Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Rychlost konvergence Markovových řetězců – dolní meze pro mixing
Autor: Jakub Ditrich

Shrnutí obsahu práce

V práci jsou citovány tři věty z knihy "Markov chains and mixing times" od D. Levina a Y. Perese, i s podrobnými důkazy, detailnější než v knize. Každá věta je potom aplikována na konkrétní Markovovy řetězec, pro který je odvozen dolní odhad pro mixing time. V podstatě jde o řešení (poměrně náročních) úkolů z knihy.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma je moderní. Náročnost je akorát pro bakalářkou práci.

Vlastní příspěvek. Zvolené úkoly z knihy nejsou triviální a postkytnou dobrou příležitost cvičit jak správně napsat matematický důkaz.

Matematická úroveň. Matematické důkazy jsou napsány pochopitelně a skoro bez chyb. Zvolené postupy nejsou vždy nejšikovnější ale fungují. Podrobnost argumentů velice kolísá. Někde jsou výpočty napsány až zbytečně moc do detailu, jinde jsou poměrně složité argumenty jenom velmi krátce nastíneny.

Práce se zdroji. V práci jsou správně uvedené zdroje, ovšem kniha je jenom citována jako celek a čtenář se nedozví, přesně o kterých větách a úkolech z knihy text je. Důkazy vět jsou opsané z knihy ale s dodatečním detailem. Řešení úkolů je původní.

Připomínky a otázky

1. Je trochu zvláštní, že autor definuje Markovovy řetězec, ale potom už pro definice pojmů "irreducibilní" a "aperiodické" dá pouze odkaz. Obvykle v matematickém textu se předpokládá, že čtěnář už zná základní pojmy a potřebuje jenom definice pokročilějších pojmů, ne naopak.
2. Na začátku je $\mathbb{Z}^+$ definiváno jako "množina kladných celých čísel". V textu se ale potom používá značení $\mathbb{N}$. Pro mě osobně $\mathbb{N}$ vždy obsahuje 0, mám dojem, že autor používá jinou definici, ale nenašel jsem ji v textu.
3. Chybí důkaz pro vzorec na straně 11 těsně nad vzorcem (3.2). Přítom by ani nebylo třeba tohoto vzorce, kdyby autor sčítal zakázané možnosti pro volbu k-tého řádku trochu chytřeji.
4. Důkaz na straně 11, že $\gamma > 0$ je síce správný, ale opírá se o poměrně složité trvzení z článku z roku 1977. Vlastně platí, že $\gamma = \phi(1/2)$, kde ϕ je Eulerova funkce. Eulerova identita (též známa jako Pentagonal number theorem) dává výraz pro ϕ v podobě nekonečné sumy.
5. Důkaz na straně 12, že daný Markovy řetězec je ireducibilní, je příliš krátký. Chtěl bych vidět více detailu.
6. Tvrzení "Aperiodicitu lze snadno ověřit nalezením cyklů stavů o liché délce" by chtělo podložit. Podle mě nejkratší cykl o liché délce má délku 5 a docela mi trvalo než jsem ho našel. Navíc cykly o liché délce neexistují pro $n = 2$, proto je tady třeba předpokládat, že $n \geq 3$.

7. Poznámka pod čarou na straně 21 mi moc nepomohla. Tvrzní je síce správné, ale jeho důkaz není o nic lehčí, možná i tězší, než trvzení, které má podložit.

8. Poznámky na straně 23 jsou úplně správné, kdyby autor zvolil lepší rozlišovací statistiku, mohl by si ušetřit hodně práce a mít lepší výsledek. Občas je to ale dobrá zkušenost, něco takového zažít na vlastní kůzi. Pro budoucnost doporučuji si dát pozor na symetrii. Pokud počáteční stav je takový, že všechny uzly mají barvu 1, potom role ostatních barev $2, \ldots, q$ se v ničím neliší. Proto není rozumní zvolit statistiku, která s těmito barvami zachází různě.

Závěr

Práci považuji za velmi dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Jan M. Swart
Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i.
January 12, 2022