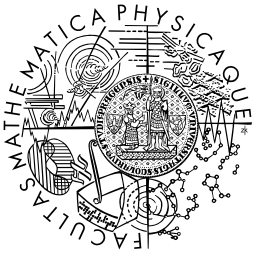


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Mašát

Investiční strategie

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ....

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc., že i v náročném a bezprecedentním období si našel čas a mou práci vedl.

Název práce: Investiční strategie

Autor: Filip Mašát

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cílem práce je vysvětlit metodu výběru portfolia založenou na teorii grafů. V práci se zavede potřebná teorie z finanční matematiky a z teorie grafů. Popsaná metoda se poté použije na reálná data a porovná se s klasickými metodami, kde se riziko měří směrodatnou odchylkou a střední absolutní odchylkou a užívaná kritéria jsou založena na Markowitzově přístupu a Sharpeově poměru. Výpočty a vykreslování grafů se provádí v Mathematice.

Klíčová slova: investiční strategie, optimální portfolia, diverzifikace pomocí teorie grafů

Title: Investment strategies

Author: Filip Mašát

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of probability and mathematical statistics

Abstract: The goal of the thesis is to explain the portfolio diversification with graph theory. It introduces needed terminology from financial mathematics and from graph theory. The described methods is used on real data and are compared with classic method where risk is measured by the standard deviation and mean absolute deviation and used criteria are based on the Markowitz approach and Sharpe ratio. The software Mathematica is used for computation and graph rendering.

Keywords: investment strategies, optimal portfolios, diversification with graph theory

Obsah

1 Úvod **2**

2 Základní pojmy **3**
2.1 Finanční pojmy . . . 3
2.1.1 Eficientní trh . . . 3
2.1.2 Portfolio . . . 4
2.1.3 Konstrukce optimálního portfolia (Markowitzův přístup) . . . 4
2.2 Teorie grafů . . . 5

3 Použití teorie grafů při výběru portfolia **6**
3.1 Výpočet korelační matice . . . 6
3.2 Vytvoření matice sousednosti . . . 6
3.3 Analýza grafu . . . 7
3.4 Modifikace přidáním očekávaných výnosů . . . 8

4 Numerická studie **9**
4.1 Pořízení dat . . . 9
4.2 Korelační matice a matice sousednosti . . . 9
4.3 Graf . . . 10
4.4 Výběr aktiv . . . 10
4.4.1 Výběr podle očekávaných výnosů . . . 11
4.5 Změna parametru θ . . . 13
4.6 Porovnání s klasickými metodami . . . 13
4.6.1 Minimalizace účelové funkce . . . 14
4.6.2 Maximalizace Sharpeova poměru . . . 14
4.6.3 Maximalizace očekávaného výnosu upraveného o riziko . . . 15

Závěr **16**

Seznam použité literatury **17**

Seznam obrázků **18**

A Přílohy **19**
A.1 AplikaceTeorieGrafu.nb . . . 19
A.2 PortfolioReturns . . . 19

1. Úvod

Existuje několik metod jak vybrat optimální portfolio a tím ochránit naše investice. Cílem této práce je prozkoumat metodu, která je založena na teorii grafů. Tato metoda vychází z instruktážního videa od autorů Kelly a Chen (2014).

V práci nejdříve zavedeme potřebné pojmy z finanční matematiky a teorie grafů.

Podrobně rozebereme postup jak obecně tuto metodu aplikovat. Dále metodu modifikujeme, abychom se vyhnuli nejednoznačnosti v některých případech.

Nakonec tuto metodu aplikujeme na reálná data a porovnáme s klasickými metodami, kde se riziko měří směrodatnou odchylkou a střední absolutní odchylkou a užívaná kritéria jsou založena na Markowitzově přístupu a Sharpeově poměru. Aplikaci provedeme pomocí softwaru Mathematica.

2. Základní pojmy

2.1 Finanční pojmy

Nejdříve vysvětlíme, co zde budeme chápat pod pojmem aktiva. Normálně se tento pojem využívá v účetnictví, ale zde je jeho význam mnohem užší. V účetnictví jsou aktiva vše, co podnik vlastní a v budoucnu by mělo přinést ekonomický zisk. Dělí se na dlouhodobá a krátkodobá. Dlouhodobá aktiva se ještě dělí na dlouhodobý hmnotný majetek, dlouhodobý nehmotný majetek a dlouhodobý finanční majetek. Krátkodobá se dělí na zásoby, pohledávky a krátkodobý finanční majetek. Nás bude zajímat pouze finanční majetek. Jedná se o majetek, který není pořízen pro běžnou činnost, ale s cílem dosažení výnosu z investovaných prostředků. V našem kontextu **aktiva** budou finanční majetek. Souhrn aktiv se nazývá portfolio. Následujicí definice a pojmy jsou převzaty z přednášky finančního managementu (viz Hurt (2019)) a z Dupačová, Hurt a Štěpán (2002).

2.1.1 Eficientní trh

Pro matematickou konstrukci optimálního portfolia je vhodné zavést pojem eficientního trhu. **Eficientní trh** se skládá z investorů a vlastního trhu. Ty musí splňovat následující podmínky (některé z nich jsou na skutečném trhu diskutabilní až nereálné):

Investoři

1. O svých portfoliích se rozhodují pouze na základě očekávaných výnosů a kovarianční struktuře výnosů.
2. Pokud mají portfolia stejné riziko, vyberou to s vyšším výnosem.
3. Pokud mají portfolia stejný výnos, vyberou to s nižším rizikem.

Trh

1. Aktiva jsou nekonečně dělitelná.
2. Doba investice je jedno časové období.
3. Nejsou zde žádné transakční náklady a daně.
4. Existuje pouze jedna bezriziková úroková míra a všichni investoři mohou neomezeně půjčovat a neomezeně si vypůjčit, jakoukoli potřebnou částku za bezrizikovou úrokovou míru.
5. Všechna aktiva jsou obchodovatelná.
6. Investoři mohou prodávat aktiva nakrátko.
7. Investoři nemohou značně ovlivnit výnosy daných aktiv.
8. Všechny potřebné informace jsou stejně dostupné pro všechny investory.

Za těchto podmínek nastává tržní rovnováha, jelikož všichni investoři mají stejné informace a chovají se racionálně.

2.1.2 Portfolio

Portfolio je skupina aktiv. Racionální investor ho vybírá tak, aby maximalizoval svůj zisk a minimalizoval riziko.

Definice 1 (portfolio)**.** *Máme-li n aktiv a disponibilní bohatství w, potom je portfolio vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, kde x_i představuje část w, která byla investována do i-tého aktiva, $i = 1, \ldots, n$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i = w$.*

Obecně se nepředpokládá $x_i \geq 0$, protože $x_i < 0$ vyjadřuje prodej nakrátko, který má ekonomický význam. My ale $x_i \geq 0$ budeme předpokládat. Dále předpokládejme, že výnosy aktiv jsou náhodné veličiny $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)^T$ a očekávané výnosy $\boldsymbol{r} = E\rho = (r_1, \ldots, r_n)^T$ spolu s kovarianční maticí $\mathbb{V} = (\sigma_{i,j})$, kde $\sigma_{i,j} = cov(\rho_i, \rho_j)$ pro $i,j = 1, \ldots, n$. Výnos portfolia a očekávaný výnos portfolia jsou

$$\rho_p = \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{x}$$
$$r_p = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x}.$$

Rozptyl výnosu portfolia je

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{x}^T \mathbb{V} \boldsymbol{x}$$

a rizikem portfolia p rozumíme jeho směrodatnou odchylku

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}.$$

2.1.3 Konstrukce optimálního portfolia (Markowitzův přístup)

Markowitzův přístup ke konstrukci optimálního portfolia je založen na tom, že známe pouze očekávané výnosy $\boldsymbol{r}$ a kovarianční matici $\mathbb{V}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat $w = 1$. Pro konstrukci budeme muset vyřešit následující úlohy:

1. Minimalizovat účelovou funkci

   $$\frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \mathbb{V} \boldsymbol{x},$$

   vzhledem k $\mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} = \mu$, kde μ je požadovaný očekávaný výnos.

2. Maximalizovat Sharpeův poměr

   $$\frac{\text{očekávaný výnos portfolia}}{\text{risk portfolia}} = \frac{\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T \mathbb{V} \boldsymbol{x}}}$$

   vzhledem k $\mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1$.

3. Maximalizovat očekávaný výnos upravený o riziko

   $$\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x}^T \mathbb{V} \boldsymbol{x}$$

   vzhledem k $\mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = 1$, kde λ vyjadřuje averzi k riziku. Čím vyšší λ, tím vyšší averze. Pokud $\lambda = 0$, tak investor nemá averzi k riziku a pokud $\lambda < 0$, teoreticky riziko vyhledává.

2.2 Teorie grafů

Nejdříve uvedme potřebné pojmy z teorie grafů. Definice jsou převzaty z Matoušek a Nešetřil (2009).

Definice 2 (Graf)**.** *Graf G je uspořádaná dvojice (V,E), kde V je nějaká neprázdná množina a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V. Prvky množiny V se nazývají vrcholy grafu G a prvky množiny E hrany grafu G.*

Chceme-li graf znázornit, tak vrcholům přiřadíme nějaké body v rovině a hrany jsou spojnice mezi těmito body. Existuje několik důležitých konkrétních grafů, například úplný graf (všechny body jsou navzájem spojené), kružnice, ale pro nás důležitým bude cesta.

Cesta je graf s množinou vrcholů $V = 0, 1, \ldots, n$ a množinou hran $E = \{\{i-1, i\}, i = 1, \ldots, n\}$ a značí se P_n. Dále budeme chtít grafy nějak popisovat. Pro naše účely budeme potřebovat pojmy jako: podgraf, cesta v grafu, souvislost a komponenty.

Značením $V(G)$, $E(G)$ myslíme množinu vrcholů, respektive hran, grafu G. Potom v_i je prvek z $V(G)$ a e_i z $E(G)$.

Definice 3 (Izomorfismus)**.** *Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ nazýváme izomorfní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V \to V'$, tak že platí*

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

Definice 4 (Podgraf)**.** *Řekneme, že graf H je podgrafem G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.*

Definice 5 (Cesta v grafu)**.** *Cesta v grafu G je podgraf grafu G, který je izomorfní s nějakou cestou P_t.*

Alternativní definicí je, že cestu v grafu můžeme vyjádřit jako posloupnoust $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, kde $v_0, v_1, \ldots, v_t$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G, a pro každe $i = 1, 2, \ldots, t$ je $e_i = v_{i-1}, v_i \in E(G)$.

Definice 6 (Souvislost grafu)**.** *Řekneme, že graf je souvislý, jestliže pro každé dva jeho vrcholy x a y v něm existuje cesta z x do y*

Souvislé podgrafy grafu G se nazývají **komponenty**.

Kromě grafického znázornění, můžeme graf reprezentovat i maticí. Této matici se říká matice sousednosti.

Definice 7 (Matice sousednosti)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy. Označme vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ (v nějakém libovolném pořadí). Matice sousednosti grafu G je čtvercová $n \times n$ matice $\mathbb{A}_G = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ definovaná předpisem*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3. Použití teorie grafů při výběru portfolia

Ukážeme si, jak lze efektivně vybrat a diverzifikovat riziko pomocí grafů. Výhoda použití teorie grafů je ta, že získáme grafickou reprezentaci vztahů mezi aktivy. V grafech jsou vrcholy a hrany, takže bychom měli říct, co v našem kontextu tyto veličiny představují. Vrcholy v našem případě představují jednotlivá aktiva, ať už akcie, dluhopisy, jiné cenné papíry nebo nějaké komodity. A hrany představují sílu jejich korelace. Používáme korelaci, protože aktiva, která mají vzájemně vysokou korelaci, reagují na změny na trhu podobně. Pokud by tedy stouply výnosy u jednoho, stoupnou i u druhého. Problém, kterému se chceme vyhnout ale nastane, pokud je situace opačná a výnosy jdou dolů. Tedy v našem portfoliu chceme aktiva, která nejsou příliš korelovaná.

3.1 Výpočet korelační matice

Korelační matici spočítáme na základě historických výnosů našich aktiv. Vektor očekávaných výnosů i-tého aktiva za časový horizont $1, \ldots, m$ označíme jako $\boldsymbol{R}_i$ (rozdíl oproti ρ_i a r_i je ten, že to byly skaláry, pouze jeden výnos nebo očekávaný výnos spadal na jedno aktivum, zde máme celý vektor). Jelikož tedy máme vektory výnosů, nikoli však jejich rozdělení, tak jejich korelaci vyjádříme Pearsonovým korelačním koeficientem (výběrový koreláční koeficient). Nechť $R_{i,k}$ je výnos i-tého aktiva v k-tém období a m je počet uvažovaných období.

Definice 8. *Výběrový korelační koeficient $\varrho_{i,j}$ veličin $R_{i,k}$ a $R_{j,k}$, $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, definujeme jako*

$$\varrho_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{m}(R_{i,k} - \overline{\boldsymbol{R_i}})(R_{j,k} - \overline{\boldsymbol{R_j}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(R_{i,k} - \overline{\boldsymbol{R_i}})^2 \sum_{k=1}^{m}(R_{j,k} - \overline{\boldsymbol{R_j}})^2}}, \qquad \textit{kde } \overline{\boldsymbol{R_i}} \textit{ je průměr z } \boldsymbol{R_i}$$

Označme $\mathbb{P} := (\varrho_{i,j})_{i,j=1}^{n}$. Z odpovídající korelační matice $\mathbb{P}$ vytvoříme matici sousednosti, ze které pak sestrojíme odpovídající graf.

3.2 Vytvoření matice sousednosti

Předepíšeme prahovou hodnotu θ. Korelační matici převedeme na matici sousednosti pomocí těchto pravidel:

1. Prvky na diagonále nahradíme nulami
2. Prvky, které jsou menší než θ nahradíme nulami
3. Prvky, které jsou větší než θ nahradíme jedničkami

Tedy z matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{1,2} & \dots & \dots & \varrho_{1,n} \\ \varrho_{2,1} & \ddots & \dots & \varrho_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \varrho_{n,1} & \dots & \dots & \varrho_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

vytvoříme matici

$$\mathbb{A}_G = \begin{pmatrix} 0 & I_{(\theta,1)}(\varrho_{1,2}) & \dots & \dots & I_{(\theta,1)}(\varrho_{1,n}) \\ I_{(\theta,1)}(\varrho_{2,1}) & \ddots & \dots & I_{(\theta,1)}(\varrho_{i,j}) & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ I_{(\theta,1)}(\varrho_{n,1}) & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$I_{(\theta,1)}(x) = \begin{cases} 1 & pro\ x \in (\theta, 1) \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Tato matice nám jednoznačně reprezentuje graf našeho portfolia. Matice obsahuje pouze hodnoty 0, 1. V grafu jsou tedy vrcholy i a j spojené hranou pouze tehdy, pokud je v matici $\mathbb{A}_G$ na pozici i, j hodnota 1. Graf je samozřejmě neorientovaný, jelikož $\varrho_{i,j} = \varrho_{j,i}$, takže orientace hran by zde neměla žádný smysl.

3.3 Analýza grafu

Takto vytvořený graf budeme analyzovat. Nejdříve zjistíme kolik má netriviálních komponent, tedy komponent s více než jedním vrcholem. Do našeho portfolia tedy vezmeme všechny vrcholy, které v těchto komponentách nejsou obsažené. To znamená, že nejsou s ostatními prvky silně korelované a hodí se pro účely diverzifikace. Prvky, které jsou součastí komponent však nezahodíme, ale vybereme z nich takové, které mezi sebou nejsou silně korelované. Vybereme tedy prvky, které nejsou spojeny hranou. To znamená, vybereme co největší množinu nezávislých vrcholů. Pokud bychom měli bipartitní graf (graf ve kterém lze V(G) rozdělit na dvě disjunktní podmožiny V_1 a V_2 takové, že každá hrana z E(G) spojuje vrchol z V_1 s vrcholem z V_2), mohli bychom vzít tu větší množinu celou. Naopak v kompletním grafu můžeme vzít pouze jeden prvek. Na výběr největší množiny neexistuje algoritmus s rozumnou časovou složitostí, protože se jedná o takzvaný NP-úplný problém (Böhm a kol. (2011)).

Lze vidět, že náš graf záleží na zvolené hodnotě θ. Tu musíme zvolit tak, aby vzniklý graf neměl příliš velké komponenty, protože jinak by mohl být problém s výběrem největší nezávislé množiny. Zároveň však nesmí být příliš vysoká, protože by se pak vytratil smysl uvedeného postupu. Ale není to jediný parametr, ohledně kterého musíme být obezřetní. Dalším je čas. V čase se samozřejmě výnosy vyvíjejí, tudíž se mění i jejich vzájemná korelace. Také je dobré uvažovat klidnější periody – periody bez otřesů, šoků.

3.4 Modifikace přidáním očekávaných výnosů

Tuto metodu můžeme ještě modifikovat, přidáním očekávaných výnosů k jednotlivým vrcholům. Toto nám může změnit výběr nezavislé množiny vrcholů. Problém totiž je v nejednoznačnosti výběru největší nezávislé množiny. Pokud máme komponentu o dvou prvcích je jedno, zdali vezmeme první či druhý. To by jedno být ale nemělo, protože jeden může být mnohem výnosnější než druhý. Parametrů, podle kterých vybírat by mohlo být více, ale očekáváné výnosy jsou nejvíce přímočaré.

Nejdříve očekávané výnosy musíme spočítat. Jelikož nemáme žádná jiná data než historická, využijeme jich a vezmeme rovnoměrné rozdělení. Všechny výnosy budou mít stejnou pravděpodobnost, tedy očekávané výnosy spočítáme pouze jako aritmetický průměr všech výnosů v zkoumaném období. Největší nezávislá množina se potom změní v tom, že nebudeme hledat co nejvíce nezávislých vrcholů, ale nezávislou množinu s největším součtem očekávaných výnosů.

Dále v práci tento přístup nazýváme pouze modifikovaná metoda. A portfolio vzniklé tímto způsobem nazýváme modifikované portfolio.

4. Numerická studie

Nyní se pokusíme předchozí metodu ilustrovat na datech a porovnat s jinými metodami, založenými na Markowitzově přístupu. Metodu budeme ilustrovat pomocí softwaru Mathematica. V příloze je uveden zdrojový kód.

4.1 Pořízení dat

Mathematica má velice užitečnou funkci FinancialData[], která umí získat data z burz, týkající se akcií, investičních fondů a různých finančních instrumentů. Avšak tato funkce nemusí mít všechna data. Vezmeme data 29-ti společností z Dow Jonesova Indexu (je jich 30 ale data společnosti DowDuPont nejsou pomocí FinancialData[] dostupná). Potom indexy, týkající se komodit: zlato, stříbro, ropa, zemní plyn a zemědělství. A poslední skupinou jsou dluhopisy.

3M	MMM
American Express	AXP
Apple	AAPL
Boeing	BA
Caterpillar	CAT
Chevron	CVX
Cisco Systems	CSCO
Coca-Cola	KO
ExxonMobil	XOM
Goldman Sachs	GS
The Home Depot	HD
IBM	IBM
Intel	INTC
Johnson & Johnson	JNJ
JPMorgan Chase	JPM
McDonald's	MCD
Merck & Company	MRK
Microsoft	MSFT
Nike	NKE
Pfizer	PFE
Procter & Gamble	PG
Travelers	TRV
UnitedHealth Group	UNH
United Technologies	UTX
Verizon Communications	VZ
Visa	V
Walmart	WMT
Walgreens Boots Alliance	WBA
Walt Disney	DIS

Zlato	GLD
Stříbro	SLV
Ropa	USO
Zemní plyn	UNG
Zemědělství	DBA

Core 10+ Year USD Bond	ILTB
Broad U.S. TIPS Index	TIPZ
25+ Year Zero Coupon U.S. Treas.	ZROZ
Short-Term U.S. Treasury	SCHO
1-30 Laddered Treasury	PLW

Budeme zkoumat data za období 1.1.2015-1.1.2020 a budou nás zajímat pouze výnosy. To znamená, že od každého aktiva získáme vektor nějaké délky, která závisí na úplnosti dat. Data upravíme pomocí metody Hurt (2020). Tato metoda z našich dat vynechá kalendářní data, ve kterých nejsou kótována **všechna** uvažovaná aktiva. Nyní tedy máme všechny vektory stejné délky.

4.2 Korelační matice a matice sousednosti

Korelační matici a její převod na matici sousednosti ukážeme pouze na malém portfoliu a to pro akcie společností 3M, American Express, Apple, Boeing, Caterpillar, indexy zlata a stříbra a dluhopisy Core 10+ Year USD Bond a Broad

U.S. TIPS Index. Bylo by totiž velice nepraktické to zde ukazovat pro všechna aktiva, protože by se jednalo o matice 39×39.

$$\begin{pmatrix}
1. & 0.424344 & 0.427979 & 0.445177 & 0.57852 & -0.118763 & 0.0169332 & -0.149125 & -0.151662 \\
0.424344 & 1. & 0.36105 & 0.390487 & 0.467343 & -0.168486 & 0.00563413 & -0.205508 & -0.19394 \\
0.427979 & 0.36105 & 1. & 0.410898 & 0.433787 & -0.128688 & 0.00667803 & -0.107486 & -0.126933 \\
0.445177 & 0.390487 & 0.410898 & 1. & 0.509079 & -0.134257 & 0.0134255 & -0.135752 & -0.123939 \\
0.57852 & 0.467343 & 0.433787 & 0.509079 & 1. & -0.0826655 & 0.0980269 & -0.217039 & -0.132833 \\
-0.118763 & -0.168486 & -0.128688 & -0.134257 & -0.0826655 & 1. & 0.780187 & 0.370129 & 0.409699 \\
0.0169332 & 0.00563413 & 0.00667803 & 0.0134255 & 0.0980269 & 0.780187 & 1. & 0.261535 & 0.317356 \\
-0.149125 & -0.205508 & -0.107486 & -0.135752 & -0.217039 & 0.370129 & 0.261535 & 1. & 0.73887 \\
-0.151662 & -0.19394 & -0.126933 & -0.123939 & -0.132833 & 0.409699 & 0.317356 & 0.73887 & 1.
\end{pmatrix}$$

Jedná se o matici $\mathbb{P}$. Tuto matici tedy převedeme na matici sousednosti pomocí pravidel ze 3. kapitoly:

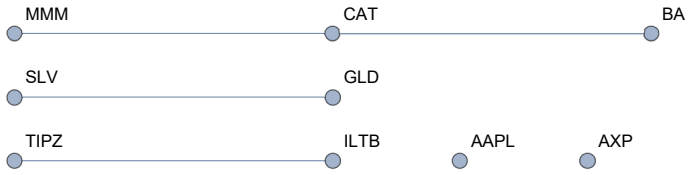
1. Prvky na diagonále nahradíme nulami
2. Prvky, které jsou menší než θ nahradíme nulami
3. Prvky, které jsou větší než θ nahradíme jedničkami

Zvolíme $\theta = 0{,}5$ a vznikne nám tato matice sousednosti $\mathbb{A}_G$.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

4.3 Graf

Tato matice sousednosti nám vyjadřuje tento graf:



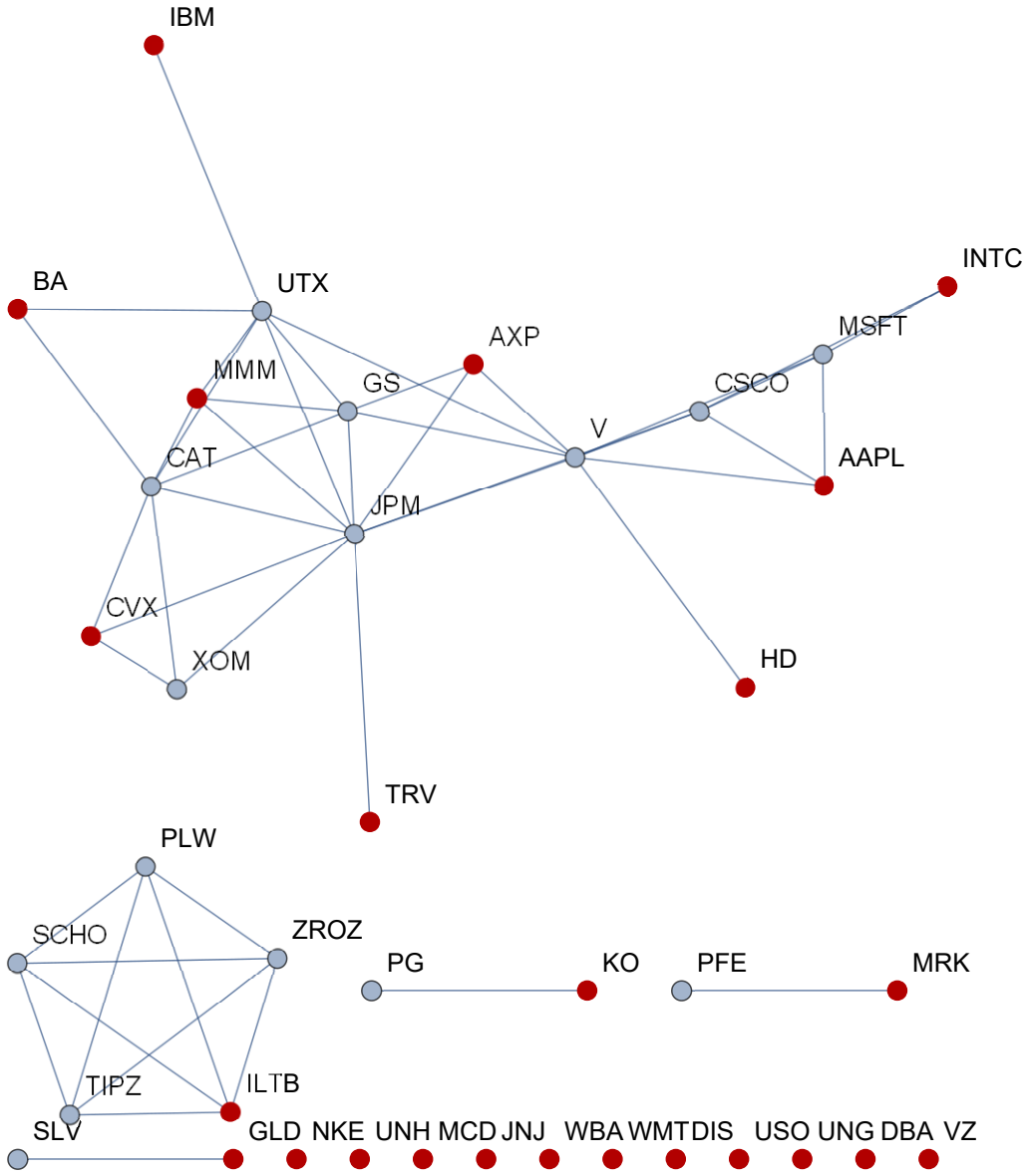
Obrázek 4.1: Graf malého portfolia pro $\theta = 0{,}5$

Ty samé kroky jako jsme zde udělali pro 9 aktiv, uděláme pro všechna a vznikne nám komplexnější graf. θ zůstává stejné, tedy 0,5.

Na obrázku 4.2, vidíme že graf má několik komponent a nezávislých prvků (barvy zatím ignorujeme).

4.4 Výběr aktiv

Pomocí tohoto grafu vybereme aktiva do našeho portfolia. Víme, že nezávislé prvky můžeme vzít všechny. Z komponent vybereme největší nezávislou množinu, což spolu s nezávislými prvky vytvoří žádoucí portfolio. Na obr. 4.2 jsou aktiva,

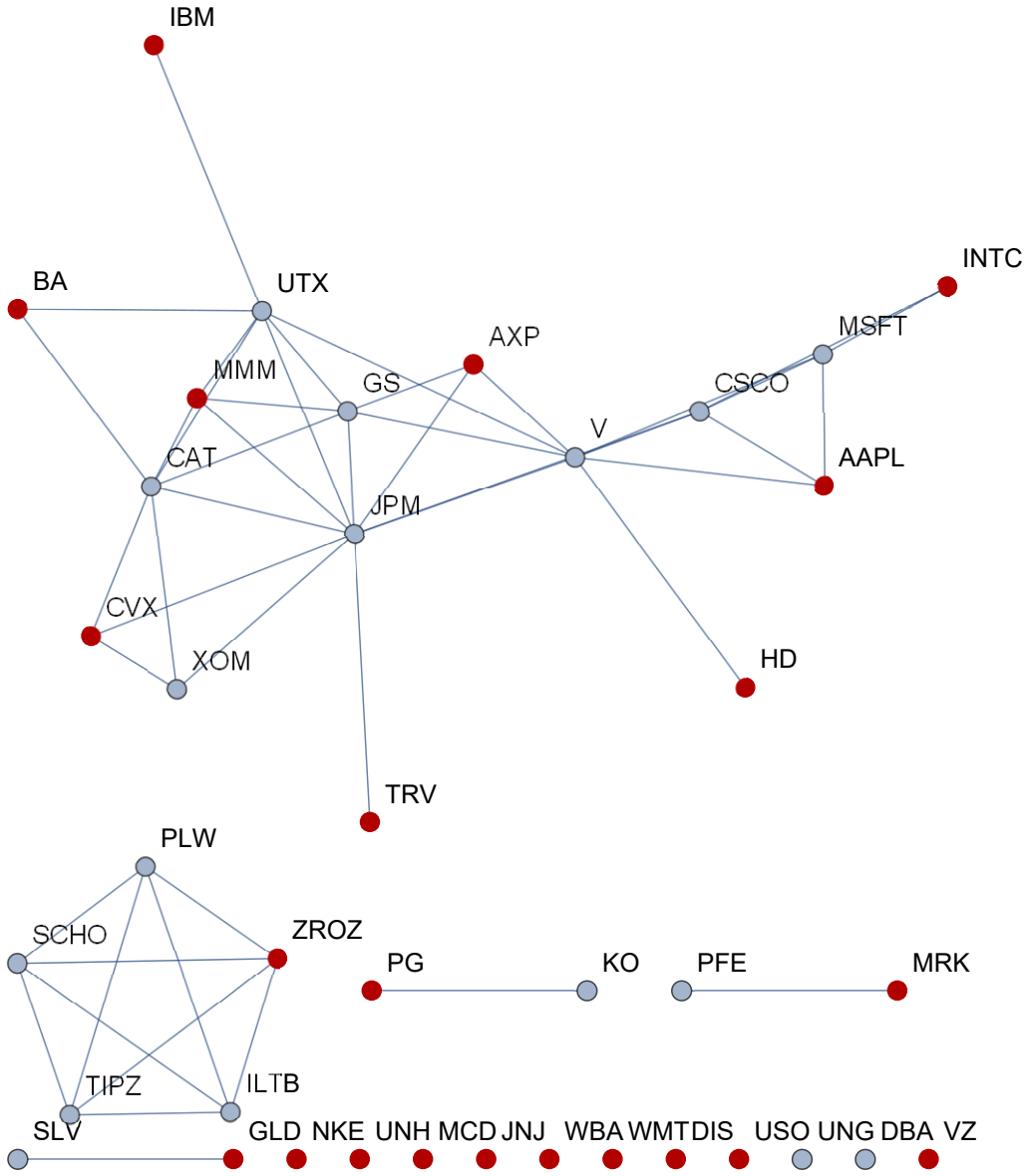


Obrázek 4.2: Graf portfolia pro $\theta = 0{,}5$

ktera jsou součastí portfolia, vyznačeny červeně. Tato metoda však neudává proporce aktiv. Zvolíme-li při disponibilním bohatství $w = 1$ váhy rovnoměrně, je očekávaný výnos tohoto portfolia $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i$, kde k je počet vybraných aktiv. Pro naše portfolio a volbu $\theta = 0{,}5$ je očekáváný výnos $r_P = 0{,}000561377$.

4.4.1 Výběr podle očekávaných výnosů

V podkapitole 3.4 jsme uvažovali, že dalším parametrem pro výběr portfolia jsou očekávané výnosy aktiv. Očekávané výnosy jednoho aktiva spočítáme jako výběrový průměr z jeho vektoru výnosů. Získáné hodnoty přiřadíme k odpovídajícím vrcholům. Nezávislá množina s největším součtem očekávaných výnosů je potom vyznačena na obrázku 4.3. Ihned vidíme rozdíl. Některé nezávislé prvky nebyly vybrané. To je kvůli tomu, že mají záporné očekávané výnosy. Celkový výnos tohoto portfolia je $r_{P_{mod}} = 0{,}000660441$. Dolní index P_{mod} značí, že se jedná o modifikované portfolio. Abychom srovnali tuto modifikaci s původní metodou,



Obrázek 4.3: Graf portfolia s výnosy pro $\theta = 0{,}5$

koukneme se ještě na nějaké míry rizika a to konkrétněji na směrodatnou odchylku, střední absolutní odchylku, VaR a CVaR. Střední absolutní odchylka má oproti směrodatné odchylce výhodu, že není tak citlivá na velké odchylky a chyby v pozorování. VaR (Value at risk) na hladině $1-\alpha$ je hodnota, kterou ztráta za určité období překročí s pravděpodobností $1-\alpha$. CVaR je průměr extrémních ztrát za hodnotou VaR. VaR a CVaR budeme zkoumat na hladině 0,05. Tedy $\alpha = 0{,}95$.

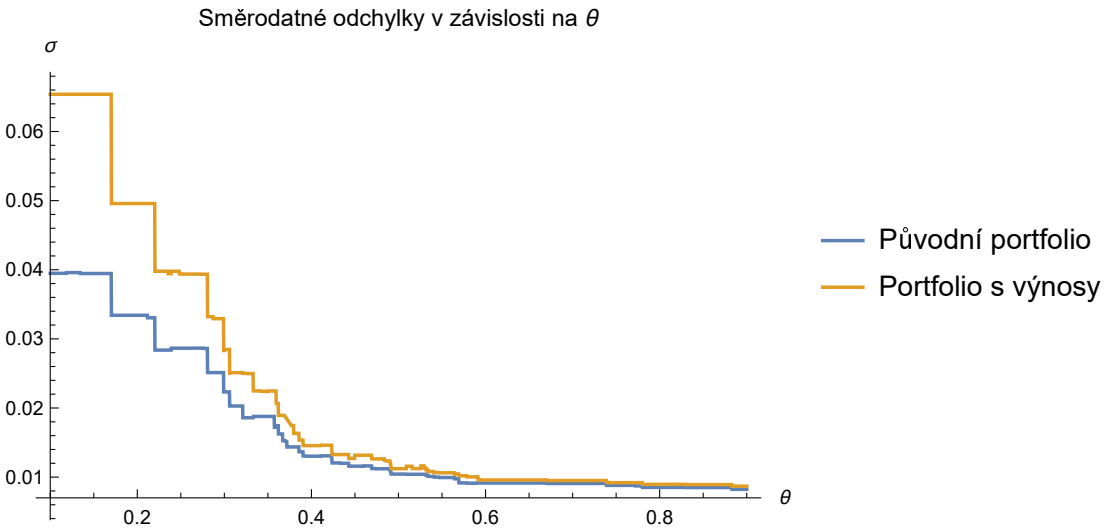
$$\begin{aligned} \sigma_P &= 0{,}0104394 & \sigma_{P_{mod}} &= 0{,}0112222 \\ MAD_P &= 0{,}0049344 & MAD_{P_{mod}} &= 0{,}00516548 \\ VaR^P_{0.95} &= 0{,}0110992 & VaR^{P_{mod}}_{0.95} &= 0{,}0116772 \\ CVaR^P_{0.95} &= 0{,}0171739 & CVaR^{P_{mod}}_{0.95} &= 0{,}0179697 \end{aligned}$$

Vidíme, že ve všech mírách rizika vychází první portfolio bezpečněji. Je to pravděpodobně dané tím, že modifikované portfolio má v sobě méně prvků. Když má vybrat mezi dvěmi aktivy, vybere to s větším výnosem, ale neporovnává jejich

riziko. Obecně platí, čím vyšší výnos, tím vyšší riziko. Rozdíly v riziku ale nejsou tak veliké a tedy je to opět na investorově volbě: riziko nebo výnos.

4.5 Změna parametru θ

Parametr θ je velmi důležitý při vytváření grafu. Čím menší θ, tím více hran máme a největší nezávislé množiny se hledají hůře. Navíc pokud vybíráme z velké množiny aktiv, může být časová složitost problémová. Pokud θ zvyšujeme, ignoruje se čím dál tím vyšší lineární závislost a do našeho portfolia můžeme vybrat prvky, které jsou navzájem velmi silně korelované. To může být riskantní. Pokud se ale podíváme na směrodatnou odchylku, všimneme si, že se zvyšujícím θ se snižuje. To jde proti tomu, co jsme říkali předtím. Důvod je v počtu vybraných aktiv. Čím více korelovanost ignorujeme, tím větší je výsledné portfolio.

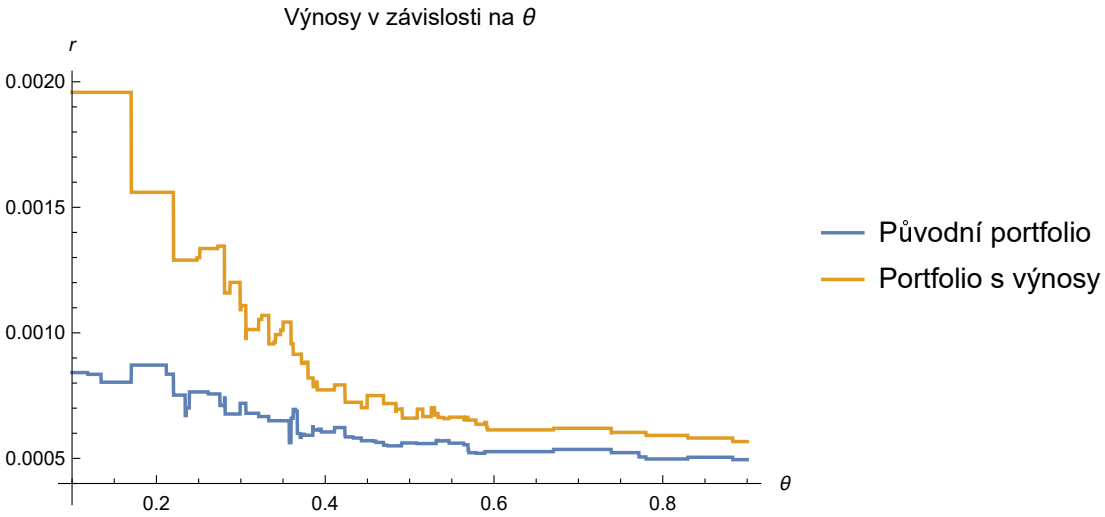


Obrázek 4.4: Graf závislosti směrodatné odchylky na θ

U výnosů v původním portfoliu takovou závislost nevidíme. Ale pokud bychom vzali modifikované portfolio, můžeme vidět, že výnosy s rostoucím θ klesají. Důvod, proč s malým θ jsou výnosy u modifikovaného portfolia tak vysoké, je takový, že do portfolia bereme málo prvků, ale ty prvky, které bereme, mají ze všech nejvyšší výnosy. Pro velmi vysoké hodnoty θ můžeme vzít skoro všechny prvky, ale v modifikovaném portfoliu nebudou nikdy obsaženy prvky se záporným očekávaným výnosem. Proto je mezi portfolii takový rozdíl ve výnosech i pro vysoké hodnoty θ.

4.6 Porovnání s klasickými metodami

Musíme si uvědomit, že nemůžeme metody porovnávat přímočaře, protože někde vystupuje averze k riziku a nebo v naší metodě vystupuje volba θ. Nejjednodušeji porovnáme metodu založenou na teorii grafů s první klasickou metodou (minimalizace účelové funkce).



Obrázek 4.5: Graf závislosti výnosů na θ

4.6.1 Minimalizace účelové funkce

Vezmeme naše portfolio pro volbu $\theta = 0{,}5$. Výnos tohoto portfolia dosadíme do metody minimalizace účelové funkce za požadovaný výnos. Vznikne nám alternativní portfolio se stejným výnosem jako původní portfolio. Liší se však směrodatnou odchylkou, protože tato metoda je založena na minimalizaci $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbb{V}\boldsymbol{x}$, takže v podstatě na minimalizaci rizika. Tato metoda nám tedy vrátí portfolio se stejným očekávaným výnosem, ale s mnohem nižší směrodatnou odchylkou. Směrodatná odchylka je pro tuto metodu více než dvakrát menší než pro metodu s využitím teorie grafů. I v jiných mírách rizika vyjde tato metoda lépe.

	Metoda grafů	Metoda minimalizace úč. fce
Výnos	0.000561377	0.000561377
Směrodatná odchylka	0.0104394	0.00458607
MAD	0.0049344	0.00336734
VaR	0.0110992	0.00626557

Pokud tuto metodu porovnáme s modifikovanou metodou teorie grafů, zjistíme, že výsledky budou podobné.

	Modifikovaná metoda grafů	Metoda minimalizace úč. fce
Výnos	0.000660441	0.000660441
Směrodatná odchylka	0.0112222	0.00557542
MAD	0.00516548	0.00404281
VaR	0.0116772	0.00783763

4.6.2 Maximalizace Sharpeova poměru

Sharpeova metoda nemá žádné parametry abychom mohli změnit výnos nebo riziko. Musíme porovnávat základní výsledky, tedy výsledek Sharpeovy metody a výsledek metody grafů pro námi zvolené (nezávisle na Sharpeově metodě) θ. Nyní zvolíme $\theta = 0{,}534$. To je z toho důvodu, že to je lepší výsledek (výnos a směrodatná odchylka), než kdybychom vzali 0,5. To samozřejmě platí pouze pro tato konkrétní data. Výsledky jsou velice odlišné a tak jsou těžko porovnatelné. Podíváme-li se však na poměry rizik a poměry výnosů vidíme, že poměr rizik je mnohem větší než poměr výnosů.

	Metoda grafů pro Θ=0.534	Sharpe	$\frac{\text{MG 0.534}}{\text{Sharpe}}$
Výnos	0.000571629	0.000108919	5.24819
Směrodatná odchylka	0.0101328	0.000680757	14.7242
MAD	0.00506583	0.000510737	9.91865
VaR	0.0112103	0.000963456	11.6356

Modifikované portfolio zde nebudeme srovnávat, výsledky jsou podobné.

4.6.3 Maximalizace očekávaného výnosu upraveného o riziko

U této metody vystupuje parametr λ, který interpretujeme jako averzi k riziku. Abychom mohli tuto metodu porovnat s metodou využívající grafy, musíme nějak změnit množinu, na které hledáme řešení, aby obě metody byly srovnatelné. Jednou možností je, že přidáme podmínku, aby obě směrodatné odchylky byly stejné. To nám ale úplně eliminuje λ. Tuto podmínku tedy nepřidáme, ale stále budeme požadovat stejné směrodatné odchylky. Budeme zkusmo měnit hodnotu λ, tak abychom našli portfolio se stejnou směrodatnou odchylkou. Tomu odpovídá hodnota $\lambda = 2{,}4565$.

	Metoda grafů	Metoda max. oč. výnosu up. o riziko
Výnos	0.000561377	0.000976931
Směrodatná odchylka	0.0104394	0.0104395
MAD	0.0049344	0.00697807
VaR	0.0110992	0.0158208

Tedy pro tuto volbu vidíme, že výnos je skoro dvojnásobný než pro metodu grafů. Ale není to zadarmo, protože ostatní míry rizika jsou větší.

Závěr

Použití teorie grafů k výběru portfolia nám dává zajímavý pohled na tento problém. Grafická reprezentace vztahů mezi aktivy je jednoduše interpretovatelná. Spojená aktiva mají silnou lineární závislost a do portfolia vezmeme aktiva, která tuto závislost nemají, tedy nejsou spojená. Oproti klasickým metodám je však tento přístup neefektivní. Podle předpokladů eficientního trhu (investoři se rozhodují racionálně), vždy vybereme portfolio získané jednou z klasických metod namísto portfolia získaného použitím teorie grafů.

Modifikace přidáním kritéria pro výběr podle výnosů zefektivní výběr portfolia navýšením celkových výnosů, ale za cenu navýšení rizika.

Metoda grafů by se mohla vylepšit, kdyby se aktiva do portfolia nebrala rovnoměrně a vymyslel se způsob, který by dal jednotlivým aktivům různé váhy. To by pravděpodobně ale velice zkomplikovalo danou úlohu.

Seznam použité literatury

Böhm, M., Lánský, L. a Veselý, P. (2011). *Programátorské kuchařky*, chapter Těžké problémy. Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-181-1.

Dupačová, J., Hurt, J. a Štěpán, J. (2002). *Stochastic modeling in economics and finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. ISBN 1-4020-0840-6.

Hurt, J. (2020). Procedura na úpravu záznamů: recordsconsolidation.nb, osobní sdělení.

Hurt, J. (2019). Přednáška MFF UK 2019. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/20190513_Teorie_portfolia_Template_mfpress_1.pdf`.

Kelly, M. a Chen, S. (2014). Finance: Portfolio diversification with graph theory. URL `https://www.wolfram.com/training/videos/FIN015/`.

Matoušek, J. a Nešetřil, J. (2009). *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Čtvrté, upravené a doplněné vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-1740-4.

Seznam obrázků

4.1 Graf malého portfolia pro $\theta = 0{,}5$ 10
4.2 Graf portfolia pro $\theta = 0{,}5$ 11
4.3 Graf portfolia s výnosy pro $\theta = 0{,}5$ 12
4.4 Graf závislosti směrodatné odchylky na θ 13
4.5 Graf závislosti výnosů na θ 14

A. Přílohy

A.1 AplikaceTeorieGrafu.nb

Zdrojový kód napsaný v softwaru Wolfram Mathematica 12.0

A.2 PortfolioReturns

Soubor obsahující data potřebná ke spuštění kódu. Tento soubor je potřebný pouze pokud je nefunkční připojení k síti nebo Mathematica se nemůže připojit k serverům.