



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Urban

Pokusy z mechaniky pro budoucí učitele fyziky

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2021

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Leoši Dvořákovi, CSc. za odborné vedení práce, za věcné připomínky, rady a pomoc během psaní bakalářské práce. Stejně tak bych chtěl poděkovat konzultantkám RNDr. Daně Mandíkové, CSc. a RNDr. Marii Snětinové, Ph.D. Dále děkuji Ing. Ludvíku Němcovi za výrobu některých pomůcek k pokusům, RNDr. Peteru Žilavému, Ph.D. za odbornou konzultaci k pokusům a RNDr. Petru Kácovskému, Ph.D. za zapůjčení videokamery. V neposlední řadě chci poděkovat mé rodině za všestrannou podporu během psaní práce i během celého bakalářského studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne.....

podpis.....

Název práce: Pokusy z mechaniky pro budoucí učitele fyziky

Autor: Martin Urban

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc., Katedra didaktiky fyziky

Abstrakt: Cílem práce bylo vytipovat a ověřit pokusy s jednoduchými pomůckami využitelné v přednášce Mechanika případně Teoretická mechanika pro budoucí učitele fyziky. Práce se věnuje vytipované oblasti pokusů, kterou je valení těles. Konkrétně jde o valení kuliček v nakloněné liště profilu L a v drážce mezi kolejničkami, jejichž vzdálenost lze nastavovat. Pro tyto případy jsou několika způsoby odvozeny vztahy pro zrychlení kuličky jak se zanedbáním valivého odporu, tak se započtením valivého odporu. V experimentech byl pohyb kuliček nahráván na video a záznamy byly analyzovány pomocí programu Tracker. Zrychlení kuličky získaná ze zpracovaných měření jsou porovnána s teoretickými vztahy. Výsledky ukazují, že při malých sklonech nakloněné roviny (vhodných pro to, aby pohyb kuliček šel dobře demonstrovat) je nezbytné započítat vliv valivého odporu.

Klíčová slova: mechanika, pokusy ve výuce fyziky, valení, valivý odpor

Title: Experiments in Mechanics for Future Physics Teachers

Author: Martin Urban

Department: Department of Physics Education

Supervisor: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc., Department of Physics Education

Abstract: The aim of the thesis was to select and verify experiments with simple aids for utilization in the Mechanics or Theoretical Mechanics lecture for future physics teachers. We deal with a selected area of experiments, which is body rolling. In particular, rolling balls at an inclined slat of an L-profile and in the groove between two rails, the distance of which being adjustable. For these cases, the acceleration of the balls is derived in several different ways, both by neglecting the rolling resistance and by including the rolling resistance. In the experiments, the movement of the balls was recorded on video and analysed using the Tracker program. The accelerations of the balls obtained from the processed measurements are compared with the theoretical results. It is shown that with small inclinations of the inclined plane (which is suitable for the demonstrations because the moment of the balls is more visible), it is necessary to take into account the effect of the rolling resistance.

Keywords: Mechanics, Experiments in Physics Education, Rolling, Rolling Resistance

Obsah

Úvod.....	1
1 Rešerše vybraných zdrojů	3
1.1 Domácí zdroje	3
1.1.1 Matematika-fyzika-informatika	3
1.1.2 Veletrh nápadů učitelů fyziky	4
1.2 Zahraniční zdroje.....	6
1.2.1 Physics Education	6
1.2.2 Turning the World Inside Out and 174 Other Simple Physics Demonstrations	7
2 Pokusy.....	9
2.1 Valení kuličky v liště profilu L	9
2.2 Valení kuličky po kolejničkách.....	11
3 Odvození vztahů.....	13
3.1 Valení kuličky v liště profilu L	13
3.1.1 Odvození zrychlení z druhé věty impulsové.....	14
3.1.2 Odvození zrychlení ze zákona zachování energie	15
3.1.3 Odvození zrychlení z Lagrangeových rovnic 2. druhu	17
3.1.4 Odvození zrychlení se započtením valivého odporu	18
3.1.5 Odstranění vlivu náklonu stolu	19
3.2 Valení kuličky po kolejničkách.....	21
3.2.1 Odvození zrychlení z druhé věty impulsové.....	22
3.2.2 Odvození zrychlení ze zákona zachování energie	23
3.2.3 Odvození zrychlení z Lagrangeových rovnic 2. druhu	23
3.2.4 Odvození zrychlení se započtením valivého odporu	24
4 Výsledky měření	25
4.1 Valení kuličky v liště profilu L	25
4.2 Valení kuličky po kolejničkách.....	27
4.3 Shrnutí výsledků.....	30
5 Poznámky pro učitele.....	31
Závěr	34
Seznam použité literatury.....	36
Seznam tabulek	38
Seznam obrázků	39
Příloha A: Příklady měření polohy kuličky v závislosti na čase.....	40

Úvod

Tato bakalářská práce, jak už vyplývá z názvu („Pokusy z mechaniky pro budoucí učitele fyziky“), se zabývá experimenty z oboru mechaniky, které ve svých hodinách využijí budoucí učitelé fyziky. Práce se konkrétně zaměřuje na mechaniku hmotného bodu, soustav hmotných bodů a mechaniku tuhého tělesa.

Mechanika je ta část fyziky, která se zabývá mechanickým pohybem. Dá se dále dělit podle různých kritérií. Nejčastěji se setkáváme s dělením podle vztahu k příčinám pohybu na kinematiku a dynamiku. Zatímco kinematika se zajímá pouze o popis pohybu, tj. zabývá se otázkou JAK, tak dynamika se zajímá o příčiny pohybu, tj. zabývá se otázkou PROČ. Veličiny, se kterými se setkáváme v kinematice, jsou např. dráha, rychlost či zrychlení, zatímco v dynamice to je síla, energie, hybnost apod. Podle způsobu aproximace reálného tělesa se rozlišuje mechanika hmotného bodu, mechanika soustav hmotných bodů a mechanika kontinua. Hmotný bod je charakterizován pouze svou hmotností, rozměry tělesa zanedbáváme. Mechanika kontinua v sobě zahrnuje mechaniku tekutin a pevných látek, které jsou však popisované spojitě a zanedbává se jejich částicová struktura. Dále je ještě možné rozdělit mechaniku podle použitých fyzikálních principů na mechaniku klasickou (Newtonovu), relativistickou a kvantovou.

První kapitola práce je zaměřena na rešerši časopisné literatury a ostatních zdrojů popisujících jednoduché a názorné pokusy z oblasti mechaniky hmotného bodu, soustav hmotných bodů a mechaniky tuhého tělesa. Cílem je vytipovat z vybrané literatury několik pokusů, které by mohly vhodně doplnit přednášku Mechanika případně Teoretická mechanika na MFF UK. Velmi brzo jsme v rešerši vytipovali, že bude vhodné problematiku zúžit, a rozhodli jsme se pro pokusy zahrnující valení.

Druhá kapitola je věnována vytipovaným pokusům. Je zde uvedeno, v čem jednotlivé pokusy spočívají, co je jejich cílem a jaké pomůcky budeme k nim potřebovat. Dále jsou zde uvedeny některé parametry potřebné při výpočtech a prezentovány fotografie pomůcek.

Ve třetí kapitole jsou k jednotlivým pokusům doplněna příslušná teoretická odvození na různých úrovních, např. s použitím derivací nebo naopak na středoškolské úrovni, a to včetně různých zjednodušení, zanedbání apod.

Ve čtvrté kapitole jsou představeny výsledky měření. Naměřené hodnoty jsou porovnány s teoretickými předpoklady nebo v případě koeficientů s tabulkovými hodnotami. V této kapitole jsou také diskutovány faktory ovlivňující měření a chyby měření. Samotné grafy a tabulky s naměřenými hodnotami jsou pak přiloženy na konci práce.

V páté kapitole jsou uvedeny poznámky pro učitele k jednotlivým pokusům, na co si dát při jejich provedení pozor, kde nakoupit pomůcky na pokusy atd. Jedná se o doplnění druhé kapitoly.

Bakalářská práce je napsána v Microsoft Word, grafy a tabulky byly zpracovány v Microsoft Excel, některé obrázky byly vytvořeny v programu GeoGebra. Pokusy byly natočeny videokamerou a výsledky měření analyzovány z videí pomocí programu Tracker.

1 Rešerše vybraných zdrojů

V první kapitole se zaměříme na rešerši vybrané časopisné literatury a ostatních zdrojů popisujících jednoduché pokusy z mechaniky. Protože rešerše na celou oblast mechaniky by zabrala téměř celou práci, vzhledem k množství zdrojů, rozhodli jsme se zaměřit pouze na jednu konkrétní oblast mechaniky, a sice na *valení*, kterému se práce dále věnuje.

Rešerše je rozdělena do dvou podkapitol, první se věnuje domácím zdrojům, druhá podkapitola zase zahraničním zdrojům. Z českých zdrojů se zaměřujeme na články z časopisu *Matematika-fyzika-informatika* [1] a na příspěvky ze sborníků konference *Veletrh nápadů učitelů fyziky* [2]. Ze zahraničních zdrojů se zaměřujeme na články z časopisu *Physics Education* [3] a na demonstrační pokusy z knihy *Turning the World Inside Out and 174 Other Simple Physics Demonstrations* [4].

1.1 Domácí zdroje

1.1.1 Matematika-fyzika-informatika

Tento časopis [1] se zabývá problémy výuky na základních a středních školách. Vychází pravidelně od roku 1991 a historicky navazuje na časopis *Matematika a fyzika ve škole*, který byl vydáván v letech 1970 až 1990. Do roku 2012 vycházel ve standardní papírové podobě, od roku 2013 vychází jako internetový časopis a je tak volně dostupný pro všechny své zájemce. Příspěvky jsou uveřejňovány v českém a slovenském jazyce, navíc jsou recenzovány [1].

Z volně dostupných čísel časopisu jsme k danému tématu vybrali článek *Několik nápadů o volném pádu* [5]. Článek popisuje několik jednoduchých způsobů, jakými lze stanovit hodnotu tíhového zrychlení g . Nás bude zajímat způsob určení pomocí pohybu kuličky na nakloněné rovině, o kterém je zde konkrétně napsáno:

„Ze dvou rovných lišt obdélníkového průřezu nebo tzv. rohové lišty (nejlépe dřevěné) si vyrobte žlábek, kterým budete pouštět kuličky. Kuličky jsou vhodné o průměru asi 15 až 30 mm (např. z kuličkového ložiska). Nakloněnou rovinu s klesáním 1:10 získáte podložením jednoho konce žlábků kouskem dřeva s tvarem

průřezu zobrazeného na obr. 2. Je možné taky použít krabičky od čaje s vhodně vyříznutým otvorem. Vyznačte si délku s od místa startu až k záračce v dolní části nakloněné roviny a zjistěte dobu t pohybu kuličky, nejlépe pomocí stopek nebo mobilu. Určete zrychlení $a = \frac{2s}{t^2}$, odtud $a = g \sin \alpha = gp$, kde p udává sklon nakloněné roviny. Odtud $g = \frac{a}{p}$. Měření opakujte alespoň 10krát, příslušnou hodnotu tíhového zrychlení určujte z průměrných hodnot s .“ [5]

V tomto článku se ovšem objevuje několik nepřesností. Uvedené vztahy platí pro těleso klouzající po nakloněné rovině, není bráno v úvahu, že se kulička valí a už vůbec ne, že valení ve žlábků je jiné než valení po nakloněné rovině. Tento příspěvek je důkazem toho, že i v materiálech zabývajících se problematikou valení se mohou objevovat nepřesnosti, ba dokonce zásadní chyby, a proto má cenu se tímto problémem blíže zabývat.

1.1.2 Veletrh nápadů učitelů fyziky

Na této konferenci [2] předvádí učitelé všech stupňů škol své vlastní experimenty a nápady, kterými chtějí přiblížit žákům a studentům výuku fyziky a tím ji lépe zvládnout a pochopit. Veletrh se koná pravidelně každý rok od roku 1996 v různých městech po celé České republice. K rešerši jsme využili souhrnný sborník [6], který představuje vybrané příspěvky z celé historie této konference. K problematice valení nás zaujaly pouze dva příspěvky. I při prohlížení kompletních sborníků z jednotlivých ročníků jsme toho více k tomuto tématu nenašli.

Prvním námi vybraným příspěvkem je *Cvičení z fyziky pro sekundu* [7]. V něm se krátce seznámíme s novým volitelným předmětem na Gymnáziu Dašická, Pardubice „Cvičení z fyziky“. Tento předmět je určen pro žáky nižšího gymnázia a jeho náplní jsou především laboratorní cvičení, na jejichž tvorbě a zadání se podíleli všichni učitelé fyziky na gymnáziu. V článku jsou pak pouze nastíněny náplně jednotlivých cvičení, bez podrobnějších návodu k jednotlivým pokusům a bez uvedení vztahů pro výpočty. Nás bude zajímat předposlední cvičení *Valení míče*, ke kterému je zde uvedeno toto:

„Je-li pěkné počasí, půjčíme si se žáky z tělocviku několik starších basketbalových míčů, vezmeme stopky a vydáme se do blízkého parku. Děti si najdou tři trasy s různým povrchem a klesáním a vyznačí na nich křídou délkové značky. Pak po trasách pouští míč a měří jeho mezičasy na jednotlivých úsecích. Výstupem ze cvičení jsou tři grafy závislosti na čase a snad i intuitivní náhled na to, že ne každý pohyb je rovnoměrný a na nerovnoměrném není nic tak komplikovaného.“ [7]

Tento výborný nápad nám potvrzuje, že fyzika není jenom o výzkumu v laboratořích, ale že k některým pokusům lze využít i venkovní prostředí, pokud to počasí dovolí, a že to může být i docela zábavné. Ostatně i autoři článku přiznávají, že žáci si z hodin spíše odnáší zážitky a manuální dovednosti než nějaké fyzikální obohacení, ale to vůbec ničemu nevádí [7]. Navíc pro učitele fyziky, který zrovna se svými žáky probírá valivý pohyb či pohyb obecně, to může být dobrý námět, jak např. naložit se suplovanou hodinou tělesné výchovy.

K danému tématu jsme ještě vybrali příspěvek *Další nápady z Malé Hraštic 4: tíhové zrychlení stokrát jinak* [8]. V tomto článku jsou opět představeny způsoby, jakými lze změřit tíhové zrychlení g , jako tomu bylo v článku *Několik nápadů o volném pádu* [5]. Popsané metody měření byly vyzkoušeny na jarním soustředění budoucích a současných učitelů fyziky na Malé Hrašticí. Cílem jednotlivých pokusů podle autora není co nejpřesněji změřit tíhové zrychlení, ale procvičit si co nejvíce věcí z mechaniky, a to na úrovni všech stupňů škol. Pro nás je ze seznamu jednotlivých námětů podstatný ten druhý, tj. *Kulička na nakloněné rovině*. V něm se už, na rozdíl od [5], autor zabývá problémem, že kulička po nakloněné rovině neklouže, ale valí se, čímž má menší zrychlení, než kdyby klouzala. Výpočet zrychlení tu odvozen není, pouze je tu zmíněno, jak by se to dělalo na vysokoškolské úrovni (aplikace Lagrangeových rovnic 2. druhu), což je poměrně jednoduchý způsob, naopak odvození na úrovni SŠ je poněkud složitější. Pak je tu pouze uveden výsledný vztah pro dráhu uraženou za čas t : $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} g \sin \alpha t^2$ [8]. Nakonec se autor zabývá otázkou měření času, konkrétně zde uvádí:

„Jak měřit čas? Buď ručně stopkami, nebo pomocí počítače a mikrofónu: Kulička na konci ťukne do nějaké zarážky. Při „odstartování“ pohybu také můžeme

tuknout například do dřívka, kterým kuličku na startu přidržujeme. Zvuk sejmutý mikrofonom nahrajeme programem Audacity, v něm pak můžeme dobu valení kuličky jednoduše změřit (viz obrázek).“ [8]

1.2 Zahraniční zdroje

1.2.1 Physics Education

Physics Education [3] je fyzikální časopis, vycházející od roku 1966 pravidelně každé dva měsíce, celkem tedy šest čísel za rok. V některých ročnících před rokem 1980 vycházelo i více čísel. Na internetových stránkách časopisu je možné si jednotlivé ročníky a čísla procházet, je to však placené [3], ale např. na počítačích v budovách MFF UK je časopis dostupný zdarma. K problematice valení jsme z časopisu vybrali tři články, které si představíme v chronologickém pořadí od nejstarších.

Prvním námi vybraným článkem je *Balls on an incline roll, slide and skip* [9], ve kterém je popsán klasický učebnicový příklad z mechaniky v laboratorním provedení. Na pokus je použit úzký obdélníkový hliníkový držák připevněný na prkno, které je na jednom konci zarovnáno s hranou stolu a na druhém konci je do prkna navrtán dřevěný kolík, který se opírá o svorku laboratorního stojanu, jejímž posunem je možné měnit úhel sklonu prkna. Po dráze je valena kulička a naším úkolem je naměřit její rychlost v , kterou opustí dráhu, v závislosti na výšce h , ze které kuličku pouštíme, to vše při různých úhlech sklonu. Teoreticky si tuto závislost vyjádříme ze zákona zachování energie. Experimentálně rychlost kuličky určíme tak, že si naměříme vertikální vzdálenost y mezi podlahou a místem, kde kulička opouští dráhu, a horizontální vzdálenost x mezi místem, kde kulička opouští dráhu, a místem dopadu kuličky na podlahu. Měření se vztahuje ke středu hmotnosti kuličky. Obě vzdálenosti si vyjádříme pomocí rychlosti, času a úhlu sklonu prkna a z obou vyjádření dostaneme vztah pro rychlost v [9]. V něm nevystupuje čas t , tzn. že nemusíme měřit dobu pádu kuličky. V článku jsou na grafech vyobrazeny naměřené závislosti $v(h)$ při úhlech sklonu 12° a 34° , z nichž bylo zjištěno, že při sklonu 12° se kulička valí bez prokluzu, naopak při sklonu 34° se už jedná o klouzání [9].

Jako druhý jsme vybrali článek *Energy transformations of a marble rolling on a track* [10] pojednávající o staré karnevalové hře, ve které máme dráhu tvořenou

z rovného úseku, malého kopce s údolím a části většího kopce, po níž valíme bowlingovou kouli. Cílem hry je dostat kouli ze začátku rovného úseku přes malý kopec tak, aby zůstala v údolí a nepřevalila se zpátky přes kopec, komu se to podaří, ten vyhrává nějakou cenu. V článku je popsáno sestavení takovéto dráhy v menším provedení pomocí ocelového držáku na police délky asi 1 m. Držák ohneme tak, aby část s kopcem začínala asi 50 cm od konce, byla dlouhá 15 cm a samotný kopec vysoký asi 1,5 cm, přičemž je potřeba dát si pozor, abychom nedělali ostré ohyby. Valit budeme kuličky o průměrech 35 mm a 25 mm [10]. V článku je dále popsáno, k jakým energetickým přeměnám dochází na jednotlivých úsecích dráhy během valení kuličky a aby kulička uvízla v údolí, tak musí dojít k přeměně dostatku kinetické energie v teplo ve chvíli, kdy kulička přejde přes malý kopec [10].

Nakonec jsme z časopisu vybrali článek *Rolling sphere along an inclined multi-slotted track* [11], ve kterém je objasněn rozdíl mezi valením po nakloněné rovině, kdy mezi kuličkou a nakloněnou rovinou je jeden kontaktní bod, a mezi valením v nějaké drážce, kde jsou kontaktní body dva. Drážky různých šířek si autoři článku nechali vyřezat pomocí speciální laserové techniky do hliníkového plechu a při jednom úhlu sklonu měřili rychlost a zrychlení kuličky v závislosti na šířce drážky. Experimentálně byly obě veličiny vypočítány z naměřené doby valení, za použití fotobrány, a z dalších známých údajů. V článku jsou vyobrazeny grafy, které porovnávají experimentálně naměřené hodnoty rychlosti a zrychlení s teoretickými hodnotami, které jsou v článku odvozeny ze zákona zachování energie. Teoretické a naměřené hodnoty se vcelku shodují [11].

1.2.2 Turning the World Inside Out and 174 Other Simple Physics Demonstrations

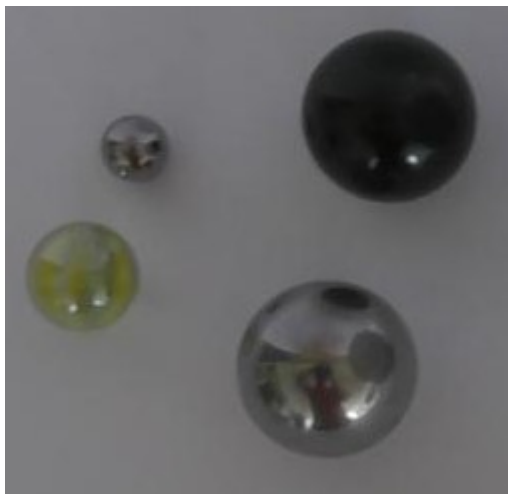
Tato kniha od Roberta Ehrlicha [4] obsahuje sbírku demonstračních pokusů, které jednoduchými a zábavnými způsoby objasňují klíčové fyzikální pojmy a zákony. Kniha je vhodná pro širokou škálu vzdělávacích úrovní, od fyziky na druhém stupni základních škol až po vysokoškolskou fyziku. K rešerši jsme použili elektronickou podobu knihy [4].

Z knihy nás k problematice valení zaujal pokus s názvem *Loop-the-loop on an incline* (str. 60, [4]), který pojednává o tzv. smyčce smrti. Smyčka je v tomto pokusu vymodelována z flexibilního pravitka, určeného na obkreslování křivek, a

jejím umístěním na mírně nakloněný povrch lze po ní valit kuličku. Princip tohoto pokusu spočívá v tom, že aby kulička projela celou smyčkou, tak musí být uvolněna z místa, jehož výška nad dolním koncem smyčky přesahuje 2,7násobek poloměru smyčky, bez ohledu na úhel naklonění (str. 60, [4]). To si můžeme lehce odvodit ze zákona zachování energie a podmínky, že odstředivá síla působící na kuličku v horní části smyčky musí být větší než její tíhová síla. Odvození ovšem v tomto příspěvku chybí. Naopak se tu uvádí, že tato hodnota je pouze přibližná, ve skutečnosti tu hraje roli ještě tření (str. 60, [4]).

2 Pokusy

V této části si představíme pokusy, které jsme se rozhodli zrealizovat. Rešerše literatury nás motivovala prozkoumat, jak je to s valením kuličky na nakloněné rovině, pokud ji necháme valit v nějakém žlábků či drážce. Napadlo nás prověřit to pro různé druhy povrchů, různé velikosti a materiály kuliček, různé úhly sklonu a různé zapadnutí kuliček do drážky. Pro první fázi pokusů jsme si vybrali valení kuliček v hliníkové a dřevěné liště L profilu. Ve druhé fázi pak valení po různě vzdálených kolejničkách, které jsme vytvořili ze dvou ocelových úhelníkových profilů L. V obou případech jsme prováděli měření pro čtyři různé kuličky (dvě ocelové o průměrech 10 mm a 25,4 mm, dvě skleněné o průměrech 15,9 mm a 24,9 mm), viz Obrázek 1. Vše jsme se rozhodli natočit videokamerou a pomocí programu Tracker proměřit z natočených videí závislost polohy kuličky na čase $x(t)$. Naměřená data jsme následně proložili kvadratickou funkcí (parabolou) a určili zrychlení kuliček. V pokynech pro zpracování bakalářské práce je také zmíněna možnost využití pomůcky iOLab, tu však pro tento druh pokusů nelze použít.



Obrázek 1: Kuličky

2.1 Valení kuličky v liště profilu L

Jak již bylo zmíněno, k tomuto pokusu jsme potřebovali hliníkovou a dřevěnou lištu profilu L, kterými jsme nechali valit kuličky. Délka hliníkové lišty byla 100 cm, délka dřevěné lišty 95 cm. Na lištách jsme po každých 5 cm udělali

značky lihovým fixem, které nám při měření v Trackeru posloužily ke kontrole polohy kuličky. Pro stabilní postavení lišt bylo zapotřebí vyrobit si speciální kovové podložky, pro nastavení úhlu sklonu lišty jsme použili dřevěné podložky o výšce 1,9 cm (oboje vidíme na Obrázku 2). Obě lišty ve vodorovných polohách vidíme na Obrázku 3 a Obrázku 4.

Postupně jsme natočili valení všech čtyř kuliček na obou lištách a při dvou různých úhlech sklonu. Navíc pro vyloučení případné nesymetrie lišty a náklonu stolu jsme ve všech případech nechali valit kuličku jak ve směru zprava doleva, tak ve směru zleva doprava. Při výpočtech jsme pak pracovali s aritmetickým průměrem obou zrychlení (v kapitole 3.1.5 máme toto odvozeno a zdůvodněno). Natočili jsme tedy 16 variant ve dvou směrech (celkem tedy 32 videí), z nichž jsme pak některé vybrali ke zpracování.



Obrázek 2: Kovové a dřevěné podložky



Obrázek 3: Hliníková lišta



Obrázek 4: Dřevěná lišta

2.2 Valení kuličky po kolejničkách

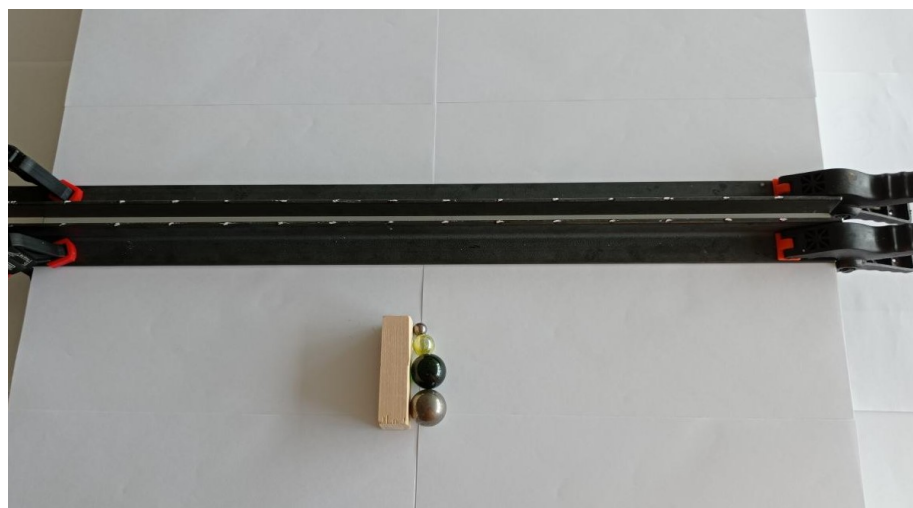
K tomuto pokusu jsme potřebovali dva stejně dlouhé úhelníkové profily L ze stejného materiálu (v našem případě ocelové o délce cca 63 cm) a nějakou dřevěnou desku ve tvaru čtverce či obdélníka (ideálně, aby jedna jeho strana byla zhruba stejně dlouhá jako L profily). Jednu stranu „L“ každého úhelníku jsme položili na desku a druhé strany „L“ nastavili tak, aby spolu sousedily a byly navzájem rovnoběžné, čímž jsme vytvořili kolejničky, jejichž vzájemnou vzdálenost jsme postupně měnili. Na upevnění úhelníků k desce jsme potřebovali svěrky. Lepší je použít nějaké kratší svěrky, které nejsou tak těžké a nebudou se nám při pokusu plést. Použití velkých truhlářských svěrek je trochu nepraktické. Nabízí se tu samozřejmě i možnost zapřemýšlet nad jiným způsobem upevnění úhelníků k desce.

Když jsme si takto připravili desku, tak bylo potřeba vyřešit její sklon. Na jednom konci jsme desku podložili v rozích dvěma kusy polystyrenu o stejné výšce h_1 a na druhém konci dvěma kusy polystyrenu o stejné výšce h_2 . Na určení sklonu jsme použili vodováhu, kterou jsme vypořádali do roviny, změřili vzdálenost desky a vodováhy na jednom konci a sklon desky pak vypočítali z pravoúhlého trojúhelníka. Pro ověření jsme ještě použili mobilní aplikaci na tabletu měřící sklon. Oběma způsoby vyšel úhel sklonu cca $1,86^\circ$. Na kolejničkách jsme si křídou udělali značky (tentokrát po 4 cm) pro lepší kontrolu polohy kuličky v Trackeru. Všechny pomůcky můžeme vidět na Obrázku 5, na Obrázku 6 pak vidíme kolejničky připravené k provedení pokusu.

Vzdálenost kolejniček jsme po pravidelných krocích měnili od 4 mm do 24 mm. Tentokrát měření probíhalo pouze při jednom úhlu sklonu a v jednom směru, jediný proměnný parametr byla právě vzdálenost kolejniček a opět čtyři různé kuličky, jako v předchozím pokusu. Každou kuličku jsme pouštěli po kolejničkách, dokud to bylo možné, tj. dokud byla vzdálenost kolejniček menší než průměr kuličky. Natočili jsme opět řadu videí, z nichž jsme pak některé vybrali ke zpracování.



Obrázek 5: Pomůcky potřebné k valení po kolejničkách

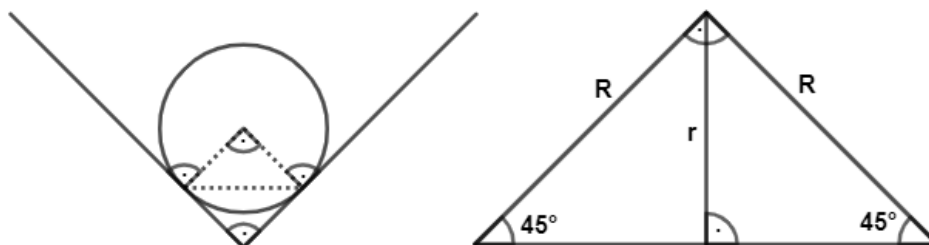


Obrázek 6: Kolejničky připravené k provedení pokusu

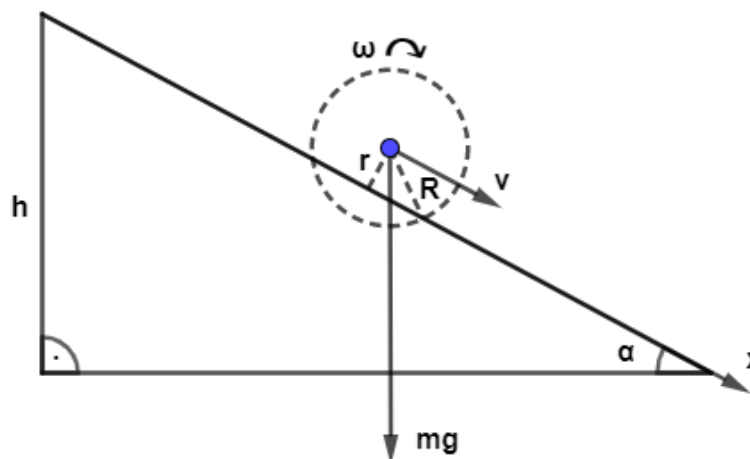
3 Odvození vztahů

V této kapitole jsou k oběma pokusům odvozeny příslušné teoretické vztahy pro zrychlení jak se zanedbáním valivého odporu, tak se započtením valivého odporu. Ze zrychlení, ve kterém je započten valivý odpor, si vyjádříme tzv. rameno valivého odporu, značené ζ . Zrychlení jsme odvodili jak na úrovni středoškolské, tak i na úrovni vysokoškolské. Na středoškolské úrovni jsme využili předpokladu, že pohyb je rovnoměrně zrychlený, a zrychlení odvodili ze zákona zachování energie (dále ZZE). Na vysokoškolské úrovni jsme zrychlení odvodili pomocí derivací ze ZZE, z druhé věty impulsové a z Lagrangeových rovnic 2. druhu. K prvnímu pokusu tu také máme odvozeno a zdůvodněno, jak se vypořádat s vlivem náklonu stolu. Pro názornost je odvození doplněno o obrázky, které jsme vytvořili v programu GeoGebra.

3.1 Valení kuličky v liště profilu L



Obrázek 7: Zapadnutí kuličky do lišty a základní rozměry



Obrázek 8: Valení kuličky

Nejprve si vyjádříme základní veličiny, které budeme potřebovat v jednotlivých odvozeních. Protože L profil tvoří pravý úhel, jak máme znázorněno v levé části Obrázku 7, a vzdálenost těžiště kuličky od každé strany „L“ je rovna poloměru R kuličky, tak ze znázorněné situace dostáváme rovnoramenný pravouhlý trojúhelník o ramenu délky R (viz pravá strana Obrázku 7), ze kterého můžeme vypočítat vzdálenost r těžiště od osy otáčení. Užitím goniometrické funkce sinus dostaneme:

$$r = R \sin 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Úhlová rychlost ω kuličky je pak vyjádřena vztahem:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{R} \sqrt{2}, \quad (2)$$

kde v je složka rychlosti ve směru osy x .

Moment setrvačnosti koule o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm je:

$$J_{\text{koule}} = \frac{2}{5} mR^2. \quad (3)$$

Ze Steinerovy věty jsme pak schopni určit moment setrvačnosti J vzhledem k ose neprocházející těžištěm jako součet momentu setrvačnosti J_0 vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm a součinu hmotnosti a čtverce vzdálenosti od těžiště. Dosazením vztahů (1) a (3) do rovnice $J = J_0 + mr^2$ pak pro kouli vychází:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 + m \frac{R^2}{2} = \frac{9}{10} mR^2. \quad (4)$$

Moment síly M vzhledem k ose otáčení vyjádříme z Obrázku 8 jako:

$$M = mg \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (5)$$

kde g je tíhové zrychlení a α úhel sklonu lišty.

3.1.1 Odvození zrychlení z druhé věty impulsové

Druhá věta impulsová říká, že časová změna momentu hybnosti celkové hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná celkovému momentu externích sil, které působí na soustavu hmotných bodů vzhledem ke stejnému bodu.

Moment hybnosti L si můžeme vyjádřit jako:

$$L = J\omega,$$

z druhé věty impulsové dostaneme:

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M$$

a dosazením vztahů (4) a (5) pak:

$$\frac{9}{10} mR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = mg \cdot r \cdot \sin \alpha.$$

Rovnici vynásobíme r a na levé straně tak získáme výraz $r \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$, což vyplývá ze vztahu (2). Dosazením (1) na pravou stranu a vydělením m pak dostáváme:

$$\frac{9}{10} R^2 \cdot \frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Dále můžeme označit $\frac{dv}{dt} = a$ a dalšími ekvivalentními úpravami dospějeme k vyjádření zrychlení a se zanedbáním valivého odporu:

$$a = \frac{5}{9} g \sin \alpha. \quad (6)$$

3.1.2 Odvození zrychlení ze zákona zachování energie

ZZE nám říká, že *při všech mechanických dějích se kinetická energie může měnit v potenciální a naopak, celková energie soustavy zůstane však konstantní.*¹

Matematicky toto formulujeme jako:

$$E = T + V = \text{konst.}, \quad (7)$$

kde T označuje kinetickou energii a V energii potenciální². Kinetická energie je v našem případě dána součtem energie translačního pohybu a energie rotačního pohybu:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\text{koule}} \omega^2,$$

což s použitím vztahů (2) a (3) upravíme na tvar:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2}{5} m v^2 = \frac{9}{10} m v^2. \quad (8)$$

¹ Toto platí, pokud jsou všechny působící síly konzervativní.

² Toto označení se používá spíše v teoretické mechanice na VŠ. Na středoškolské úrovni se používá označení E_k a E_p .

³ Celkovou kinetickou energii můžeme také vypočítat z momentu setrvačnosti J vzhledem k ose

neprocházející těžištěm jako: $T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} m R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} \cdot 2 = \frac{9}{10} m v^2$.

Potenciální energii pak vyjádříme podle Obrázku 8 jako:

$$V = mgh = -mg \sin \alpha \cdot x. \quad (9)$$

Dosazením (8) a (9) do (7) si můžeme vyjádřit celkovou mechanickou energii E jako:

$$E = \frac{9}{10} m v^2 - mg \sin \alpha \cdot x = \text{konst.} \quad (10)$$

Derivací této rovnice podle času získáme:

$$\frac{9}{10} m \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} - mg \sin \alpha \cdot \frac{dx}{dt} = 0.$$

Označíme si $\frac{dv}{dt} = a$, $\frac{dx}{dt} = v$ a rovnici vydělíme m , tím získáme:

$$\frac{9}{5} a \cdot v - g \sin \alpha \cdot v = 0.$$

Vydělením v a dalšími úpravami získáme vztah pro zrychlení a :

$$a = \frac{5}{9} g \sin \alpha, \quad (11)$$

který se shoduje se vztahem (6).

Odvození bez použití derivací

Obecně si můžeme označit kinetickou energii valící se kuličky jako:

$$T = km v^2, \quad (12)$$

kde k je konstanta (konkrétní hodnoty k pro různé případy valení uvedeme dále).

Celková energie soustavy je konstantní, z čehož vyplývá:

$$E_1 = E_2 = \text{konst.}$$

Dosazením (7) za E_1 a E_2 dostaneme:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Rovnici rozepíšeme pomocí (9) a (12) jako:

$$km v_1^2 - mg \sin \alpha \cdot x_1 = km v_2^2 - mg \sin \alpha \cdot x_2$$

a pomocí ekvivalentních úprav zjednodušíme na:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{g \sin \alpha}{k} (x_2 - x_1). \quad (13)$$

Levou stranu rovnice upravíme na součin jako $v_2^2 - v_1^2 = (v_2 - v_1) \cdot (v_2 + v_1)$ a označíme si $v_2 - v_1 = \Delta v$, $x_2 - x_1 = \Delta x$ a rovnici přepíšeme na tvar:

$$\Delta v \cdot (v_2 + v_1) = \frac{g \sin \alpha}{k} \cdot \Delta x.$$

Rovnici vydělíme Δt :

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot (v_1 + v_2) = \frac{g \sin \alpha}{k} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Protože Δt můžeme volit velmi malé ($\Delta t \rightarrow 0$), pak platí $\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v$, $v_1 + v_2 \rightarrow 2v$. Rovnici potom můžeme upravit na tvar:

$$a \cdot 2v = \frac{g \sin \alpha}{k} \cdot v.$$

Vydělením $2v$ pak získáme vztah pro zrychlení:

$$a = \frac{1}{2k} g \sin \alpha. \quad (14)$$

Pro případ valení v liště profilu L je $k = \frac{9}{10}$. Např. pro $k = \frac{7}{10}$ se jedná o valení po nakloněné rovině ($a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$) a pro $k = \frac{1}{2}$ se jedná o klouzání po nakloněné rovině ($a = g \sin \alpha$).

Od výrazu (13) k vyjádření zrychlení ve vztahu (14) se dá dojít i středoškolskou cestou bez použití limity. Za předpokladu, že pohyb je rovnoměrně zrychlený, eventuálně toto víme z pokusu, si můžeme vyjádřit rychlosti a dráhy jako:

$$\begin{aligned} v_1 &= at_1 & x_1 &= \frac{1}{2} at_1^2 \\ v_2 &= at_2 & x_2 &= \frac{1}{2} at_2^2. \end{aligned}$$

Po dosazení do (13) a úpravou dostaneme:

$$a^2 (t_2^2 - t_1^2) = \frac{g \sin \alpha}{k} \cdot \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2).$$

Rovnici vydělíme výrazem $a (t_2^2 - t_1^2)$ a opět nám vychází:

$$a = \frac{1}{2k} g \sin \alpha.$$

3.1.3 Odvození zrychlení z Lagrangeových rovnic 2. druhu

V tomto odvození budeme značit rychlost $v = \dot{x}$ a zrychlení $a = \ddot{x}$. Lagrangeova funkce (lagrangián) je v našem případě vyjádřena jako:

$$L = T - V = \frac{9}{10} m \dot{x}^2 + mg \sin \alpha \cdot x. \quad (15)$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu jsou rovnice ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Dosazením Lagrangeovy funkce z (15) vypočítáme jednotlivé derivace v (16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{9}{5} m \ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

Lagrangeova rovnice pak bude ve tvaru:

$$\frac{9}{5} m \ddot{x} - mg \sin \alpha = 0$$

a po vydělení m a dalších ekvivalentních úpravách získáme vztah pro zrychlení:

$$\ddot{x} = \frac{5}{9} g \sin \alpha. \quad (17)$$

3.1.4 Odvození zrychlení se započtením valivého odporu

*Valivý odpor*⁴ vzniká, když se těleso kruhového průřezu (např. koule, válec) kutálí po pevné podložce. Vzniká při něm odporová síla \vec{F}_v , jejíž velikost je vyjádřena vztahem:

$$F_v = \frac{\xi}{R} \cdot F_N, \quad (18)$$

kde R je poloměr valícího se tělesa (v našem případě koule), ξ označuje tzv. *rameno valivého odporu*⁵ a F_N označuje velikost síly, kterou je těleso přitlačováno k podložce (tzv. přítláčná síla). Při valení tvrdého tělesa po nedokonale pružné podložce dochází působením přítláčné síly k deformaci podložky [12]. V případě valení v liště si musíme uvědomit, že F_N je přítláčná síla na každou z obou vnitřních stran L profilu. Valivý odpor se uplatňuje na obou stranách, proto si přeformulujeme vztah (18) pro F_v na:

$$F_v = \frac{\xi}{R} \cdot 2F_N, \quad (19)$$

obdobně tomu bude i v případě valení po kolejničkách. Velikost přítláčné síly určíme pomocí Obrázku 7 a Obrázku 9 jako:

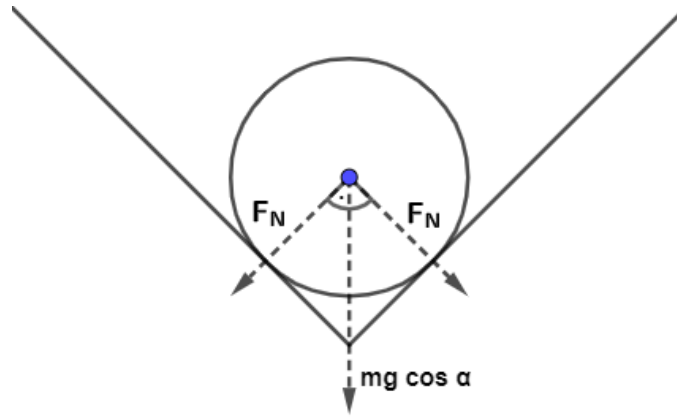
$$2F_N = mg \cos \alpha \cdot \frac{R}{r} = \sqrt{2} mg \cos \alpha. \quad (20)$$

Dosazením (20) do (19) dostaneme:

$$F_v = \frac{\xi}{R} \cdot \sqrt{2} mg \cos \alpha. \quad (21)$$

⁴ Dříve se používalo označení *valivé tření*, tento termín je však nepřesný, protože stýkající se povrchy se navzájem netřou.

⁵ Můžeme se setkat i s jiným označením (např. ρ , δ).



Obrázek 9: Znázornění přítláčné síly kuličky k liště

Při odvození zrychlení budeme vycházet z poklesu energie díky práci spotřebované na překonání valivého odporu:

$$E = E_0 - F_v \cdot x,$$

to si rozepíšeme pomocí (10) a (21) a dostaneme rovnici:

$$\frac{9}{10} m v^2 - mg \sin \alpha \cdot x = E_0 - \frac{\xi}{R} \cdot \sqrt{2} mg \cos \alpha \cdot x.$$

Derivací této rovnice podle času získáme:

$$\frac{9}{5} m v \cdot a_v - mg \sin \alpha \cdot v = -\frac{\xi}{R} \cdot \sqrt{2} mg \cos \alpha \cdot v,$$

rovnici vydělíme mv a pomocí dalších úprav získáme vztah pro zrychlení a_v se započtením valivého odporu:

$$a_v = \frac{5}{9} g \sin \alpha - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cos \alpha \cdot \frac{\xi}{R}. \quad (22)$$

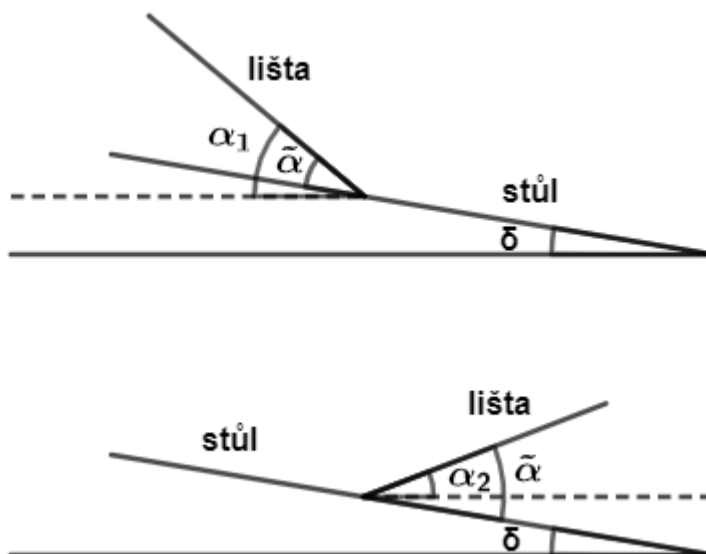
V experimentu se jedná o skutečně naměřenou hodnotu zrychlení, ze které jsme schopni vypočítat rameno valivého odporu jako:

$$\xi = \frac{9}{5} \cdot \frac{R}{\sqrt{2} g \cos \alpha} \cdot (a - a_v), \quad (23)$$

kde $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$ označuje teoretickou hodnotu v případě nulového valivého odporu.

3.1.5 Odstranění vlivu náklonu stolu

Jak již bylo zmíněno ve druhé kapitole, abychom se při měření vypořádali s vlivem náklonu stolu, nechali jsme valit kuličku v liště jak ve směru zleva doprava, tak ve směru zprava doleva. Tuto situaci máme znázorněnu na Obrázku 10, kde δ označuje úhel náklonu stolu, $\tilde{\alpha}$ sklon mezi lištou a stolem a úhly α_1 a α_2 odchylky lišty od vodorovného směru v jednotlivých případech.



Obrázek 10: Vliv náklonu stolu

Z Obrázku 10 vidíme, že pro úhly α_1, α_2 platí:

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha} + \delta,$$

$$\alpha_2 = \tilde{\alpha} - \delta.$$

Aritmetický průměr obou úhlů a polovinu jejich rozdílu lze pak vyjádřit jako:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \tilde{\alpha}, \quad (24)$$

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \delta. \quad (25)$$

Označíme-li si a_1 zrychlení naměřené ve směru zleva doprava a a_2 zrychlení ve směru zprava doleva, pak a_1, a_2 vyjádříme podle (22) jako:

$$a_1 = \frac{5}{9} g \sin \alpha_1 - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cos \alpha_1 \cdot \frac{\xi}{R},$$

$$a_2 = \frac{5}{9} g \sin \alpha_2 - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cos \alpha_2 \cdot \frac{\xi}{R}.$$

Vyjádříme si aritmetický průměr obou zrychlení jako:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{5}{9} g \cdot \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cdot \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \cdot \frac{\xi}{R}.$$

Použitím vzorců pro součet funkcí sinus a kosinus a dosazením (24) a (25) si vyjádříme:

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \sin \tilde{\alpha} \cos \delta,$$

$$\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \cos \tilde{\alpha} \cos \delta.$$

Aritmetický průměr dvou zrychlení si tedy přepíšeme do tvaru:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{5}{9} g \sin \tilde{\alpha} \cos \delta - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cos \tilde{\alpha} \cos \delta \cdot \frac{\xi}{R}. \quad (26)$$

Oproti vyjádření zrychlení ve (22) se ve vyjádření aritmetického průměru dvou zrychlení objevuje u obou členů navíc funkce $\cos \delta$. Tu si pro $\delta \ll 1$ můžeme aproximovat funkcí $1 - \frac{\delta^2}{2}$. Člen $\frac{\delta^2}{2}$ můžeme zanedbat, neboť do sklonu stolu 5° se $\cos \delta$ liší od 1 o méně než 0,4 %. Nakonec tedy použijeme aproximaci $\cos \delta \doteq 1$, tím pádem $\cos \delta$ ze vztahu (26) zmizí a aritmetický průměr můžeme tedy vyjádřit:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{5}{9} g \sin \tilde{\alpha} - \frac{5}{9} \cdot \sqrt{2} g \cos \tilde{\alpha} \cdot \frac{\xi}{R}. \quad (27)$$

Správný postup, jak redukovat vliv náklonu stolu, je tedy změřit zrychlení při pohybu zleva doprava i zprava doleva a při výpočtech používat jejich aritmetický průměr.

3.2 Valení kuličky po kolejničkách

Nejprve si opět odvodíme vztahy pro základní veličiny, které budeme potřebovat v jednotlivých odvozeních zrychlení pro tento případ. Protože odvození jsou založena na stejných principech jako v kapitole 3.1, budeme je zkracovat.

Z pravoúhlého trojúhelníka v pravé části Obrázku 11 si pomocí Pythagorovy věty vyjádříme kvadrát vzdálenosti r^2 těžiště od osy otáčení:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}, \quad (28)$$

kde R značí poloměr kuličky a d vzdálenost kolejniček.

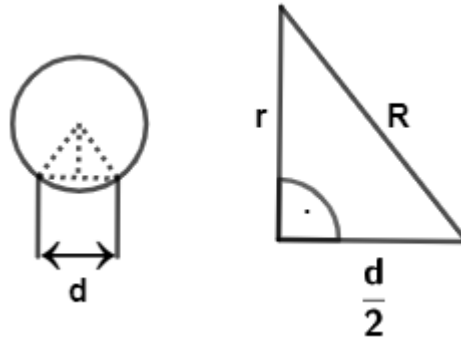
Pro kvadrát úhlové rychlosti ω^2 v tomto případě dostaneme:

$$\omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = v^2 / \left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right), \quad (29)$$

kde v je rychlost ve směru osy x .

Moment setrvačnosti J vzhledem k ose neprocházející těžištěm dostaneme ze Steinerovy věty po dosazení vztahů (3) a (28):

$$J = \frac{2}{5} mR^2 + m \left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right) = m \left(\frac{7}{5} R^2 - \frac{d^2}{4}\right). \quad (30)$$



Obrázek 11: Kulička na kolejničkách a základní rozměry

3.2.1 Odvození zrychlení z druhé věty impulsové

Obdobně jako v kapitole 3.1.1 budeme vycházet ze vztahu:

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M.$$

Dosazením za M z (5), vynásobením rovnice r a označením $r \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$ postupně dostaneme:

$$J \frac{dv}{dt} = mg \cdot r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Za J dosadíme ze vztahu (30) a za r^2 z (28) a označíme $\frac{dv}{dt} = a$, tím dostaneme:

$$m \left(\frac{7}{5} R^2 - \frac{d^2}{4} \right) \cdot a = mg \left(R^2 - \frac{d^2}{4} \right) \cdot \sin \alpha,$$

z čehož dostaneme vztah pro zrychlení se zanedbáním valivého odporu ve tvaru:

$$a = g \sin \alpha \cdot \left(R^2 - \frac{d^2}{4} \right) / \left(\frac{7}{5} R^2 - \frac{d^2}{4} \right),$$

ten si ještě upravíme do tvaru, ve kterém vystupuje průměr kuličky ($D = 2R$):

$$a = g \sin \alpha \cdot (D^2 - d^2) / \left(\frac{7}{5} D^2 - d^2 \right). \quad (31)$$

Aby bylo možné kuličku valit po kolejničkách a pro její zrychlení platil tento vztah, musí být splněna podmínka $D > d$. Ze vztahu (31) lze vyčíst, že v případě, kdy bude $D \gg d$, tak zrychlení se zanedbáním valivého odporu se bude blížit hodnotě $\frac{5}{7} g \sin \alpha$ a bude se tak prakticky jednat o valení přímo po nakloněné rovině.

3.2.2 Odvození zrychlení ze zákona zachování energie

Nejprve si opět vyjádříme potenciální a kinetickou energii. Potenciální energie V je stejná jako v (9), což vychází z Obrázku 8, tedy $V = -mg \sin \alpha \cdot x$.

Kinetická energie ($T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{\text{koule}} \omega^2$) po dosazení za J_{koule} a ω^2 vychází:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{2 R^2}{5 r^2}\right) = \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{7}{5} D^2 - d^2\right) / (D^2 - d^2).$$

Pro zjednodušení si zavedeme označení $K = \left(\frac{7}{5} D^2 - d^2\right) / (D^2 - d^2)$. T pak vyjádříme:

$$T = \frac{1}{2} K m v^2. \quad (32)$$

Dosazením vztahů (9) a (32) do rovnice (7) dostaneme:

$$\frac{1}{2} K m v^2 - mg \sin \alpha \cdot x = \text{konst.}$$

Derivací podle času a následnými úpravami rovnice se dopracujeme k vyjádření zrychlení a se zanedbáním valivého odporu ve tvaru:

$$a = g \sin \alpha \cdot \frac{1}{K}, \quad (33)$$

po dosazení za K se tento vztah shoduje se vztahem (31).

Odvození zrychlení ze ZZE bez použití derivací máme již provedeno pro obecný případ v kapitole 3.1.2, takže ho znovu uvádět nebudeme. Porovnáním vztahů (14) a (33) je pro tento případ konstanta $k = \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{5} D^2 - d^2\right) / (D^2 - d^2)$.

3.2.3 Odvození zrychlení z Lagrangeových rovnic 2. druhu

Lagrangeovu funkci (lagrangián) si vyjádříme jako:

$$L = T - V = \frac{1}{2} K m \dot{x}^2 + mg \sin \alpha \cdot x. \quad (34)$$

Dosazením Lagrangeovy funkce z (34) vypočítáme jednotlivé derivace v Lagrangeově rovnici (16):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = K m \ddot{x},$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin \alpha.$$

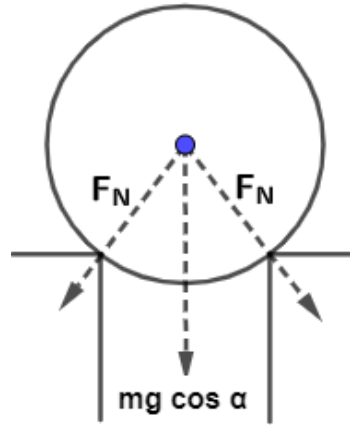
Lagrangeova rovnice pak bude ve tvaru:

$$K m \ddot{x} - mg \sin \alpha = 0,$$

následnými úpravami rovnice získáme vztah pro zrychlení:

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \cdot \frac{1}{K}. \quad (35)$$

3.2.4 Odvození zrychlení se započtením valivého odporu



Obrázek 12: Znárodnění přitlačné síly kuličky ke kolejničkám

Nejprve si vyjádříme velikost přitlačné síly F_N pomocí Obrázku 11 a Obrázku 12. Obdobně jako u valení v liště je i v tomto případě F_N přitlačná síla na každou kolejničku, pro výpočet velikosti odporové síly F_v použijeme tedy vztah (19).

Vyjádřením $2F_N = mg \cos \alpha \cdot \frac{R}{r}$ a dosazením do vztahu (19) dostaneme:

$$F_v = \frac{\zeta}{R} \cdot mg \cos \alpha \cdot \frac{R}{r} = \frac{\zeta}{r} \cdot mg \cos \alpha. \quad (36)$$

Při odvození zrychlení opět vycházíme z poklesu energie díky práci spotřebované na překonání valivého odporu ($E = E_0 - F_v \cdot x$), pro tento případ vyjádřeno jako:

$$\frac{1}{2} K m v^2 - mg \sin \alpha \cdot x = E_0 - \frac{\zeta}{r} \cdot mg \cos \alpha \cdot x.$$

Derivací této rovnice podle času a následnou úpravou rovnice dostaneme vztah pro zrychlení a_v se započtením valivého odporu:

$$a_v = g \sin \alpha \cdot \frac{1}{K} - g \cos \alpha \cdot \frac{\zeta}{r} \cdot \frac{1}{K}, \quad (37)$$

ze kterého jsme schopni vypočítat rameno valivého odporu ζ . První člen označuje teoretickou hodnotu zrychlení v případě nulového valivého odporu (označíme ji a), zatímco a_v je experimentálně naměřená hodnota. Pro ζ tedy bude platit:

$$\zeta = \frac{1}{g \cos \alpha} \cdot (a - a_v) \cdot r \cdot K,$$

K rozepíšeme, za r dosadíme z (28) a následnou úpravou s použitím $D = 2R$ se dostaneme k vyjádření ζ ve tvaru:

$$\zeta = \frac{1}{g \cos \alpha} \cdot (a - a_v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{5} D^2 - d^2 \right) / \sqrt{D^2 - d^2}. \quad (38)$$

4 Výsledky měření

V této kapitole jsou zpracovány výsledky našich měření. Valení kuliček jsme analyzovali z natočených videí pomocí programu Tracker, analýzu videí si vysvětlíme v páté kapitole. Protože v této kapitole budeme pracovat jak s naměřenými hodnotami zrychlení kuliček, tak s teoretickými hodnotami, které by zrychlení mělo v případě nulového valivého odporu, je dobré odlišit jejich značení. Naměřené hodnoty zrychlení budeme značit a_v (protože je v nich započítán vliv valivého odporu) a teoretické hodnoty se zanedbáním valivého odporu budeme značit a . Toto značení jsme ostatně použili i ve třetí kapitole při odvození jednotlivých vztahů.

Z analýzy valení v Trackeru jsme dostali závislost polohy kuličky na čase $x(t)$, z níž jsme vypočítali hodnotu zrychlení a_v . Graf s naměřenými daty jsme proložili kvadratickou funkcí (parabolou) a zobrazili si rovnici paraboly, ve které je koeficient u t^2 roven $\frac{1}{2} a_v$. Naměřenou hodnotu a_v jsme následně porovnali s hodnotou a , ve které není započítán vliv valivého odporu, a vypočítali velikosti ramen valivého odporu ζ podle příslušných vztahů. Hodnoty ζ udáváme v mm zaokrouhleny na dvě desetinná místa, protože přesnější určování nemá smysl, jak si později vysvětlíme. Na závěr kapitoly jsou výsledky okomentovány. Příklady naměřených závislostí polohy kuličky na čase jsou uvedeny v Příloze A a veškerá naměřená data budou dána k dispozici KDF na CD pro případné další zpracování.

4.1 Valení kuličky v liště profilu L

Jak již máme uvedeno ve druhé kapitole, k tomuto pokusu jsme použili hliníkovou lištu délky 100 cm a dřevěnou lištu délky 95 cm. Vzhledem k tomu, že se délky lišt liší jen o 5 %, vycházely úhly sklonu α téměř stejné. Při nastavení úhlu sklonu jednou podložkou o výšce 1,9 cm byl $\sin \alpha \doteq 0,02$, při nastavení úhlu dvěma podložkami o celkové výšce 3,8 cm byl $\sin \alpha \doteq 0,04$. Malé náklony jsme volili záměrně, aby pohyb kuliček šel dobře demonstrovat. Hodnoty zrychlení a pro případ nulového valivého odporu jsme vypočítali podle vztahu $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$. Jednotlivá ramena valivého odporu jsme vypočítali podle vztahu (23) v kapitole 3.1.4. Ve vztahu (23) můžeme zanedbat $\cos \alpha$, protože pro naše malé úhly je prakticky roven 1.

Z 16 natočených variant valení ve dvou směrech jsme k analýze vybrali 9, celkem jsme tedy analyzovali 18 videí. Jak analýza ukázala, tak ve všech případech měla kulička ve směru zleva doprava větší zrychlení než v opačném směru. Při měření jsme sice používali vodováhu, ale i přesto mohl být stůl mírně nakloněn doleva nebo mohla být nějaká nesymetrie u obou lišt. Níže jsou jednotlivé varianty zpracované.

Ocelová kulička ($D = 10$ mm)

U této kuličky jsme analyzovali pouze *valení v hliníkové liště při menším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,015 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,021 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,018 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,104 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,06$ mm.

Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm)

U této kuličky jsme postupně analyzovali všechny čtyři varianty, nejprve *valení v hliníkové liště při menším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,051 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,088 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,070 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,104 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,06$ mm.

Poté jsme analyzovali *valení v hliníkové liště při větším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,163 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,197 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,180 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,207 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,04$ mm.

Následně jsme analyzovali *valení v dřevěné liště při menším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,034 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,065 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,049 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,109 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,10$ mm.

Nakonec jsme analyzovali *valení v dřevěné liště při větším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,144 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,175 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení

$a_v = 0,160 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,218 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,10 \text{ mm}$.

Skleněná kulička ($D = 15,9 \text{ mm}$)

U této kuličky jsme analyzovali dvě varianty, nejprve *valení v dřevěné liště při menším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,024 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,044 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,034 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,109 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,08 \text{ mm}$.

Poté jsme analyzovali *valení v dřevěné liště při větším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,113 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,157 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,135 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,218 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,09 \text{ mm}$.

Skleněná kulička ($D = 24,9 \text{ mm}$)

U této kuličky jsme analyzovali dvě varianty, nejprve *valení v hliníkové liště při menším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,038 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,079 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,059 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,104 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,07 \text{ mm}$.

Poté jsme analyzovali *valení v hliníkové liště při větším úhlu sklonu*. Ve směru zprava doleva jsme naměřili zrychlení $0,150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ve směru zleva doprava $0,177 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dále jsme tedy počítali s aritmetickým průměrem obou zrychlení $a_v = 0,164 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,207 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,07 \text{ mm}$.

4.2 Valení kuličky po kolejničkách

Jak jsme již zmínili ve druhé kapitole, k tomuto pokusu jsme potřebovali dva stejné ocelové úhelníkové profily délky 63 cm, které jsme upevnili na desku a vytvořili z nich kolejničky. Zajistili jsme, aby deska byla mírně nakloněná, a naměřili

sklon $\alpha \doteq 1,86^\circ$ ($\sin \alpha \doteq 0,03$). Postupně jsme měnili vzájemnou vzdálenost d kolejniček od 4 mm do 24 mm, sklon desky zůstal po celou dobu měření stejný. Hodnoty zrychlení a pro případ nulového valivého odporu jsme vypočítali podle vztahu $a = g \sin \alpha \cdot (D^2 - d^2) / (\frac{7}{5} D^2 - d^2)$. Jednotlivá ramena valivého odporu jsme vypočítali podle vztahu (38) v kapitole 3.2.4. V něm je opět možné zanedbat $\cos \alpha$, protože pro úhel $1,86^\circ$ je roven 0,9995. K analýze jsme vybrali 8 variant, které jsou níže zpracované. V Tabulce 1 uvádíme porovnání teoretických hodnot a bez valivého odporu a naměřených hodnot a_v pro ocelové kuličky, v Tabulce 2 pak totéž pro skleněné kuličky.

Ocelová kulička ($D = 10$ mm)

U této kuličky jsme analyzovali obě dvě varianty. Když byla vzdálenost kolejniček 4 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,037 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,216 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\xi = 0,12$ mm.

Když byla vzdálenost kolejniček 7 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,030 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,178 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\xi = 0,10$ mm.

Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm)

U této kuličky jsme analyzovali tři varianty. Když byla vzdálenost kolejniček 4 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,145 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,226 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\xi = 0,15$ mm.

Když byla vzdálenost kolejniček 7 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,128 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,222 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\xi = 0,17$ mm.

Když byla vzdálenost kolejniček 22 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,060 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,122 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\xi = 0,10$ mm.

Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm)

U této kuličky jsme analyzovali dvě varianty. Když byla vzdálenost kolejniček 4 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,097 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota

zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,223 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,14 \text{ mm}$.

Když byla vzdálenost kolejniček 13 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,059 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,144 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,09 \text{ mm}$.

Skleněná kulička ($D = 24,9 \text{ mm}$)

U této kuličky jsme analyzovali pouze variantu, kdy byla vzdálenost kolejniček 7 mm, naměřili jsme zrychlení $a_v = 0,139 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Teoretická hodnota zrychlení bez valivého odporu je $a = 0,222 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rameno valivého odporu vychází $\zeta = 0,15 \text{ mm}$.

Tabulka 1: Hodnoty zrychlení pro ocelové kuličky

d [mm]	$D = 10 \text{ mm}$		$D = 25,4 \text{ mm}$	
	a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a_v [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a_v [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]
4	0,216	0,037	0,226	0,145
7	0,178	0,030	0,222	0,128
10			0,216	
13			0,206	
16			0,191	
19			0,167	
22			0,122	0,060
24			0,067	

Tabulka 2: Hodnoty zrychlení pro skleněné kuličky

d [mm]	$D = 15,9 \text{ mm}$		$D = 24,9 \text{ mm}$	
	a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a_v [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]	a_v [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]
4	0,223	0,097	0,226	
7	0,213		0,222	0,139
10	0,192		0,216	
13	0,144	0,059	0,205	
16			0,189	
19			0,163	
22			0,113	
24			0,048	

4.3 Shrnutí výsledků

V případě valení v liště se vypočítané hodnoty ramen valivého odporu pohybují v rozmezí 0,04-0,10 mm. Při porovnání měření pro kuličku ze stejného materiálu na stejné liště, ale např. při jiném úhlu sklonu nebo při porovnání měření mezi menší a větší ocelovou kuličkou, dostáváme hodnoty ζ vcelku stejné. Aritmetickým průměrem jednotlivých hodnot nám tedy vychází pro ocelovou kuličku v hliníkové liště rameno valivého odporu 0,05 mm, pro ocelovou kuličku v dřevěné liště 0,10 mm, pro skleněnou kuličku v hliníkové liště 0,07 mm a pro skleněnou kuličku v dřevěné liště 0,08 mm. Za povšimnutí také stojí hodnota naměřeného zrychlení $a_v = 0,018 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ u ocelové kuličky ($D = 10 \text{ mm}$) v hliníkové liště při sklonu $\sin \alpha \doteq 0,02$, která je v porovnání s teoretickou hodnotou bez valivého odporu $a = 0,104 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ asi šestkrát menší. Můžeme vidět, že v tomto případě je vliv valivého odporu opravdu významný.

V případě valení po kolejničkách se vypočítané hodnoty ramen valivého odporu pohybují v rozmezí 0,09-0,17 mm. Vypočítané hodnoty však nejsou zjevně určeny s velkou přesností. Zejména pro větší vzdálenosti kolejniček se do chyby ve výpočtu ζ výrazněji promítá nepřesnost měření jejich vzdáleností.

Rozptyl hodnot ramen valivého odporu je opravdu značný, ale zjištěné hodnoty v zásadě odpovídají hodnotám známým z dostupných zdrojů. Např. v článku *Introduction to the study of rolling friction* [13] z časopisu *American Journal of Physics* jsou uvedeny hodnoty ζ , které byly též naměřeny při pohybu kuliček po nakloněné rovině, a v zásadě se od našich hodnot neliší (třeba řádově). Navíc hodnoty ζ jsou zde udávány pro různé průměry kuliček a pokaždé vychází jiné a nepřesnosti měření jsou také poněkud velké. Ukazuje se, že s valivým odporem to je ve skutečnosti poněkud složitější a že běžně užívaný vztah pro odporovou sílu ($F_v = \frac{\zeta}{R} \cdot F_N$) je jen nejjednodušší aproximací, i přesto se však v praxi běžně používá.

Podstatným zjištěním z našich měření je, že pohyb byl skutečně rovnoměrně zrychlený, jak jsme předpokládali, což můžeme vidět na grafech v Příloze A. Dalším podstatným zjištěním je, že když do měření započteme valivý odpor (pro $\zeta \doteq 0,1 \text{ mm}$), tak výsledky opravdu odpovídají teorii: v liště L profilu zrychlení prakticky nezávisí na velikosti kuliček, pro větší sklon je větší zrychlení a se zvětšující se vzdáleností kolejniček zrychlení klesá.

5 Poznámky pro učitele

V této kapitole jsou sepsány doplňující informace pro učitele k jednotlivým pokusům, které nebyly zmíněny ve druhé kapitole. Jedná se především o nejrůznější rady a doporučení, jak postupovat při měření, jakých chyb se vyvarovat apod. Máme tu také popsáno, jak pracovat s programem Tracker, a uvedeno, kde nakoupit některé pomůcky k pokusům.

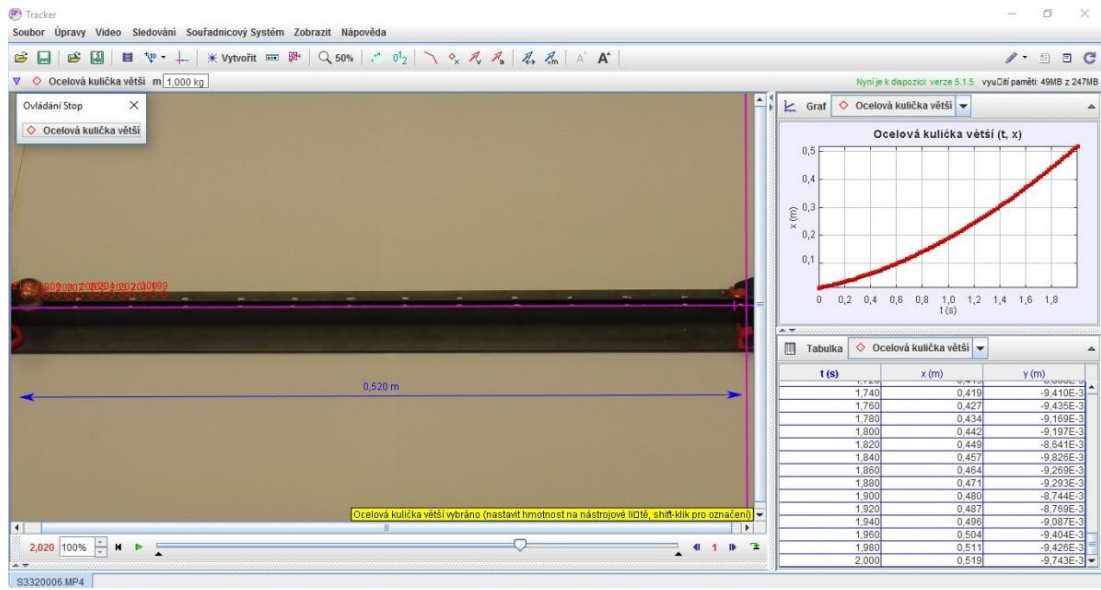
Při přípravě obou pokusů je především důležité pořádně si naměřit všechny potřebné rozměry, pokud chceme mít co nejpřesnější výsledky měření. Průměry kuliček, se kterými budeme provádět měření, pečlivě změříme posuvným měřítkem v několika směrech, abychom vyloučili případnou nesymetrii kuličky, a z jednotlivých hodnot vypočítáme aritmetický průměr. Před samotným měřením je potřeba vypočítat do roviny stůl, na kterém budeme provádět měření, případně vliv náklonu stolu redukovat tím, že změříme pohyb kuličky v obou směrech a z naměřených zrychlení vypočítáme aritmetický průměr, jak jsme si odvodili ve třetí kapitole. Aby byly výsledky co nejpřesnější, je také důležité pečlivě naměřit sklon lišty v prvním pokusu a sklon desky s kolejničkami ve druhém pokusu. U lišty bychom měli především dbát na to, aby byla svými okraji zároveň s kovovými podložkami, které zaručují její stabilitu, a po nastavení sklonu změřit vzdálenost kovových podložek. Další možností, jak měřit sklon lišty nebo desky s kolejničkami, je využít mobilní aplikaci měřící sklon nebo použít vodováhu, kterou vypočítáme do roviny, a sklon vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníka, jak jsme si již uvedli ve druhé kapitole. Pro nastavení co nejpřesnější vzdálenosti kolejniček je také dobré použít posuvné měřítko.

Je potřeba si uvědomit, že valení po nakloněné rovině, kdy je mezi valícím se tělesem a podložkou jeden kontaktní bod, není totéž jako valení v případech, které jsme prováděli my, kdy byly kontaktní body dva. Podle toho, jaký druh pokusu si vybereme, pak musíme použít správný vztah pro výpočet zrychlení. V případě valení po nakloněné rovině o úhlu sklonu α je zrychlení se zanedbáním valivého odporu vyjádřeno vztahem $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$, v případě valení v liště profilu L je vyjádřeno $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$ a v případě valení po kolejničkách $a = g \sin \alpha \cdot (D^2 - d^2) / (\frac{7}{5} D^2 - d^2)$. Z posledního vztahu lze vyzorovat, že pokud je vzdálenost d mezi kolejničkami zanedbatelná vůči průměru kuličky D , tak v podstatě dva kontaktní body splynou

v jeden a zrychlení se bude blížit hodnotě $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$ a bude se tak prakticky jednat o valení po nakloněné rovině.

Pokud se rozhodneme pohyb analyzovat pomocí videí, měla by být kamera, na kterou pohyb nahráváme, po celou dobu ve stabilní poloze a směřovat kolmo na snímáný objekt, aby bylo co nejmenší zkreslení. Videá můžeme následně analyzovat pomocí programu Tracker, který je zdarma ke stažení na [14]. V programu pak můžeme natočená videa analyzovat snímek po snímku, v případě snímkovací frekvence 50 snímků/s je možné pohyb analyzovat každých 0,02 s, v případě frekvence 25 snímků/s každých 0,04 s. K měření v Trackeru se vztahuje Obrázek 13. Po nahrání videa do programu si nastavíme počátek soustavy souřadnic do místa, od kterého budeme zkoumat pohyb, a osu x ve směru pohybu (na Obrázku 13 jsou osy x a y vyznačeny fialově). Následně pomocí funkce Kalibrační páska změříme délku dráhy, na které budeme pohyb zkoumat, a nastavíme skutečnou vzdálenost (na Obrázku 13 vyznačeno modře). Díky značkám, které jsme si udělali na úhelníkových profilech po každých 4 cm, pak můžeme během měření kontrolovat, jestli nedochází k výraznému zkreslení vzdálenosti. V sekci Vytvořit pak vybereme Hmotný bod, který si můžeme pojmenovat (na Obrázku 13 pojmenováno Ocelová kulička větší). Pomocí klávesy Shift a myši, kterou klikáme na kuličku, pak můžeme analyzovat pohyb (na Obrázku 13 vidíme červené stopy po klikání myši na kuličku). Naměřená data se pak shromažďují v pravém dolním rohu a v pravém horním rohu jsou zaznamenávány do grafu. Je také možné využít funkci Autotracker pro automatické snímání.

K pokusům si můžeme nakoupit ocelové kuličky různých velikostí od firmy Tobex [15], která se zabývá prodejem kuličkových ložisek. Úhelníkové profily můžeme běžně nakoupit v hobby marketech. Za naše dva úhelníkové profily jsme zaplatili 45 Kč.



Obrázek 13: Měření v programu Tracker

Závěr

Cílem práce bylo vytipovat a zrealizovat pokusy z oblasti mechaniky hmotného bodu, soustav hmotných bodů a mechaniky tuhého tělesa s jednoduchými pomůckami využitelné v přednáškách příslušných předmětů na MFF UK. Konkrétně jsme se zaměřili na pokusy z oblasti valení.

V první kapitole jsme provedli rešerši české a zahraniční literatury a ostatních zdrojů věnujících se této problematice. Zjistili jsme, že české zdroje se tomuto tématu věnují jen povrchně, většinou jsme v nich našli jen seznamy námětů na pokusy bez nějakého podrobnějšího rozboru. Naopak v zahraničních zdrojích se k danému tématu objevují články, ve kterých je problematika podrobně rozebrána, jsou zde uvedeny vztahy pro výpočty a prezentovány grafy s výsledky.

Ve druhé kapitole jsme si představili vytipované pokusy, konkrétně valení kuličky v liště profilu L a valení po kolejničkách, sestavených ze dvou úhelníkových profilů. Představili jsme si pomůcky k jednotlivým pokusům a uvedli některé parametry potřebné k výpočtům včetně způsobu jejich měření.

Ve třetí kapitole jsme provedli teoretická odvození vztahů pro zrychlení kuliček, nejprve se zanedbáním valivého odporu, poté se započtením valivého odporu. Ze zrychlení, ve kterém je započten valivý odpor, jsme vypočítali rameno valivého odporu. Zrychlení jsme odvodili jak na vysokoškolské úrovni pomocí derivací, tak na středoškolské úrovni s využitím předpokladu, že pohyb je rovnoměrně zrychlený. Nejjednodušší je pravděpodobně odvození pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu, naopak středoškolské odvození je poněkud složitější a zdlouhavé.

Ve čtvrté kapitole jsme prezentovali výsledky našich měření. Podstatným zjištěním bylo, že pohyb kuliček byl rovnoměrně zrychlený a že při malých úhlech sklonu nakloněné roviny, vhodných pro názornou demonstraci pohybu kuliček, je nezbytné započítat vliv valivého odporu. Příklady naměřených závislostí souřadnice valící se kuličky na čase jsou uvedeny v Příloze A.

V páté kapitole jsme sepsali poznámky pro učitele k jednotlivým pokusům, rady a doporučení, jak provádět měření, jakých chyb se vyvarovat apod. Jednalo se o doplňující informace k druhé kapitole.

Myslíme si, že cíle naší bakalářské práce byly naplněny. Do budoucna se tu samozřejmě nabízí prostor pro podrobnější analýzu a hlubší teoretický rozbor valivého odporu, především prozkoumat, jak přesně závisí na rozměrech kuličky, její rychlosti, hrubosti povrchu apod.

Seznam použité literatury

- [1] *Matematika-fyzika-informatika* [online]. Praha: Prometheus, 1991- [cit. 2021-7-21]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi>
- [2] *Veletrh nápadů učitelů fyziky* [online]. [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <http://vnuf.cz/>
- [3] *Physics Education* [online]. Bristol: IOP Publishing, 1966- [cit. 2021-7-22]. ISSN 1361-6552. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/journal/0031-9120>
- [4] Turning the World Inside Out and 174 Other Simple Physics Demonstrations. *ArvindGuptaToys Books Gallery* [online, PDF]. [cit. 2021-7-22]. Dostupné z: <https://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/insideout.pdf>
- [5] VOLF, I. a P. KABRHEL. Několik nápadů o volném pádu. *Matematika-fyzika-informatika* [online, PDF]. 2013, **22**(1), 33-38 [cit. 2021-7-22]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/6/5>
- [6] *Souhrnný sborník Veletrhu nápadů učitelů fyziky* [online]. [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <http://vnuf.cz/sbornik/>
- [7] KOUPIL, J., P. KYCL a kol. Cvičení z fyziky pro sekundu. In: BOCHNÍČEK, Z. a Z. NAVRÁTIL (ed.). *Sborník z konference Veletrh nápadů učitelů fyziky 14* [online, PDF]. Brno: Masarykova univerzita, 2009, s. 133-137 [cit. 2021-7-22]. ISBN 978-80-210-5022-8. Dostupné z: [http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_14_\(Brno_2009\).pdf](http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_14_(Brno_2009).pdf)
- [8] DVOŘÁK, L. Další nápady z Malé Hraštic 4: tíhové zrychlení stokrát jinak. In: VOCHOZKA, V., V. BEDNÁŘ a kol. (ed.). *Sborník z konference Veletrh nápadů učitelů fyziky 19* [online, PDF]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2015, s. 36-40 [cit. 2021-7-22]. ISBN 978-80-261-0439-1. Dostupné z: [http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_19_\(Cheb_2014\).pdf](http://vnuf.cz/sbornik/rocniky/Veletrh_19_(Cheb_2014).pdf)

- [9] GLUCK, P. Balls on an incline roll, slide and skip. *Physics Education* [online, PDF]. 2005, **40**(3), 206-209 [cit. 2021-7-22]. ISSN 1361-6552. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/40/3/F03/pdf>
- [10] RATHJEN, D. Energy transformations of a marble rolling on a track. *Physics Education* [online, PDF]. 2012, **47**(4), 388-389 [cit. 2021-7-22]. ISSN 1361-6552. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/47/4/F01/pdf>
- [11] LADINO, L. A. Rolling sphere along an inclined multi-slotted track. *Physics Education* [online, PDF]. 2020, **55**(3), 1-4 [cit. 2021-7-22]. ISSN 1361-6552. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/ab6e02/pdf>
- [12] REICHL, J. Valivý odpor. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/37-valivy-odpor>
- [13] DOMÉNECH, A., T. DOMÉNECH a J. CEBRIÁN. Introduction to the study of rolling friction. *American Journal of Physics* [online]. 1987, **55**(3), 231-235 [cit. 2021-7-21]. ISSN 0002-9505. Dostupné z: doi:10.1119/1.15223
- [14] *Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education* [online]. [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <https://physlets.org/tracker/>
- [15] *Ložiska Tobex Praha - Katalogy ložisek a eshop ložisek* [online]. [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <http://www.tobex.cz/>

Seznam tabulek

Tabulka 1: Hodnoty zrychlení pro ocelové kuličky

Tabulka 2: Hodnoty zrychlení pro skleněné kuličky

Tabulka A.1: Ocelová kulička ($D = 10$ mm) v hliníkové liště při menším úhlu sklonu (směr zleva doprava); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

Tabulka A.2: Ocelová kulička ($D = 10$ mm) v hliníkové liště při menším úhlu sklonu (směr zprava doleva); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

Tabulka A.3: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) v dřevěné liště při větším úhlu sklonu (směr zleva doprava); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

Tabulka A.4: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) v dřevěné liště při větším úhlu sklonu (směr zprava doleva); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Kuličky

Obrázek 2: Kovové a dřevěné podložky

Obrázek 3: Hliníková lišta

Obrázek 4: Dřevěná lišta

Obrázek 5: Pomůcky potřebné k valení po kolejničkách

Obrázek 6: Kolejničky připravené k provedení pokusu

Obrázek 7: Zapadnutí kuličky do lišty a základní rozměry

Obrázek 8: Valení kuličky

Obrázek 9: Znázornění přítláčné síly kuličky k liště

Obrázek 10: Vliv náklonu stolu

Obrázek 11: Kulička na kolejničkách a základní rozměry

Obrázek 12: Znázornění přítláčné síly kuličky ke kolejničkám

Obrázek 13: Měření v programu Tracker

Obrázek A.1: Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm) v dřevěné liště při menším úhlu sklonu (směr zleva doprava); R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.

Obrázek A.2: Skleněná kulička ($D = 24,9$ mm) v hliníkové liště při větším úhlu sklonu (směr zprava doleva); R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.

Obrázek A.3: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) na kolejničkách vzdálených 13 mm; R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.

Obrázek A.4: Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm) na kolejničkách vzdálených 22 mm; R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.

Příloha A: Příklady měření polohy kuličky v závislosti na čase

Tabulka A.1: Ocelová kulička ($D = 10$ mm) v hliníkové liště při menším úhlu sklonu (směr zleva doprava); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

t [s]	x [m]	t [s]	x [m]	t [s]	x [m]
0,00	0,000	1,36	0,162	2,72	0,382
0,04	0,004	1,40	0,168	2,76	0,389
0,08	0,008	1,44	0,174	2,80	0,396
0,12	0,013	1,48	0,180	2,84	0,404
0,16	0,016	1,52	0,186	2,88	0,410
0,20	0,020	1,56	0,192	2,92	0,417
0,24	0,023	1,60	0,198	2,96	0,423
0,28	0,028	1,64	0,204	3,00	0,429
0,32	0,031	1,68	0,211	3,04	0,437
0,36	0,036	1,72	0,216	3,08	0,444
0,40	0,041	1,76	0,224	3,12	0,451
0,44	0,043	1,80	0,230	3,16	0,458
0,48	0,049	1,84	0,236	3,20	0,464
0,52	0,054	1,88	0,242	3,24	0,472
0,56	0,059	1,92	0,250	3,28	0,479
0,60	0,063	1,96	0,257	3,32	0,486
0,64	0,068	2,00	0,264	3,36	0,494
0,68	0,072	2,04	0,271	3,40	0,501
0,72	0,077	2,08	0,276	3,44	0,507
0,76	0,081	2,12	0,283	3,48	0,515
0,80	0,086	2,16	0,288	3,52	0,522
0,84	0,091	2,20	0,294	3,56	0,530
0,88	0,097	2,24	0,302	3,60	0,537
0,92	0,102	2,28	0,309	3,64	0,543
0,96	0,108	2,32	0,315	3,68	0,551
1,00	0,113	2,36	0,321	3,72	0,558
1,04	0,118	2,40	0,329	3,76	0,565
1,08	0,124	2,44	0,336	3,80	0,573
1,12	0,129	2,48	0,342	3,84	0,579
1,16	0,134	2,52	0,348	3,88	0,586
1,20	0,139	2,56	0,354	3,92	0,593
1,24	0,146	2,60	0,362	3,96	0,600
1,28	0,151	2,64	0,370		
1,32	0,157	2,68	0,376		

Tabulka A.2: Ocelová kulička ($D = 10$ mm) v hliníkové liště při menším úhlu sklonu (směr zprava doleva); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

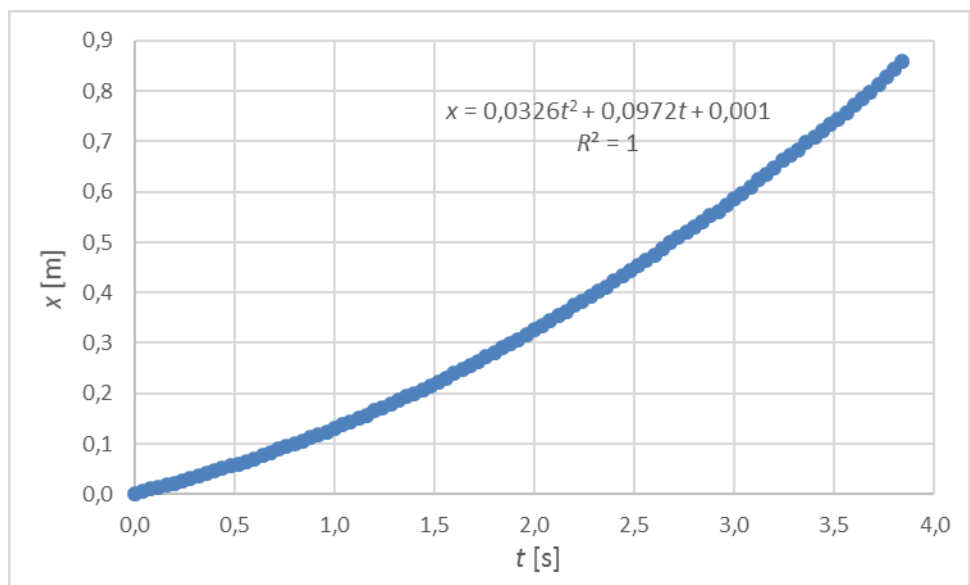
t [s]	x [m]	t [s]	x [m]	t [s]	x [m]	t [s]	x [m]
0,00	0,000	1,52	0,105	3,04	0,261	4,56	0,449
0,04	0,003	1,56	0,109	3,08	0,266	4,60	0,454
0,08	0,006	1,60	0,113	3,12	0,272	4,64	0,460
0,12	0,008	1,64	0,116	3,16	0,276	4,68	0,465
0,16	0,010	1,68	0,121	3,20	0,281	4,72	0,470
0,20	0,012	1,72	0,124	3,24	0,286	4,76	0,476
0,24	0,014	1,76	0,128	3,28	0,290	4,80	0,480
0,28	0,016	1,80	0,132	3,32	0,294	4,84	0,487
0,32	0,019	1,84	0,137	3,36	0,299	4,88	0,493
0,36	0,022	1,88	0,140	3,40	0,304	4,92	0,498
0,40	0,024	1,92	0,143	3,44	0,309	4,96	0,504
0,44	0,026	1,96	0,147	3,48	0,314	5,00	0,508
0,48	0,028	2,00	0,150	3,52	0,319	5,04	0,512
0,52	0,030	2,04	0,154	3,56	0,324	5,08	0,517
0,56	0,032	2,08	0,157	3,60	0,329	5,12	0,522
0,60	0,036	2,12	0,162	3,64	0,336	5,16	0,529
0,64	0,037	2,16	0,165	3,68	0,339	5,20	0,535
0,68	0,040	2,20	0,169	3,72	0,344	5,24	0,541
0,72	0,042	2,24	0,175	3,76	0,349	5,28	0,546
0,76	0,046	2,28	0,179	3,80	0,354	5,32	0,551
0,80	0,049	2,32	0,182	3,84	0,358	5,36	0,558
0,84	0,050	2,36	0,187	3,88	0,362	5,40	0,562
0,88	0,054	2,40	0,191	3,92	0,367	5,44	0,569
0,92	0,057	2,44	0,195	3,96	0,372	5,48	0,574
0,96	0,059	2,48	0,200	4,00	0,377	5,52	0,579
1,00	0,063	2,52	0,203	4,04	0,381	5,56	0,586
1,04	0,065	2,56	0,206	4,08	0,385	5,60	0,591
1,08	0,069	2,60	0,212	4,12	0,391	5,64	0,596
1,12	0,071	2,64	0,216	4,16	0,396	5,68	0,601
1,16	0,076	2,68	0,223	4,20	0,402	5,72	0,606
1,20	0,078	2,72	0,225	4,24	0,408	5,76	0,611
1,24	0,083	2,76	0,229	4,28	0,413	5,80	0,619
1,28	0,085	2,80	0,234	4,32	0,418	5,84	0,622
1,32	0,088	2,84	0,239	4,36	0,424	5,88	0,628
1,36	0,093	2,88	0,244	4,40	0,428	5,92	0,634
1,40	0,095	2,92	0,249	4,44	0,434	5,96	0,639
1,44	0,099	2,96	0,253	4,48	0,440	6,00	0,645
1,48	0,102	3,00	0,259	4,52	0,445		

Tabulka A.3: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) v dřevěné liště při větším úhlu sklonu (směr zleva doprava); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

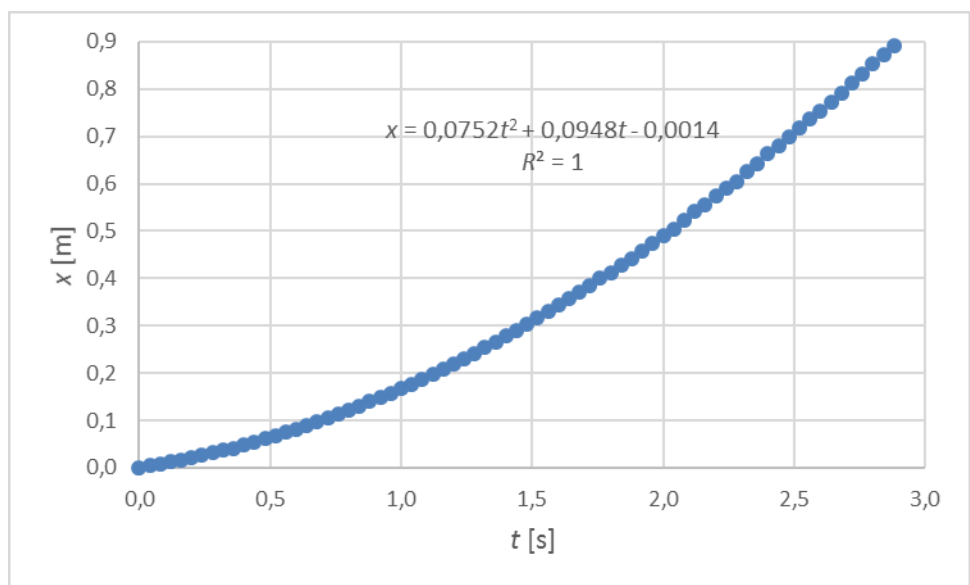
t [s]	x [m]	t [s]	x [m]
0,00	0,000	1,32	0,302
0,04	0,006	1,36	0,316
0,08	0,012	1,40	0,330
0,12	0,017	1,44	0,343
0,16	0,024	1,48	0,359
0,20	0,030	1,52	0,372
0,24	0,036	1,56	0,387
0,28	0,042	1,60	0,403
0,32	0,049	1,64	0,420
0,36	0,055	1,68	0,435
0,40	0,062	1,72	0,450
0,44	0,070	1,76	0,467
0,48	0,077	1,80	0,484
0,52	0,085	1,84	0,501
0,56	0,094	1,88	0,518
0,60	0,103	1,92	0,535
0,64	0,111	1,96	0,551
0,68	0,120	2,00	0,569
0,72	0,129	2,04	0,587
0,76	0,139	2,08	0,604
0,80	0,150	2,12	0,623
0,84	0,160	2,16	0,642
0,88	0,170	2,20	0,660
0,92	0,180	2,24	0,678
0,96	0,189	2,28	0,698
1,00	0,202	2,32	0,717
1,04	0,214	2,36	0,737
1,08	0,224	2,40	0,756
1,12	0,237	2,44	0,774
1,16	0,252	2,48	0,795
1,20	0,263	2,52	0,816
1,24	0,276	2,56	0,833
1,28	0,289	2,60	0,848

Tabulka A.4: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) v dřevěné liště při větším úhlu sklonu (směr zprava doleva); x je uražená vzdálenost měřená podél lišty.

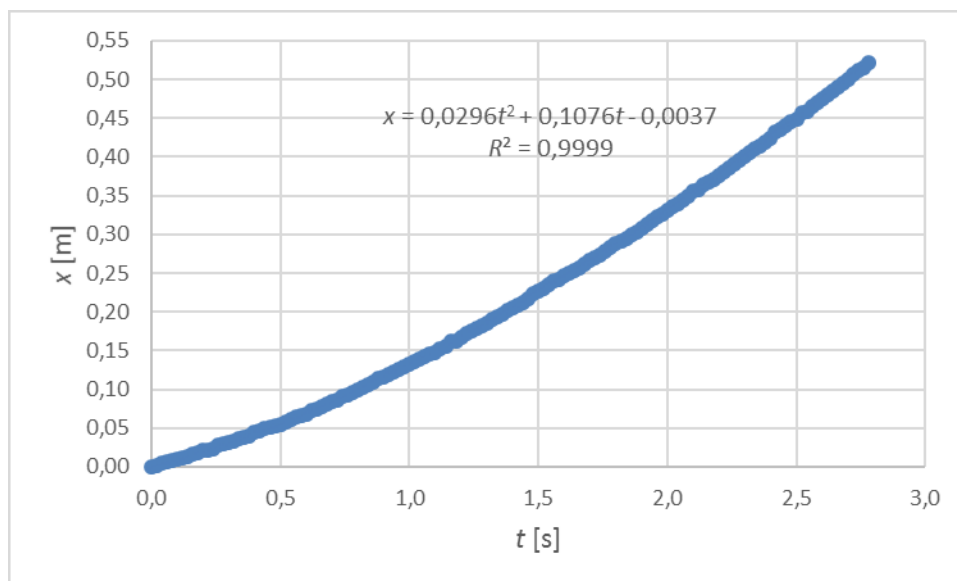
t [s]	x [m]	t [s]	x [m]
0,00	0,000	1,36	0,310
0,04	0,007	1,40	0,320
0,08	0,014	1,44	0,333
0,12	0,020	1,48	0,346
0,16	0,027	1,52	0,358
0,20	0,034	1,56	0,372
0,24	0,040	1,60	0,385
0,28	0,048	1,64	0,399
0,32	0,054	1,68	0,412
0,36	0,063	1,72	0,426
0,40	0,072	1,76	0,439
0,44	0,079	1,80	0,453
0,48	0,087	1,84	0,468
0,52	0,096	1,88	0,484
0,56	0,106	1,92	0,497
0,60	0,114	1,96	0,510
0,64	0,123	2,00	0,526
0,68	0,132	2,04	0,543
0,72	0,141	2,08	0,558
0,76	0,149	2,12	0,573
0,80	0,158	2,16	0,590
0,84	0,168	2,20	0,603
0,88	0,178	2,24	0,619
0,92	0,188	2,28	0,636
0,96	0,196	2,32	0,652
1,00	0,207	2,36	0,668
1,04	0,219	2,40	0,683
1,08	0,229	2,44	0,703
1,12	0,240	2,48	0,721
1,16	0,250	2,52	0,738
1,20	0,262	2,56	0,755
1,24	0,273	2,60	0,770
1,28	0,284	2,64	0,788
1,32	0,297	2,68	0,808



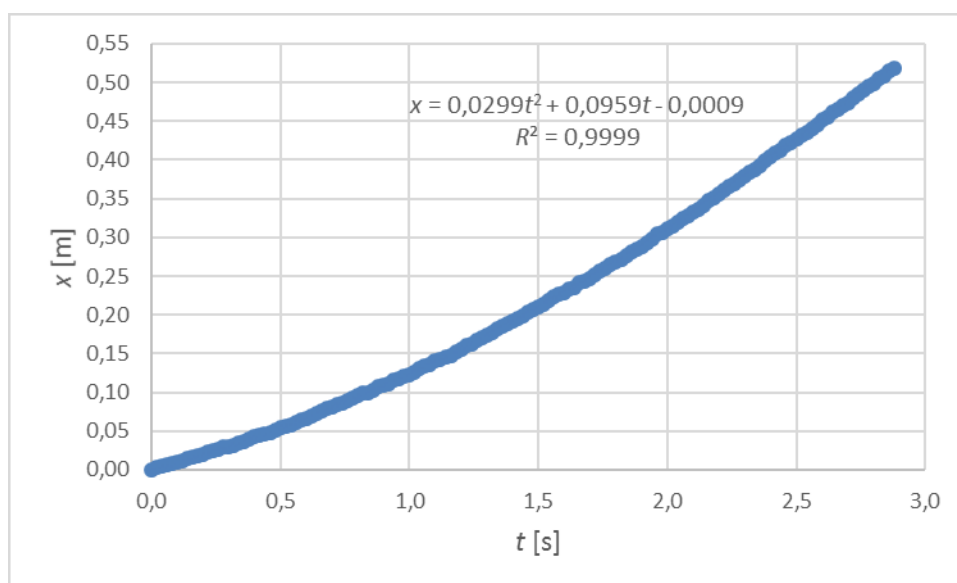
Obrázek A.1: Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm) v dřevěné liště při menším úhlu sklonu (směr zleva doprava); R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.



Obrázek A.2: Skleněná kulička ($D = 24,9$ mm) v hliníkové liště při větším úhlu sklonu (směr zprava doleva); R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.



Obrázek A.3: Skleněná kulička ($D = 15,9$ mm) na kolejničkách vzdálených 13 mm; R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.



Obrázek A.4: Ocelová kulička ($D = 25,4$ mm) na kolejničkách vzdálených 22 mm; R^2 označuje hodnotu spolehlivosti.