Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Gregor

Modely úrokových měr a jejich kalibrace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Imrich Lozsi
Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2008

Mé poděkování patří vedoucímu této bakalářské práce Ing. Imrichovi Lozsimu a celému aktuárskému týmu ze společnosti KPMG Česká Republika, s.r.o. za trpělivé zasvěcování do problematiky modelů úrokových měr včetně mnoha názorných příkladů.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25.7.2008 Štěpán Gregor

Obsah

1 Úvod **5**

2 Základní pojmy teorie pravděpodobnosti **6**
2.1 Náhodný proces 6
2.2 Náhodná procházka 7
2.3 Wienerův proces 9

3 Modely úrokových měr **13**
3.1 Základní proměnné a jejich značení 13
3.2 Afinní časová struktura 14
3.3 Předpoklady modelů 16
3.4 Vašíčkův model 16
3.5 Cox, Ingersoll, Ross model 20
3.6 Hoo-Lee model 21
3.7 Hull-White model 22

4 Kalibrace **24**
4.1 Shluková analýza 24
4.2 Časový horizont 26
4.3 Maximálně věrohodný odhad 26
4.4 Kalibrace Vašíčkova modelu 27

5 Závěr **29**

Literatura **30**

Název práce: Modely úrokových měr a jejich kalibrace
Autor: Štěpán Gregor
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Ing. Imrich Lozsi, KPMG Česká Republika, s.r.o.
E-mail vedoucího: ilozsi@kpmg.cz

Abstrakt: V této práci nejprve vybudujeme základy teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů. Prostudováním jejich vlastností se dostaneme k obecnému procesu popisujícímu chování krátkodobých úrokových měr a následně uvedeme příklady některých modelů. S využitím poznatků v této práci nakonec nakalibrujeme model na reálná finanční data.

Klíčová slova: Modely úrokových měr, kalibrace modelů úrokových měr, stochastické procesy

Title: Short rate models and its calibration
Author: Štěpán Gregor
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Ing. Imrich Lozsi, KPMG Česká Republika, s.r.o.
Supervisor's e-mail address: ilozsi@kpmg.cz

Abstract: In this work we will develope a background of the probability theory and stochastic processes. By studying its basic features we will derive a general process describing the short rates behaviour and subsequently we will introduce several examples of the short rate models. Finally, applying the theory in this work we will calibrate the model on the real financial figures.

Keywords: Short rate models, calibration of short rate models, stochastic processes

Kapitola 1

Úvod

Stochastické modelování úrokových měr je významnou součástí aplikací finanční matematiky a aktuárských věd. Je používáno bankovními i pojišťovacími společnostmi k oceňování finančních derivátů, k odhadu budoucího vývoje různých ekonomických veličin a v neposlední řadě také k efektivnímu řízení rizik.

Modelování úrokových měr má v moderní finanční matematice své místo již po několik desítek let, avšak teprve v návaznosti na chystaný regulatorní projekt Solvency 2, který představuje radikální změnu v oblasti kontroly pojišťovnictví v celé Evropské unii, získalo na důležitosti. Jedním z požadavků tohoto projektu je, v zájmu finanční stability pojišťovny, zohlednění všech relevantních rizik, tedy i riziko fluktuace budoucích úrokových měr. Solvency 2 tak pojišťovnám přímo přikazuje zahrnout stochastické modelování do svých propočtů.

V této práci nejdříve představíme základní pojmy z teorie pravděpodobnosti, které jsou k dalšímu pochopení stochastického modelování stěžejní. Dále se zaměříme na některé elementární náhodné procesy a na základě jejich vlastností postupně odvodíme procesy složitější. Následně zavedeme základní definice z finančni matematiky a přejdeme k popisu jednotlivých modelů. Zmíníme způsoby jejich kalibrace a na závěr demonstrujeme kalibraci modelů na základě reálných finačních dat.

Kapitola 2

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

2.1 Náhodný proces

Definice 2.1 *σ-algebra je neprázdný systém $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X, pro který platí nasledující podmínky*

- $X \in \mathcal{F}$,
- *je-li $A \in \mathcal{F}$, pak i $A^c \in \mathcal{F}$, kde A^c je doplněk množiny A,*
- *patří-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ do $\mathcal{F}$, pak také $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.*

Definice 2.2 *Nechť P je reálná funkce definovaná na σ-algebře jevů Ω, která splňuje následující podmínky*

- $P(\Omega) = 1$,
- $0 \leq P(A) \leq 1$ *pro každé* $A \in \mathcal{F}$,
- $P \bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i$ *pro každé* $A_i \cap A_j = 0$, $i \neq j$.

Potom funkci P nazýváme pravděpodobnostní míra a trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazýváme pravděpodobnostní prostor.

Definice 2.3 *Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a dále nechť $T \subset R$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se nazývá náhodný proces.*

V případě, že $T = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ nebo $T \subset Z$, mluvíme o procesu s diskrétním časem, popřípadě o časové řadě. Naopak, pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že proces $\{X_t, t \in T\}$ je proces se spojitým časem.

Definice 2.4 *Dvojce $(S, \mathcal{F})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{F}$ je σ-algebra podmnožin S, se nazývá stavový prostor procesu $\{X_t, t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o proces s diskrétními stavy, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.*

Definice 2.5 *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathrm{E}X_t$. Pak funkci $\mu_t = \mathrm{E}X_t$ definovanou na T nazveme střední hodnotou procesu $\{X_t, t \in T\}$. Proces, jehož střední hodnota je rovna nule, nazýváme centrovaný proces.*

Definice 2.6 *Jestliže $\{X_t, t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty, tj. $\mathrm{E}\, {X_t}^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ jako $R(s,t) = \mathrm{E}\,(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ se nazývá autokovarianční funkce procesu $\{X_t, t \in T\}$. Hodnotu $R(t,t)$ definovanou jako $R(t,t) = \mathrm{E}\,(X_s - \mu_s)^2$ nazýváme rozptyl procesu v čase t.*

Definice 2.7 *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces nabývající hodnot z T, kde $T = [a, b]$ přičemž $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Pokud pro libovolnou posloupnost $i, j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$ platí*

$$P\left(X_{t_n} = i | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \ldots X_{t_1} = j_1\right) = P\left(X_{t_n} = i | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}\right),$$

pak říkáme, že proces $\{X_t, t \in T\}$ má Markovskou vlastnost.

2.2 Náhodná procházka

Nyní již máme dostatek teoretického podkladu k tomu, abychom mohli modelovat náhodné procesy, které můžeme pozorovat na finančních trzích. Uvažujme akcii kótovanou na burze, jejíž cena v určitém časovém okamžiku s pravděpodobností p stoupne o 1 a s pravděpodobností $q = 1 - p$ klesne o 1. Tento proces můžeme popsat jako posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $(X_n, n \geq 1)$, pro kterou platí

$$P\left(X_n = 1\right) = p, \qquad P\left(X_n = -1\right) = q, \qquad p + q = 1, \qquad n \geq 1 \tag{2.1}$$

Pak proces

$$S_n = S_0 + \sum_{r=1}^{n} X_r \tag{2.2}$$

nazýváme náhodná procházka s počatečním bodem S_0. Je-li navíc $p = q = 1/2$, pak mluvíme o symetrické náhodné procházce. Rovnici náhodné procházky lze také zapsat ve tvaru

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}. \tag{2.3}$$

Z tohoto zápisu je ihned jasná jedna důležitá vlastnost náhodné procházky. Známe-li hodnotu procesu S_n v čase n, tak budoucí vývoj procesu nezáleží na minulých hodnotách. To znamená, že podle definice 2.7 má náhodná procházka markovskou vlastnost.

Na vyspělých finančních trzích však tento předpoklad neplatí. Dochází totiž k tomu, že investoři sledují minulý vývoj , podle kterého se pak snaží odhadnout budoucí hodnoty. Nicméně přechod k markovským procesům je v teorii modelů úrokových měr natolik výhodný, že se ve finanční praxi hojně používá.

Dosud jsme předpokládali, že cena akcie se mění v určitých diskrétních časových okamžicích (např. jeden obchodní den na burze). Cena akcie se ale může měnit každou hodinu, minutu a třeba i vteřinu. Dále nás tedy bude zajímat limitní chování náhodné procházky pro interval (t_n, t_{n+h}) pro $h \to 0$. Uvažujme proto uzavřený interval $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Dále zavedeme dělení intervalu $[a, b]$ jako $D_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, kde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ pro každé $n \in N$. Normu dělení D_n označíme jako

$$\Delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(t_{k+1} - t_k\right).$$

Hodnotu náhodné procházky v čase $0 \leq k \leq n-1$ můžeme podle (1.3) zapsat jako

$$S_{\frac{k+1}{n}} = S_{\frac{k}{n}} + \frac{X_k}{\sqrt{n}}, \qquad 0 \leq k \leq n-1. \tag{2.4}$$

Z (2.4) je zřejmé, že S_1 je součet n vzájemně nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s parametry

$$\mathrm{E}X_k = 0, \qquad \mathrm{var}X_k = \frac{1}{n}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{2.5}$$

Při přechodu k infinitezimálním hodnotám, tj. $\Delta_n \to 0$ při $n \to \infty$, užitím (2.4), (2.5) a centrální limitní věty dostaneme vzorec pro S_1 jako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathrm{E}X_k}{\sigma\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1). \tag{2.6}$$

S_1 tedy konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení. Pomocí (2.6) odvodíme vzorec pro náhodnou procházku v čase t jako

$$S_t = \sqrt{t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{nt} X_i}{\sqrt{nt}}\right) \sim N(0,t). \tag{2.7}$$

Proces, který je popsán rovnicí (2.7) a který vznikl limitním přechodem náhodné procházky k nekonečně malému časovému intervalu, nazýváme Wienerův proces.

2.3 Wienerův proces

Wienerův process je stochastický proces spojitého času pojmenovaný na počest N. Wienera. Někdy je nazýván jako Brownův pohyb. Je to jeden z nejlépe známých Lévyho procesů (stochastických procesů s přírůstky nezávislými na poloze).

Definice 2.8 *Proces* $\{W_t : t \geq 0\}$ *nazveme Wienerův proces právě tehdy když platí:*

- $W_0 = 0$,
- W_0 *je skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1) spojitý,*
- *hodnota* W_t *je náhodná veličina s rozdělením* $\sim N(0,t)$
- W_t *má na poloze nezávislé přírůstky* $W_{s+t} - W_s \sim N(0, t-s)$

Podmínka na poloze nezávislých přírůstků znamená, že pokud $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ pak $W_{t_1} - W_{s_1}$ a $W_{t_2} - W_{s_2}$ jsou nezávislé náhodné proměnné. Z toho také vyplývá, že Wienerův proces má ve smyslu definice 2.7 markovskou vlastnost. Avšak v definici nahradíme diskrétní pravděpodobnosti spojitou

hustotou. Uvažujme proto dva časové intervaly s a t, $s \leq t$, v nichž Wienerův proces nabývá hodnot y a x. Podmíněnou hustotu zapíšeme vzorcem

$$f(t, y|s, x) = \frac{\partial}{\partial y} P(W_t \leq y | W_s = x). \tag{2.8}$$

Z definice 1.8. víme, že Wienerův proces má normálně rozdělené přírůstky, proto

$$f(t, y|s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}, \qquad y \in R. \tag{2.9}$$

Rovnici (2.9) zderivujeme per partes a zjistíme, že f je řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{2.10}$$

Obecně pro nějaký časový intereval $s < u < t$ s užitím (2.9) dostaneme Chapman-Kolmogorovovu rovnici

$$f(t, y|s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z|s, x) f(t, y|u, z) \, \mathrm{d}z, \qquad s < u < t. \tag{2.11}$$

Zkoumejme nyní proces X_t, kterému stanovíme následující vlastnosti:

- X_t je spojitý markovský proces, $t \geq 0$.

  Dále stanovíme podmínky pro $X_t = X_{t+h} - X_t$, přírůstek procesu na nekonečně malém intervalu $(t, t+h)$. Požadujme, aby X_t, tedy i $\mathrm{d}X_t$, nemělo skoky a aby $\mathrm{E}(X_t)^2$ bylo rozumně malé. Tyto podmínky formálě zapíšeme jako

- $P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon | X_t) = o(h), \qquad$ pro $\epsilon > 0$.
- $\mathrm{E}(X_{t+h} - X_t | X_t) = 0 + o(h)$.
- $\mathrm{E}((X_{t+h} - X_t)|X_t)^2 = \sigma^2 h + o(h)$.

Dá se dokázat, že dosadíme-li nyní do Chapman-Kolmogorovovy rovnice $u = t - h$, dostaneme proces, který splňuje všechny tři uvedené podmínky. Tento proces popisuje rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^{2y}}{\partial y^2}, \tag{2.12}$$

která je pro $\sigma^2 = 1$ shodná s podmíněnou hustotou Wienerova procesu (2.9). Dále označme $X_{t+h} = X_t + \Delta$, kde $\Delta = X_{t+h} - X_t$ je přírůstek procesu v časovém intervalu $(t, t+h)$. Uvažujme dále podmíněnou hustotu Δ za podmínky $X_t = u$, označme ji jako $f_\Delta(u, z)$ a hustotu X_t označme $f(t, y)$. Pak užitím (2.8),(2.9) a (2.10) dostaneme

$$\begin{aligned} F(t+h, y) &- F(t, y) = P(X_t \leq y - \Delta) - P(X_t \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y}^{y-z} f(t, u) f_\Delta(u, z) \, \mathrm{d}u \mathrm{d}z \\ &\cong \int_{-\infty}^{\infty} -z f(t, y) f_\Delta(y, z) + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial}{\partial y} \{f(t, y) f_\Delta(y, z)\} \, \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.13}$$

a s použitím Taylorova rozvoje a vynecháním členů z s vyššími mocninami dostáváme

$$-\mu h f(t, y) + \sigma^2 h \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y). \tag{2.14}$$

Rovnici vydělíme h, zderivujeme podle y a vyjde nám

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mu \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{2.15}$$

Porovnáme-li nyní (2.14) a (2.10), zjistíme, že až na parametry μ a σ jsou tyto rovnice totožné. Na základě tohoto pozorování je nyní jasné, že jedno možné řešení rovnice (2.14) je dáno hustotou normálního rozdělení se střední hodnotou μ a σ , což je to samé jako $\mu t + \sigma \mathrm{d}W_t$. Takové procesy nazýváme difuzní procesy. Na základě tohoto zjištění je přirozené zavést následující definici:

Definice 2.9 *Proces $\{X_t : t \geq 0\}$ nazveme difúzní proces právě tehdy, když je spojitým markovským řetězcem a zároveň platí:*

- $P(|X_{t+h} - X_t)| > \epsilon | X_t) = o(h), \qquad$ *pro* $\epsilon > 0$.
- $\mathrm{E}(X_{t+h} - X_t | X_t) = \mu(t, X(t) h) + o(h)$.
- $\mathrm{E}((X_{t+h} - X_t^2) | X_t) = \sigma^2(t, X(t) h) + o(h)$.

Funkce $\mu(t, X)$ a $\sigma(t, X)$ nazýváme okamžitá střední hodnota a okamžitý rozptyl.

Ćasto se v literatuře značí malé přírůstky X_t v nekonečně malém intervalu dt jako $\mathrm{d}X_t$. Použijeme-li toto značení, můžeme výše uvedené vlastnosti uvedené v definici 2.9 shrnout do rovnice

$$\mathrm{d}X_t = \mu\left(t, X\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(t, X\right)\mathrm{d}W_t. \tag{2.16}$$

Jsou-li μ a σ konstanty (tj. nezávislé na hodnotě X a na čase) dostáváme následující

$$\mathrm{d}X_t = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t. \tag{2.17}$$

Pro lepší pochopení je užitečné si pravou stranu rovnice (2.16) rozdělit na dva segmenty. Výraz $\mu\mathrm{d}t$ nám říká, že X má konstatní střední hodnotu μ za jednotku času. Proto lze

$$\mathrm{d}X_t = \mu\mathrm{d}t \tag{2.18}$$

chápat jako

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \mu \tag{2.19}$$

nebo také

$$X_t = X_0 + \mu t, \tag{2.20}$$

kde X_0 je hodnota v čase 0. Za časový interval délky t vzroste hodnota o at. Na výraz $\sigma\mathrm{d}W_t$ můžeme nahlížet jako na přidávání šumu do trajektorie procesu.

Obecnou stochastickou rovnicí (2.15) lze zapsat všechny modely úrokových měr, které v této práci budeme zkoumat. Jednotlivé modely se od sebe liší tvarem parametrů μ a σ. Mohou to být konstanty nebo determistické funkce závislé na čase, na samotné hodnotě proměnné X a nebo na čase a na hodnotě X zároveň. V následující kapitole zavedeme některé v teorii úrokových modelů často používáné proměnné a následně nás budou zajímat vlastnosti jednotlivých modelů.

Kapitola 3

Modely úrokových měr

3.1 Základní proměnné a jejich značení

Základním kamenem v teorii úrokových měr je cena tzv. *bezrizikového bezkupónového dluhopisu*. Jde o kontrakt, který kupujícímu zaručuje výplatu jedné jednotky určité měny v čase splatnosti dluhopisu T. Z názvu je patrné, že nepřipouštíme vyplácení kupónů před splatností dluhopisu stejně jako riziko bankrotu emitenta. Cenu takového cenného papíru značíme jako $P(t,T)$, kde t značí čas dnes a T jakýkoli čas v budoucnosti, resp dobu splatnosti dluhopisu. Z definice je jasné, že $P(T,T) = 1$. Význam takového aktiva je v tom, že máme-li na trhu dluhopisy pro všechny možné splatnosti, tak z nich z nich jednoduše odvodíme dnešní *spotové sazby*. Spotová sazba, kterou budeme značit $R(t,T)$, je spojitě úročený výnos bezkupónového dluhopisu se splatností T. Pro spotovou sazbu a cenu dluhopisu platí

$$P(t,T)\, e^{(T-t)R(t,T)} = 1,$$

a na základě toho odvodíme

$$\begin{aligned} \ln P(t,T)\, e^{(T-t)R(t,T)} &= 0, \\ \ln e^{(T-t)R(t,T)} &= -\ln P(t,T), \\ R(t,T) &= -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Za povšimnutí stojí, že pokud dluhopis přesáhne dobu splatnosti, tj. $T > t$, tak podle rovnice (3.1) nabyde $R(t,T)$ záporných hodnot, což je vzhledem k povaze finančích trhů dost nerealistické. Další proměnnou, kterou zavedeme, nazýváme *okamžitou úrokovou sazbou* v čase t a značíme ji $r(t)$.

Tato sazba představuje úrokovou sazbu přes nekonečně krátký časový interval. Na finančních trzích se ovšem tato sazba vůbec nevyskytuje. V praxi se tato čistě imaginární sazba nahrazuje jinou úrokovou sazbou dostupnou na finančním trhu (viz Kapitola 3). Formálně odvodíme rovnici pro okamžitou úrokovou sazbu pomocí (3.1) jako

$$\begin{aligned} r(t) = \lim_{T \to t_+} R(t,T) &= \lim_{T \to t_+} -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}, \\ &= \lim_{T \to t_+} -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T), \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln P(t,t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Uvažujme dva časové okamžiky T_1 a T_2 takové, že $t < T_1 < T_2 < T$. *Forwardovou sazbu* definujeme jako výnos bezkupónového dluhopisu zakoupeného v čase T_1 se splatností v T_2 uvažovaný v čase t. Z rovnice (3.1) odvodíme

$$f(t,T) = -\frac{\ln P(t,T_2) - \ln P(t,T_1)}{T_2 - T_1}. \tag{3.3}$$

Pro $T_2 \to T_1$ přechází (3.3) v definici derivace v bodě T_1. Tj.

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T) \tag{3.4}$$

a je zřejmé, že

$$f(t,t) = r_t, \tag{3.5}$$

stejně tak jako vztah mezi forwardovou a spotovou sazbou

$$f(t,T) = R(t,T) + (T-t) \frac{\partial}{\partial T} R(t,T). \tag{3.6}$$

3.2 Afinní časová struktura

Motivací pro zavedení pojmu *afinní časová struktura* je nalezení společných znaků pro určitou dost velkou skupinu modelů úrokových měr. Na základě těchto znaků mohou být pro celou tuto skupinu odvozeny určité závěry, které nám podstatně zjednodušší a zrychlí práci se stochastickými modely. Jako příklad uveďme odvození ceny bezkupónového dluhopisu. V zásadě existují tři možnosti, jak ji stanovit. Buď můžeme cenu odvodit přímo z rovnice

$$P(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\right], \tag{3.7}$$

nebo pomocí tak zvané Black-Scholes Mertonovy parciální diferenciální rovnice[1] tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} - rP &= 0, \\ P(T,T) &= 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

a nebo můžeme využít afinní časovou strukturu[2]. Výpočty první a druhou metodou bývají zpravidla velmi komplikované a zdlouhavé, zatímco při použití teorie afinní časové struktury relativně rychlé. Při praktických výpočtech použijeme následující definici:

Definice 3.1 *Stochastický model popsaný rovnicí*

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t,X)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,X)\,\mathrm{d}W_t \tag{3.9}$$

má afinní časovou strukturu, pokud platí, že

$$\begin{aligned} \mu(t,X) &= \alpha(t)\,r + \beta(t), \\ \sigma(t,X) &= \sqrt{\chi(t)\,r + \delta(t)}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\alpha(t)\,r$, $\beta(t)$, $\chi(t)$ a $\delta(t)$ jsou deterministické funkce a zároveň můžeme $P(t,T)$ vyjádřit tvarem

$$P(t,T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)}, \tag{3.11}$$

Při numerickém výpočtu určíme hodnoty funkcí $A(t,T)$ a $B(t,T)$ tak, že rovnici (3.11) dosadíme do rovnice (3.8) a obdržíme jednoduchou soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} A(T,T) &= 0, \\ B(T,T) &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial t} - \beta B + \frac{1}{2}\delta B^2 &= -1, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \alpha B - \frac{1}{2}\chi B^2 &= -1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vypočtené $A(t,T)$ a $B(t,T)$ pak zpětně dosadíme do (3.11).

[1] Merton R. C.: *Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science volume 4, 141-183*

[2] Formálně, funkci $f : R^n \to R$ nazveme afinní, pokud existuje $a \in R$ a $b \in R^n$ takové, že platí $f(x) = a + b^T$ pro všechna $x \in R^n$

3.3 Předpoklady modelů

Dříve než přistoupíme k popisu jednotlivých modelů úrokových měr, je potřeba ještě zmínit některé předpoklady, které vyplývají z chováni úrokových sazeb na trhu. První předpoklad je, že množina všech možných projekcí budoucích úrokových sazeb by měla být omezená. Tento předpoklad koresponduje s faktem, že úrokové sazby na finančních trzích se z dlouhodobého hlediska pohybují kolem tzv. rovnovážné hodnoty. Jsou-li sazby dlouhodobě na nízkých úrovních, dá se očekávat, že časem vzrostou. Stejně tak i při vysokých úrokových sazbách existuje předpoklad, že nastane taková ekonomická situace, která si vyžádá jejich opětovné snížení. Stejně tak nebereme v úvahu fakt, že by sazby mohly růst do nekonečna nebo že by mohly být záporné.

Dále bychom měli požadovat, aby predikce úrokových sazeb v sobě zahrnovala i očekávání trhu, tj. forwardových sazeb. V praxi se ovšem setkáváme s tím, že ne vždy všechny předpoklady jsou splněny, protože spolu vzájemně kolidují.

3.4 Vašíčkův model

Tento model byl poprvé představen českým matematikem O. Vašíčkem v roce 1977. Model je popsán rovnicí

$$\mathrm{d}r(t) = k(\theta - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \qquad k, \theta > 0. \tag{3.13}$$

Parametr θ určuje rovnovážnou hodnotu, ke které úrokové sazby konvergují a parametr k vyjadřuje rychlost této konvergence. Jsou-li sazby pod rovnovážnou hodnotou, tj. $\theta > r(t)$, výraz $k(\theta - r(t))$ je tedy kladný a úroková sazba roste. Stojí za povšimnutí, že hodnota θ nezávisí na čase. To znamená, že Vašíčkův model se navrací vždy jen k jedné hodnotě a nebere v úvahu budoucí očekávání trhu, tj. aktuální forwardovou křivku. Určíme-li pomocí Vašíčkova modelu cenu dluhopisů, odvodíme vlastně jednu forwardovou křivku, která je výstupem modelu. Tuto skupinu modelů, kde forwardová křivka je výstupem, nazýváme *endogenní* modely, zatímco modely, kde je forwardová křivka vstupem, nazýváme *exogenní*.

Pro výpočet explicitního vztahu pro $r(t)$ nejprve označíme první člen pravé strany rovnice jako

$$Y(t) = k(\theta - r(t)). \tag{3.14}$$

a vynásobíme ho $e^{k\theta}$. Tj.

$$e^{k\theta}Y(t) = f(r(t)) = e^{k\theta}(k(\theta - r(t))). \tag{3.15}$$

Nyní máme funkci $f(r(t))$, jejíž hodnota závisí na stochastické proměnné. K tomu, abychom popsali její dynamiku, použijeme Itoovo lemma[3]. K tomu použijeme parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(r(t))}{\partial t} &= ke^{kt}Y(t), && (3.16)\\
\frac{\partial f(r(t))}{\partial r} &= -ke^{kt}, && (3.17)\\
\frac{\partial f^2(r(t))}{\partial r^2} &= 0 && (3.18)
\end{aligned}$$

a samotná aplikace Itoova lemmatu nám dává

$$\begin{aligned}
&f(r(t)) - f(r(0)) = \\
&= \int_0^t \underbrace{\frac{\partial f(r(s))}{\partial s}\mathrm{d}s}_{(3.16)} + \int_0^t \underbrace{\frac{\partial f(r(s))}{\partial s}\mathrm{d}r(s)}_{(3.17)} + \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\frac{\partial^2 f(r(s))}{\partial s^2}\mathrm{d}r(s)}_{(3.18)},\\
&= \int_0^t ke^{ks}Y(s)\,\mathrm{d}(s) - \int_0^t ke^{ks}\underbrace{Y(s)\,\mathrm{d}s + \sigma\mathrm{d}W_s}_{(3.13)},\\
&= -\int_0^t ke^{ks}\sigma\mathrm{d}W_s. && (3.19)
\end{aligned}$$

Podíváme-li se nyní na (3.19), objevíme rekurentní vztah pro $r(t)$ v závislosti na předchozí hodnotě $r(0)$. Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
e^{kt}Y(t) - e^{k0}Y(0) &= -\int_0^t ke^{ks}\sigma\mathrm{d}W_s, && (3.20)\\
ke^{kt}(\theta - r(t)) - k(\theta - r(0)) &= -\int_0^t ke^{ks}\sigma\mathrm{d}W_s,\\
-ke^{kt}r(t) &= -k\theta e^{kt} + k\theta - kr(0) - \int_0^t ke^{ks}\sigma\mathrm{d}W_s,\\
r(t) &= \theta\left(1 - e^{-kt}\right) + e^{-kt}r(0) + \int_0^t e^{-k(t-s)}\sigma\mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

[3]Ito K.: *On stochastic differential equations.*, Memoirs, American Mathematical Society 4, 1–51, 1951.

Rozdělme nyní interval $[0, T]$ na N podintervalů stejné délky, označme $t_i = i\frac{T}{N}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots n$ a každý krok označme jako $\Delta_t = t_i - t_{i-1}$. Pak dostáváme

$$r(t_i) = \theta\left(1 - e^{-k\Delta_t}\right) + e^{-k\Delta_t} r(t_{i-1}) + \epsilon(t_i), \tag{3.21}$$

kde

$$\epsilon(t_i) = \int_0^t e^{-k(t-s)} \sigma \mathrm{d}W_s. \tag{3.22}$$

V podstatě jsme odvodili první dva momenty hustoty normálního rozdělení $r(t)$. Konkrétně

$$r(t) \sim N\left(\theta\left(1 - e^{-k\Delta_t}\right) + e^{-k\Delta_t} r(t_{i-1}), \epsilon^2(t_i)\right). \tag{3.23}$$

Nakonec ještě upravíme člen $\epsilon^2(t_i)$. Zřejmě je

$$(\mathrm{E}\epsilon(t_i))^2 = \mathrm{E}\epsilon(t_i) = 0$$

a proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\epsilon(t_i) &= \mathrm{E}\left(\epsilon^2(t_i)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-k(t_i-s)} \sigma \mathrm{d}W_s\right)^2 \\
&= \mathrm{E}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2k(t_i-s)} \sigma^2 \mathrm{d}s \\
&= \sigma^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2k(t_i-s)} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k(t_i - t_{i-1})}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k\Delta_t}\right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Z normality $r(t)$ vyplývá jeden z nedostatků Vašíčkova modelu a to sice existence nenulové pravděpodobnosti, že modelovaná sazba bude záporná. Tuto pravděpodobnost spočteme pomocí (3.23), (3.26) a centrální limitní věty jako

$$P(r(t) < 0) = \Phi\left(-\frac{r(0)\, e^{-kt} + \theta\left(1 - e^{-kt}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right)}}\right). \tag{3.25}$$

V následující tabulce jsou podle [10] spočteny procentuální pravděpodobnosti záporné úrokové sazby. Parametry modelu jsou $k = 0.1$, $\theta = 0.25$ a $\sigma = 0.006$. Z tabulky je patrné, že pravděpodobnost roste se zmenšujícím se $r(0)$ a roste se zvyšujícím se t.

t/r	**0.50**	**1.00**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**	**4.00**	**5.00**
1	11.34	2.27	0.26	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
2	13.14	4.94	1.45	0.33	0.06	0.01	0.00	0.00
3	12.92	4.94	1.45	0.33	0.06	0.01	0.00	0.00
4	12.21	6.67	2.55	0.91	0.28	0.07	0.00	0.00
5	11.38	6.80	3.79	1.97	0.95	0.43	0.07	0.01
6	10.56	6.74	4.10	2.36	1.29	0.67	0.15	0.03
7	9.78	6.59	4.27	2.66	1.59	0.91	0.27	0.07
8	9.08	6.38	4.35	2.88	1.85	1.15	0.40	0.13
9	8.44	6.15	4.38	3.05	2.07	1.37	0.56	0.21
10	7.87	5.92	4.37	3.17	2.25	1.57	0.72	0.31

Vašíčkův model má affiní časovou strukturu, takže podle definice 3.1 snadno vypočítáme ceny dluhopisů $P(T,t) = e^{A(T-t)-B(T-t)r(t)}$. Zvolíme proto

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -k, \\ \beta(t) &= k\theta, \\ \chi(t) &= 0, \\ \delta(t) &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\tag{3.27}$$

a parametry modelu dosadíme do (3.12). Dostaneme následující soustavu obyčejných diferenciálních rovnic :

$$\begin{aligned} A(T,T) &= 0, \\ B(T,T) &= 0, \\ \frac{dA}{dt} + k\theta B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 &= 0, \\ \frac{dB}{dt} = -kB &= -1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

což dává

$$B(t,T) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right), \tag{3.29}$$

resp.

$$A(t,T) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(B(t,T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k}B(T-t)^2. \tag{3.30}$$

3.5 Cox, Ingersoll, Ross model

Ve Vašíčkově modelu existuje pravděpodobnost, že úrokové míry, jakožto výstup modelu, vyjdou záporné. Cox, Ingersoll a Ross navrhli alternativní model, ve kterém jsou úrokové sazby vždy nezáporné. Model popisuje následující rovnice:

$$\mathrm{d}r(t) = k(\theta - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W_t. \tag{3.31}$$

První část pravé strany rovnice popisuje, stejně jako ve Vašíčkově modelu, tendenci navracet se k rovnovážné poloze θ rychlostí k. Druhá část pravé strany zavádí směrodatnou odchylku, která je proporcionální k $\sqrt{r(t)}$. Blíží-li se úroková míra k nule, tento faktor imunizuje náhodné fluktuace Wienerova procesu, protože pro malé $r(t)$ je zřejmě $\sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W_t \to 0$ a $r(t) > \sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W_t$. V rovnici proto převáží $k(\theta - r(t))$, což nasměruje úrokovou míru opět k rovnovážné hodnotě. To znamená, že v CIR modelu je volatilita závislá na dynamice úrokových sazeb. Čím větší jsou přírůstky simulované sazby, tím je i větší volatilita procesu. Cox, Ingersoll a Ross dokázali, že pro jejich model platí stejné rovnice pro oceňování bezkupónových dluhopisů

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)},$$

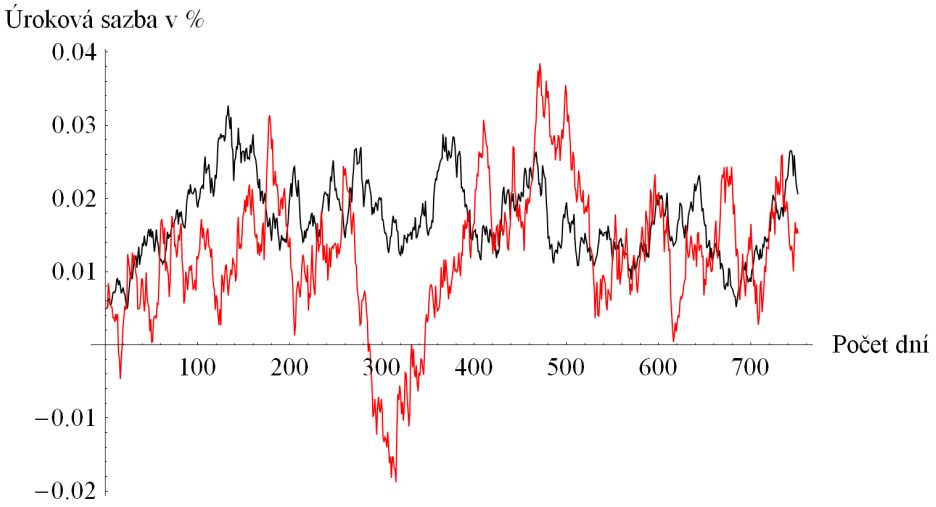
ale funkce $A(t,T)$ a $B(t,T)$ jsou odlišné:

$$A(t,T) = \left(\frac{2\gamma e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+k)\left(\left(e^{\gamma(T-t)-1}\right) + 2\gamma\right)}\right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \tag{3.32}$$

a

$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)-1)}\right)}{(\gamma+k)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}, \tag{3.33}$$

kde $\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$. Stochastická proměnná nemá v CIR modelu normální rozdělení, ale non-central chý-kvadrát rozdělení $\chi(n,c)$, kde n je počet stupňů volnosti a c je parametr vychýlení.



Obr. 2.1: Porovnání vývoje úrokové míry modelované ve Vašíčkově modelu (šedivě) a CIR modelu (černě). $k = 0.0340$, $\theta = 0.0150$ a $\sigma = 0.0250$.

Obr 2.1 srovnává simulaci úrokových sazeb pomocí Vašíčkova a CIR modelu. Je zřejmé, že sazby simulované pomocí Vašíčkova modelu mohou lehce nabývat záporných hodnot, kdežto u CIR modelu tato situace nikdy nenastane.

3.6 Hoo-Lee model

Tento model byl poprvé publikován v roce 1986 v časopise Journal of Finance. Byl prezentován ve formě binominálního stromu se dvěma parametry: směrodatnou odchylkou σ a výchozí forwardovou křivkou. Od té doby bylo dokázáno, že limitní přechod ke spojitému času při $\Delta t \to 0$ se dá zapsat rovnicí

$$\mathrm{d}r = \theta(t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \tag{3.34}$$

kde σ je konstanta a $\theta(t)$ je rovnovážná hodnota, která je funkcí času a je nezávislá na r. Zvolíme-li $\theta(t) = f(0,t)$, bude model konvergovat k aktuální forwardové křivce. Tím do predikce úrokové míry zahrneme očekávání finančního trhu o budoucím vývoji úrokových sazeb. Cena bezkupónového dluhopisu v závislosti na okamžité úrokové míře $r(t)$ je dána vztahem

$$P(t,T) = A(t,T)\,e^{-r(t)(T-t)}, \tag{3.35}$$

kde

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - (T-t)\frac{\partial \ln P(0.t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\left(T - t^2\right). \tag{3.36}$$

3.7 Hull-White model

V roce 1990, profesoři Hull a White navrhli vylepšení Vašíčkova modelu tak, že rovnovážnou hodnotu θ změnili na funkci času $\theta(t)$. Rozšířený model zapsali rovnicí

$$\mathrm{d}r = (\theta(t) - kr)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \tag{3.37}$$

nebo

$$\mathrm{d}r = k\left[\frac{\theta(t)}{k} - r\right]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \tag{3.38}$$

kde k a σ jsou konstanty. V čase t okamžitá úroková míra konverguje k $\theta(t)/k$ rychlostí k. Hull-White model je speciálním případem Hoo-Lee modelu při $k = 0$. Hodnoty návratnosti ke středu $\theta(t)$ musí být zvoleny tak, aby odpovídaly aktuální časové struktuře pozorované na trhu. To znamená, že by se modelové hodnoty měly ve střední hodnotě rovnat aktuálně pozorovaným forwardovým sazbám. Podle (3.4) je forwardová sazba definovaná jako

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T). \tag{3.39}$$

Odvozováním dostaneme pro $\theta(t)$ následující vztah

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + kf(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right), \tag{3.40}$$

ale v praxi se často používá zjednodušená aproximace ve tvaru

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + kf(0,t). \tag{3.41}$$

Stejným způsobem jako ve Vašíčkově modelu odvodíme $r(t_i)$ v závislosti na $r(t_{i-1})$:

$$r(t_i) = e^{-k\Delta_t} r(t_{i-1}) + \frac{\theta}{k}\left(1 - e^{-k\Delta_t}\right) + \sigma e^{-k\Delta_t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-k(t_i - s)}\mathrm{d}W_s \tag{3.42}$$

a opět podle (3.23) platí, že $r(t)$ má normální rozdělení s parametry:

$$r(t) \sim N\left(e^{-k\Delta_t} r(t_{i-1}) + \frac{\theta}{k}\left(1 - e^{-k\Delta_t}\right), \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k\Delta_t}\right)\right). \tag{3.43}$$

Ceny bezkuponových dluhopisů jsou v Hull-Whiteově modelu definovány vztahem

$$P(t,T) = A(t,T)\, e^{-B(t,T)r(t)}, \tag{3.44}$$

kde

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{3.45}$$

a

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\partial \ln P(0,t}{\partial t} - \frac{1}{4k^3}\sigma^2\left(e^{-kT} - e^{kt}\right)\left(e^{2kt} - 1\right). \tag{3.46}$$

Protože $r(t)$ má normální rozdělení, existuje, stejně jako u Vašíčkova modelu, nenulová pravděpodobnost, že okamžitá úroková míra $r(t)$ nabyde záporných hodnot. Nicméně, jak je patrné z tabulky z [10], tato procentuální pravděpodobnost je podstatně nižší než u Vašíčkova modelu.

t/r	**0.50**	**1.00**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**	**4.00**	**5.00**
1	4.81	0.71	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	3.45	0.97	0.21	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
3	2.00	0.73	0.23	0.06	0.02	0.00	0.00	0.00
4	0.49	0.45	0.18	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00
5	0.21	0.24	0.11	0.05	0.02	0.01	0.00	0.00
6	0.08	0.12	0.07	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
7	0.03	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00
8	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00
9	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Kapitola 4

Kalibrace

Proces kalibrace slouží k explicitnímu určení parametrů modelu, aby co nejoptimálněji popisoval skutečnost na finančních trzích. Obecně můžeme rozdělit proces kalibrace do dvou skupin. Metodu, která odhaduje parametry modelu na základě historických hodnot, nazýváme *dynamická metoda kalibrace*. Odhadujeme-li parametry pomocí aktuálních tržních dat, řekneme, že kalibrujeme pomocí *statické metody*. Platí, že dynamickou metodu používáme na kalibraci endogenních modelů, zatímco statickou metodu na kalibraci modelů exogenních.

Před samotnou kalibrací musíme vyřešit, jakým způsobem v kalibraci reprezentovat okamžitou úrokovou sazbu. Okamžitá úroková míra je chápána jako úroková míra, která by odpovídala nekonečně krátkému časovému období. Nicméně na finančním trhu taková sazba obecně neexistuje. Nejkratší sazba, která je na trhu dostupná, tzv. overnight sazba vykazuje určité anomálie v podobě střídání relativně dlouhých stabilních období a silných skokových pohybů, které jsou důsledkem externích šoků. Vhodnou reprezentaci okamžité úrokové míry se pokusíme najít pomocí shlukové analýzy.

4.1 Shluková analýza

Shluková analýza je souhrnný název pro celou řadu výpočetních postupů, jejichž cílem je rozklad daného souboru na několik relativně homogenních podsouborů (shluků) a to tak, aby si objekty uvnitř jednotlivých shluků byly co nejvíce podobné a objekty patřící do různých shluků si byly podobné co nejméně. Přitom každá jednotka je popsána skupinou znaků. Výsledky analýzy závisí na volbě proměnných, zvolené míře vzdálenosti mezi objekty

a shluky a na zvoleném algoritmu výpočtu.

Z finančních trhů snadno získáme dostatečně dlouhé časové řady zachycující vývoj úrokových sazeb s různými splatnostmi. Míru závislosti mezi úrokovými měrami budeme měřit pomocí výběrového korelačního koeficientu denní změny úrokové sazby. Mějme $n+1$ denních hodnot úrokové míry X a Y. Definujme

$$\bar{X} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (X_{t+1} - X_t)$$

a analogicky

$$\bar{Y} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (Y_{t+1} - Y_t)$$

jako průměrnou denní změnu sazeb X a Y za posledních $n+1$ dnů. Dále zaveďme

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} \left(X_{t+1} - X_t - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} \left(Y_{t+1} - Y_t - \bar{Y}\right)^2$$

a

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} \left(X_{t+1} - X_t - \bar{X}\right)\left(Y_{t+1} - Y_t - \bar{Y}\right).$$

Je-li $S_X^2 > 0$ a $S_Y^2 > 0$ pak definujeme výběrový korelační koeficient r vzorcem

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_X^2 S_Y^2}}. \tag{4.1}$$

Zkoumáme-li závislosti mezi k sazbami, výstupem je matice $c\,(i,j)$. Hodnoty matice jsou 1 pro každé $i = j, i, j = 1, 2, \ldots, k$ a $c\,(i,j) = r_{ij}$ jinde. Míru nepodobnosti $d\,(i,j)$ pak podle [9] definujeme jako

$$d\,(i,j) = \sqrt{2\,(1 - c_{ij})}. \tag{4.2}$$

a provedeme rozdělení do shluků podle metody nejbližšího souseda[1]. Je zajímavé, že shluková analýza nám sazby rozdělí do tří skupin. Obecně na overnight sazbu, sazby peněžního trhu a sazby kapitálového trhu. Na

[1]Metoda nejbližšího souseda (z angl. *The nearest neighbour method*) používá jako kritérium rozdělení objektů do shluků minimum ze všech možných mezishlukových vzdáleností objeků.

základě výsledků analýzy je pro náš model nejvhodnější použít sazbu 2W-6M. Podle [11] je podle zkušeností z českého prostředí nejvhodnější použít sazbu 6M, kterou lze ještě považovat za krátkodobou, ale již bez významných jednorázových skoků.

4.2 Časový horizont

Další důležitou otázkou je, jak dlouhý časový horizont máme vzít v úvahu pro odhad parametrů modelu. Na straně jedné je přirozené z hlediska co největší přesnosti odhadu použít co možná nejdelší historickou časovou řadu. Na straně druhé bychom se ale měli snažit o co možná největší aktuálnost modelu, tzn. použít data z co možná nejkratší minulosti. Mezi těmito extrémy je potřeba najít rozumný kompromis. Podle [11] se jako optimální kompromis jeví použít posledních 600-700 obchodních dní s diskrétním krokem $\Delta t = 1/250$ (250 obchodních dní za rok).

4.3 Maximálně věrohodný odhad

Samotný odhad parametrů modelu provedeme metodou maximální věrohodnosti. K dispozici máme $n+1$ hodnot úrokové sazby v čase. Hustotu pravděpodobnostního rozdělení každé z nich můžeme zapsat jako $f(x, \theta)$, kde θ značí parametr, který chceme odhadnout. Jak již víme, všech $n+1$ meření je navzájem nezávislých a pocházejí ze stejného pravděpodobnostního rozdělení. To znamená, že můžeme psát

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=0}^{n} f(x_i, \theta) \tag{4.3}$$

a hledáme takové θ, které bude maximalizovat (4.3). Hledáme tedy $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \prod_{i=0}^{n} f(x_i, \theta). \tag{4.4}$$

K nalezení nejvěrohodnotnějšího odhadu využijeme nejdříve toho, že pokud maximalizujeme nějakou funkci, její transformace pomocí rostoucí funkce zachová maximum. Jako transformační funkci zvolíme logaritmus, protože transformuje součiny na součty a proto (4.3) přechází na

$$L(x_0, x_1, , x_n, \theta) = \sum_{i=0}^{n} \ln f(x_i, \theta). \tag{4.5}$$

Maximum funkce L získáme snadno derivováním a položením derivace rovno nule, tj.

$$\frac{\partial \ln L\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \theta\right)}{\partial \theta} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{n} \ln f\left(x_i, \theta\right)}{\partial \theta} = 0. \tag{4.6}$$

a z této rovnice již snadno vypočteme numerické hodnoty parametrů modelu.

4.4 Kalibrace Vašíčkova modelu

Na příkladu názorně demonstrujeme metodu dynamické kalibrace Vašíčkova modelu na základě reálných finančních dat. Z (3.21) a (3.22) víme, že ve Vašíčkově modelu má $r\left(t\right)$ normální rozdělení, a proto platí

$$r_{t+1} = \alpha r_t + \theta\left(1-\alpha\right) + e_i, \qquad e_i \sim N\left(0, V^2\right),$$

kde α pro jednoduchost položme $e^{-k(t-s)}$. Výraz $t-s$ představuje jeden obchodní den. Dosadíme do (4.5) a (4.6) a dostaneme tvar věrohodnostní funkce

$$\begin{aligned} L\left(x_0, x_1, , x_n, \theta\right) &= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{2\pi V^2}} \exp\left\{\frac{\left(r_i - \alpha r_{i-1} - \theta\left(1-\alpha\right)\right)^2}{2V^2}\right\} \\ \ln L\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \theta\right) &= \frac{n}{2} \ln \frac{1}{2\pi V^2} - \frac{1}{2V^2} \sum_{i=1}^{n} \left(r_i - \alpha r_{i-1} - \theta\left(1-\alpha\right)\right)^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Podle (4.6) odvodíme parciální derivace, položíme je rovny nule a vyjádříme parametry

$$\hat{k} = -\frac{1}{t-s} \ln\left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}}{n\sum_{i}^{n} r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}\right)^2}\right) \tag{4.9}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \hat{\alpha} r_{i-1}\right)}{n\left(1-\hat{\alpha}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - e^{-\hat{k}(t-s)} r_{i-1}\right)}{n\left(1-e^{-\hat{k}(t-s)}\right)} \tag{4.10}$$

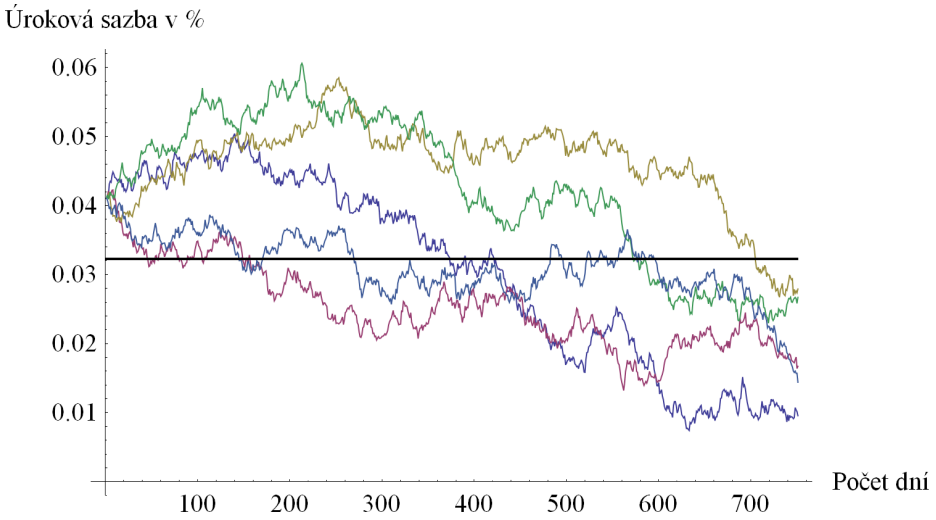
$$\hat{\sigma^2} = \frac{2\hat{k}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\theta}\left(1-\hat{\alpha}\right)\right)^2}{1-e^{-2\hat{k}(t-s)}}. \tag{4.11}$$

Z finančích trhů zjistíme časovou řadu hodnot české 6M sazby za posledních 750 obchodních dní[2] a užitím (4.9) obdržíme numerické hodnoty parametrů Vašíčkova modelu

$$\begin{aligned} \theta &= 0.0322, \\ k &= 0.0340, \\ \sigma &= 0.0006, \end{aligned} \tag{4.12}$$

a pomocí (3.13) a (4.12) obdržíme rovnici popisující náš model jako

$$\mathrm{d}r(t) = 0.0340\,(0.0322 - r(t))\,\mathrm{d}t + 0.0006\mathrm{d}W_t. \tag{4.13}$$



Obr. 3.1: Pět simulací 6M CZK sazby. $k = 0.0322$, $\theta = 0.0340$ a $\sigma = 0.0006$.

Na obrázku 3.1 je vykresleno pět simulací 6M CZK sazby s odhadnutými parametry. Z obrázku je patrná konvergence k rovnovážné hodnotě $\theta = 0.0340$, která je znázorněna černou přímkou.

[2]Zdroj: on-line systém společnosti Reuters ze dne 25.7.2008

Kapitola 5

Závěr

Zadáním této práce bylo seznámit se s problematikou modelování průběhu krátkodobých úrokových měr, seznámit se s nejčastějšími modely a v závěru se pokusit o kalibraci na reálná tržní data.

V samotném úvodu této práce jsme zavedli několik základních definic a vět z teorie pravděpodobnosti. Následující kapitola popisuje základní diskrétní proces, tzv. symetrickou náhodnou procházku. Odvodili jsme její vlastnosti a limitním přechodem k infinitezimálnímu časovému intervalu jsme došli k definici Wienerova procesu a k jeho pravděpodobnostnímu rozdělení. Na základě znalosti jeho hustoty pravděpodobnosti jsme rovněž odvodili novou skupinu stochastickych procesů, tzv. procesy difůzní.

Dále jsme zavedli některé důležité pojmy z oblasti finanční matematiky. Odvodili jsme vztah mezi výnosem dluhopisu a spotovou sazbou, definovali jsme forwardowou sazbu a okamžitou úrokovou míru. Teoreticky jsme popsali afinní časovou strukturu, na jejímž základě jsme byli schopni vyřešit soustavu obyčejných diferenciálních rovnic a stanovit tak klíčový vzorec popisující vztah mezi okamžitou úrokovou mírou a cenou bezkupónového dluhopisu.

Druhá kapitola této práce popisuje některé modely, které se pro stochastické modelování úrokových měr používají. Konkrétně pak Vašíčkův, Cox-Ingersol-Ross, Hoo-Lee a Hull-Whiteův model. Dále jsme popsali jeden z možných způsobů kalibrace modelů pomocí metody maximálně věrohodného odhadu. Poslední část je věnována praktické ukázce dynamické kalibrace Vašíčkova modelu. Z reálných finančních dat jsme určili jednotlivé parametry modelu a na závěr jsme provedli predikci budoucího vývoje úrokové sazby.

Literatura

[1] Baxter M., Rennie A.: *Financial calculus*, Cambridge University Press, 1997.

[2] Bolder D. J.: *Affine Term-structure models: Theory and implementation*, Bank of Canada, 2001.

[3] Carr P.: *Interest rate models*, Bloomberg, 2005.

[4] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.: *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica volume 53, 385-407., 1985.

[5] Ho T. S. Y., Lee S.-B. *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*, Journal of Finance volume 41, 1011-1029., 1986.

[6] Hull J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2003.

[7] Hull J. C., White A.: *Pricing interest rate derivative securities*, The Review of Financial Studies volume 3, No. 4, 573-592, 1990.

[8] Krylov N. V.: *Introduction to the theory of diffusion processes*, American Mathematical Society, 1991.

[9] Matteo, Di T., Aste, T., Mantegna, R. N.: *An interest rate cluster analysis*, www.sciencedirect.com, 2006.

[10] Myška P.: *Modely úrokových sazeb*, Česká spořitelna, a.s., 2007.

[11] Papež M.: *Stochastické modelování úrokových sazeb*, Živnostenská banka, 2006.

[12] Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, 1998.

[13] Stirzaker D. : *Stochastic processes and models*, Oxford University Press, 2005.

[14] Vasicek O.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics volume 5, 177-188, 1977.