Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Galileovská geometrie

Galilean geometry

Marcel Brummer

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Zamboj,Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2021

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Galileovská geometrie potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně.

V Praze dne 5.12.2021

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce, Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za doporučení některé literatury, správnému nasměrování a za čas, který mi obětoval při psaní bakalářské práce. Také bych chtěl poděkovat své rodině za dostatečnou motivaci.

Abstrakt: Práce se zabývá zaváděním pojmů v galileovské geometrii, tím ji charakterizuje a srovnává definice v ní s eukleidovskou geometrií. Také zavádí metody, podle kterých se definují nové věty v galileovské geometrii. Text je rozdělen do třech hlavních kapitol. Práce zavádí pojmy galileovské transformace a galileovská rovina, které jsou pro tuto geometrii esenciální. Předkládá, jak vypadá vzdálenost dvou bodů a úhel, který svírají dvě přímky, zadefinuje trojúhelník v galileovské rovině a základní vztahy v něm. Poté zavede princip duality jako důležitý nástroj pro objevování nových vět a zadefinuje cykly. Práce určuje vlastnosti cyklů a definuje cyklickou rotaci, jako nové zobrazení, a zavede cykly opsané a vepsané trojúhelníku a pojem mocnost bodu k cyklu.

Klíčová slova: galileovská geometrie, cykly, princip duality, galileovská transformace

Abstract: The work deals with defining concepts in Galilean geometry and due that describes this geometry and compares it's definitions with Euclidean geometry. It also introduces methods, which define new theorems in Galilean geometry. The text is divided into three main chapters. In this work are introduced concepts like Galilean transformations and Galilean plane, which are essential for this geometry. It also shows the length of segment between two points, the measure of an angle defined by two lines, and defines triangle in Galilean plane and it's basic properties. Then there is introduced the principle of duality as an important tool for discovering new theorems. The work defines cycles, determines their properties, defines cyclic rotation as a new mapping and introduces incycles and circumcycles of a triangle and the concept of the power of a point with respect to a cycle.

Keywords: Galilean geometry, Cycles, Principle of duality, Galilean transformation

Obsah

Úvod **2**

1 Galileovské transformace, vzdálenost, úhel **3**
1.1 Galileovské transformace . . . 3
1.2 Vzdálenost . . . 5
1.2.1 Přímky . . . 5
1.2.2 Vzdálenost dvou bodů . . . 5
1.2.3 Speciální vzdálenost . . . 5
1.2.4 Kružnice . . . 6
1.3 Úhel, vlastnosti roviny . . . 7
1.3.1 Vlastnosti transformací . . . 7
1.3.2 Úhel . . . 9

2 Trojúhelník, princip duality **14**
2.1 Trojúhelník . . . 14
2.1.1 Trojúhelníkové rovnosti . . . 14
2.1.2 Obsah . . . 17
2.1.3 Shodnosti a podobnosti . . . 17
2.2 Princip duality . . . 19

3 Cykly **22**
3.1 Cykly . . . 22
3.1.1 Poloměr . . . 24
3.1.2 Křivost cyklu . . . 26
3.1.3 Křivost obecné křivky . . . 28
3.1.4 Cyklická rotace . . . 31
3.1.5 Průměr cyklu . . . 34
3.1.6 Duální cyklus . . . 35
3.2 Cyklus opsaný a vepsaný trojúhelníku . . . 37
3.2.1 poloměr a křivost . . . 39
3.3 Mocnost bodu k cyklu a kružnici . . . 41
3.3.1 Mocnost bodu ke kružnici . . . 41
3.3.2 Mocnost bodu k cyklu . . . 42
3.3.3 Množiny bodů se stejnou mocností bodu . . . 44

Závěr **45**

Seznam použité literatury **46**

Seznam obrázků **48**

Úvod

Galileovská geometrie je pojem, který se na české matematické scéně slyší velice zřídka. Je to geometrie, která je úzce spojená s kinematikou a je zcela založena na galileovských transformacích, které jsou ve fyzice často zmiňovány, protože zavádí vztahy mezi dvěma inerciálními soustavami. Proto se tyto pojmy objevují, mimo jiné, například i ve fyzikálních disciplínách spojených s teorií relativity. Jedná-li se o kinematiku v rovině, pak vhodnými transformacemi vzniká galileovská geometrie v prostoru. Tato práce se bude zabývat galileovskou geometrií v rovině, a proto je tato geometrie spojená s fyzikou přímočarého pohybu. Tato geometrie může mít mnoho různých vět a definic, proto si za cíl této práce kladu definování základních pojmů, vlastností a vztahů této geometrie, odvozování vět spojených s těmito pojmy a ukázat některé analogie a odlišnosti s eukleidovskou geometrií. Čtenář by po přečtení této práce měl vědět, jak tato geometrie vznikla, jak fungují základní vztahy a jak vypadají analogické věty a útvary v této geometrii k eukleidovské geometrii.

Práce je rozdělena do tří hlavních kapitol. V první kapitole zavedeme galileovskou rovinu, v které se pak budou zavádět všechny pojmy této geometrie, a ukáže základní vlastnosti této roviny. Kapitoly na sebe navazují, proto je doporučené se držet chronologického pořadí textu. V druhé kapitole zavedeme nejjednodušší mnohoúhelník v galileovské rovině, a to trojúhelník. Zároveň zavedeme novou metodu, díky které se definují nové pojmy a vyslovují nové věty v této geometrii. Jedná se o princip duality, což je důležitý fenomén, užívaný i ve spoustě jiných geometriích a vědeckých disciplínách. V třetí kapitole se budeme zabývat cykly. Cykly jsou analogické množiny bodů k eukleidovským kružnicím, a proto lze předpokládat, že budou mít zajímavé vlastnosti. Cykly jsou nejdůležitějším pojmem v galileovské geometrii, protože ve spojení s kinematikou představují fyzikální zrychlení. Tato kapitola také představí cyklus opsaný a vepsaný trojúhelníku, což jsou zcela nové pojmy, které v eukleidovské geometrii nejsou zavedeny.

Práce může být použita jako doplňující text k výuce matematiky, či jako text informační. Je vhodný pro učitelé, studenty vysokých škol a čtenáře, kteří se zabývají geometrií v rovině.

Tato geometrie je zajímavá svým fyzikálním významem. Ukazuje, jaký geometrický význam má kinematika přímočarého pohybu a jak je úzce spojena s eukleidovskou geometrií. V některých ohledech bych si dovolil říct, že galileovská geometrie je jednodušší a svým způsobem i hezčí, než námi známá eukleidovská geometrie v rovině.

1. Galileovské transformace, vzdálenost, úhel

1.1 Galileovské transformace

Tato práce chce dojít k základním konstrukcím v geometrii, která se nazývá galileovská geometrie. Existuje více způsobů, jak se k této geometrii dá dospět. Tato práce a zejména tato kapitola bude zkoumat galileovskou geometrii jak z pohledu matematického, tak i z pohledu fyzikálního, jelikož s fyzikou, jak se v této sekci dozvíme, úzce souvisí. Tato geometrie je geometrií neeuklidovskou[1] a je založena na transformacích, neboli rovnicích, které jsou známy jako galileovské transformace. Proto je tato geometrie také známa jako „geometrie Galileovy teorie relativity“. Tento princip může být stručně vysvětlen jako „ve všech inerciálních systémech jsou fyzikální zákony stejné“ [Öztekin and Tatlipinar, 2012].
Mějme bod A, který má souřadnice (x,y). A jeho pohyb v závislosti na čase t napíšeme jako

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

Je celkem jasné, že po přesunu ze soustavy xOy s počátkem O a osami x a y do nové inerciální soustavy $x'O'y'$ tak, že osy x a y rotují o úhel α a počátek O se dostane do počátku O' translací o vektor (a,b), pak tyto přechody nemohou ovlivnit fyzikální zákony, a proto tyto dva systémy souřadnic jsou spojeny vztahy

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a \tag{1.1}$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \tag{1.2}$$

s úhlem α, který je úhlem mezi osami x a x' [Yaglom, 1979, s.19]. Rovnice (1.1) a (1.2) mají velký význam, protože v eukleidovské geometrii určují veškerý pohyb objektů v rovině.
Pokud se počátek O pohybuje rychlostí v podél přímky l, která svírá s osou x úhel β, pak souřadnice $a(t)$ a $b(t)$ počátku O vzhledem k soustavě $x'O'y'$ v čase t jsou

$$a(t) = a + vt\cos\beta$$
$$b(t) = b + vt\sin\beta$$

kde a a b jsou souřadnice počátku O vzhledem k x' a y' v čase $t = 0$. Z toho plyne vztah mezi souřadnicemi (x',y') a (x,y) bodu A.

$$x'(t) = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a + vt\cos\beta \tag{1.3}$$
$$y'(t) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b + vt\sin\beta \tag{1.4}$$

Tedy řekneme, že všechny vzorce, rovnice, či zobrazení mají mechanický význam, pokud se po dosazení do rovnic (1.3) a (1.4) nezmění. Tedy jsou invariantní

[1] Neplatí zde pátý Euklidův postulát

pod těmito transformacemi. Pokud ještě uvedeme změnu v čase počátku, kde d je čas počátku v čase $t = 0$ v novém systému

$$t'(t) = t + d,$$

dostaneme rovnice, které se nazývají Galileovské transformace.

$$x'(t) = x \cos\alpha + y \sin\alpha + a + vt \cos\beta \tag{1.5}$$

$$y'(t) = -x \sin\alpha + y \cos\alpha + b + vt \sin\beta \tag{1.6}$$

$$t'(t) = t + d \tag{1.7}$$

Jedná-li se o přímočaré pohyby (například po libovolné zafixované přímce o), pak pokud (x) a (x') jsou dva inerciální systémy, počátek O se pohybuje vzhledem k systému (x') rychlostí v a v čase t je jeho souřadnice

$$a(t) = a + vt$$

a jelikož vztah souřadnic x a x' bodu A v systému x a systému x' s počátkem O' je

$$x' = x + a(t),$$

pak dosazením vyjde vztah

$$x' = x + vt + a.$$

Vyjádří-li se možnost posunu času počátku

$$t' = t + b,$$

dostáváme rovnice

$$x' = x + vt + a \tag{1.8}$$

$$t' = t + b, \tag{1.9}$$

které vyjadřují vztah mezi dvěma inerciálními souřadnicovými systémy u přímočarého pohybu [Yaglom, 1979, s.20-23]. Tyto rovnice jsou pro galileovskou geometrii zásadní. V následujících kapitolách se tato práce bude zabývat geometrií, jejíž pohyb je invariantní pod rovnicemi (1.8) a (1.9) [Klinaku]. Jedná se o geometrii v rovině a pro zjednodušení se x nahradí složkou y a t se nahradí složkou x. Tedy rovina (x,y), pro kterou platí, že pohyb a vlastnosti bodů v ní jsou invariantní pod rovnicemi

$$y' = y + vx + b \tag{1.10}$$

$$x' = x + a, \tag{1.11}$$

Pro úplnost je vhodné uvést, že existují i takzvané „prodloužené galileovské transformace“. Tyto transformace se uplatňují zejména ve speciální a obecné relativitě a vypadají takto:

$$x' = x + \epsilon(t)$$
$$t' = t,$$

kde celý systém má prostorově stejné (ale měnící se v čase) zrychlení $-\epsilon(t)$ [Greenberger, 1979, s.35].

1.2 Vzdálenost

1.2.1 Přímky

V galileovské rovině budeme pracovat s galileovskými přímkami. Přímky budeme rozdělovat na dva druhy. Na *klasické přímky* a *speciální přímky*. Speciální přímky jsou přímky s rovnicí $x = c$ a jedná se o přímky rovnoběžné s osou y. Klasické přímky jsou všechny ostatní přímky, které nejsou speciální.

1.2.2 Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost mezi dvěma body v galileovské geometrii se liší od vzdálenosti v geometrii eukleidovské. V eukleidovské geometrii je vzdálenost mezi dvěma body v rovině (x,y) definována jako nejkratší spojnice mezi těmito body [Deza and Deza, 2006, s.63]. Pokud bod A má souřadnice (x,y) a bod B má souřadnice (x',y') vyjadřujeme vzdálenost d mezi body AB vztahem

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Jak vztah vypadá v galileovské geometrii?

Definice 1.2.1. Pro dva body P a Q se souřadnicemi (x_p,y_p) a (x_q,y_q) je vzdálenost vyjádřena jako rozdíl jejich prvních souřadnic

$$d(P,Q) = x_p - x_q. \tag{1.12}$$

[Richter-Gebert, 2011, s.460-461].

Je zřejmé, že tato vzdálenost je invariantní pod rovnicemi (1.10) a (1.11). Konkrétně pod transformací

$$x' = x + a$$

[Kurudirek et al., 2013, s.128].

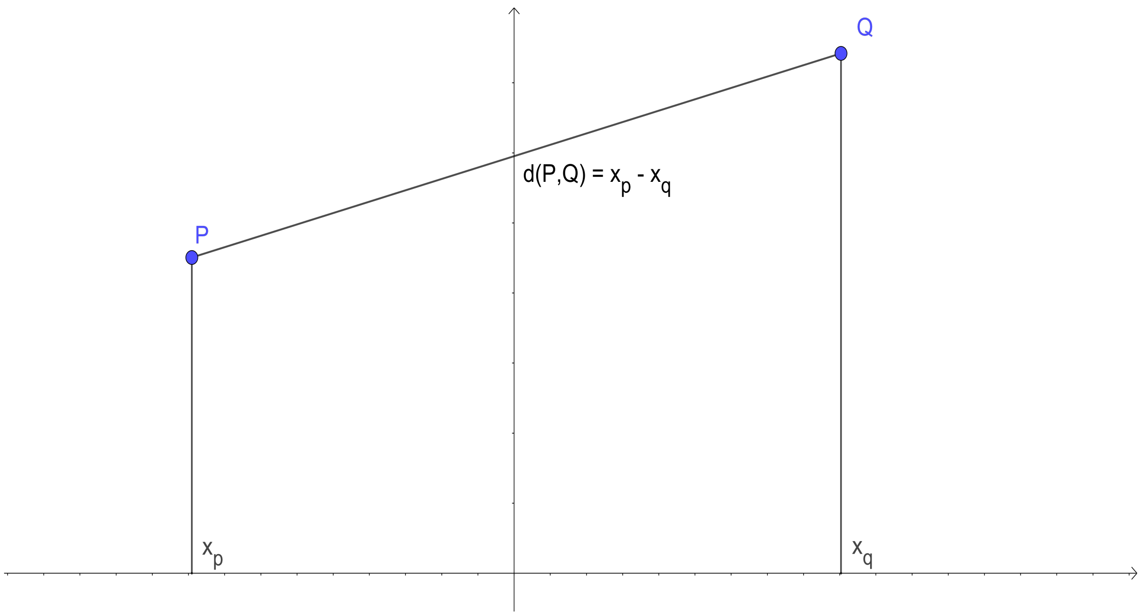
1.2.3 Speciální vzdálenost

Nyní se nabízí otázka, zda-li jsou body P a Q totožné (nachází-li se na stejném místě), pokud je jejich vzdálenost nulová? Jelikož se mohou lišit v druhé souřadnici y, mohou se také lišit polohou, ale oba body jsou incidentní s přímkou, která je rovnoběžná s osou y. Z tohoto důvodu se zavádí *speciální vzdálenost* těchto dvou bodů.

Definice 1.2.2. Jestliže dva body P a Q leží na společné speciální přímce, je jejich speciální vzdálenost

$$\delta(P,Q) = y_p - y_q. \tag{1.13}$$

Je důležité opět zjistit, zda-li je $\delta(P,Q)$ invariantní pod galileovskými transformacemi. $x_p = x_q$ a transformace (1.10) převede y_p na y'_p a y_q na y'_q. Pak $y'_p - y'_q = (y_p + vx + b) - (y_q + vx + b) = y_p - y_q$ [Kurudirek et al., 2013,



Obrázek 1.1: Vzdálenost bodů P a Q

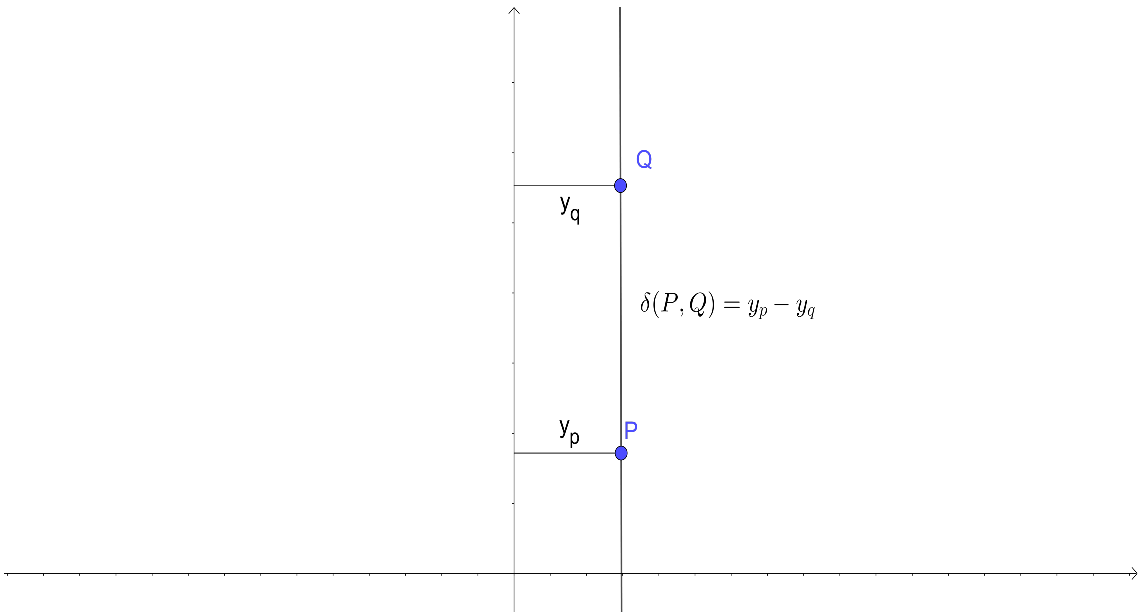
s.128]. Dalším pozorováním definice vzdálenosti v galileovské geometrii je patrné, že na rozdíl od eukleidovské geometrie, může být vzdálenost záporná. Platí, že $d(P,Q) = -d(Q,P)$ [Yaglom, 1979, s.38-39]. Body představují události a jejich souřadnice x jsou, jak je výše zavedeno, čas, ve kterém se tyto události staly. Respektive z tohoto hlediska záleží na volbě počátečního a koncového bodu. Například pokud vzdálenost $d(P,Q)$ bodů P a Q je kladné číslo, znamená to, že událost Q se stala v budoucím čase vzhledem k bodu P. Analogicky kdyby číslo $d(P,Q)$ bylo záporné, stala by se událost Q před událostí P.

1.2.4 Kružnice

Jelikož je zavedena vzdálenost, lze zadefinovat kružnici.

Definice 1.2.3. Množina všech bodů, které jsou stejně vzdálené od bodu $P(x_p,y_p)$, jsou dvě vertikální přímky a nazývá se *Galileovská kružnice* [Richter-Gebert, 2011, s.452].

Tedy je-li tato množina bodů $M(x,y)$ od bodu $S(a,b)$ vzdálená o hodnotu r, pak S je střed dané kružnice a r je její poloměr (obrázek 1.3). Odtud $d(S,M) = x-a$ a rovnice $d^2(S,M) = r^2$, která definuje M se může zapsat ve tvaru $(x-a)^2 = r^2$. Z tohoto zápisu je zřejmé, že kružnice se středem S a poloměrem r obsahuje body na dvou speciálních přímkách, které mají od bodu S eukleidovskou vzdálenost r. Pokud $r = 0$, tyto dvě přímky splynou v jednu [Yaglom, 1979, s.40]. Takže galileovská jednotková kružnice má dvě vertikální přímky s rovnicemi $x = 1$ a $x = -1$ a se středem kdekoliv na ose y [Mutlu et al., 2013, s.80]. Zajímavé pozorování je, že v galileovské geometrii má kružnice nekonečně mnoho středů, a to konkrétně takové, které leží na přímce rovnoběžné k ose y a procházející bodem S.



Obrázek 1.2: Speciální vzdálenost bodů P a Q

1.3 Úhel, vlastnosti roviny

Tato část práce se bude zabývat úhlem v galileovské geometrii, respektive odchylkou dvou přímek. Nejprve je vhodné uvést některé vlastnosti galileovských transformacích.

1.3.1 Vlastnosti transformací

Věta 1. *V eukleidovské rovině transformace* (1.10) *a* (1.11) *převádějí*

(a) přímky na přímky,

(b) rovnoběžné přímky na rovnoběžné přímky,

(c) úsečky AB a CD s kolineárními body A, B, C, D na úsečky $A'B'$, $C'D'$ s kolineárními body A', B', C', D' tak, že $|C'D'|/|A'B'| = |CD|/|AB|$,

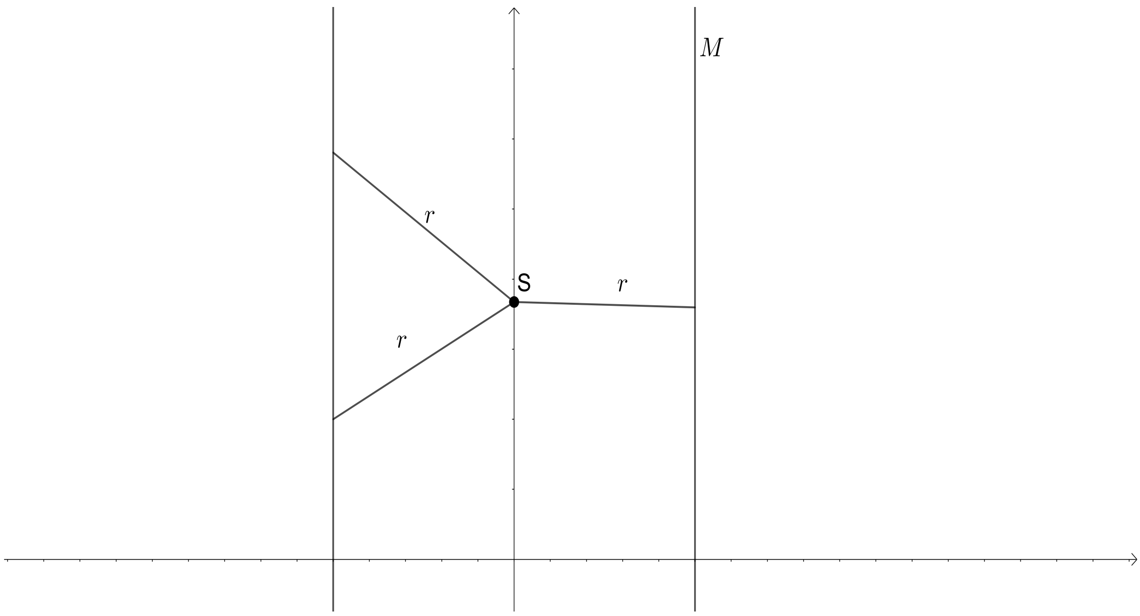
(d) geometrický útvar F na útvar F' o stejné plochy.

Důkaz. Transformace určená rovnicemi (1.10) a (1.11) se dá rozložit na dvě zobrazení. Na translaci

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

a na elaci

$$x' = x$$
$$y' = vx + y.$$



Obrázek 1.3: Galileovská kružnice M se středem v bodě S a poloměrem r

Je zřejmé, že všechny tyto vlastnosti (a),(b),(c) i (d) platí pod translační zobrazením, a proto se stačí omezit a dokázat, zda-li platí i pod zobrazením

$$x' = x \tag{1.14}$$
$$y' = vx + y. \tag{1.15}$$

Nechť je bod A na přímce l, která prochází počátkem O a přes transformaci vznikne bod A'. Přímku OA' označíme jako l'. Nyní se sestrojí přímka m, která je rovnoběžná s osou y a která protne přímky l a l' v bodech M a M'. Nakonec označme průsečík osy x s přímkou AA' jako bod P a průsečík osy x s přímkou m jako bod Q. Jelikož bod A' je obraz bodu A pod rovnicemi (1.14) a (1.15), lze vyjádřit

$$\frac{|A'P|}{|AP|} = \frac{|OP|v + |AP|}{|AP|} = \frac{|OP|}{|AP|}v + 1.$$

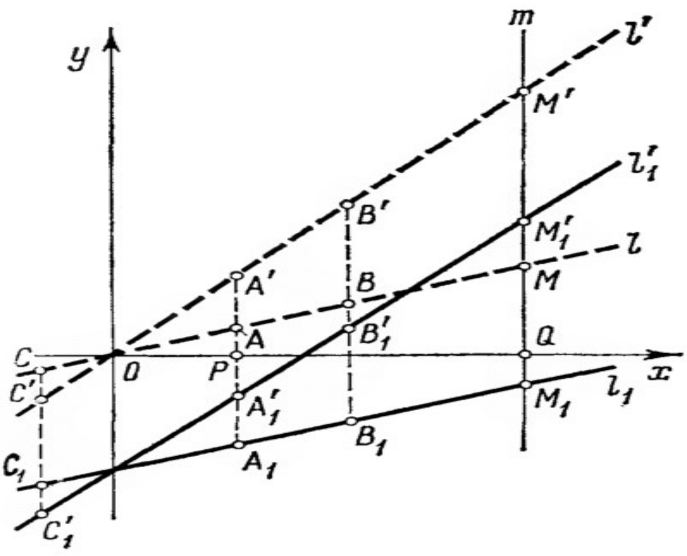
Z obrázku 1.4 si lze všimnout, že pro libovolný bod M je $|M'Q|/|MQ| = |A'P|/|AP|$ a $|OP|/|AP| = |OQ|/|MQ|$, a díky tomu platí

$$\frac{|M'Q|}{|MQ|} = \frac{|A'P|}{|AP|} = \frac{|OP|}{|AP|}v + 1 = \frac{|OQ|}{|MQ|}v + 1 = \frac{|OQ|v + |MQ|}{|MQ|}.$$

Tedy vznikne rovnost

$$|M'Q| = |OQ|v + |MQ|,$$

a proto lze říci, že transformace (1.14) a (1.15) vezme každý bod M na přímce l a zobrazí ho na bod M' na přímce l'. Jinými slovy, že převede přímku l na přímku l'. Pro úplnost lze vzít přímku l_1 rovnoběžnou k přímce l a neprocházející počátkem O. Nechť d je klasická eukleidovská vzdálenost vertikálních úseček $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = ...$, náležící odpovídajícím přímkám l a l_1, a nechť se tyto úsečky



Obrázek 1.4: Figure 26 - Důkaz tvrzení (a) [Yaglom, 1979, s.35]

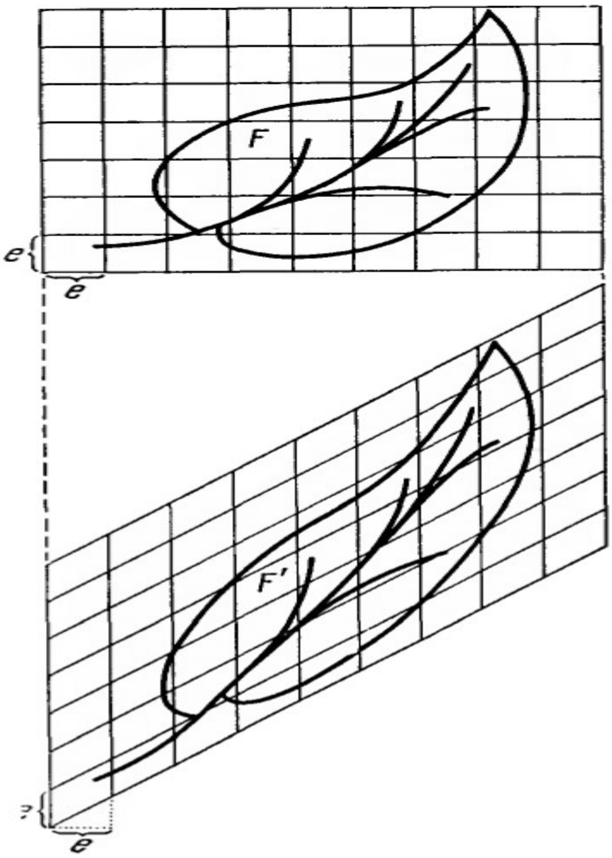
zobrazí na úsečky $|A'A_1'| = |B'B_1'| = |C'C_1'| = ... = d$. Jelikož body $A', B', C', ...$ leží na obrazu l' přímky l, musí body A_1', B_1', C_1' ležet na obrazu l_1' přímky l_1. A protože přímky l_1' a l' jsou rovnoběžné, je dokázáno (a) i (b). Respektive, že tyto transformace zobrazí rovnoběžné přímky na rovnoběžné přímky a vždy přímky na jiné přímky.
Tvrzení (c) vychází z pozorování, že pokud AB a EF jsou rovnoběžné úsečky a $A'B'$ a $E'F'$ jsou obrazy těchto úseček pod elací danou galileovskými transformacemi, pak platí

$$\frac{|E'F'|}{|A'B'|} = \frac{|EF|}{|AB|}.$$

(d) Plocha útvaru F je přibližně stejná jako suma ploch všech čtverců uvnitř tohoto útvaru, které mají strany rovnoběžné s osami souřadnic a velikost e. Respektive plocha F je konkrétně limitní případ (předpokládáme, že existuje) posloupnosti těchto čtverců tak, že velikost strany e jde k nule. Transformace, dána rovnicemi (1.14) a (1.15), zobrazí útvar F na útvar F' (obrázek 1.5) a každý tento čtverec S uvnitř F na rovnoběžník S'. Strany, které byly rovnoběžné s osou y, se zobrazí samy na sebe, a proto jejich velikost zůstane e. Je zjevné, že $S' = e^2 = S$, a tudíž zobrazení dané rovnicemi (1.14) a (1.15) převede útvar F na útvar F' a jejich plocha je stejná [Yaglom, 1979, s.33-36]. □

1.3.2 Úhel

Úhel dvou přímek má velký význam v galileovské geometrii. K zadefinování úhlu se využije znalosti úhlu v eukleidovské geometrii. Konkrétně faktu, že úhel je délka oblouku jednotkové kružnice, ohraničený dvěma přímkami, jejichž odchylku měříme. Dvě přímky l a l_1 s rovnicemi $l : y = kx + s$ a $l_1 : y = k_1x + s_1$ a s průsečíkem v bodě $S(x_0, y_0)$ protínají galileovskou jednotkovou kružnici se středem v bodě S v bodech $N(x_0+1, k(x_0+1)+s)$, $N_1(x_0+1, k_1(x_0+1)+s_1)$ a v bodech



Obrázek 1.5: Figure 28 - Znázornění obsahů útvarů před a po použití galileovských transformacích [Yaglom, 1979, s.37]

$M(x_0-1, k(x_0-1)+s)$ a $M_1(x_0-1, k_1(x_0-1)+s_1)$. Body N a N_1 leží na jedné speciální přímce m (jednotková kružnice se středem v S) a platí

$$\begin{aligned}\delta_{ll_1} = \delta_{NN_1} = y_N - y_{N_1} = (k(x_0+1)+s) - (k_1(x_0+1)+s_1) = \\ = (k_1x_0+s_1) - (kx_0+s) + k_1 - k = k_1 - k,\end{aligned}$$

protože pokud bod $S(x_0, y_0)$ je průsečík přímek l a l_1, tak musí platit rovnost $(k_1x_0+s_1) = (kx_0+s)$. Proto lze formulovat definic úhlu takto:

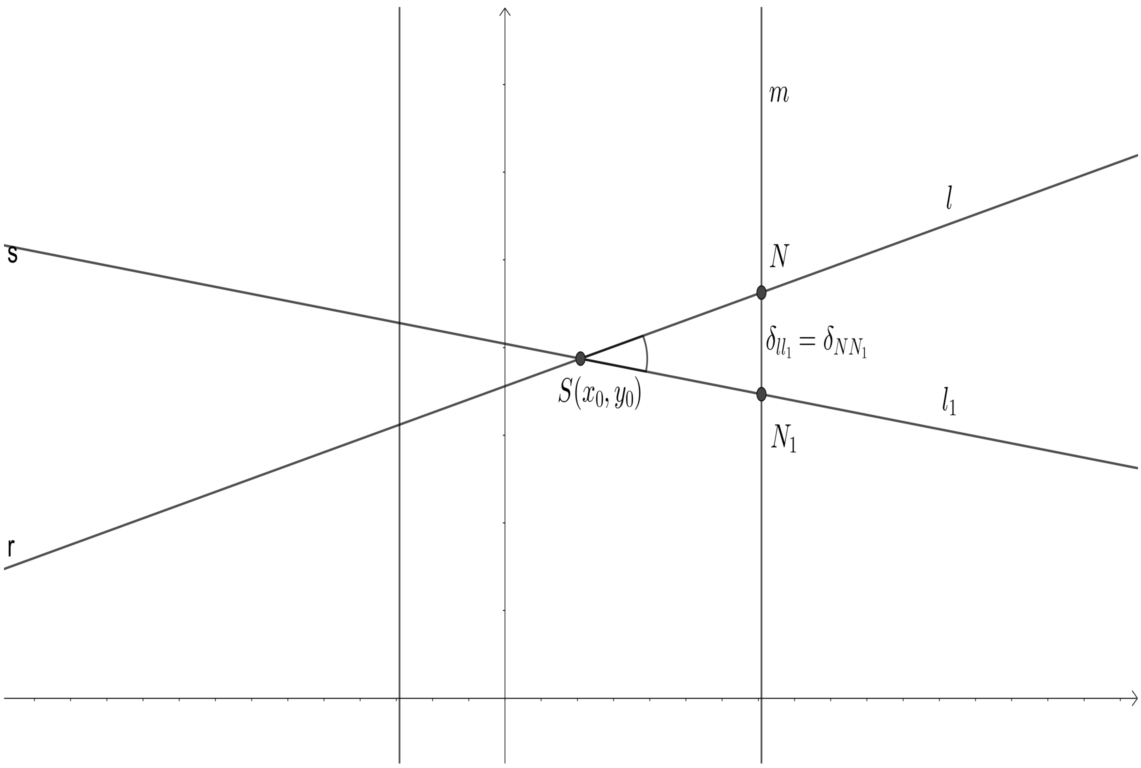
Definice 1.3.1. úhel mezi přímkami l a l_1 je chápán jako speciální vzdálenost dvou bodů, které leží na jednotkové kružnici se středem v průsečíku l a l_1 a na těchto dvou přímkách.

$$\delta_{ll_1} = \delta_{NN_1} = k_1 - k.$$

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k \tag{1.16}$$

[Emc, 1984, s.95] [Richter-Gebert, 2011, s.460].

Nyní je vhodné zkoumat, jak se tato velikost úhlu bude měnit na základě vzájemné polohy přímek l a l_1. Pokud budeme jednou z těchto přímek rotovat podle



Obrázek 1.6: Odchylka přímek l a l_1

jejich průsečíku (například) proti směru hodinových ručiček, velikost úhlu se bude zvětšovat až do doby, kde na sebe přímky budou kolmé v této geometrii. Je zjevné, že takový případ nastane, pokud rotující přímka dosáhne polohy rovnoběžné s osou y (a s přímkou m, která by vznikla). Tyto přímky jsou *speciální přímky* v galileovské geometrii. Velikost úhlu nyní přesáhne všechny meze a přímky jsou kolmé v galileovském slova smyslu. Z tohoto pozorování lze konstatovat, že všechny speciální přímky jsou kolmé ke všem přímkám, které speciální nejsou. Proto, hledáme-li kolmici k přímce, procházející daným bodem na přímce, stačí zkonstruovat rovnoběžnou přímku s osou y a procházející určeným bodem (obrázek 1.7). Tyto principy se intuicí značně liší od principů v eukleidovské geometrii [Yaglom, 1979, s.41].

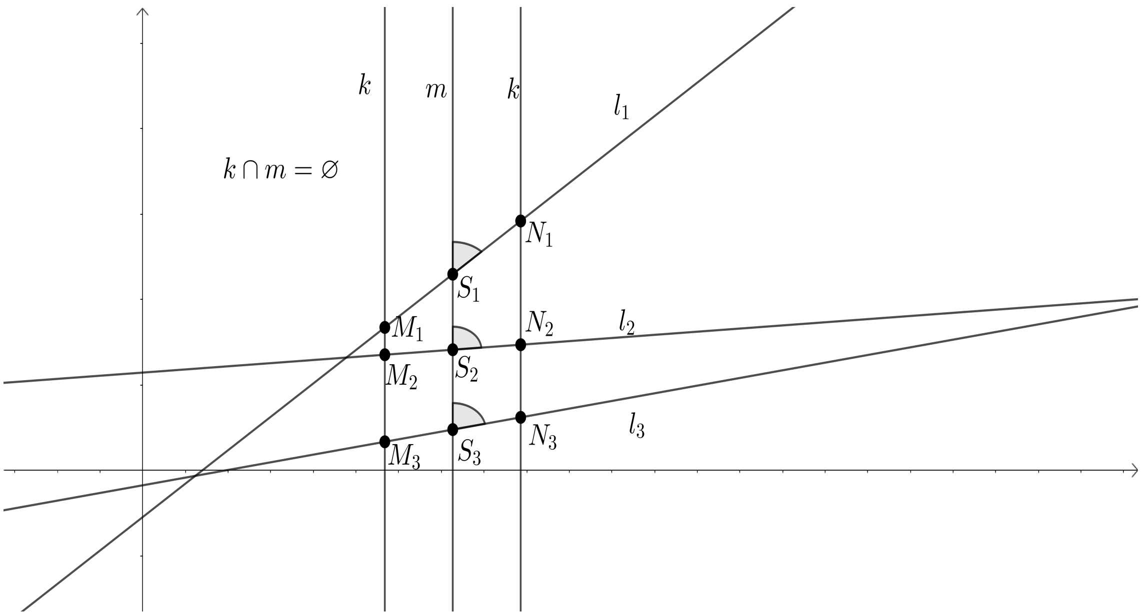
Víme, že přímky jsou rovnoběžné, pokud nemají společný průsečík [Ryan, 1986, s.17]. Takže pokud přímky l a l_1 jsou rovnoběžné, platí, že jejich směrnicový koeficient je stejný ($k = k_1$), a proto je podle vzorce (1.16) velikost úhlu mezi nimi rovna nule.

Definice 1.3.2. Vzdálenost d_{ll_1} mezi rovnoběžnými klasickými přímkami l a l_1 je speciální vzdálenost bodů M a M_1, které vzniknou průsečíkem libovolné speciální přímky m s přímkami l a l_1[2] [Yaglom, 1979, s.42].

Pokud dále přímky l a l_1 mají rovnice $y = kx + s$ a $y = kx + s_1$, pak

$$d_{ll_1} = s_1 - s.$$

[2]Pro speciální přímky je jejich vzdálenost rovna vzdálenosti libovolných dvou bodů na nich.



Obrázek 1.7: Kolmost speciálních přímek

Existuje-li definice vzdálenosti rovnoběžných přímek, lze se ptát na definici vzdálenosti bodu od dané přímky. Nechť je v galileovské rovině přímka l a bod M, neležící na ní. Jaká je vzdálenost bodu M od přímky l? Podle předešlých pozorování bude tato vzdálenost definovaná jako vzdálenost bodu M od průsečíku P speciální přímky m, která prochází bodem M, s přímkou l (obrázek 1.8).

Definice 1.3.3. Vzdálenost bodu M od přímky l je vzdálenost bodu M od průsečíku P speciální přímky m, procházející bodem M, s přímkou l.

Principiálně to následuje definici v eukleidovské geometrii, kde je vzdálenost bodu od přímky definována jako vzdálenost bodu M od bodu P na přímce l, který je nejblíž k bodu M. Protože pokud se v galileovské geometrii body nachází na speciální přímce, je jejich (klasická) vzdálenost rovna nule. Nechť má tato přímka rovnici $y = kx + s$ a bod M má souřadnice (x_0, y_0), pak souřadnice bodu P jsou $(x_0, kx_0 + s)$ a vzdálenost mezi nimi je

$$-d_{Ml} = y_0 - (kx_0 + s) = y_0 - kx_0 - s$$

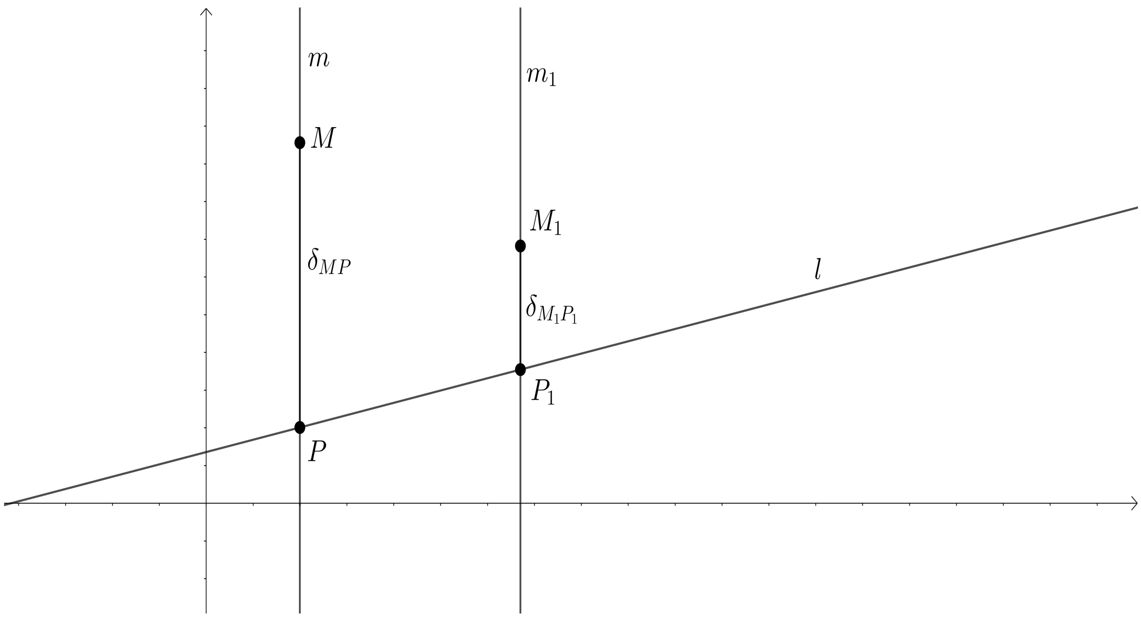
Také je vhodné se ptát na vzdálenost bodu od speciální přímky.

Definice 1.3.4. Vzdálenost bodu $M(x_0, y_0)$ od speciální přímky m je rovna vzdálenosti bodu M od libovolného bodu $P(x_1, y_1)$, který se nachází na přímce m.

Je zřejmé, že se bude jednat o klasickou vzdálenost, konkrétně

$$d_{Mm} = d_{MP} = x_0 - x_1$$

[Yaglom, 1979, s.42].



Obrázek 1.8: Vzdálenost bodu od klasické přímky

2. Trojúhelník, princip duality

Tato kapitola bude pojednávat o trojúhelnících, vztazích, které si přenáší z eukleidovské geometrie, jejich shodnostmi a jejich vlastnostmi v galileovské geometrii. Mějme dále na paměti, že význam mají vlastnosti, které jsou invariantní pod transformacemi (1.10) a (1.11).

2.1 Trojúhelník

Trojúhelník je jeden ze základních objektů v geometrii a bývá označován jako nejdůležitější n-úhelník ze všech. Mnohé významné vztahy v trojúhelníku jsou definovány v Euklidových Základech, které byly sepsány už před 2300 lety, ale navzdory tomu se i dnes objevují nové zajímavé poznatky. Trojúhelník, kterým se zde budeme zabývat, je označen jako obvykle v eulerovském duchu s vrcholy ABC, úhly $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ a $|\angle ACB| = \gamma$ a strany $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$ [Kimberling, 1994, s.163].
V této kapitole nelze vyjádřit všechny vlastnosti trojúhelníku, protože pro definování některých z nich je třeba vyvinout naší teorii více. Zejména jedná-li se o kružnice opsané a vepsané trojúhelníku.

2.1.1 Trojúhelníkové rovnosti

Pojďme pozorovat konkrétní vlastnosti tohoto objektu z již zadefinovaných vztahů. Pro přehlednost lze vyjádřit strany následujícím způsobem $a = d_{BC}$, $b = d_{AC}$, $c = d_{AB}$ a úhly $\alpha = \delta_{AC,BC}$, $\beta = \delta_{BA,BC}$, $\gamma = \delta_{CA,CB}$.

Definice 2.1.1. Pokud jsou a, b, a c velikosti stran trojúhelníku ABC v galileovské geometrii a strana c je nejdelší, pak platí

$$c = a + b. \tag{2.1}$$

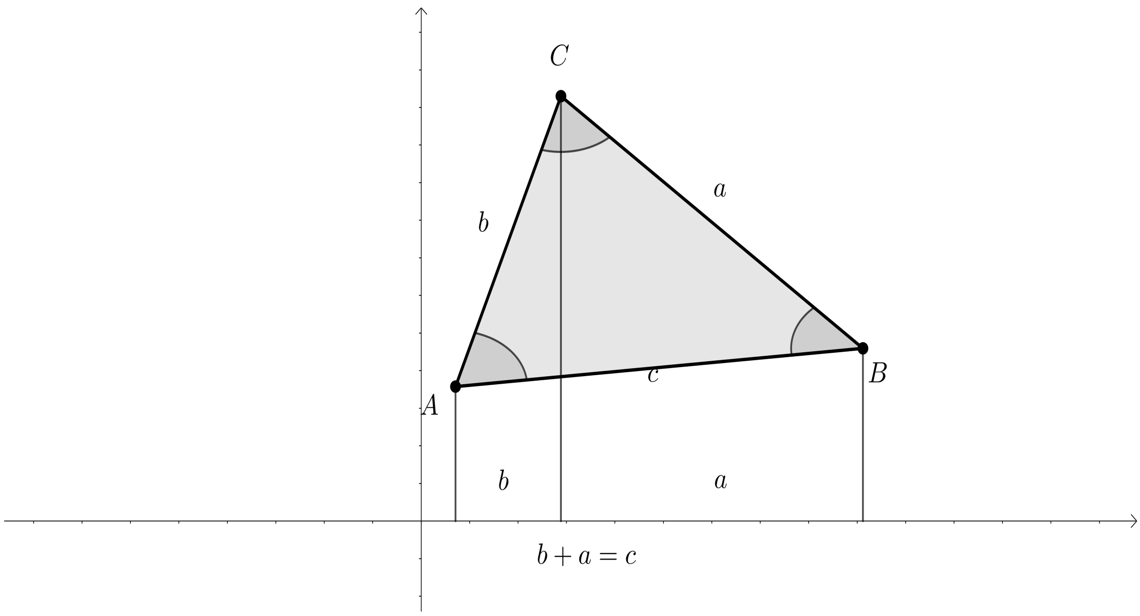
Tento vztah vyplývá z definice vzdálenosti dvou bodů v galileovské rovině (obrázek 2.1). Fyzikální interpretace je velice prostá. Pokud body A, B a C představují tři libovolné události, pak časový interval mezi první událostí a poslední je roven intervalu mezi první a druhé události plus interval druhé a poslední. Jinými slovy, představuje aditivitu časových intervalů. Z obrázku 2.1 lze vyčíst další významnou rovnost.

Definice 2.1.2. Nechť γ je největší úhel v trojúhelníku ABC a sklony přímek BC, CA a AB jsou po řadě k_1, k_2, a k_3, pak platí $\alpha = k_2 - k_3$, $\beta = k_3 - k_1$, $\gamma = k_2 - k_1$, z čehož plyne vztah

$$\gamma = \alpha + \beta \tag{2.2}$$

[Kurudirek and Akca, 2015b, s.2].

Mechanický význam této formule může být interpretován takto: *Největší ze tří relativních rychlostí, které jsou určeny třemi stejnoměrnými pohyby, je součet zbývajících dvou*[Yaglom, 1979, s.48-50].



Obrázek 2.1: Rovnost stran v trojúhelníku

Dalšími důležitými rovnostmi jsou analogie sinové věty v eukleidovské geometrii. sinova a kosinova věta jsou nadměrně důležité v trigonometrii, protože určují vztahy tří stran a tří úhlů v každém trojúhelníku. Pro trojúhelník ABC sinova věta říká:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

[Skurnick, 2006-01-01, s.70].

Věta 2. *V galileovské geometrii platí*

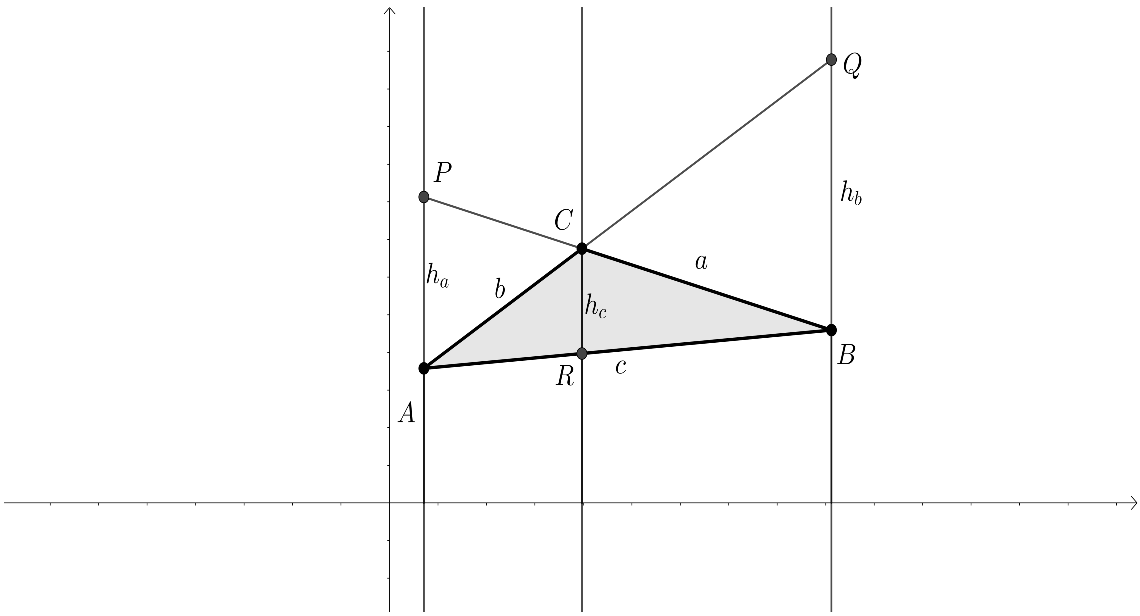
$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}. \tag{2.3}$$

Důkaz. Nejdříve vytvoříme body P, Q a R tak, že pro každý vrchol trojúhelníku ABC sestrojíme speciální přímku a bod P bude ležet na průsečíku speciální přímky bodu A a přímky BC. Analogicky bod Q bude ležet na průsečíku speciální přímky bodu B a přímky AC a nakonec bod R bude ležet na průsečíku speciální přímky bodu C a přímky AB. Tím vzniknou úsečky AP, BQ a CR (obrázek 2.2, u kterých chceme vědět speciální vzdálenosti jejich krajních bodů, neboli *výšku*. Jelikož se tyto úsečky nachází na speciálních přímkách, je jejich klasická vzdálenost nulová, a proto z definice speciální vzdálenosti (1.13) plyne

$$\begin{aligned} h_a &= |AP| = \delta_{AP} \\ h_b &= |BQ| = \delta_{BQ} \\ h_c &= |CR| = \delta_{CR}. \end{aligned}$$

Víme, že $|BR| = |BC| = a$ a $|AR| = |AC| = b$ a definice úhlu (1.16) navíc říká $h_c = \beta a = \alpha b$. Díky těmto poznatkům vzejde rovnost

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}.$$



Obrázek 2.2: Důkaz analogie sinové věty v galileovské geometrii

Analogicky pro výšky h_b a h_a platí

$$\frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$$
$$\frac{a}{\alpha} = \frac{c}{\gamma}.$$

Tímto je dokázáno [Yaglom, 1979, s.50]. □

Můžeme snadno ukázat, že pro náš trojúhelník platí vlastnost těžnic, kterou si přenáší z eukleidovské geometrie.

Věta 3. *těžnice AD, BE a CF v trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě T, který se nazývá těžiště a tento bod dělí výše zmíněné těžnice v poměru $AT : TD = BT : TE = CT : TF = 2 : 1$. Pro body, které spolu leží na nějaké speciální přímce, je třeba vzít speciální vzdálenost mezi těmito body.*

Věta vychází z toho, že galileovská geometrie zachovává středy stran. Znamená to, že střed strany je v obou geometriích stejný [Yaglom, 1979, s.51].
V eukleidovské geometrii je suma úhlů v trojúhelníku rovna π. Toto tvrzení neplatí v geometrii neeukleidovské, jako je galileovská geometrie, protože zde úhly neměříme v radiánech, či stupních, ale chápeme ho jako speciální vzdálenost, která je definována jako rozdíl směrnic dvou přímek, které tento úhel svírají [Weisstein].
Proto lze říci, že úhel není omezený jako v eukleidovské geometrii. Z obrázku 2.3 je zřejmé, že úhel v trojúhelníku se může libovolně zvětšovat, například pokud se bod C v trojúhelníku ABC pohybuje po speciální přímce, která prochází tímto bodem. Pak v limitním případě, kdy tento úhel $\alpha = |\angle BAC|$ v trojúhelníku ABC jde k nekonečnu, se strany tohoto trojúhelníku stávají speciálními polopřímkami rovnoběžné s osou y.

2.1.2 Obsah

Jak je již dokázáno v první kapitole, transformace (1.10) a (1.11) zachovávají obsah objektů v této rovině.

Věta 4. *Pokud je S obsah trojúhelníku ABC, pak platí*

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c. \tag{2.4}$$

Důkaz. Nechť zobrazení (1.10) zobrazí trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ tak, že strana $B'C'$ je rovnoběžná s osou x, pak galileovská délka strany $B'C'$ a výšky h'_a se rovnají jejich délkám eukleidovským, a proto platí

$$S' = \frac{1}{2}a'h'_a.$$

S' je obsah trojúhelníku $A'B'C'$ a jelikož a, h_a a S jsou invariantní pod galileovskými transformacemi, jsou rovnosti $a' = a$, $h'_a = h_a$, $S' = S$ pravdivé. Z toho vyplývá

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Podle stejného principu lze dojít ke zbývajícím dvou rovnostem. □

Bystrým pozorováním formule pro výpočet obsahu (2.4), lze dospět k zajímavým závěrům. Substitucí $h_c = \alpha b$ do poslední rovnosti v (2.4), dostaneme vzorec $S = \frac{1}{2}bc\alpha$. Aplikací symetrií pak vzejde

$$S = \frac{1}{2}ab\gamma = \frac{1}{2}ac\beta = \frac{1}{2}bc\alpha, \tag{2.5}$$

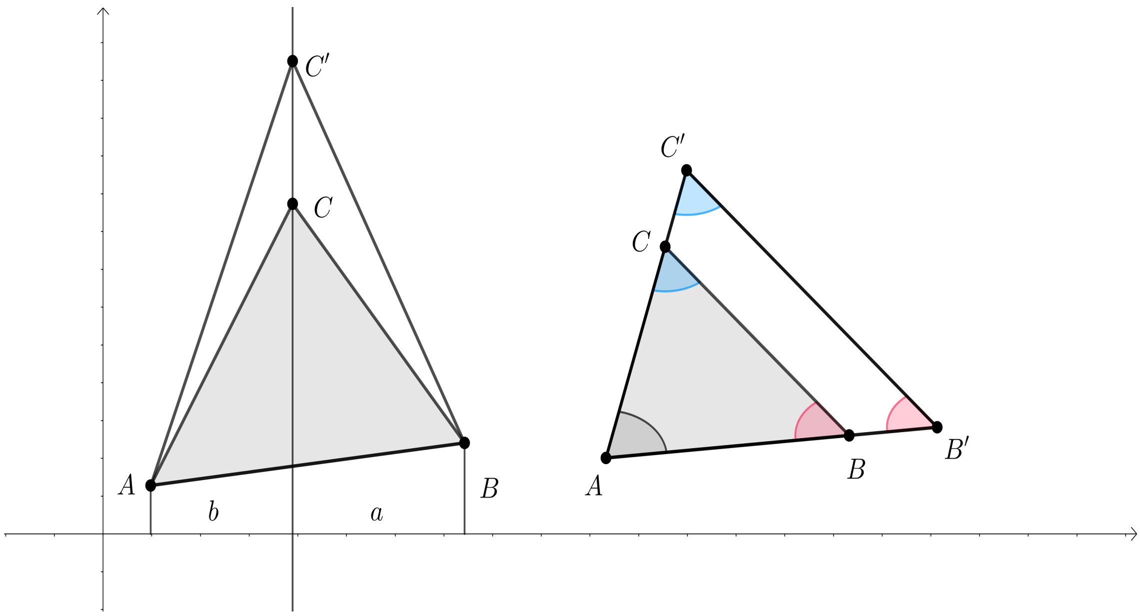
což je přímá analogie k eukleidovském vzorci pro výpočet obsahu trojúhelníku

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

[Yaglom, 1979, s.50].

2.1.3 Shodnosti a podobnosti

Pojďme se nyní zaměřit na shodnosti trojúhelníků v galileovské rovině. V první řadě je nutné si uvědomit, že tak, jak jsou zadefinovány pojmy vzdálenost a úhel, následuje tvrzení, že dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se stejnými velikostmi stran (nebo úhlů) nemusejí být shodné(obrázek 2.3). Naopak jsou shodné jen ve speciálním případě. Pokud mají stejně velké strany a strana c je nejdelší, bod C může ležet kdekoliv na *speciální přímce*. Plyne to také z toho, že v galileovské geometrii nejdelší stranu v trojúhelníku určují jeho dvě menší strany, ale tyto strany neurčují samotný trojúhelník. Analogicky pro dva trojúhelníky se shodnými úhly lze k prvnímu trojúhelníku vytvořit neshodný trojúhelník se stejnými úhly [Kurudirek and Akca, 2015b, s.3]. Lze tedy říci, že výrok: *trojúhelníky jsou shodné podle věty SUS, nebo USU* v této geometrii obecně neplatí.



Obrázek 2.3: Vlevo - dva neshodné trojúhelníky se stejnými velikostmi stran, vpravo - dva neshodné trojúhelníky se stejnými velikostmi úhlů

Dalším pozorováním rovnice (2.3) zjistíme, že pokud dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají stejné úhly, pak platí

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

V tomto případě lze dostat trojúhelník $A'B'C'$ z trojúhelníku ABC podobným zobrazením s koeficientem podobnosti k. Jedná se tedy o zobrazení, které zobrazí galileovskou rovinu na sebe samou tak, že zachová všechny velikosti úhlů a vynásobí velikosti všech vzdáleností koeficientem k. Takové zobrazení lze vytvořit. Nechť tato transformace zobrazí každý bod A této roviny na bod A' tak, že bod A' bude ležet na přímce OA, kde O je počátek se souřadnicemi (0,0), a bude platit vztah

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = k.$$

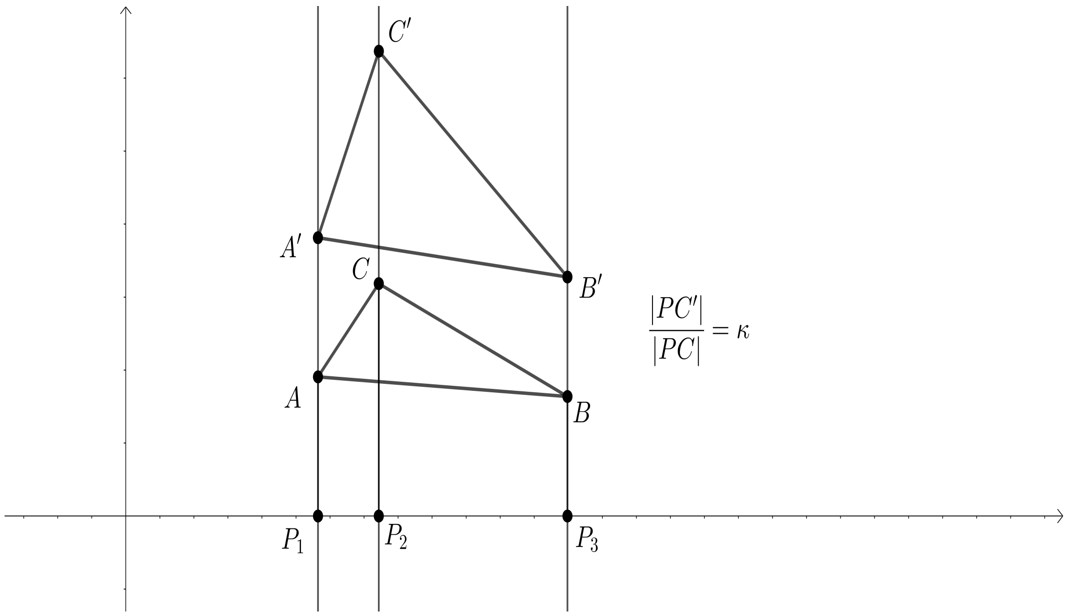
Takové podobné zobrazení se v eukleidovské geometrii může označit jako homotetie (stejnolehlost).
Podobně pro dva trojúhelníky se stejnými stranami platí, že mají podobné úhly, a proto

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \kappa$$

V tomto případě lze dostat trojúhelník $A'B'C'$ z trojúhelníku ABC jinou podobností, než v předešlém případě. Je to podobné zobrazení, které zachová všechny velikosti stran v této rovině a vynásobí všechny velikosti úhlů číslem κ. Je to například zobrazení, které převádí bod C na bod C' tak, že bod C' leží na *speciální přímce* CP, která prochází bodem C, a platí

$$\frac{|PC'|}{|PC|} = \kappa,$$

kde bod P je průsečík speciální přímky, procházející bodem C, a osy x (obrá-



Obrázek 2.4: Zobrazení, které zachovává délky stran v trojúhelníku ABC

zek 2.4).

2.2 Princip duality

Tato sekce bude zavádět pojem *dualita v galileovské geometrii.* Galileovská geometrie se dá zavést jako speciální případ projektivní geometrie. V projektivní geometrii platí velice významná metoda, která zavádí nové a často velice odlišné věty, *duální* věty k jakýmkoliv, již zavedeným, větám. Omezí-li se tato teorie na rovinu, pak dostane novou (duální) větu, nahradí-li termíny „bod“ a „přímka“, „vzdálenost“ a „úhel“, „leží na“ a „prochází“ [Pedoe, 1975, s.274].
Teď, když je patrné, co je cílem, je třeba dojít správnými úvahami k této metodě v galileovské geometrii korektně. V eukleidovské geometrii platí jednoduché analogie, podobnosti, které jsou intuitivně zřejmé. Především o záměně bodů a přímek následujícím způsobem. Dvěma různými body prochází právě jedna přímka a dvě různé přímky se protnou v právě jednom bodě. Množina bodů na přímce a mezi body M a N, tedy úsečka MN, je analogie k množině přímek procházející bodem A mezi přímkami m a n, tedy úhlu $\angle MAN$. Trojúhelník může být vnímán jako množina tří nekolineárních bodů a tří úseček mezi nimi nebo také jako množina tří nekonkurentních přímek a tří úhlů, které definují. Nicméně tyto analogie mají v eukleidovské geometrii zásadní chybu. Vše funguje až do chvíle, kdy se začne pracovat s rovnoběžnostmi. Konkrétně s rovnoběžnými přímkami je problém takový, že k nim bodová analogie neexistuje. V eukleidovské geometrii není pojem „rovnoběžné body“, respektive analogicky dva body, které nespojuje žádná přímka. Ovšem v galileovské geometrii je situace jiná a takové body zadefinovat lze.

Definice 2.2.1. Řekneme, že dva body A a B jsou rovnoběžné, pokud je nelze spojit žádnou (klasickou) přímkou.

Tedy znamená to, že oba body protíná pouze *speciální přímka*. V galileovské geometrii jsou *speciální přímky* výrazně odlišné od běžných přímek. Je možné pozorovat, že v galileovské geometrii může úhel být jakkoliv veliký, naproti v eukleidovské geometrii po rotaci o 180° se přímka dostane do původní polohy a úhel se nezmění. V galileovské geometrii lze vždy sestrojit přímku, která s původní přímkou bude svírat libovolný úhel [Yaglom, 1979, s.54-56].
Nechť je dána přímka l a přímka m v galileovské rovině. Chceme-li velikost úhlu mezi nimi, sestrojme jednotkovou kružnici se středem v jejich průsečíku Q. Velikost úhlu je vzdálenost bodů M a N, které vzniknou průnikem těchto přímek a dané jednotkové kružnice. Je zřejmé, že můžeme sestrojit přímku procházející bodem Q, která protne kružnici tak, že průsečík bude libovolně vzdálen od bodu N. Tím je ukázáno, že úhel lze sestrojit libovolně veliký v galileovské geometrii.
Zadefinováním rovnoběžných bodů nastane situace, kde analogie mezi body a přímkami je kompletní. Tato analogie říká následující: *Záměnou slov „bod“ a „přímka“, „vzdálenost“ a „úhel“, „leží na“ a „prochází“ v jakékoliv větě v galileovské geometrii vznikne věta nová.* Toto tvrzení je známo také jako *princip duality* a tvrzení, které tento princip určuje, jsou k sobě *duální*. Je možné dokonce tvrdit, že galileovská geometrie je díky tomuto principu jednodušší, než geometrie eukleidovská. Vzniká mnoho vět, které by bez tohoto principu bylo obtížné definovat, či dokázat, a proto nám tento princip umožní formulovat nové věty z již zavedených. Důkaz tohoto principu je složitý a je dohledatelný v knize I.M.Yagloma - A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis [Yaglom, 1979], zde se jím zabývat nebudeme.
Je vhodné ukázat důležitost principu duality na konkrétních příkladech. Mějme následující vztahy v libovolném trojúhelníku ABC

$$a + b = c$$
$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Tyto vztahy jsou k sobě duální. Z toho plyne, že pokud víme jeden z nich, lze definovat druhý. Další příklad je analogie sinové věty

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}.$$

Věta 5. *Pokud se aplikuje princip duality na vztah $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$, vzniknou rovnosti*

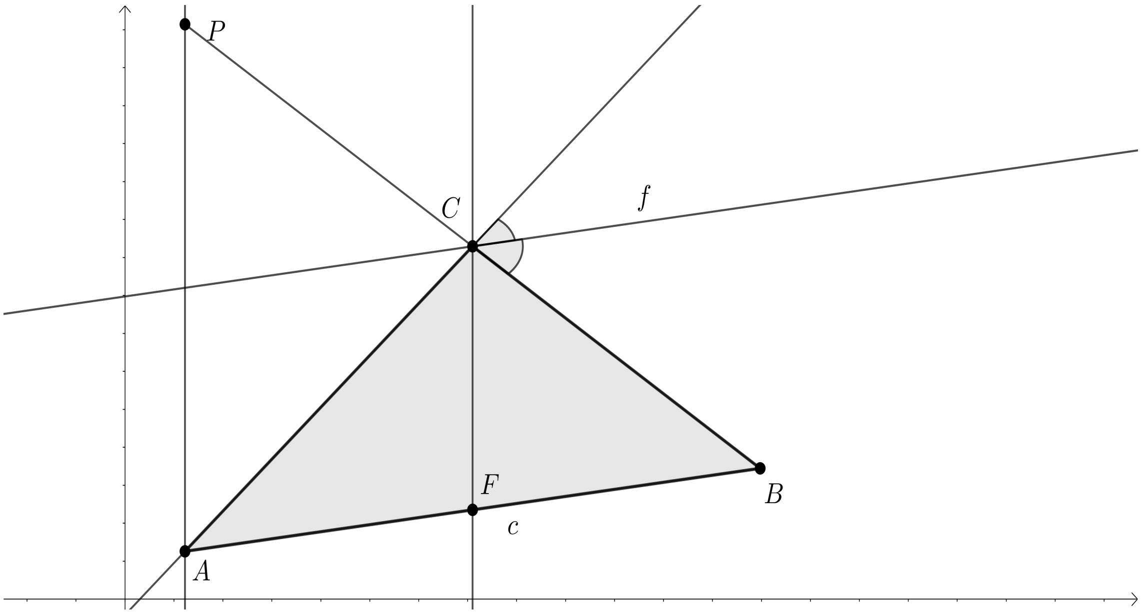
$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

[Yaglom, 1979, s.56].
Dalším příkladem je dualita v rovnoramenném trojúhelníku ABC, kde $|AC| = |CB|$. Víme, že v takovém trojúhelníku leží těžnice t z bodu C na stranu AB na *speciální přímce*, vedenou z bodu C, a zároveň tato přímka není osa úhlu C[1]. Průsečík t se stranou c označíme bodem F. Jelikož bod F i bod C leží na *speciální přímce*, lze říci, že jsou tyto body rovnoběžné. K bodu F je duální přímka f,

[1]Osy úhlů v této geometrii nazýváme přímky, které svírají s oběma rameny stejný úhel

která je také osou úhlu C. A pokud na rovnoběžnost bodů C a F použijeme princip duality, řekneme, že přímky c a f jsou také rovnoběžné. Tedy vznikne následující věta:

Věta 6. *V rovnoramenném trojúhelníku ABC, kde $|AC| = |CB|$ platí, že osa f úhlu γ je rovnoběžná se stranou c.*



Obrázek 2.5: K důkazu věty rovnoběžnosti osy úhlu se stranou trojúhelníka, kterou neprotíná.

Důkaz. Mějme osu f úhlu γ a bod P v galileovské rovině, který je průsečíkem speciální přímky, procházející bodem A, a přímky BC. Ze speciální vzdálenosti plyne, že osa f protíná *speciální přímku* AP tak, že f půlí úsečku AP i úsečku PB, protože platí $|PC| = |AC| = |CB|$. Z toho plyne, že f je spojnice středů stran v trojúhelníku ABP, a proto platí $f \parallel BA$. $\square$

[Yaglom, 1979, s.57-58] V následujících kapitole si také ukážeme, jak se princip duality dá použít v cyklech a jaké vztahy nám tím vzniknou.

3. Cykly

Tato kapitola bude pojednávat o cyklech a kružnicích v galileovské rovině. Kružnice je již zadefinována jedním způsobem v kapitole 1.1, ale zde se ukáže zobecnění této teorie.

3.1 Cykly

V první kapitole je kružnice zavedena jako: „Množina všech bodů, které jsou stejně vzdálené od pevného bodu $P(x_p,y_p)$.“ Tím tedy vznikla jedna množina bodů, a to dvě *speciální přímky*. Je možné uvažovat nad druhou definicí kružnice v eukleidovské rovině a jak se přenese do galileovské geometrie. Jedná se o definici: „Množina všech bodů, z kterých je daná úsečka AB viděna pod úhlem α.“ Aplikuje-li se tato definice v galileovské geometrii vznikne jiná množina bodů, než-li jsou dvě *speciální přímky*. Respektive, *speciální přímky* lze dostat jako speciální případ. Nechť dva body $A(a_1,a_2)$ a $B(b_1,b_2)$ tvoří danou úsečku a bod $C(x,y)$ je v rovině tak, že $|\angle ACB| = \alpha$, pak směrnice k_1 a k_2 přímek AC a CB jsou

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{y-a_2}{x-a_1} \\
k_2 &= \frac{y-b_2}{x-b_1}.
\end{aligned}
$$

Použitím definice úhlu vyplyne rovnice

$$\alpha = k_2 - k_1 = \frac{y-b_2}{x-b_1} - \frac{y-a_2}{x-a_1}.$$

Takže platí, že souřadnice všech bodů $C(x,y)$ této množiny splňují rovnici

$$\alpha = \frac{y-b_2}{x-b_1} - \frac{y-a_2}{x-a_1},$$

nebo

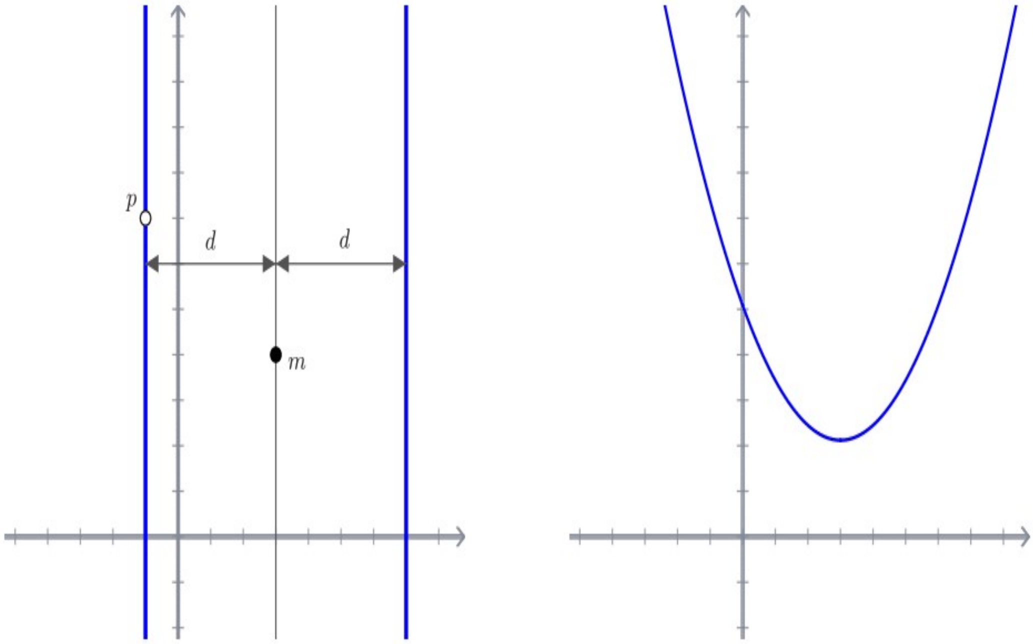
$$\alpha(x-b_1)(x-a_1) - (y-b_2)(x-a_1) + (y-a_2)(x-b_1) = 0,$$

pokud jsou dány body A a B a úhel α. Poslední rovnice se dá zapsat také jako

$$y = ax^2 + 2bx + c, \tag{3.1}$$

kde

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\alpha}{b_1-a_1} \\
b &= \frac{b_2-a_2-\alpha(b_1+a_1)}{2(b_1-a_1)} \\
c &= \frac{\alpha(a_1b_1) - a_1b_2 + a_2b_1}{b_1-a_1},
\end{aligned}
$$



Obrázek 3.1: Figure 23.3 A Galilean circle vs. a Galilean cycle - Galileovská kružnice vs. Galileovský cyklus [Richter-Gebert, 2011, s.453]

nebo také jako

$$ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{3.2}$$

kde b_1 a b_2 jsou souřadnice bodu B. Z rovnice (3.1) lze říci, že cykly v galileovské geometrii představují paraboly, pokud koeficient a není roven nule [Kurudirek and Akca, 2015a, s.4].
Jinými slovy se tato definice dá zavést také takto:

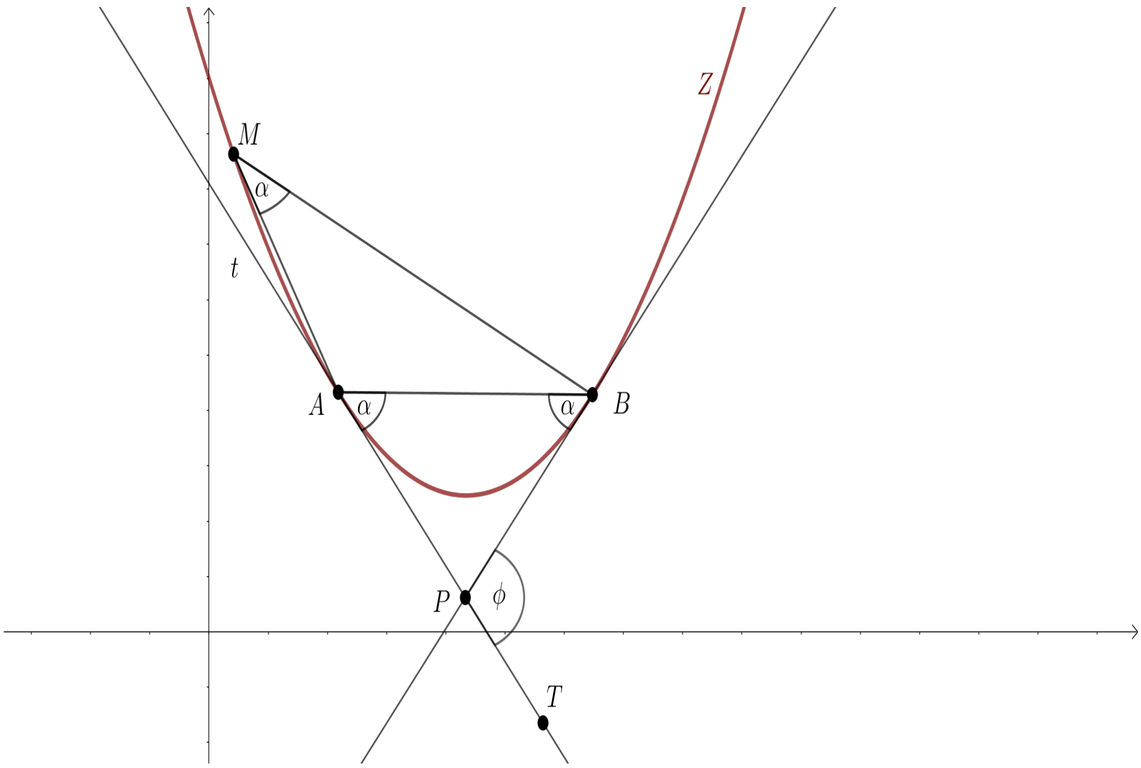
Definice 3.1.1. Nechť A a B jsou dva body na parabole, pak pro každý další bod M na této parabole platí, že rozdíl směrnic přímek AM a BM je konstantní a závisí pouze na bodech A a B [Richter-Gebert, 2011, s.462].

Pozorováním rovnice (3.2), se dají zjistit speciální případy obecného cyklu. Pokud $b_2 = 0$, vypadne z rovnice celý člen s y, a dále pokud $a \neq 0$ a $b_1^2 - ac > 0$, vyjde rovnice kružnice. Pokud platí $b_2 = 0$, $a \neq 0$, $b_1^2 - ac = 0$, nebo $a = b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, pak vyjde rovnice speciální přímky. Pro rovnici klasické přímky dosadíme do vztahu (3.1) $a = 0$, $b_2 \neq 0$.
Jestliže je cyklus brán jako křivka v rovině, která je definována pomocí rovnice (3.2), pak z této definice plyne:

Věta 7. *Tři body galileovské roviny determinují konkrétní cyklus.*

Přímo z definice cyklu plyne také následující tvrzení:

Věta 8. *Úhel mezi tětivou AB cyklu Z a tečnou k Z v bodě A (nebo B) je také α.*



Obrázek 3.2: K důkazu věty úhlu tečny k cyklu

[Yaglom, 1979, s.79-80]

Důkaz. Pokud libovolný bod M na Z jde k bodu A, pak se tětiva AM blíží k tečně AT v bodě A a tětiva MB se blíží k tětivě AB (obrázek 3.2). Jelikož všechny tětivy AM tvoří s tětivami MB úhel α, pak i tečna AT s tětivou AB musí svírat úhel α. Důkaz je analogický, nahradí-li se bod A za bod B, pokud se uvažuje o tečně v bodě B [Yaglom, 1979, s.80]. □

3.1.1 Poloměr

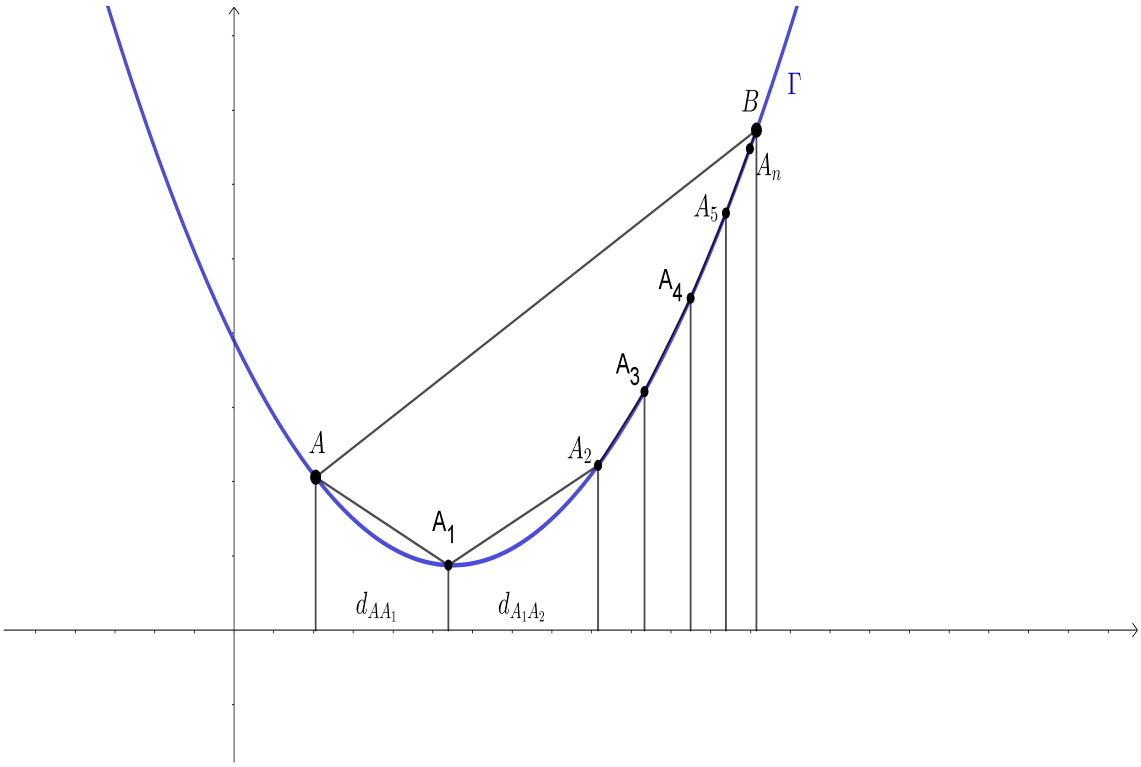
Je-li zaveden cyklus, je vhodné se ptát na jeho „poloměr“. V galileovské geometrii neplatí eukleidovská analogie, která tvrdí, že poloměr kružnice (cyklu) je vzdálenost od středu k jednomu bodu této křivky, protože v galileovské rovině střed cyklu neexistuje. Respektive z hlediska projektivní geometrie je střed cyklu (paraboly) v nekonečnu, a proto nám tato analogie nepomůže [Richter-Gebert, 2011, s.461]. Stejně tak neplatí vztah

$$r = \frac{s}{\phi},$$

kde s je délka oblouku kružnice a $\phi = |\angle AQB|$ je úhel, kterým je daný oblouk vytyčen. Nicméně lze tento vztah mírně pozměnit tak, aby byla definice správná. Nahradíme středový úhel ϕ obvodovým úhlem $\alpha = \frac{\phi}{2}$ a řekneme, že poloměr r eukleidovské kružnice S je dán vztahem

$$r = \frac{s}{2\alpha}.$$

Cílem je poté dokázat, zda-li tato definice platí i pro libovolný cyklus v galileovské rovině. Tedy jestliže pro jakýkoliv oblouk mezi body A a B v cyklu Z je podíl $\frac{s}{\alpha}$ konstantní [Yaglom, 1979, s.80]. Nejdříve je třeba zadefinovat délku oblouku



Obrázek 3.3: Délka oblouku s mezi body A a B na obecné křivce Γ

s mezi body A a B nějaké obecné křivky Γ v galileovské rovině (obrázek 3.3), která má tu vlastnost, že žádné dva body na této křivce nebudou rovnoběžné (nebudou ležet na společné speciální přímce). Řekneme, že délka oblouku s mezi body A a B na této křivce Γ je limita vzdáleností $|AA_1|+|A_1A_2|+\ldots+|A_{n-1}A_n|+|A_nB|$ z lomené čáry $AA_1A_2A_3\ldots A_nB$, která obsahuje body zlomu na křivce Γ, jestliže vzdálenosti článků na této čáře jdou k nule. A protože v galileovské geometrii je vzdálenost dvou bodů definována jako rozdíl jejich souřadnic na ose x, je délka lomené čáry s krajními body A a B definována jako vzdálenost těchto dvou bodů d_{AB}. Z toho plyne:

Definice 3.1.2. Délka oblouku s mezi body A a B na této křivce Γ je

$$s = d_{AB}.$$

Teď lze dosadit do výrazu $\frac{s}{\alpha}$ a zjistit, zda-li je konstantní. Nechť body $A(a_1, a_2)$ a $B(b_1, b_2)$ tvoří tětivu cyklu Z a α je obvodový úhel definovaný tětivou AB, pak z definice koeficientu a v (3.1) platí

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{d_{AB}}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{a}.$$

Je dokázáno, že je tato hodnota konstantní, a proto lze zadefinovat poloměr cyklu Z následujícím způsobem:

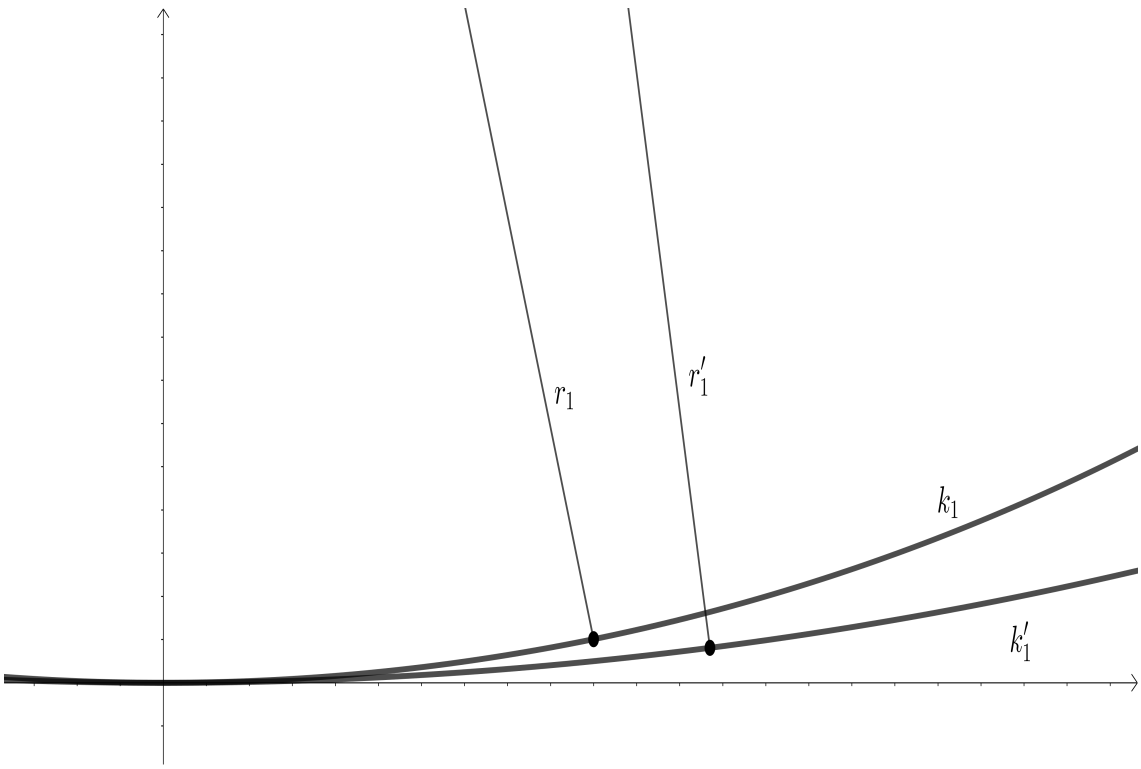
Definice 3.1.3. Poloměr r cyklu Z, který je dán rovnicí $y = ax^2 + 2bx + c$, je

$$r = \frac{s}{2\alpha} = \frac{1}{2a}.$$

Pozorováním zavedení poloměru cyklu, je vhodné si všimnout, že poloměr cyklu v galileovské geometrii, na rozdíl od poloměru kružnice v eukleidovské geometrii, může nabývat pozitivních i negativních hodnot [Akbiyik and Yüce, 2015, s.93-95].

3.1.2 Křivost cyklu

Cykly je možné také definovat, jako křivky s konstantní křivostí. Proto je vhodné si křivost cyklu uvést a ukázat, jaké má vlastnosti [Richter-Gebert, 2011, s.456]. Je zřejmé, že zvětšuje-li se poloměr kružnice v eukleidovské geometrii, pak se tato kružnice v limitním případě, kdy poloměr jde k nekonečnu, blíží k přímce (obrázek 3.4). Stejně tak pokud se poloměr zmenšuje, kružnice je více zaoblená



Obrázek 3.4: Eukleidovská kružnice se zvětšujícím se poloměrem

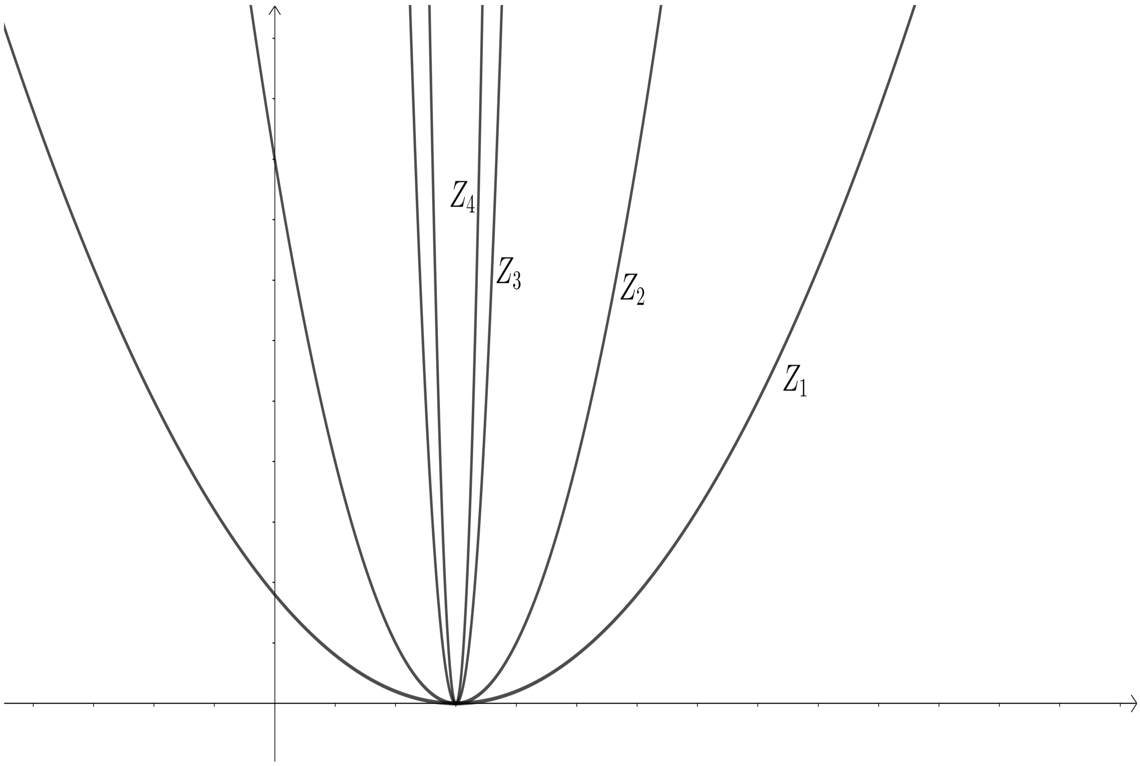
a má větší křivost.
Proto lze říci, že křivost ρ je nepřímo úměrná poloměru r. Respektive platí vztah

$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{2\alpha}{s}.$$

Aplikuje-li se tento vztah na obecný cyklus v galileovské geometrii (lze provést ze stejného důvodu uvedeného v sekci 3.1.1), lze formulovat definici křivosti cyklu:

Definice 3.1.4. Křivost ρ cyklu Z, který je dán rovnicí $y = ax^2 + 2bx + c$, je v galileovské geometrii

$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{2\alpha}{s} = 2a,$$



Obrázek 3.5: Galileovské cykly se zvětšujícími se poloměry

Lze si všimnout, že stejně jako u kružnice v eukleidovské geometrii se cyklus blíží přímce, pokud poloměr jde k nekonečnu. Když se poloměr zvětšuje, jeho křivost se zmenšuje, a proto se cyklus blíží k speciální přímce (obrázek 3.5). Dále je zajímavé se zamyslet nad pozorováním, že cyklus v galileovské geometrii si přenáší některé vlastnosti s drobnými úpravami kružnice z eukleidovské geometrie. Například zmíněná tendence, kdy se objekt stane přímkou, jde-li poloměr k nekonečnu (tedy, že křivost je nepřímo úměrná k poloměru), nebo vlastnost, že oba objekty mají konstantní křivost, či jejich definici, která říká, že je úsečka s krajními body na tomto objektu viděna pod stejným úhlem z libovolného bodu tohoto objektu.

Nabízí se otázka, jaký mechanický význam má cyklus v galileovské geometrii. Pro získání odpovědi se stačí podívat na definici cyklu jako na parabolu

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

a z kapitoly 1.1 zpátky dosadit za x a za y jejich mechanický význam. Tedy za složku x zpětně dosadíme čas t a za složku y dosadíme složku x. Vyjde rovnice

$$x = at^2 + 2bt + c,$$

což je rovnice zrychlení bodu přímočarého pohybu po obecné přímce o. Pokud má cyklus pozitivní křivost, jedná se o kladné zrychlení, a pokud má křivost negativní hodnotu, jedná se o zrychlení záporné - neboli zpomalení [Yaglom, 1979, s.83-84].

3.1.3 Křivost obecné křivky

Výše je definována křivost pro cykly v galileovské geometrii. Zde se bude definovat křivost pro obecné křivky v této rovině. Jako se postupovalo v této kapitole doposud, nejdříve je dobré se podívat na případ v eukleidovské geometrii a tyto poznatky pak použít v galileovské rovině. Princip křivosti je založen na tečně v daném bodě. Jestliže jde o přímku, mají všechny tečny v každém bodě stejný sklon a dokonce splynou s danou přímkou, a proto je křivost nulová. Existují ale křivky, které nemají v každém bodě stejnou křivost. Proto, chceme-li zadefinovat křivost v daném bodě, musíme nejdříve zadefinovat průměrnou křivost $\overline{\rho}$ křivky Γ na oblouku mezi body A a B.

$$\overline{\rho} = \frac{\phi}{s},$$

kde s je délka oblouku mezi body A a B a úhel ϕ je úhel mezi tečnami t_1 a t_2 v bodech A a B [Yaglom, 1979, s.85-86].
Z toho plyne, že křivost ρ křivky Γ v bodě A je limita průměrné křivosti $\overline{\rho}$ na oblouku AM, jestliže M jde k bodu A

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s}. \tag{3.3}$$

Poloměr křivosti je definován jako

$$r = \frac{1}{\rho}.$$

Aplikací galileovských délek oblouků a úhlů na vztahy uvedené výše, vznikne pojem *křivost ρ křivky Γ v bodě A v galileovské geometrii.*
Pokud je danou křivkou Γ cyklus, platí, že délka oblouku AB je definována jako d_{AB} a protínají-li se tečny t_1 a t_2 k bodům A a B v bodě P, pak, použitím vztahu mezi úhly v trojúhelníku APB z kapitoly 2.1.1, je úhel $\phi = |\angle APB| = 2|\angle PAB| = 2\alpha$ (obrázek 3.2), kde α je obvodový úhel tohoto cyklu tvořený sečnou AB. Proto

$$\overline{\rho} = \frac{\phi}{s} = 2a,$$

kde a je koeficient z rovnice (3.1). Je zřejmé, že všechny oblouky na tomto cyklu mají stejnou průměrnou křivost, konkrétně $\overline{\rho} = 2a$. Z toho důvodu platí, že tento cyklus má v každém bodě A stejnou křivost

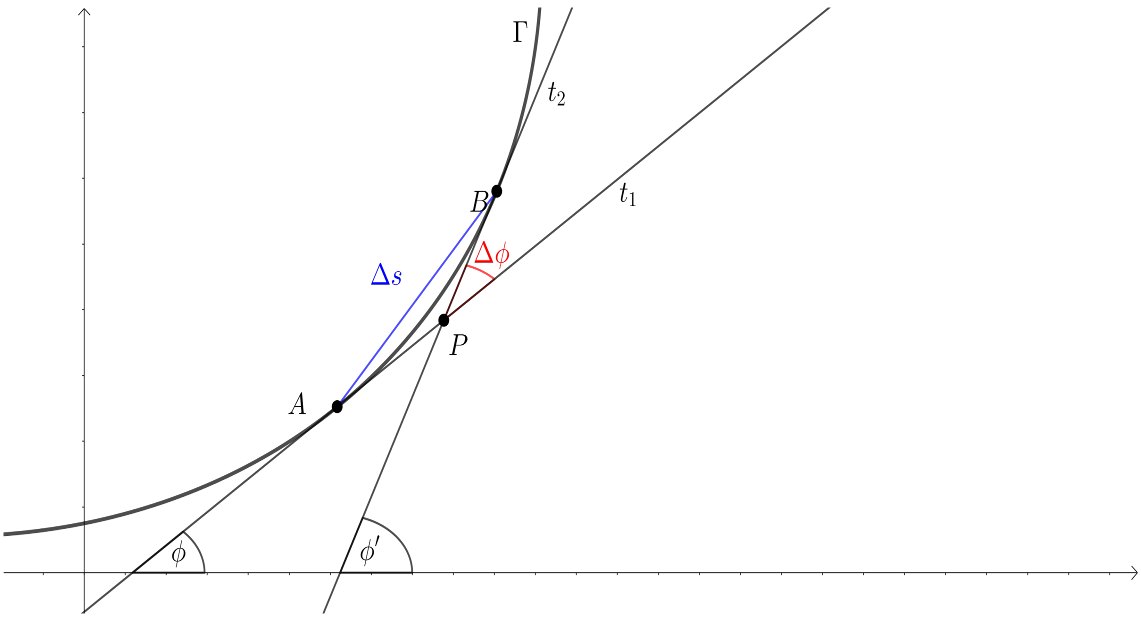
$$\rho = 2a,$$

a díky tomu poloměr křivosti je

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2a}$$

[Akbiyik and Yüce, 2015, s.94].
Je-li známo, jak je to v případě, kdy se pracuje s cyklem, není složité dostat analytický zápis křivosti a poloměru křivosti pro obecnou křivku. Nechť je dána obecná křivka, která má zápis $y = f(x)$. Směrnice tečny k této křivce v bodě

$A(x,y)$ je dána první derivací funkce f, tedy $f'(x)$. Nechť jsou dále t_1 a t_2 tečné přímky k dané křivce k odpovídajícím si bodům $A(x,y)$ a $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ na f a nechť ϕ a ϕ' jsou úhly, které svírají přímky t_1 a t_2 s osou x. Pak je zřejmé, že $\Delta\phi = \phi' - \phi$ (obrázek 3.6). Δs je délka oblouku AB. Cílem je zjistit, jaké hodnoty nabývá $\rho = \lim_{B\to A} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$. Z faktu, že směrnice tečny ke křivce v bodě A lze zapsat jako první derivace rovnice křivky v tomto bodě je zcela jasné, že platí



Obrázek 3.6: K definici křivosti obecné křivky Γ v galileovské geometrii

$$\Delta\phi = f'(x+\Delta x) - f'(x).$$

Z definice délky oblouku, která říká, že tato délka je rovna vzdálenosti krajních bodů oblouku, plyne

$$\Delta s = (x+\Delta x) - x = \Delta x.$$

Proto platí vztah

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

a díky tomu lze určit křivost dané křivky v daném bodě.

Definice 3.1.5. Křivost ρ křivky, která je dána rovnicí $y = f(x)$, v bodě x je

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x). \tag{3.4}$$

Díky tomu lze určit poloměr křivosti dané křivky.

Definice 3.1.6. Poloměr křivosti r v bodě x křivky, která je dána rovnicí

$$y = f(x)$$

je

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f''(x)}. \tag{3.5}$$

[Helzer, 2000, s.221] [Yaglom, 1979, s.87] Je tedy možné říci, že v galileovské geometrii má obecná křivka, dána rovnicí $y = f(x)$, křivost v libovolném bodě A stejnou jako druhou derivaci této křivky v daném bodě A.
Z rovnice (3.4) přímo vyplývá, že křivost cyklu $y = ax^2 + 2bx + c$ je rovna $2a$ v jakémkoliv jeho bodě $A(x,y)$.

Věta 9. *V galileovské geometrii jediná křivka s konstantní křivostí je cyklus*[1].

Je jednoduché potvrdit toto tvrzení tímto důkazem

Důkaz. Budeme uvažovat o křivce, která je dána rovnicí $y = f(x)$, jejíž křivost je konstantní a která není cyklem. Jestliže platí $\rho = f''(x) = \text{konst.}$, pak rovnice dané křivky musí být

$$y = \frac{1}{2}\rho x^2 + c_1 x + c_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou volitelné konstanty (záleží na poloze dané křivky). Je zřejmé, že tato křivka má rovnici paraboly, což je cyklus v galileovské geometrii, a proto je to spor s původním tvrzením. Díky tomu je dokázána původní věta, která tvrdí, že pouze cykly mají konstantní křivost. □

Další zajímavé tvrzení, který nám tento vhled o křivostech přináší, je, že každá křivka Γ v galileovské rovině je kromě polohy určena svojí křivostí rovnicí

$$\rho = \rho(s), \tag{3.6}$$

kde ρ je křivost křivky Γ v (proměnném) bodě A a s je délka oblouku QA křivky Γ, měřený od volitelného ale fixovaného bodu Q na Γ k bodu A. Toto tvrzení se nazývá *Základní věta křivek v rovině* a rovnice (3.6) se označuje jako *Přirozená rovnice* [Yaglom, 1979, s.89].
Je vhodné zmínit, že jelikož křivost $\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ křivky Γ obsahuje podíl úhlu k délce oblouku a poloměr $r = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\phi}$ obsahuje podíl délky oblouku k úhlu, platí:

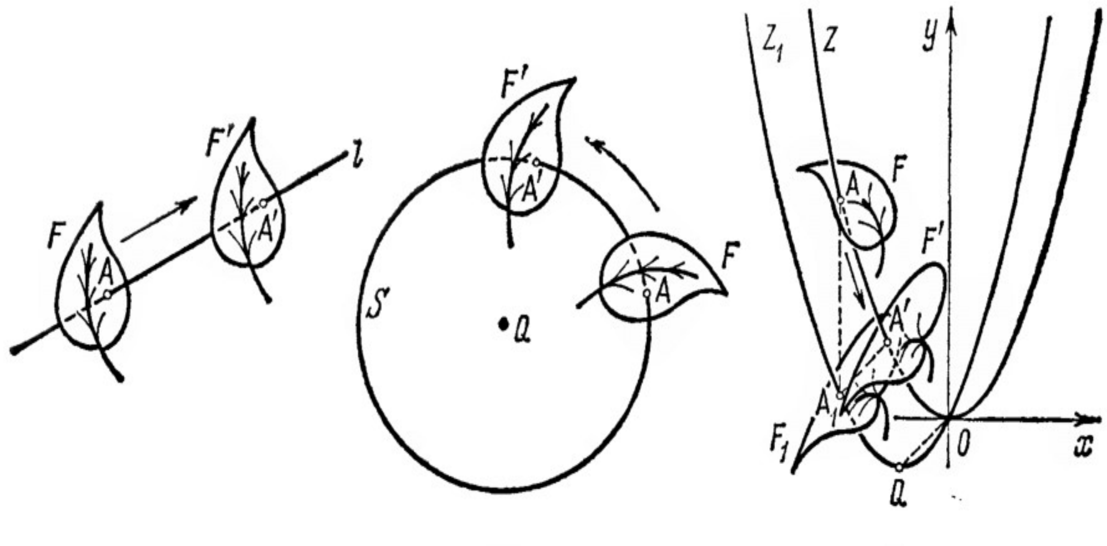
Věta 10. *Každá podobnost, která zachovává úhly a násobí vzdálenosti koeficientem k, násobí křivost ρ dané křivky Γ číslem $\frac{1}{k}$ a poloměr křivosti r číslem k.*

Platí i druhá věta, která říká následující:

Věta 11. *Každé podobné zobrazení v galileovské rovině, které zachovává délky a násobí úhly koeficientem κ, násobí křivost ρ dané křivky Γ číslem κ a poloměr křivosti číslem $\frac{1}{\kappa}$.*

Tyto zobrazení jsou uvedeny v sekci 2.1.3 [Yaglom, 1979, s.90].
Z projektivní geometrie plyne, že galileovská geometrie v rovině je jedna z devíti možných dvoudimenzionálních prostorů s konstantní křivostí [Efimov et al., 2009, s.1] [Richter-Gebert, 2011].

[1] V eukleidovské geometrii to samé platí pro kružnice



Obrázek 3.7: Figure 81 - vlevo - translační pohyb, uprostřed - kruhový pohyb, vpravo - cyklický pohyb [Yaglom, 1979, s.92]

3.1.4 Cyklická rotace

Tato podkapitola se bude zabývat pojmem Cyklická rotace. Z názvu je patrné, že se bude jednat o typ zobrazení, který bude mít něco společného s cykly. Sekce 2.1.3 zavedla první dvě důležité zobrazení v této rovině, které mají signifikantní význam v této geometrii. Následující část této práce bude zavádět třetí významné zobrazení.

V eukleidovské geometrii se pohyb po přímce označuje jako translace ve směru této přímky, kde se libovolný bod A zobrazí na bod A_1 v odpovídající vzdálenosti od sebe. Tato translace zobrazí přímku na sebe samou. Pokud se jedná o pohyb po kružnici, lze tento pohyb označit jako „kruhový pohyb“ a nazývá se rotace. Rotace zobrazí libovolný bod A na dané kružnici na bod A_1 tak, že $\angle ASA_1$ je odpovídající námi zvolený úhel, kde S je střed kružnice po které se tento pohyb odehrává.

Vraťme se do galileovské geometrie. Není pochyb, že translace a pohyb po přímce, zmíněný výše, má v galileovské rovině stejný geometrický význam, kde se ve stejném smyslu zobrazí přímka na sebe samou a libovolný bod A se zobrazí na bod A_1 v odpovídající vzdálenosti. Poté není obtížné zavést analogii ke „kruhovému pohybu“ z eukleidovské geometrie. Je zřejmé, že se bude jednat o cyklický pohyb a cyklickou rotaci. Galileovské transformace (1.10) a (1.11), které jsou popsány v kapitole 1.1 se skládají ze dvou zobrazení. Z translace

$$y_1 = y + b$$
$$x_1 = x + a$$

a elace

$$y_1 = vx + y \tag{3.7}$$
$$x_1 = x. \tag{3.8}$$

Nechť je v galileovské rovině dán cyklus Z rovnicí $y = ax^2$. Elace, která může být zapsaná také jako

$$y = y_1 - vx$$
$$x = x_1$$

převede cyklus Z na cyklus Z_1 tak, že jeho rovnice bude

$$y_1 - vx_1 = ax_1^2.$$

Tato rovnice se také dá přepsat jako

$$y_1 = ax_1^2 + vx_1 = a(x_1^2 + \frac{vx_1}{a} + \frac{v^2}{4a^2}) - \frac{v^2}{4a},$$

nebo jako

$$y_1 + \frac{v^2}{4a} = a(x_1 + \frac{v}{2a})^2.$$

Je jasné, že cykly Z a Z_1 jsou shodné. Z lze dostat translačním zobrazením

$$y' = y_1 + \frac{v^2}{4a} \quad (3.9)$$
$$x' = x_1 + \frac{v}{2a}. \quad (3.10)$$

Z toho plyne, že transformace

$$y' = vx + y + \frac{v^2}{4a} \quad (3.11)$$
$$x' = x + \frac{v}{2a}, \quad (3.12)$$

která je složena z elace (3.7)-(3.8) a z posunutí (3.9)-(3.10), zobrazuje cyklus Z na sebe. Co přesně se pod těmito zobrazeními děje? Elace (3.7)-(3.8) převede bod A, ležící na cyklu Z, na bod A_1 na cyklu Z_1. Translace (3.9)-(3.10) zobrazí zpětně bod A_1 na bod A', který náleží cyklu Z (obrázek 3.7 vpravo a obrázek 3.8).

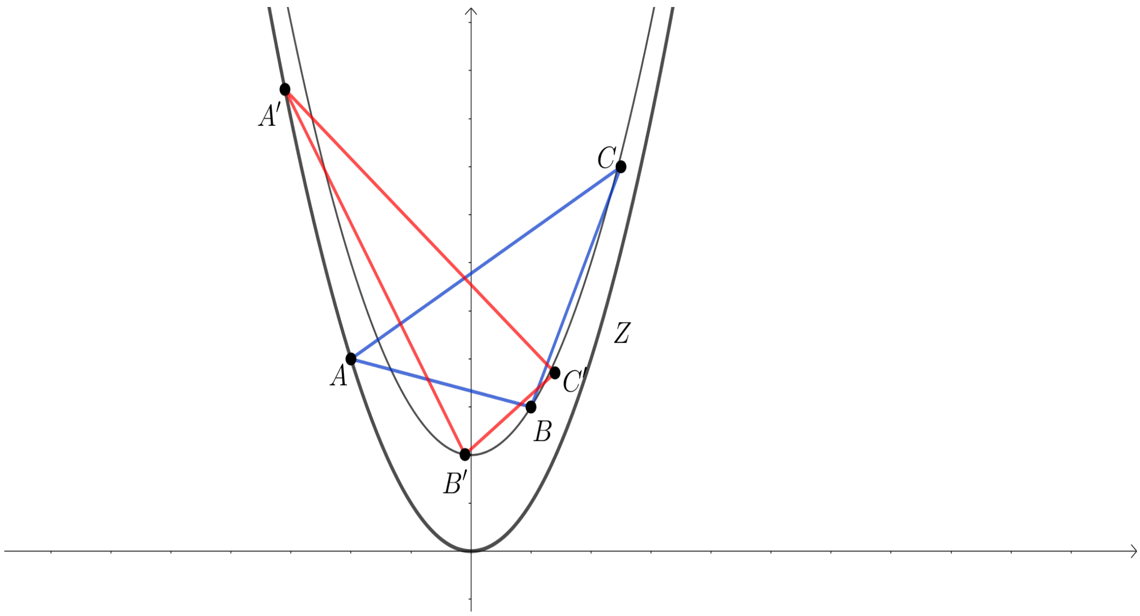
Definice 3.1.7. Nechť je v galileovské geometrii dán cyklus Z s rovnicí $y = ax^2 + 2bx + c$, pak zobrazení, určené rovnicemi

$$y' = vx + y + \frac{v^2}{4a}$$
$$x' = x + \frac{v}{2a},$$

se nazývá cyklická rotace podle cyklu Z s koeficientem v, kde v je koeficient daný galileovskými transformacemi.

Zobrazení (3.7)-(3.8) převede bod A na bod A_1 tak, že platí $d_{AA_1} = 0$. Translační složka cyklické rotace posune poté bod A_1 na bod A' tak, že jejich vzdálenost je $d_{A_1A'} = \frac{v}{2a}$. Z toho plyne, že

$$d_{AA'} = \frac{v}{2a},$$



Obrázek 3.8: Cyklická rotace trojúhelníku ABC podle cyklu Z a koeficientem v

a proto při vhodném zvolení koeficientu v je možné posunout bod A libovolnou vzdáleností d po cyklu Z. Stačí dát $\frac{v}{2a} = d$. Tedy je možné tvrdit, že existuje cyklická rotace, jež vezme bod A na cyklu Z a převede ho na předem zadaný bod A' na Z. Tento druh homogenity mají v eukleidovské geometrii pouze přímky a kružnice a v galileovské geometrii pouze přímky a cykly.
Dalším důležitým pozorováním je, že zobrazení (3.7)-(3.8) zobrazí cyklus

$$y = ax^2 + c,$$

na cyklus

$$y_1 - vx_1 = ax_1^2 + c.$$

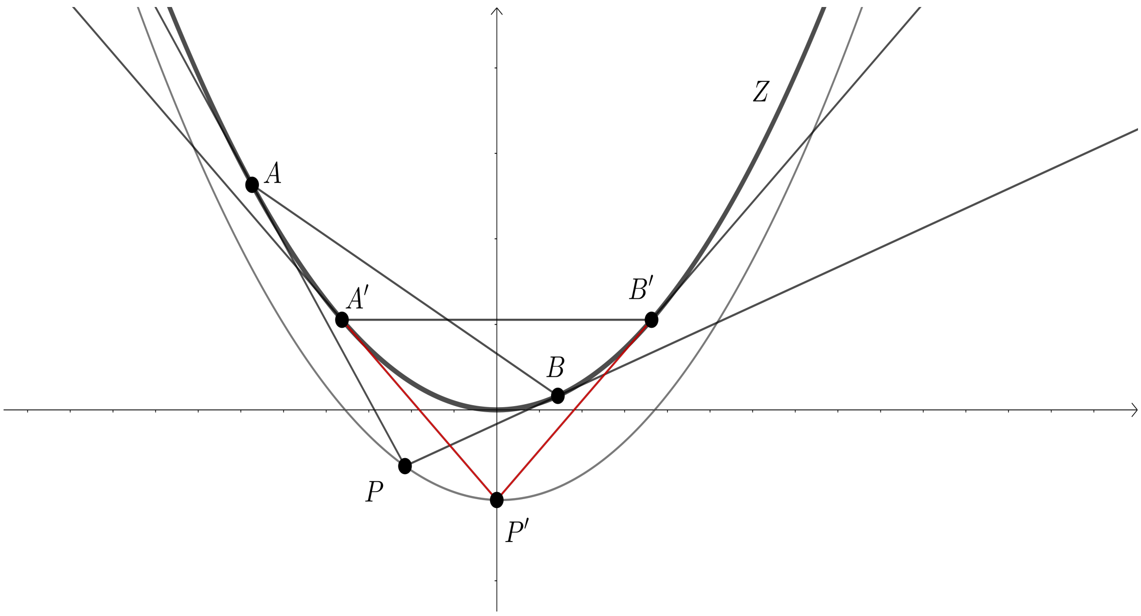
Translační složka z cyklické rotace pak převede tento cyklus zpět na

$$y' = ax'^2 + c.$$

Z toho plyne, že cyklická rotace převádí všechny cykly typu $y = ax^2 + c$, kde c je volitelné, na sebe [Yaglom, 1979, s.92-94]. V eukleidovské geometrii je obdobné tvrzení s kružnicí. Rotujeme-li kružnice, se stejným středem, podle jejich středu, zobrazí se na sebe.
Díky cyklické rotaci lze dokázat mnoho tvrzení týkajících se cyklů. Následuje několik důležitých vět, u kterých využijeme cyklickou rotaci.

Věta 12. *Nechť jsou dány tečny PA a PB z bodu P k cyklu Z, pak řekneme, že úsečky PA a PB jsou shodné.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že cyklus Z bude mít rovnici $y = ax^2$. Použitím vhodně zvolené cyklické rotace se cyklus Z zobrazí na sebe, bod P se zobrazí na bod P' na ose y a tečny PA a PB se zobrazí na tečny $P'A'$ a $P'B'$ (obrázek 3.9). Jelikož bod P' leží na ose y a cyklus má rovnici $y = ax^2$, platí, že osa y půlí úsečku $A'B'$. Z toho plyne, že jsou úsečky $P'A'$ a $P'B'$ stejně dlouhé, a protože cyklická rotace zachovává délky úseček, musí platit $d_{AP} = d_{A'P} = d_{A'P'} = d_{P'B'} = d_{PB}$ [Yaglom, 1979, s.95]. □



Obrázek 3.9: Shodnost velikostí délek úseček na tečnách z bodu P s body dotyku A a B

Dalším tvrzením, kde se využije cyklická rotace je například tato věta:

Věta 13. *Pokud přímka l protíná cyklus Z s rovnicí $y = ax^2$ v bodech A a B a cyklus Z_1 s rovnicí $y = ax^2 + c$ v bodech M a N, pak platí $|AM| = |NB|$.*

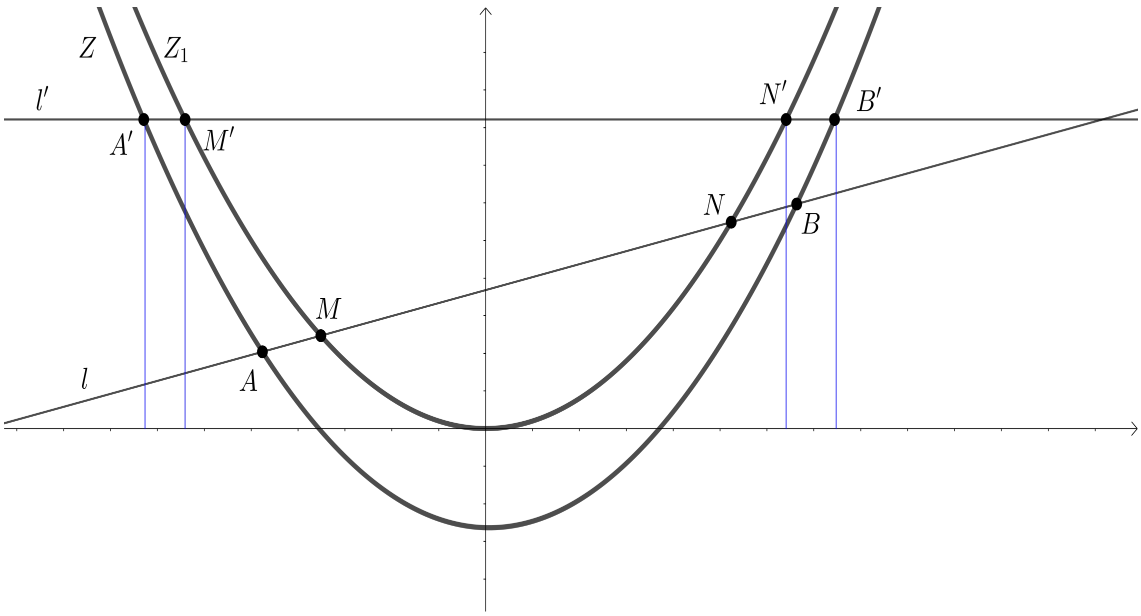
Důkaz. Podobným principem jako u minulé věty, použijeme cyklickou rotaci, která převede přímku l na přímku l' tak, že přímka l' je rovnoběžná s osou x (obrázek 3.10). Podle symetrie l' protíná Z a Z_1 v bodech A',B' a M',N' tak, že $|A'M'| = |N'B'|$. Jelikož víme, že cyklická rotace zachovává vzdálenosti, musí platit i vztah $|AM| = |NB|$. □

3.1.5 Průměr cyklu

Víme, že v eukleidovské geometrii platí, že středy rovnoběžných tětiv v kruhu, leží na průměru d daného kruhu. Uvažujme nyní, zda-li toto tvrzení analogicky platí pro cykly v galileovské geometrii. Je nutné připomenout, že zobrazení (3.7)-(3.8) zobrazí přímku s rovnicí $y = kx + s$ na přímku $y_1 = k_1x_1 + s$, kde $k_1 = k + v$, a translační zobrazení (3.9)-(3.10) zachová směr každé přímky. Nechť je dán cyklus Z rovnicí $y = ax^2$ a rovnoběžné tětivy k tomuto cyklu se zafixovanou směrnicí k_0, pak cyklická rotace s koeficientem $v = -k_0$ převede všechny tyto tětivy na tětivy se směrnicí 0 (rovnoběžné s osou x). Je zřejmé, že středy zobrazených tětiv leží na ose y. Z toho plyne, že středy původních tětiv leží na přímce d, která se pod touto cyklickou rotací zobrazí na osu y. Přímka d musí být speciální přímkou. Díky tomu je možné formulovat následující definici:

Definice 3.1.8. Středy rovnoběžných tětiv v cyklu Z leží na speciální přímce d, což je průměr cyklu Z.

Pozorováním předešlých tvrzení lze snadno ukázat, že každá speciální přímka v galileovské rovině je nějaký průměr cyklu Z. Analogicky v eukleidovské geometrii platí, že každá tětiva procházející středem dané kružnice je jejím průměrem.



Obrázek 3.10: Vztah průsečíků libovolné přímky l s dvěma rovnoběžnými cykly Z a Z_1, která nimi prochází

Dalším postřehem je, že tečna k cyklu Z v bodě na konci průměru d je rovnoběžná ke každé tětivě, které mají středy na přímce d [Yaglom, 1979, s.95-96]. Pojďme se nyní podívat, jak se definuje vzdálenost bodu od dané křivky. Vzdálenost bodu A od křivky Γ je vzdálenost bodu A od bodu B na křivce Γ, který je nejblíže k bodu A ($d_{A\Gamma} = \min d_{AB}, \forall B \in \Gamma$). V galileovské rovině by byla vzdálenost libovolného bodu A od křivek Γ, které jsou funkcemi, vždy nulová. Proto se zde definuje vzdálenost jako speciální vzdálenost δ_{AB} bodu A od bodu B na Γ (obrázek 3.11).

Definice 3.1.9. V galileovské geometrii se rovnoběžné cykly liší jen o konstantu c.

V takovém případě, použitím předešlé definice rovnoběžnosti, je vzdálenost bodu A na cyklu Z_1 od rovnoběžného cyklu Z měřena pomocí společného průměru těchto cyklů, který prochází daným bodem A [Yaglom, 1979, s.98].

3.1.6 Duální cyklus

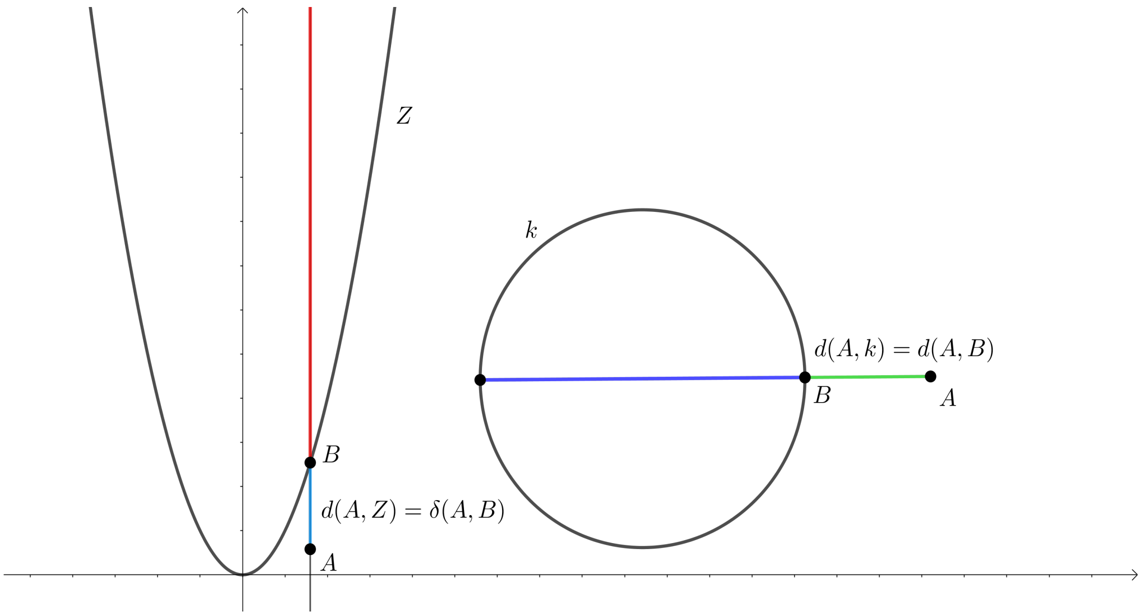
V této sekci budeme chtít použít princip duality z kapitoly 2.2 na cyklus. Cyklus Z je definován jako množina bodů M, které vidí úsečku AB pod konstantním úhlem α:

$$|\angle AMB| = \delta_{MA,MB} = \alpha.$$

Princip duality převede úsečku AB na úhel Φ mezi přímkami a a b, bod M na přímku m a přímky MA a MB na body A a B, což jsou průsečíky přímky m s přímkami a a b. Duální k velikosti úhlu $\delta_{MA,MB}$ je velikost úsečky AB, tedy d_{AB}.

$$|AB| = d_{AB} = d.$$

Z toho plyne:



Obrázek 3.11: Průměr cyklu a vzdálenost bodu od cyklu v galileovské geometrii vs. průměr kružnice a vzdálenost bodu od kružnice v eukleidovské geometrii

Definice 3.1.10. Množina přímek m, na kterých daný úhel Φ vymezí úsečku AB o konstantní délce d, je množina tečen k cyklu Z.

Tato definice je duální k definici cyklu v galileovské geometrii. Nechť LA a LB jsou přímky a m je přímka, která protíná přímky LA a LB v bodech A a B. Dále nechť je cyklus Z tečný k přímkám LA, LB a m v bodech D, E a F (obrázek 3.12). Jelikož jsou tečny z bodu k cyklu shodné, platí $|DA| = |AF|$ a $|FB| = |BE|$. Z tohoto faktu a z faktu, že v galileovské geometrii platí $|DE| = |DA| + |AB| + |BE|$, plyne

$$|DE| = |AF| + |AB| + |FB| = 2|AB|.$$

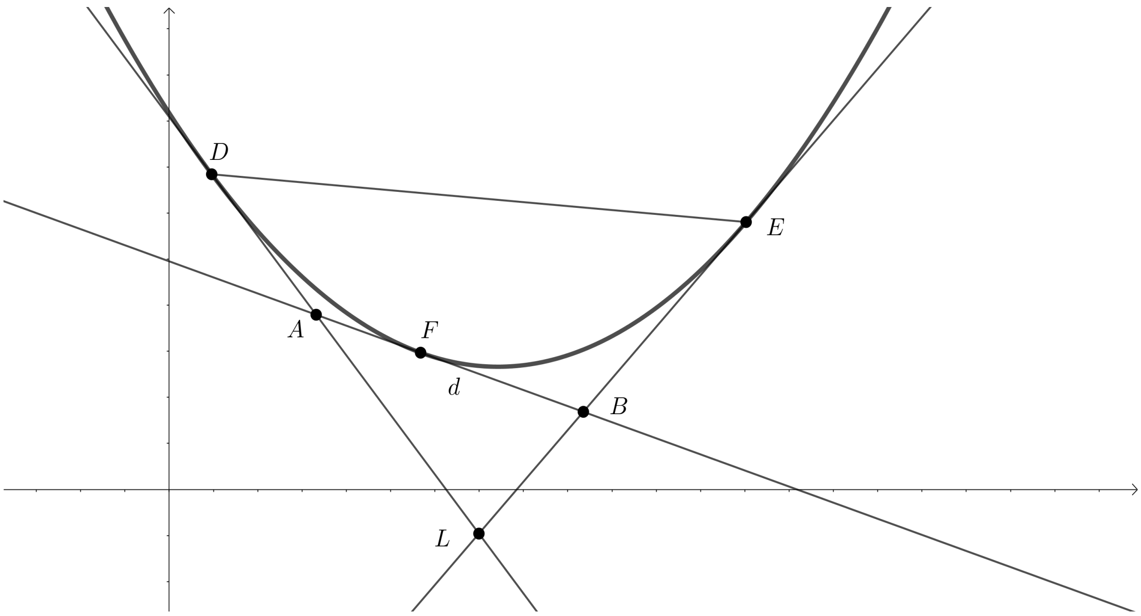
Takže velikost $|AB|$ úsečky AB, která leží na tečné přímce m k cyklu Z tak, že tečny LA a LB k cyklu Z se ho dotýkají v bodech D a E, je rovna polovině velikosti úsečky DE. Takže duální definice k cyklu je správná.

Teď je možné definovat duální tvrzení k vlastnostem cyklů, které jsou do této části odvozeny. Duální k větě: *Nechť jsou dány tečny PA a PB z bodu P k cyklu Z, pak řekneme, že úsečky PA a PB jsou shodné,* (obrázek 3.13) je

Věta 14. *Každá tětiva AB na cyklu Z svírá s tečnami v bodech A a B k cyklu Z shodné úhly.*

Další věta, kterou lze dualizovat je: *Středy rovnoběžných tětiv v cyklu Z leží na speciální přímce d.* Duální k rovnoběžným přímkám (tětiv) l a l_1 jsou rovnoběžné body L a L_1. Duální k bodům A,B a A_1,B_1, které vzniknou jako průsečíky cyklu Z s přímkami l a l_1, jsou tečny a,b a a_1,b_1 z bodů L a L_1 k cyklu Z. Duální k (rovnoběžným) středům M a M_1 úseček AB a A_1B_1 jsou přímky m a m_1, což jsou osy úhlů $\angle ALB$ a $\angle A_1L_1B_1$. Z toho plyne, že duální věta zní:

Věta 15. *Nechť a,b a a_1,b_1 jsou tečny z rovnoběžných bodů L a L_1 k cyklu Z, pak osy m a m_1 úhlů $\angle ALB$ a $\angle A_1L_1B_1$ jsou rovnoběžné .*



Obrázek 3.12: K duální definici cyklu

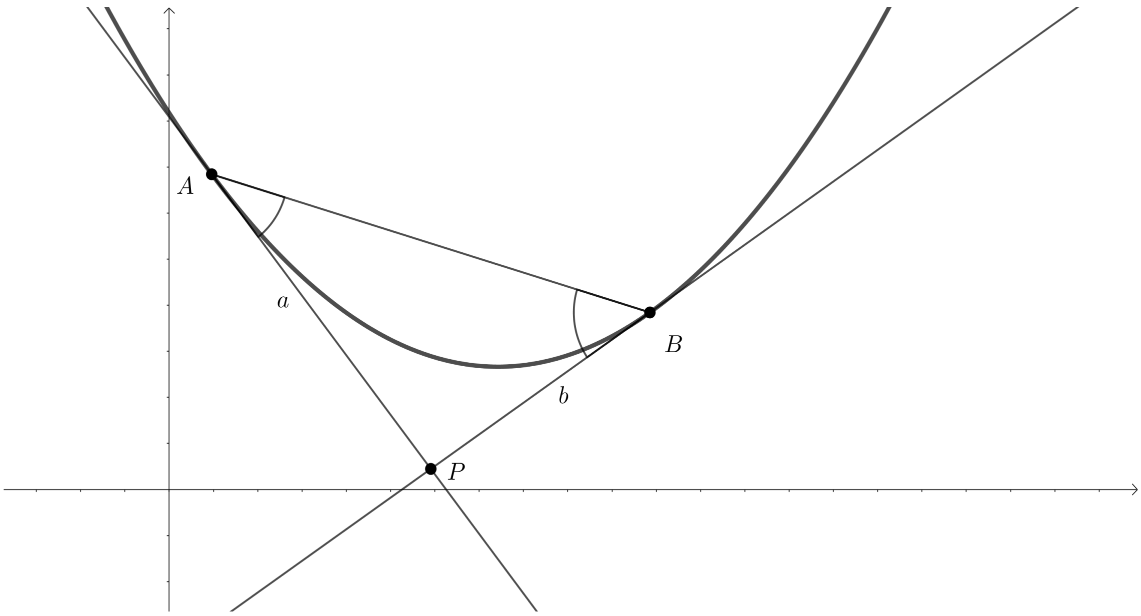
[Yaglom, 1979, s.101-103]
K těmto tvrzením existují eukleidovské analogie. Například k definici 3.1.10 je analogie: *Množina přímek m, na kterých daný úhel $\angle ALB$ vymezí úsečku AB o konstantní délce d, je množina tečen ke kružnici k*(definice 3.1.10 se dá vyslovit také jako věta, proto u analogie v eukleidovské geometrii se jedná o větu). Nebo k větě 14 je eukleidovská analogie zřejmá. Říká, že *tečny PA a PB v bodech A a B z bodu P ke kružnici k tvoří úhly $\angle PAB$ a $\angle ABP$, které jsou shodné.*

3.2 Cyklus opsaný a vepsaný trojúhelníku

Stejně, jako jsou v eukleidovské geometrii zavedeny kružnice opsané a vepsané trojúhelníku, tak jsou v galileovské geometrii analogické zavedení pro cykly opsané a vepsané trojúhelníku v této rovině.
Nechť je dán trojúhelník ABC se stranami a, b a c tak, že $|AB| = c$, $|BC| = a$ a $|CA| = b$. Jelikož pro definování cyklu stačí tři nekolineární body, tak i tento trojúhelník ABC s body A, B a C jednoznačně definuje cyklus Z. Tento cyklus Z je opsaný danému trojúhelníku ABC a lze zadefinovat takto:

Definice 3.2.1. Množina bodů, které vidí danou úsečku AB pod konstantním galileovským úhlem $\gamma = |\angle ACB|$ je cyklus opsaný trojúhelníku ABC.

Pro sestrojení kružnice vepsané trojúhelníku se v eukleidovské geometrii dá použít částečná dualita. Nejedná se o princip duality korektně zavedený, nýbrž o analogii, kde se za termín „strana“ použije termín „úhel“. Tedy, že střed kružnice vepsané, na rozdíl od kružnice opsané, neleží na průsečíku os stran, ale na průsečíku os úhlů. Podobnou analogii použijeme v galileovské geometrii. V tomto případě se již o princip duality jednat bude. Je možné si všimnout, jak vypadá duální cyklus k cyklu opsanému Z. Nicméně, na místo definice cyklu Z se vezme definice, která říká:



Obrázek 3.13: K duální větě ke shodným délkám na tečnách z bodu k tečným bodům

Definice 3.2.2. Nechť je cyklus Z' tečný k přímkám a, b a c, které tvoří trojúhelník ABC, pak se tento cyklus nazývá cyklus vepsaný trojúhelníku ABC.

Následuje důkaz existence zavedeného vepsaného cyklu Z' trojúhelníku ABC.

Důkaz. Je zřejmé, že existuje-li vepsaný cyklus Z' trojúhelníku ABC, musí se dotýkat jedné strany trojúhelníka ABC a dvou jeho dalších prodloužených stran (obrázek 3.14). Nechť je tento cyklus tečný ke straně AB v bodě F a k prodlouženým stranám CA a CB v bodech E a D. Trojúhelník CDE je rovnoramenný, protože tečny CD a CE musejí být stejně velké, použijeme-li větu o shodných tečnách k cyklu, a proto speciální přímka, procházející bodem C, protíná úsečky AB a ED. Aby toto platilo, musí být strana c největší stranou v trojúhelníku ABC (takže $c = a + b$). Platí-li

$$\begin{aligned}|CD| + |CE| &= (|CB| + |BD|) + (|CA| + |AE|) = |CB| + |BF| + |CA| + |AF| \\ &= |CB| + |CA| + (|BF| + |AF|) = |CB| + |CA| + |AB|,\end{aligned}$$

vyjde rovnice

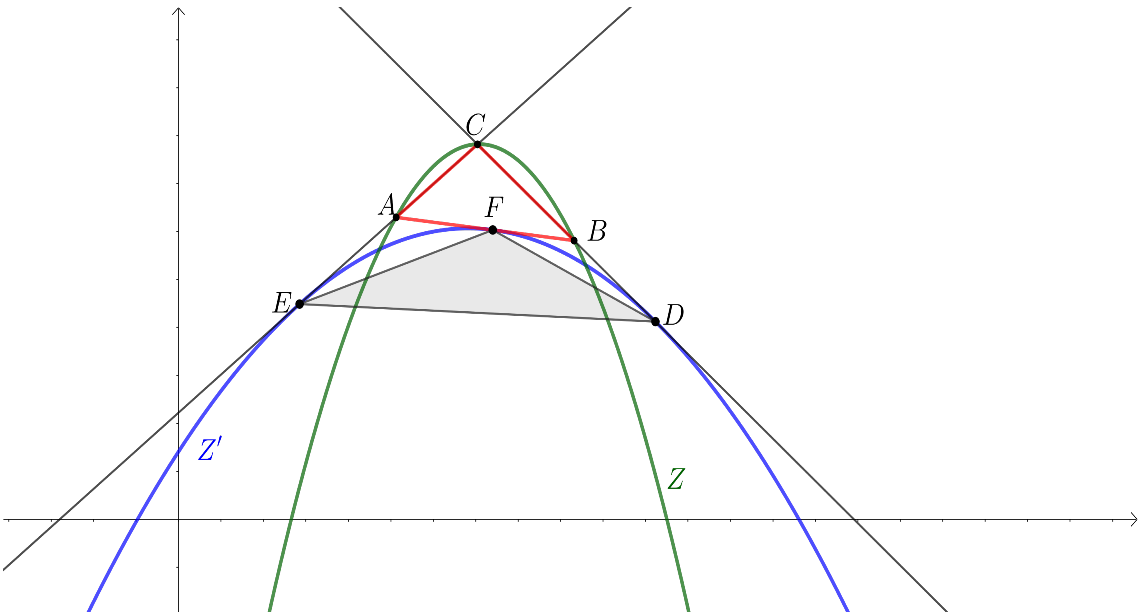
$$|CD| = |CE| = \frac{a+b+c}{2} = c = a + b.$$

Z toho vyjde

$$\begin{aligned}|AE| &= |CE| - |CA| = a \\ |BD| &= |CD| - |CB| = b\end{aligned}$$

a jelikož platí $|AF| = |AE|$ a $|BF| = |BD|$, dostáváme

$$\begin{aligned}|AF| &= a \\ |BF| &= b.\end{aligned}$$



Obrázek 3.14: Cyklus vepsaný a opsaný trojúhelníku ABC

Tyto rovnice determinují pozici bodů D, E a F na stranách trojúhelníku ABC. Nyní je třeba ukázat, že cyklus opsaný trojúhelníku DEF je tečný ke stranám trojúhelníku ABC v bodech D, E a F.
Obvodový úhel $\angle DEF$ cyklu Z' je roven rozdílu úhlů $\angle DEC$ a $\angle FEA$. Známe úhly γ a α v trojúhelnících DEC a FEA a víme, že tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné. Z toho plyne, že

$$|\angle DEC| = \frac{\gamma}{2}$$
$$|\angle FEA| = \frac{\alpha}{2},$$

a proto

$$|\angle DEF| = \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Dále víme, že

$$|\angle FDB| = \frac{\beta}{2}$$

a díky tomu je zřejmé, že přímka $DB \equiv a$. Tato přímka tvoří s tětivou DF cyklu Z' úhel $|\angle FDB| = \frac{\beta}{2}$, což je také obvodový úhel daný tětivou DF, a proto je DB tečna k cyklu Z'.
Analogickým postupem zjistíme, že i přímky $EA \equiv b$ a $FA \equiv c$ jsou tečny k cyklu Z' v bodech E a F [Yaglom, 1979, s.104-105]. $\square$

3.2.1 poloměr a křivost

V sekci 3.1.3 je zadefinována křivost cyklu. Tato část práce bude chtít určit křivost P a poloměr R cyklu opsaného Z a křivost ρ a poloměr r cyklu vepsaného Z' trojúhelníku ABC.

Poloměr cyklu se zavádí pomocí obvodového úhlu jako $r = \frac{s}{2\alpha}$, kde pro cyklus Z opsaný trojúhelníku ABC platí

$$\frac{c}{\gamma} = 2R,$$

a proto z vlastnosti trojúhelníků

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = 2R.$$

Z poměru stran a úhlů 2.2 a obsahu trojúhelníka 2.5 plyne

$$R = \frac{a}{2\alpha} = \frac{abc}{2(\alpha bc)} = \frac{abc}{2(2S)} \tag{3.13}$$

$$R = \frac{abc}{4S}. \tag{3.14}$$

Zaměřením na cyklus vepsaný Z', lze tento případ převést na předchozí. Stačí si uvědomit, že cyklus vepsaný, který má s trojúhelníkem ABC tečné body D, E a F, je zároveň cyklem opsaným trojúhelníku DEF, jehož strany jsou $|EF| = d$, $|DE| = f$, $|DF| = e$ a úhly $|\angle EDF| = \delta$, $|\angle DEF| = \epsilon$, $|\angle DFE| = \phi$. Z pozorování důkazu existence cyklu vepsaného je vidět, že

$$\delta = \frac{\alpha}{2}$$
$$\epsilon = \frac{\beta}{2}$$
$$\phi = \frac{\gamma}{2}$$

a z rovnoramenných trojúhelníků EAF, DBF a DCE vyjdou vztahy

$$d = 2a$$
$$e = 2b$$
$$f = 2c.$$

Tyto vztahy určují poloměr cyklu Z' následujícím vztahem:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{r}{2}.$$

Vychází zajímavá vlastnost mezi cyklem opsaným a vepsaným

$$r = 4R, \tag{3.15}$$

kde r je poloměr cyklu Z' a R je poloměr cyklu Z. Z této vlastnosti také plyne vztah křivosti mezi danými cykly

$$P = 4\rho, \tag{3.16}$$

kde P je křivost cyklu Z a ρ je křivost cyklu Z'. Bystrým pozorováním a uvědoměním si předešlých poznatků v této práci, lze tvrdit, že je zde použit princip duality. Jinými slovy, že cyklus Z je duální k cyklu Z' a poloměr cyklu je duální k jeho křivosti. Z tohoto poznatku, lze snadno získat křivost těchto cyklů. Pro cyklus vepsaný Z' vyjde rovnice duální k poloměru cyklu opsaného Z, tedy

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = 2\rho.$$

A proto platí i

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{P}{2}$$

[Yaglom, 1979, s.105-106].

3.3 Mocnost bodu k cyklu a kružnici

Definice 3.3.1. Mocnost bodu M ke kružnici $k(S, r)$ v eukleidovské geometrii je číslo

$$m(M,k) = \pm|MA| \cdot |MB|,$$

kde body A a B jsou průsečíky přímky l, procházející bodem M, a kružnice k.

Je evidentní, že nezáleží na volbě přímky l, pokud prochází bodem M. Dále platí, že mocnost bodu ke kružnici $m(M,k)$ je pozitivní, pokud bod M je vně kružnice k, a negativní, pokud je bod M uvnitř kružnice k. Jestliže je $|MS| = d$, pak

$$m(M,k) = d^2 - r^2$$

[Johnson, 2013, s.29].

3.3.1 Mocnost bodu ke kružnici

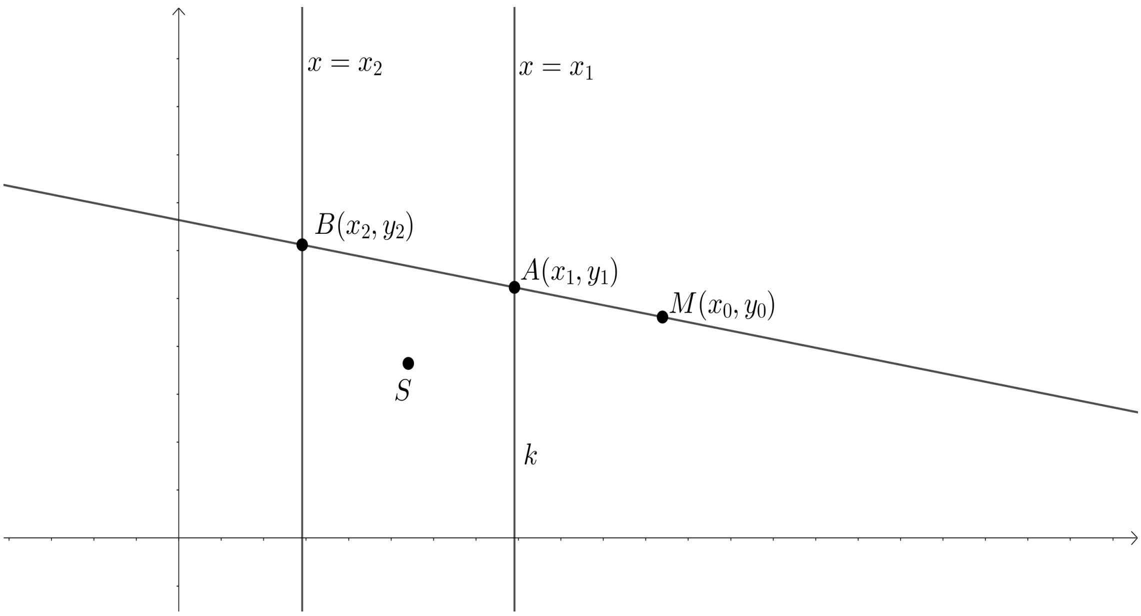
V galileovské geometrii je situace podobná, ne-li jednodušší. Nechť máme galileovskou kružnici $k(S, r)$ a bod M v této rovině. Body A a B jsou průsečíky přímky l, procházející bodem M, a kružnice k. Je zřejmé, že pro každou přímku l, procházející bodem M, platí, že vzdálenosti $|MA|$ a $|MB|$ se nemění. Z toho lze vyvodit, že nezáleží na volbě přímky l, aby byl součin $|MA| \cdot |MB|$ stejný.

Definice 3.3.2. Řekneme, že mocnost bodu M ke kružnici $k(S, r)$ je v galileovské geometrii dán vztahem

$$m(M,k) = \pm|MA| \cdot |MB|.$$

Podobně jako v eukleidovské geometrii platí, že je-li bod M vně kružnice k, pak je číslo $m(M,k)$ větší než nula, a pokud je bod M uvnitř kružnice k, pak je číslo $m(M,k)$ záporné. Uvědomme si, že tyto poznatky platí, i přestože jsou vzdálenosti $|MA|$ a $|MB|$ v galileovské geometrii orientované (mohou být i negativní). Dalším pozorováním je, že je-li vzdálenost bodu M od středu S kružnice k rovna d ($|MS| = d$), pak jsou vzdálenosti $|MA|$ a $|MB|$ rovny číslům $d + r$ a $d - r^2$. Z toho vyjde vztah

$$m(M,k) = d^2 - r^2.$$



Obrázek 3.15: Mocnost bodu M ke kružnici $k(S,r)$ v galileovské geometrii

Nechť má bod M souřadnice (x_0, y_0) a $x = x_1$, $x = x_2$ jsou rovnice dvou speciálních přímek dané kružnice k, pak délky úseček MA a MB jsou $x_1 - x_0$ a $x_2 - x_0$ (obrázek 3.15), a proto mocnost bodu M ke kružnici k je

$$m(M,k) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2).$$

Jelikož je v tomto případě rovnice

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{3.17}$$

rovnice galileovské kružnice, je správné tvrzení: „Mocnost bodu M ke kružnici k je výsledek nahrazení souřadnic x a y na levé straně rovnice (3.17) za souřadnice (x_0, y_0) bodu M“ [Yaglom, 1979, s.119].

3.3.2 Mocnost bodu k cyklu

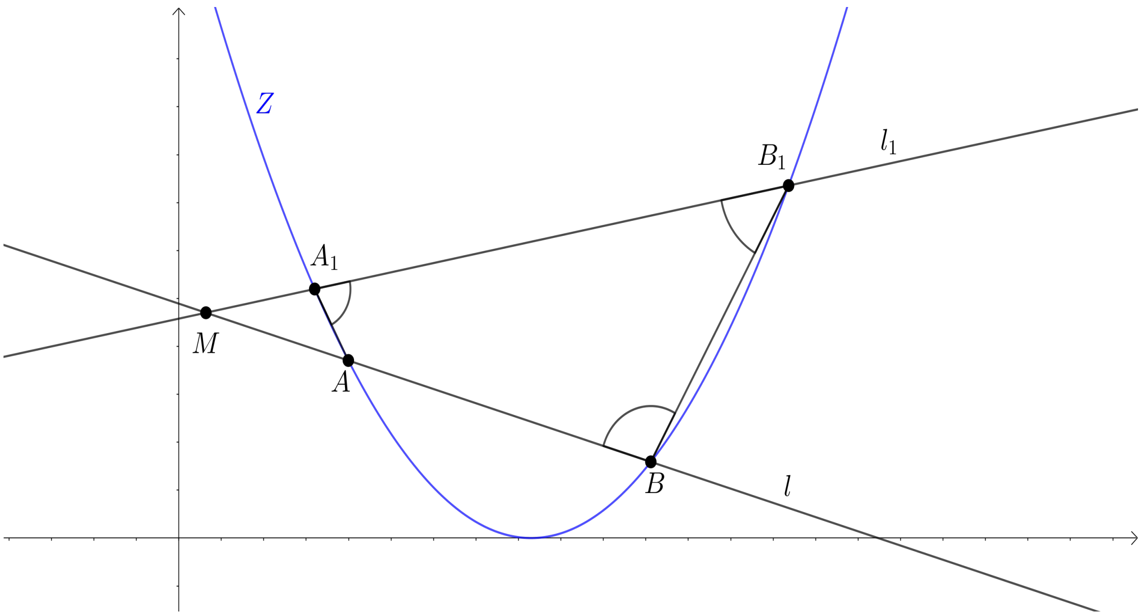
Analogie ke kružnici je v galileovské geometrii cyklus, a proto se nabízí otázka, jestli existuje mocnost bodu k cyklu Z. Existuje a konkrétně bude opět ve stejném tvaru.

Definice 3.3.3. Nechť libovolná přímka l prochází bodem M a protíná cyklus Z v bodech A a B, pak mocnost bodu M k cyklu Z je

$$m(M,Z) = \pm|MA| \cdot |MB|.$$

Je nutné ověřit, zda-li nezáleží na výběru přímky l, protínající cyklus Z bodech A a B a procházející bodem M.
Nechť jsou dány přímky l a l_1, procházející bodem M a které protínají cyklus Z v bodech A,B a A_1,B_1. Pokud je bod M na cyklu Z, pak $|MA| = 0$ a $m(M,Z) = 0$. V ostatních případech platí, že $\angle B_1BA$ a $\angle AA_1B_1$ jsou obvodové úhly cyklu Z

[2] Záleží na poloze bodu M



Obrázek 3.16: Mocnost bodu M k cyklu Z v galileovské geometrii nezáleží na výběru přímky, procházející M

a oblouky, které na cyklu Z vyznačují, jsou stejně velké, a proto jsou tyto úhly shodné (obrázek 3.16). Stejně tak platí $|\angle BAA_1| = |\angle A_1B_1B|$, z čehož plyne, že trojúhelníky MAA_1 a MB_1B mají shodné úhly. Dále z faktu, že strany v trojúhelníku jsou ve stejném poměru jako jeho úhly, platí rovnice

$$\frac{|MA|}{|MA_1|} = \frac{|MB_1|}{|MB|}$$

a z toho rovnice

$$|MA| \cdot |MB| = |MA_1| \cdot |MB_1| = m(M,Z). \tag{3.18}$$

Tyto rovnice nám říkají, že mocnost m bodu M k cyklu Z nezáleží na volbě přímky l, procházející bodem M. Stejně jako u kružnice je mocnost kladná, pokud se bod M nachází vně cyklu Z, záporná, pokud se bod M nachází uvnitř cyklu Z, a rovna nule, pokud bod M leží na cyklu Z [Richter-Gebert, 2011, s.463-464].

Nechť má bod M souřadnice (x_0, y_0), $x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ je rovnice cyklu Z a přímka l, procházející bodem M, má rovnici $y - y_0 = k(x - x_0)$. Body A a B, které vzniknou jako průsečíky přímky l a cyklu Z, mají souřadnice (x_1,y_1) a (x_2,y_2). Dosazením rovnice přímky l do rovnice cyklu Z vyjde

$$x^2 + 2(b_1 + kb_2)x + (2b_2(y_0 - kx_0) + c) = 0$$

tak, že

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -2(b_1 + kb_2) \\ x_1x_2 &= 2b_2(y_0 - kx_0) + c. \end{aligned}$$

Takže mocnost bodu M k cyklu Z je

$$m(M,Z) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = x_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1x_2,$$

což se rovná výrazu

$$x_0^2 + 2(b_1 + kb_2)x_0 + 2b_2(y_0 - kx_0) + c = x_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c.$$

Slovy tento postup říká: „Mocnost bodu M k cyklu Z je výsledek nahrazení souřadnic x a y na levé straně rovnice $x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ za souřadnice (x_0, y_0) bodu M“ [Yaglom, 1979, s.120-121].

3.3.3 Množiny bodů se stejnou mocností bodu

Rovnice množiny bodů, které mají ke galileovské kružnici k s rovnicí (3.17) mocnost bodu rovnou κ, je

$$x^2 + 2bx + c = \kappa.$$

Z toho lze říci, že tato množina bodů tvoří soustřednou kružnici[3] s kružnicí k. Podobně rovnice množiny bodů, které mají k cyklu Z s rovnicí $x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ mocnost bodu rovnou κ, je

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = \kappa.$$

Tato množina bodů je podle této rovnice cyklus rovnoběžný s cyklem Z.
Posledním případem je množina bodů, které mají stejnou mocnost bodu buď k dvou kružnicím, nebo k cyklu a ke kružnici, nebo k dvou cyklům. Tato množina bodů tvoří přímku r a nazývá se *radikální osa* [Yaglom, 1979, s.121]. V eukleidovské geometrii existuje také radikální osa. Jedná se o množinu bodů, které mají ke dvou různým kružnicím stejnou mocnost bodu a nazýváme ji *chordála* daných kružnic [Yaglom, 2009, s.50].

[3]Kružnice se středem na stejné speciální přímce

Závěr

Cílem práce, jak je vylíčeno v úvodní sekci, bylo zavést základní pojmy a definice, které jsou charakteristické pro galileovskou geometrii, formulovat a dokázat věty, které jsou s těmito pojmy spojeny a porovnat některé analogické vztahy se vztahy v eukleidovské geometrii.
V textu je zavedena galileovská geometrie, která vznikne pomocí galileovských transformacích bodů na přímce. Pomocí invariancí pod těmito transformacemi vzniká galileovská rovina, v které je postupně zavedena vzdálenost dvou bodů, úhel mezi dvěma přímkami, trojúhelník a jeho shodnosti a podobnosti, kružnice a cyklus. To jsou základní pojmy, kterými se tato práce zabývá. Chronologické zavedení pojmů je důležité, protože bez formulování počátečních definic a galileovských transformací by se nedaly definovat složitější objekty v galileovské geometrii.
Cyklus je jedním z nejdůležitějších pojmů v této geometrii, proto se jimi, jejich vlastnostmi a důležitými větami, které jsou s nimi spojené, práce zabývá z největší části. V kapitole o cyklech se formuluje jejich definice ze dvou pohledů. První pohled ukazuje cyklus v galileovské rovině jako množinu bodů, které „vidí“ danou úsečku pod konstantním úhlem. Druhý pohled říká, že cykly jsou křivky v galileovské rovině, které mají konstantní nenulovou křivost. Druhý pohled se často objevuje v projektivní geometrii.
Je zajímavé, jak galileovská geometrie úzce souvisí s eukleidovskou geometrií a s projektivní geometrií, kde některé věty mohou být vnímané z více úhlů pohledu. Práce zavedla základní pojmy, na které se však dá navazovat dále, například studiem čtyřúhelníků, cyklů připsaných danému trojúhelníku, či podobností a jiných důležitých zobrazení, které mají v galileovské geometrii smysl. Práce může být využita, jako doplňující text k výuce neeukleidovské geometrie a jako informační text k tématu kinetika přímočarého pohybu, či galileovské transformace. Chtěl bych, aby tato práce byla motivací pro studium galileovské geometrie v prostoru a dalších pseudo-eukleidovských a neeukleidovských geometrií.

Seznam použité literatury

Chapter 4. geometry. In Gérard G. Emch, editor, *Mathematical and Conceptual Foundations of 20Th-Century Physics*, volume 100 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 91–131. North-Holland, 1984. doi: https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70659-5. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304020808706595`.

Mücahit Akbiyik and Salim Yüce. The moving coordinate system and euler-savary's formula for the one parameter motions on galilean (isotropic) plane. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 2015.

Elena Deza and Michel-Marie Deza. Distances in geometry, 2006.

Dmitry Efimov, Igor Kostyakov, and Vasiliy Kuratov. On exact representations of the motions group of galilean plane. *arXiv preprint arXiv:0912.1981*, 2009.

Daniel M Greenberger. Some remarks on the extended galilean transformation. *American Journal of Physics*, 47(1):35–38, 1979.

Garry Helzer. Special relativity with acceleration. *The American Mathematical Monthly*, 107(3):219–237, 2000.

Roger A Johnson. *Advanced euclidean geometry*. Courier Corporation, 2013.

Clark Kimberling. Central points and central lines in the plane of a triangle. *Mathematics Magazine*, 67(3):163–187, 1994. doi: 10.1080/0025570X.1994.11996210. URL `https://doi.org/10.1080/0025570X.1994.11996210`.

Shukri Klinaku. Analysis of galilean invariance using the law of cosines.

Abdullah Kurudirek and Hüseyin Akca. On the concept of circle and angle in galilean plane. 02:1–5, 2015a. ISSN 2333-9721. doi: 10.4236/oalib.1101256.

Abdullah Kurudirek and Huseyin Akca. On explanation of polygons in galilean geometry to high school students. *Open Access Library Journal*, 2(6):1–7, 2015b.

Abdullah Kurudirek, Hüseyin Akça, and Mehmet Erdoğan. On geometries in affine plane. *Applied and Computational Mathematics*, 2(6):127–129, 2013.

AKAR Mutlu, YÜCE Salim, and Nuri KURUOĞLU. One-parameter planar motion on the galilean plane. *International Electronic Journal of Geometry*, 6 (1):79–88, 2013.

Dan Pedoe. Notes on the history of geometrical ideas ii. the principle of duality. *Mathematics Magazine*, 48(5):274–277, 1975. doi: 10.1080/0025570X.1975.11976511. URL `https://doi.org/10.1080/0025570X.1975.11976511`.

Jürgen Richter-Gebert. Perspectives on projective geometry, 2011.

Patrick J Ryan. *Euclidean and non-Euclidean geometry: an analytic approach.* Cambridge university press, 1986.

Mohammad Skurnick, Ronald;Javadi. Discovering trigonometric relationships implied by the law of sines and the law of cosines. *Mathematics and computer education.*, 40(1), 2006-01-01. ISSN 0730-8639.

Eric W. Weisstein. Crc concise encyclopedia of mathematics.

I. M. Yaglom. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis.* Heidelberg Science Library. Springer, New York [u.a.], 1979. ISBN 3540903321. Literaturverz. S. 289 - 293.

Isaak Moiseevich Yaglom. *Geometric transformations IV: Circular transformations*, volume 44. MAA, 2009.

Handan Balgetir Öztekin and Serpil Tatlipinar. On some curves in galilean plane and 3-dimensional galilean space. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 10(2):189–196, 2012. doi: 10.1080/1726037X.2012.10698620. URL `https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698620`.

Seznam obrázků

1.1 Vzdálenost bodů P a Q 6
1.2 Speciální vzdálenost bodů P a Q 7
1.3 Galileovská kružnice M se středem v bodě S a poloměrem r . . . 8
1.4 Figure 26 - Důkaz tvrzení (a) [Yaglom, 1979, s.35] 9
1.5 Figure 28 - Znázornění obsahů útvarů před a po použití galileovských transformacích [Yaglom, 1979, s.37] 10
1.6 Odchylka přímek l a l_1 11
1.7 Kolmost speciálních přímek 12
1.8 Vzdálenost bodu od klasické přímky 13

2.1 Rovnost stran v trojúhelníku 15
2.2 Důkaz analogie sinové věty v galileovské geometrii 16
2.3 Vlevo - dva neshodné trojúhelníky se stejnými velikostmi stran, vpravo - dva neshodné trojúhelníky se stejnými velikostmi úhlů . . 18
2.4 Zobrazení, které zachovává délky stran v trojúhelníku ABC . . . 19
2.5 K důkazu věty rovnoběžnosti osy úhlu se stranou trojúhelníka, kterou neprotíná. 21

3.1 Figure 23.3 A Galilean circle vs. a Galilean cycle - Galileovská kružnice vs. Galileovský cyklus [Richter-Gebert, 2011, s.453] . . . 23
3.2 K důkazu věty úhlu tečny k cyklu 24
3.3 Délka oblouku s mezi body A a B na obecné křivce Γ 25
3.4 Eukleidovská kružnice se zvětšujícím se poloměrem 26
3.5 Galileovské cykly se zvětšujícími se poloměry 27
3.6 K definici křivosti obecné křivky Γ v galileovské geometrii 29
3.7 Figure 81 - vlevo - translační pohyb, uprostřed - kruhový pohyb, vpravo - cyklický pohyb [Yaglom, 1979, s.92] 31
3.8 Cyklická rotace trojúhelníku ABC podle cyklu Z a koeficientem v 33
3.9 Shodnost velikostí délek úseček na tečnách z bodu P s body dotyku A a B 34
3.10 Vztah průsečíků libovolné přímky l s dvěma rovnoběžnými cykly Z a Z_1, která nimi prochází 35
3.11 Průměr cyklu a vzdálenost bodu od cyklu v galileovské geometrii vs. průměr kružnice a vzdálenost bodu od kružnice v eukleidovské geometrii 36
3.12 K duální definici cyklu 37
3.13 K duální větě ke shodným délkám na tečnách z bodu k tečným bodům 38
3.14 Cyklus vepsaný a opsaný trojúhelníku ABC 39
3.15 Mocnost bodu M ke kružnici $k(S, r)$ v galileovské geometrii . . . 42
3.16 Mocnost bodu M k cyklu Z v galileovské geometrii nezáleží na výběru přímky, procházející M 43