 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z:

https://www.gfpvm.cz/download?a=1&fid=1623&sh=2EdtyoRBmuRcrl2WOc0aRfqs0SKovolc9Ser2GHl

[13] KUHN, Steven, *Prisoner's Dilemma* [online]. Stanford: The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2019 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/prisoner-dilemma/

[14] LLOYD, William Forster. *Two Lectures on the Checks to Population*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017. ISBN 9781982075033.

[15] MACIEL C., Oscar, Erik CUEVAS, Mario A. NAVARRO, Daniel ZALDÍVAR a Salvador HINOJOSA. *Side-Blotched Lizard Algorithm: A polymorphic population approach* [online]. B.m.: Elsevier BV. 2020. Dostupné z: doi:10.1016/j.asoc.2019.106039

[16] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a její aplikace.* Praha: SNTL, 1991. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 80-03-00358-x.

[17] MOŠNA, František. *Statistika a pravděpodobnost* [přednáška]. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2021

[18] PALACIOS-HUERTA, Ignacio. *Professionals Play Minimax* [online]. B.m.: Oxford University Press (OUP). 2003. Dostupné z: doi:10.1111/1467-937x.00249

[19] PRISNER, Erich. *Game theory through examples. AMS Books* [online]. Washington: Mathematical Association of America, Inc., 2014. [cit. 2022-04-14]. ISBN 978-1-61444-115-1. Dostupné z: https://bookstore.ams.org/clrm-46?startBookmarkIdx=200

[20] ROZLOŽNÍK, Miroslav. *Saddle-point problems and their iterative solution*. Cham: Birkhäuser, 2018. ISBN 978-3030014308.

[21] SAWA, Zdeněk. *Teorie her: studijní opora* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2021 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: http://www.cs.vsb.cz/sawa/teh/opora/TEH-opora.pdf

[22] SCHELLING, Thomas C. *The strategy of conflict*. Cambridge: Harvard University, 1980. ISBN 978-0674840317.

[23] SKÁLOVÁ, Alena. *Teorie her pro nadané žáky středních škol* [online]. Praha, 2014 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z:

http://mdisk.pedf.cuni.cz/SVOC/prace/Skalova_MFF_dipl.pdf. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

[24] SLANTCHEV, Branislav. *Game Theory: Dominance, Nash Equilibrium, Symmetry* [online]. San Diego: University of California, 2008 [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/04-strategic-form.pdf

[25] SMITH, John M. *Evolution and the theory of games*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. ISBN 978-0-521-28884-2.

[26] SMITH, John M. a G. R. PRICE. *The Logic of Animal Conflic*t [online]. B.m.: Springer Science and Business Media LLC. 1973. Dostupné z: doi:10.1038/246015a0

[27] SPANIEL, William. *Game Theory 101: The Complete Textbook*. Pittsburgh: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011. ISBN 978-1492728153.

[28] TALWALKAR, Presh. *The Joy of Game Theory: An Introduction to Strategic Thinking* [online]. 2014 [cit. 2022-04-14]. ISBN 978-1500497446. Dostupné z: https://www.amazon.com/Joy-Game-Theory-Introduction-Strategic/dp/1500497444

Wikipedia

[29] Koordinační hra. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation. Stránka naposledy edit. 10. 3. 2022 v 15:03 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Koordinačn%C3%AD_hra

[30] Male centris pallida digging. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. Arizona Board of Regents/ASU Ask A Biologist, 2011 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Male_centris_pallida_digging.PNG

[31] Vězňovo dilema. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation. Stránka naposledy edit. 28. 10. 2021 v 19:12. [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Vězňovo_dilema