Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Marko

Banachovy prostory funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.

Studijní program: Matematika, obor Obecná matematika

2008

Na tomto mieste by som rád poďakoval vedúcemu svojej bakalárskej práce doc. RNDr. Lubošovi Pickovi, CSc., DSc. za poskytnutie literatúry, odborné rady a námety, ktoré prispeli k tvorbe tejto práce. Ďalej celej svojej rodine a priateľke Janke za podporu a neskutočnú trpezlivosť. Ďakujem.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne: 06.08.2008 Ján Marko

Obsah

Název práce: Banachovy prostory funkcí
Autor: Ján Marko
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
e-mail vedoucího: Lubos.Pick@mff.cuni.cz

Abstrakt: V tejto práci sú popísané základné vlastnosti Banachovho priestoru funkcií, jeho podpriestor funkcií s absolútne spojitou normou a asociovaný Banachov priestor funkcií. Zaoberá sa tiež problematikou Lebesgueových priestorov funkcií, braných ako Banachove priestory funkcií. V texte sú vypracované príklady týkajúce sa vlastností mier merateľných priestorov a ich vplyv na študované podpriestory. Taktiež sú vypracované príklady Banachových noriem, im príslušné Banachove priestory funkcií a ich základné vlastnosti.

Klíčová slova: Banachova norma, Banachov priestor funkcií, asociovaný priestor, absolútne spojitá norma

Title: Banach function spaces
Author: Ján Marko
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Supervisor's e-mail address: Lubos.Pick@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis describes basic properties of Banach function spaces, its subspace of functions of absolutely continuous norm and its associate space. It also deals with problems of Lebesgue spaces considered to be Banach function spaces. Several problems concerning the properties of measures of the measure spaces are worked out, and their effect on the studied subspaces. Some examples of Banach function norms and the corresponding Banach function spaces are worked out, together with their basic properties.

Keywords: Banach function norm, Banach function space, associate space, absolute continuity of norm

Úvod

Banachove priestory funkcií sú Banachove, teda úplné priestory merateľných funkcií, v ktorých je Banachova norma príslušne spojená s mierou daného merateľného priestoru. Z toho dôvodu sa táto problematika týka funkcionálnej analýzy ako aj teórie miery.

Lebesgueove priesory funkcií L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ patria medzi najznámejšie a najviac používané, avšak sú aj ďalšie triedy Banachových priestorov merateľných funkcií, napríklad Lorentzove priestory alebo Orliczove priestory, ktoré majú široké využitie. Pri štúdiu ich spoločných vlastností vzniká teória Banachových priestorov funkcií.

V prvej kapitole je podaná definícia Banachovej normy a Banachovho priestoru funkcií spolu s ich základnými vlastnosťami. V druhej kapitole je definovaná asociovaná Banachova norma a jej príslušný asociovaný Banachov priestor, ako aj ich základné vlastnosti. V tretej kapitole definujeme absolútnu spojitosť normy v Banachových priestoroch funkcií a sú uvedené základné vety o funkciách s absolútne spojitou normou. Švrtrtá kapitola je určená Lebesgueovým priestorom braným ako Banachove priestory funkcií a absolútnej spojitosti normy v týchto priestoroch. V piatej kapitole sú definované rôzne Banachove normy a odvodené k nim príslušné Banachove priestory funkcií, ich podpriestory s absolútne spojitou normou, podpriestory X_b a ich asociované priestory.

1. Banachove priestory funkcií

(R, μ) buď merateľný priestor so σ-konečnou Radonovou mierou μ. $\mathcal{M}^+$ buď kužeľ μ-merateľných funkcí s oborom hodnôt v $[0, \infty]$. Charakteristickú funkciu μ-merateľnej podmnožiny E v R budeme značiť χ_E a množinu bodov $x \in R$ pre ktoré platí $f(x) > c$ budeme značiť $[f > c]$. Uveďme najprv definíciu normy lineárneho priestoru pred definíciou Banachovej normy.

Definícia 1.1. Buď X lineárny priestor. Zobrazenie $\|.\| : X \to [0, \infty)$ sa nazýva *norma na* X, ak pre všetky $x, y \in X$ a všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ sú splnené nasledujúce podmienky:
i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojuholníková nerovnosť)

Priestor s normou $(X, \|.\|)$ sa nazýva normovaný lineárny priestor. Ak je priestor $(X, \|.\|)$ úplný, nazýva sa Banachov priestor.

Definícia 1.2. Zobrazenie $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ nazveme *Banachovou normou*, ak pre všetky f, g, f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$, ležiace v $\mathcal{M}^+$, pre všetky konštanty $\alpha \geq 0$ a pre všetky μ-merateľné podmnožiny E v R platia nasledujúce podmienky:

(P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu - s.v.$; $\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f)$;
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$
(P2) $0 \leq g \leq f \ \mu - s.v. \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$
(P3) $0 \leq f_n \nearrow f \ \mu - s.v. \Rightarrow \rho(f_n) \nearrow \rho(f)$
(P4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$
(P5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$
pre nejakú konštantu C_E, $0 < C_E < \infty$, závislú od E a ρ, ale nezávislú od f.

Existujú aj iné definície Banachovej normy ako aj Banachovho priestoru funkcií so slabšími podmienkami. My sa však budeme držať práve danej definície Banachovej normy, ako aj Banachovho priestoru funkcií definovaného ďalej.

Jedny z najjednoduchších príkladov Banachových priestorov funkcií sú priestory spojené s Lebesgueovými priestormi L^p $(1 \leq p \leq \infty)$. Pre $f \in \mathcal{M}^+$ položme

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left(\int\limits_R f^p \, d\mu \right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \\ \operatorname{ess\,sup}_R f & (p = \infty) \end{cases}$$

kde $\operatorname{ess\,sup}_R f = \inf\{c > 0,\ \mu[f > c] = 0\}$.

Veta 1.3. *Lebesgueove funkcionály ρ_p $(1 \le p \le \infty)$ sú Banachove normy na $\mathcal{M}^+$.*

Dôkaz. Trojuholníková nerovnosť pre ρ_p je klasická Minkowského nerovnosť. Zvyšné časti (P1) sú zrejmé, podobne ako vlastnosti (P2) a (P4) (z vlastností Lebesgueovho integrálu). Vlastnosť (P3) vyplýva z Leviho vety o monotónnej konvergencií ([2], Veta 18.25.) a vlastnosť (P5) z Hölderovej nerovnosti: ak $1 < p < \infty$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, potom

$$\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_R f \, \chi_E d\mu \le \left(\int\limits_R f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_R \chi_E^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = C_E \rho(f)$$

kde $C_E = \mu(E)^{\frac{1}{q}}$. Pre $p = 1$ a $p = \infty$ je vlastnost (P5) zrejmá. $\square$

Nech $\mathcal{M}$ značí všetky μ-merateľné funkcie reálnej premennej na $\mathbb{R}$ a $\mathcal{M}_0$ triedu funkcií ležiacich v $\mathcal{M}$, ktoré sú konečné μ-skoro všade. Ako je zvykom, každé dve funkcie rovnajúce sa μ-skoro všade budeme ztotožňovať. Vektorové operácie na $\mathcal{M}_0$ sú dobre definované prirodzeným spôsobom (avšak nie na celom $\mathcal{M}$ kde funkcie môžu nadobúdať nekonečné hodnoty na množinách kladnej miery). Ukážme, že $\mathcal{M}_0$ je metrizovateľný priestor.

Tvrdenie. Nech $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť disjunktných množín v priestore s mierou $(\mathbb{R}, \mu)$, každá konečnej miery a $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{R}$. Pre každé $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$ položme

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \int\limits_{S_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

Potom $(\mathcal{M}_0, d)$ je metrický priestor.

Dôkaz. Aby sme ukázali, že $d(.,.)$ je metrika, potrebujeme dokázať: □

$d(.,.) : \mathcal{M}_0 \to [0,\infty)$
1) $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$
2) $d(f,g) = d(g,f)$
3) $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$

Je hneď vidieť, že $d(.,.)$ je nezáporná (všetky členy v sume sú kladné) a konečná: f aj g sú konečné $\mu - s.v.$, teda $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} < 1$ z čoho

$$\int\limits_{S_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu < \mu(S_n) \quad \Rightarrow \quad d(f,g) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

Vlastnosti 1) a 2) sú zrejmé. Pre vlastnosť 3) ukážme, že

$$d(f,h) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \int\limits_R \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \left(\int\limits_R \frac{|f-g|}{1+|f-g|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \int\limits_R \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \int\limits_R \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu$$

$$= d(f,g) + d(g,h).$$

Prvá nerovnosť platí, pretože

$$\frac{|f-h|}{1+|f-h|} \leq \frac{|f-g|}{1+|f-g|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|}$$

po roznásobení súčinom menovateľov a upravení nerovnosti totiž dostaneme nerovnosť

$$|f-h| \leq |f-g| + |g-h| + (2|f-g||g-h|),$$

ktorá platí z trojuholníkovej nerovnosti absolútnej hodnoty.

Definícia 1.4. Nech ρ je Banachova norma. Súbor $X = X(\rho)$ funkcií f ležiacich v $\mathcal{M}$, pre ktoré platí $\rho(|f|) < \infty$, nazveme *Banachov priestor funkcií.* Pre $f \in X$ definujme

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Veta 1.5. *Nech ρ je Banachova norma a $X = \{f \in \mathcal{M}; \rho(|f|) < \infty\}$. Potom $(X, \|.\|_X)$ je normovaný lineárny priestor, obsahujúci množinu μ-jednoduchých funkcií na $\mathbb{R}$. Naviac, X je spojito vnoriteľný do $\mathcal{M}_0$ a ak $f_n \to f$ v X, potom $f_n \to f$ v miere na množinách konečnej miery a existuje vybraná podpostupnosť konvergujúca k f bodovo μ-skoro všade.*

Dôkaz. Z Definície 1.4. a vlastnosti Banachovej normy (P5) Definície 1.2. vyplýva, že funkcie z X sú lokálne integrovateľné:

pre každé $x \in \mathbb{R}$ existuje množina konečnej miery E tak, že $x \in E$ a $\int_E f d\mu < \infty$; naviac, f je konečná $\mu - s.v.$ (zo σ-konečnosti miery μ):

$\exists E_j \subset \mathbb{R}$, $(j = 1, 2, 3, ...)$: $\mu(E_j) < \infty$ pre všetky $j = 1, 2, 3, ...$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \mathbb{R}$. Potom ale pre všetky $j = 1, 2, 3, ...$ platí $\int_{E_j} f d\mu < \infty$ a z toho $f < \infty\, \mu - s.v.$ na E_j $(\forall j = 1, 2, 3, ...)$ $\Rightarrow f < \infty$ $\mu - s.v.$

Vektorové operácie sú preto dobre definované na X tak, ako na $\mathcal{M}_0$. Ďalej dokážeme, že $(X, \|.\|_X)$ je normovaný lineárny priestor:

pre $f, g < \infty\, \mu - s.v.$ a pre $\alpha \in \mathbb{R}$ chceme: $f + g \in X$ a $\alpha f \in X$;
$\|f + g\|_X = \rho(|f + g|) \le \rho(|f| + |g|) \le \rho(|f|) + \rho(|g|) \le \|f\|_X + \|g\|_X$
teda $\|f + g\|_X < \infty$ a $f + g \in X$
$\|\alpha f\|_X = \rho(|\alpha f|) = \rho(|\alpha||f|) = |\alpha|\rho(|f|) = |\alpha|\|f\|_X$, z čoho $\|\alpha f\|_X < \infty$ a $\alpha f \in X$

Ukážme, že $\|.\|_X$ je norma, teda že platí:
$\|.\|_X : X \to [0, \infty)$
1) $\|f\|_X = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ....platí z definície Banachovej normy (P1)
2) $\alpha \in \mathbb{R}$; $\|\alpha f\|_X = |\alpha|\|f\|_X$ ....v dôkaze linearity
3) $\|f + g\|_X \le \|f\|_X + \|g\|_X$ ....v dôkaze linearity.

Ďalej vidíme z vlastnosti (P4), že X obsahuje charakteristické funkcie všetkých množín konečnej miery, a teda z linearity osahuje aj všetky μ-jednoduché funkcie. Zostáva dokázať spojitosť vnorenia X do $\mathcal{M}_0$. Obidva tieto priestory sú metrizovateľné. Stačí teda ukázať, že každá konvergentná postupnosť v X, konverguje aj v $\mathcal{M}_0$ (k tej istej limite). Predpokladajme teda, že $f_n \to f$ v X, teda $\rho(|f - f_n|) \to 0$ pre $n \to \infty$. Voľme $\varepsilon > 0$ a E buď ľubovoľná podmnožina $\mathbb{R}$ konečnej miery. Z vlastnosti Banachovej normy (P5):

$$\mu\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \le \int\limits_R \tfrac{1}{\varepsilon}|f - f_n| d\mu$$

$$\le \tfrac{1}{\varepsilon} C_E \rho(|f - f_n|)$$

kde posledný výraz konverguje k nule pre $n \to \infty$, keďže C_E je nezávislé na n. Z toho vidno, že $f_n \to f$ v $\mathcal{M}_0$, resp. $f_n \to f$ v miere na každej množine konečnej miery. Existenciu podpostupnosti konvergujúcej bodovo $\mu - s.v.$ dostaneme z Rieszovej vety ([3], §2.12., str.88). $\square$

Banachove priestory funkcií ktoré vzniknú z Banachových noriem ρ_p sú práve Lebesgueove priestory funkcií $L^p = L^p(\mathbb{R}, \mu)$:

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & (1 \le p < \infty) \\ \\ \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |f|, & (p = \infty) \end{cases}$$

Pre zvyšok textu budeme uvažovať Lebesgueove priestory L^p ako Banachove priestory funkcií určené Banachovými normami ρ_p.

V ďalšej vete ukážeme, že jeden z najdôležitejších výsledkov L^p - teórie, Fatouovo lemma, má prirodzenú analógiu v každom Banachovom priestore funkcií. Fatouova vlastnosť Banachovej normy (P3) je pre tento výsledok výrazne podstatná.

Lemma 1.6. *Nech $X = X(\rho)$ je Banachov priestor funkcií a nech $f_n \in X$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.*

i) Ak $0 \le f_n \nearrow f$ $\mu - s.v.$, potom buď $f \notin X$ a $\|f_n\|_X \nearrow \infty$, alebo $f \in X$ a $\|f_n\|_X \nearrow \|f\|_X$.

ii) (Fatouovo lemma) Ak $f_n \to f$ $\mu - s.v.$ a $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$, potom $f \in X$ a $\|f\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$.

Dôkaz. Prvé tvrdenie je dôsledkom Definície 1.4. a Fatouovej vlastnosti (P3). Pre dôkaz druhého tvrdenia definujme

$h_n(x) = \inf_{m\ge n} |f_m(x)|$ z čoho $0 \le h_n \nearrow |f|$ $\mu - s.v.$ Z vlastností (P2) a (P3):

$$\rho(|f|) = \lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \le \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\ge n} \rho(|f|) \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \|f\|_X < \infty.$$

A keďže f je merateľná (je bodovou limitou postupnosti merateľných funkcií), predošlý výpočet ukazuje, že f leží v X a $\|f\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$. $\square$

Fatouovo Lemma je kľúčové k úplnosti Banachových priestorov funkcií, ktorá je dôsledkom nasledujúcej vety.

Veta 1.7. *Nech $X = X(\rho)$ je Banachov priestor funkcií a nech pre $f_n \in X$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v X k funkcií $f \in X$ a

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \,.$$

Dôkaz. Nech $t = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|,\ t_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|,\ (N = 1, 2, 3, ...)$, teda $0 \leq t_N \nearrow t$. A keďže

$$\|t_N\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \,, \qquad (N = 1, 2, 3, ...),$$

vyplýva z predpokladu vety a predošlej Lemmy, že t leží v X. Teda postupnosť $\sum |f_n(x)|$ konverguje bodovo $\mu - s.v.$ a z toho i $\sum f_n(x)$ konverguje bodovo $\mu - s.v.$ Položme

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,, \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \,, \qquad (N = 1, 2, 3, ...),$$

kde $s_N \to f$ $\mu - s.v.$ Z toho pre všetky M platí: $s_N - s_M \xrightarrow{N\to\infty} f - s_M$ $\mu - s.v.$ Ďalej dostávame

$$\liminf_{N\to\infty} \|s_N - s_M\|_X \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X \,,$$

kde posledný výraz konverguje k nule pre $M \to \infty$ (z predpokladu vety). Z Fatouovho lemma dostávame, že $f - s_M$ leží v X (z čoho platí, že aj f leží v X) a $\|f - s_M\|_X \to 0$ pre $M \to \infty$. A teda, pre $M = 1, 2, 3, ...$

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X \,.$$

Limitným prechodom M do nekonečna dostávame žiadanú nerovnosť.

Práve dokázaná vlastnosť (to, že absolútna konvergencia noriem funkcií implikuje konvergenciu v X) je často nazývaná *Riesz-Fischerova vlastnosť.* $\square$

Dôsledok 1.8. Banachov priestor funkcií $X = X(\rho)$ je úplný.

Ekvivalencia Riesz-Fischerovej vlastnosti a úplnosti normovaného lineárneho priestoru je dokázaná v [4].

2. Asociovaný priestor

Klasická Hölderova nerovnosť tvrdí, že pre všetky funkcie $f \in L^p$ a $g \in L^q$, kde

$$1 \leq p \leq \infty, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

platí

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Nerovnosť platí v zmysle

$$\|g\|_{L^q} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu : f \in L^p, \, \|f\|_{L^p} \leq 1 \right\}$$

pre všetky $g \in L^q$ a všetky p, q splňujúce $1 \leq p \leq \infty$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Všimnime si, že priestor L^q asociovaný s L^p v Hölderovej nerovnosti je popísaný iba pomocou L^p. Podobne je to aj v Lorentzových a Orliczových priestoroch a podobne sa zkonštruuje aj pre Banachove priestory funkcií.

Definícia 2.1. Nech ρ je Banachova norma, potom *asociovaná norma* ρ' k norme ρ je definovaná na $\mathcal{M}^+$ ako

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \, \rho(f) \leq 1 \right\}, \qquad (g \in \mathcal{M}^+).$$

Veta 2.2. *Nech ρ je Banachova norma. Potom jej asociovaná norma ρ' je tiež Banachova norma.*

Dôkaz. Ak $\rho(f) \leq 1$, potom f je konečná $\mu - s.v.$ z dôkazu Vety 1.5. Preto ak $g = 0$ $\mu - s.v.$, potom $\int fg d\mu = 0$ pre všetky $f, \rho(f) \leq 1$ a $\rho'(g) = 0$ z definície ρ'. Naopak ak $g = 0$ $\mu - s.v.$, potom $\int fg d\mu = 0$ pre všetky $f \in \mathcal{M}^+$ s $\rho(f) \leq 1$. Nech E je ľubovoľná merateľná podmnožina $\mathbb{R}$ splňujúca $0 < \mu(E) < \infty$, potom z vlastností (P1) a (P4) Banachovej normy ρ dostávame $0 < \rho(\chi_E) < \infty$. Zvoľme $f = \chi_E/\rho(\chi_E)$, z čoho $\rho(f) = 1$. Dostávame

$$0 = \int_{\mathbb{R}} fgd\mu = \rho(\chi_E)^{-1} \int_E gd\mu.$$

Z toho dostávame, že $g = 0\, \mu - s.v.$ na E. Ale E bola ľubovoľne vybraná množina pozitívnej konečnej miery a miera μ je σ-konečná, z čoho $g = 0\ \mu - s.v.$ na $\mathbb{R}$. Zvyšné časti (P1) a vlastnosť (P2) sú ľahko overiteľné, vyplývajú z vlastností Lebesgueovho integrálu.

Pre vlastnosť (P3) predpokladajme, že $g_n, g \in \mathcal{M}^+$, $(n = 1, 2, 3, ...)$ a $0 \le g_n \nearrow g$ $\mu - s.v.$ Z vlastnosti (P2) normy ρ' (overenej vyššie) dostávame, že postupnosť čísiel $\rho'(g_n)$ rastie spolu s rastúcim n a že $\rho'(g_n) \le \rho'(g)$ pre všetky n. Teda ak $\rho'(g_n) = \infty$ pre aspoň jedno n, vlastnosť (P3) platí. Predpokladajme preto, že $\rho'(g_n) < \infty$ pre všetky n. Nech A je ľubovoľné číslo splňujúce $A < \rho'(g)$. Z definície asociovanej normy vyplýva, že existuje funkcia $f \in \mathcal{M}^+$ pre ktorú $\rho(f) \le 1$ a $\int fgd\mu > A$. Keďže $0 \le fg_n \le fg$ $\mu - s.v.$, dostávame použitím Leviho vety o monotónnej konvergencií ([2], Veta 18.25.), že $\int fg_n d\mu \nearrow \int fg$. Takže existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \ge N$ platí $\int fg_n d\mu > A$. Potom ale z definície asociovanej normy máme $\rho'(g_n) > A$ pre všetky $n \ge N$, čo dokazuje požadovanú vlastnosť $\rho'(g_n) \nearrow \rho'(g)$.

Ak je $\mu(E) < \infty$, potom vlastnosť (P5) normy ρ nám zaručuje existenciu konštanty C_E pre ktorú platí

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_E f d\mu \le C_E \rho(f), \qquad (f \in \mathcal{M}^+).$$

Spolu s definíciou asociovanej normy teda dostávame $\rho'(\chi_E) \le C_E < \infty$, čím sme overili (P4) pre ρ'.

Opäť majme E, $\mu(E) < \infty$ ľubovoľnú merateľnú podmnožinu $\mathbb{R}$. Pre E s $\mu(E) = 0$ vlastnosť (P5) platí. Ostáva nám teda, že $\mu(E) > 0$. V tomto prípade dostávame z vlastností normy ρ (P1) a (P5) konštantu $C'_E = \rho(\chi_E)$ a platí $0 < C'_E < \infty$. Funkcia $f = \chi_E/\rho(\chi_E)$ má normu $\rho(f) = 1$, z čoho spolu s definíciou asociovanej normy dostávame

$$\int_E gd\mu = C'_E \int_{\mathbb{R}} fgd\mu \le C'_E \rho'(g),$$

z čoho dostávame platnosť (P5) pre ρ'. $\square$

Definícia 2.3. Nech ρ je Banachova norma a $X = X(\rho)$ Banachov priestor funkcií určený ρ. ρ' nech je jej asociovaná norma. Banachov priestor funkcií $X = X(\rho')$ určený ρ' nazývame *asociovaným priestorom* k priestoru X a značíme X'.

Z definície Banachovho priestoru funkcií a definície asociovanej normy plynie, že norma funkcie g v asociovanom priestore X' je daná

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu : f \in X,\ \|f\|_X \leq 1 \right\}.$$

Veta 2.4. *(Hölderova nerovnosť). Nech X je Banachov priestor funkcií a X' jeho asociovaný priestor. Ak $f \in X$ a $g \in X'$, potom fg je integrovateľná a platí*

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Dôkaz. Ak je $\|f\|_X = 0$, potom $f = 0$ $\mu - s.v.$ a obidve strany nerovnosti sú nulové. Ak $\|f\|_X > 0$, potom funkcia $f/\|f\|_X$ má normu 1 a teda máme

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \left(\frac{f}{\|f\|_X} \right) g \right| d\mu \leq \|g\|_{X'}.$$

Po vynásobení oboch strán $\|f\|_X$ dostávame požadovanú nerovnosť. □

Veta 2.5. *Nech p a q splňujú*

$$1 \leq p \leq \infty,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

potom L^q je asociovaným priestorom k priestoru L^p.

Dôkaz. Tvrdenie je zrejmým následkom definície asociovanej L^p normy a asociovaného priestoru. □

Lorentzova-Luxemburgova veta dokázaná v ([1], Th. 2.7.) ukazuje jednoznačnosť asociovaného priestoru, v zmysle $(X')' = X$ a $\|f\|_X = \|f\|_{X''}$. Znamená to, že f leží v X práve vtedy, keď leží aj v X''. Teda pre Banachove priestory funkcií X a Y platí $X' = Y$ práve vtedy, keď $Y' = X$.

Dôsledok 2.6. Nech X a Y sú Banachove priestory funkcií. Ak platí: $X \subset Y'$ a zároveň $Y \subset X'$, potom X a Y sú navzájom asociované.

3. Absolútna spojitosť normy

V tejto časti zavedieme pojem absolútnej spojitosti Banachovej normy pre funkciu $f \in X(\rho)$ a uvedieme niekoľko základných vlastností takýchto funkcií.

Budeme používať $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ na označenie ľubovoľnej postupnosti $\mu-$merateľných podmnožín $\mathbb{R}$. Budeme písať $E_n \to \varnothing\ \mu - s.v.$, ak charakteristické funkcie χ_{E_n} konvergujú k nule bodovo $\mu - s.v.$; ak je naviac $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca, budeme písať $E_n \searrow \varnothing\ \mu - s.v.$ Platí, že $E_n \to \varnothing\ \mu - s.v.$ práve vtedy, keď

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

je μ-merateľná množina miery 0. Z toho, $E_n \to \varnothing\ \mu - s.v.$ práve vtedy, keď postupnosť $\{E_n\}$ konverguje k množine miery 0. Nevyžadujeme však, aby množiny E_n boli konečnej miery.

Definícia 3.1. Funkcia f v Banachovom priestore funkcií X má *absolútne spojitú normu* v X ak $\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$ pre každú postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujúcu: $E_n \to \varnothing\ \mu - s.v.$ Množinu funkcií z X, ktoré majú absolútne spojitú normu budeme značiť X_a. Ak $X_a = X$, potom hovoríme, že X má absolútne spojitú normu.

V nasledujúcej vete ukážeme, že v predchádzajúcej definícii sa stačilo obmedziť na klesajúce postupnosti $\{E_n\}$.

Veta 3.2. *Funkcia f v Banachovom priestore funkcií X má absolútne spojitú normu práve vtedy, keď $\|f\chi_{E_n}\|_X \searrow 0$ pre každú postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujúcu: $E_n \searrow \varnothing\ \mu - s.v.$*

Dôkaz. Nutnosť podmienky je zrejmá. Pre dostatočnosť predpokladajme, že f splňuje uvedenú vlastnosť pre klesajúce postupnosti a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ buď ľubovolná postupnosť pre ktorú $F_n \to \varnothing\ \mu - s.v.$ Potom postupnosť $E_n = \bigcup_{m\geq n} F_m$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, je klesajúca a má rovnaké $\limsup$ ako $\{F_n\}$ a to množinu nulovej miery. Z predpokladu teda $\|f\chi_{E_n}\|_X \searrow 0$. Keďže pre všetky n platí $F_n \subset E_n$ platí aj, že $\|f\chi_{F_n}\| \searrow 0$ a teda f má absolútne spojitú normu. $\square$

Uvedieme niektoré základné ale dôležité vlastnosti funkcií s absolútne spojitou normou (Veta 3.4. a Veta 3.5.), dokázané v ([1] Th. 3.5. a Th. 3.6.), v ktorých sa využíva nasledujúce lemma.

Lemma 3.3. *Nech $f \in X$ má absolútne spojitú normu, potom pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že ak $\mu(E) < \delta$ potom $\|f\chi_E\|_X < \varepsilon$.*

Dôkaz. Dokážme sporom. Nech existuje $\varepsilon > 0$ a merateľné množiny E_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$, splňujúce:

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \qquad \|f\chi_{E_n}\| \geq \varepsilon.$$

Potom odhad

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < 2^{-m+1}, \qquad (m = 1, 2, 3, ...)$$

ukazuje, že $E_n \to \emptyset$ $\mu - s.v.$, ale $\|f\chi_{E_n}\| \not\to 0$ čo vedie k sporu s absolútnou spojitosťou normy funkcie f. $\square$

Veta 3.4. *Funkcia f v Banachovom priestore funkcií X má absolútne spojitú normu práve vtedy, keď $\|f_n\|_X \searrow 0$ pre každú postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μ-merateľných funkcií splňujúcich: $|f| \geq f_n \searrow 0$ $\mu - s.v.$*

Veta 3.5. *Funkcia f v Banachovom priestore funkcií X má absolútne spojitú normu práve vtedy, keď $\|f_n - g\|_X \to 0$ pre ľubovoľné g, f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ μ-merateľné funkcie, splňujúce: $|f_n| \leq |f|$ pre všetky n a $f_n \to g$ $\mu - s.v.$*

Z Vety 1.5. vieme, že každý Banachov priestor funkcií X obsahuje jednoduché funkcie. Uvažujme podpriestor, ktorý vznikne uzavretím jednoduchých funkcií v X a jeho súvislosti s podpriestorom X_a, funkcií s absolútne spojitou normou.

Definícia 3.6. Nech X je Banachov priestor funkcií. Uzáver jednoduchých funkcií v X označme X_b.

Veta 3.7. *Podpriestor X_b je uzáver množiny obmedzených funkcií s nosičmi konečnej miery v X.*

Dôkaz. Stačí nám overiť, že každá obmedzená funkcia s nosičom konečnej miery leží v X_b. Predpokladajme teda, že f je obmedzená a jej nosič $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ je konečnej miery. Ak je $f \geq 0$, potom nieje obtiažne zostrojiť postupnosť nezáporných jednoduchých funkcií f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$, s nosičom na E, ktoré rovnomerne konvergujú k f. Potom ale

$$\|f_n - f\|_X = \|(f_n - f)\chi_E\|_X \leq \|f_n - f\|_{L^\infty}\|\chi_E\|_X,$$

kde sa posledný člen blíži k nule pre $n \to \infty$, keďže miera E je konečná, z čoho $\|\chi_E\|_X < \infty$. Pre obecnú funkciu f použijeme práve dokázané zvlášť pre f^+ a f^-, kde $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, teda f^+ aj f^- sú nezáporné a $f = f^+ - f^-$. □

Veta 3.8. *Podpriestor funkcií s absolútne spojitou normou leží v X_b.*

Dôkaz. Majme funkciu $f \in X_a$ a nech $(R_n)_{n=1}^\infty$ je rastúca postupnosť množín konečnej miery tak, že $\bigcup_{n=1}^\infty R_n = \mathbb{R}$. Definujme postupnosť funkcií

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}\big(\, f(x) \,\big) \cdot \min\{|f(x)|, n\chi_{R_n}(x)\}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Potom z predošlej vety dostávame, že všetky tieto funkcie ležia v X_b. A keďže $|f_n| \leq |f|$ a $f_n \to f$ $\mu - s.v.$, môžme použiť Vetu 3.5., z ktorej dostávame $f_n \to f$ v X. Priestor X_b je uzavretý, a teda $f \in X_b$ a $X_a \subset X_b$. □

Veta 3.9. *Podpriestory X_a a X_b sa zhodujú práve vtedy, keď pre každú množinu E konečnej miery má jej charakteristická funkcia χ_E absolútne spojitú normu.*

Dôkaz. Nutnosť je zrejmá, keďže χ_E leží v X_b pre každú množinu E konečnej miery. Obrátene, nech každá χ_E s $\mu(E) < \infty$ má absolútne spojitú normu, z čoho aj každá jednoduchá funkcia má absolútne spojitú normu. A keďže X_a je uzavretý podpriestor, platí $X_b \subset X_a$. Opačná inklúzia je dokázaná v predošlej vete, teda $X_a = X_b$. □

4. Absolútna spojitosť normy v L^p priestoroch

Veta 4.1. *Pre $1 \leq p < \infty$ majú Lebesgueove priestory $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ absolútne spojitú normu.*

Dôkaz vyplýva z Lebesgueovej vety ([2], Veta 18.26.) a Vety 3.2.

Pre L^∞ to ale neplatí. Pre tieto priestory záleží na vlastnostiach miery μ. Napríklad pre mieru bez atómov, teda mieru pre ktorú $\mu(x) = 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že funkcie s absolútne spojitou normou sú práve funkcie nulové μ-skoro všade.

Veta 4.2. *Nech $X = L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ je Banachov priestor funkcií a μ je neatomická miera. Potom $f \in L_a^\infty$ práve vtedy, keď $f = 0$ $\mu - s.v.$ na $\mathbb{R}$.*

Dôkaz. To, že $f = 0$ $\mu - s.v.$ implikuje $f \in L_a^\infty$, je zrejmé. Opačnú implikáciu dokážme sporom. Nech neplatí, že f je nulová skoro všade, potom $0 < \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}}(|f|) = A < \infty$ (z konečnosti $\mu - s.v.$ funkcie f je $A < \infty$). Keďže μ je neatomická, existuje neprázdna množina E_1, $0 < \mu(E_1) < \infty$ tak, že $f(x) \geq \frac{A}{2}$ pre všetky $x \in E_1$. Z tejto množiny indukciou vytvoríme postupnosť množín $\{E_m\}_{m=1}^\infty$: $E_{m+1} \subset E_m$ a $\mu(E_{m+1}) = \frac{\mu(E_m)}{2}$, existenciu takejto postupnosti zaručuje predpoklad, že μ je neatomická. Potom existuje $m_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $m > m_0$ platí: $\mu(E_m) < 2^{-m}$. Z toho $E_m \to \varnothing$ $\mu - s.v.$, ale pre všetky m je $\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} \geq A/2$ a $f \notin L_a^\infty$. $\square$

Dôsledok 4.3. Nech $1 \leq p < \infty$ potom pre Lebesgueove priestory L^p dostávame z Vety 3.9., že $L_a^p = L_b^p = L^p$. Ak je μ neatomická miera, potom $L_a^\infty \subsetneqq L_b^\infty$.

Základnou atomickou mierou je Diracova miera δ v bode d, teda pre každú množinu A ležiacu v $\sigma-$algebre všetkých podmnožín $\mathbb{R}$:

$$\delta_d(A) = \begin{cases} 1 & ak\, d \in A \\ \\ 0 & ak\, d \notin A \end{cases}$$

Diracova miera je príkladom čisto atomickej miery, teda miery, kde každá množina kladnej miery obsahuje aspoň jeden atóm.

Veta 4.4. *Priestor $L^\infty(\mathbb{R}, \delta_d)$ má absolútne spojitú normu.*

Dôkaz. $L^\infty(\mathbb{R}, \delta_d) \subset L_a^\infty(\mathbb{R}, \delta_d)$:

Je dôležité si uvedomiť, že v priestore s Diracovou mierou $E_m \to \varnothing$ $\mu - s.v.$ práve vtedy, keď d leží v konečnom počte množín E_m.
Nech $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \delta_d)$ teda $\|f\|_{L^\infty} < \infty$. Potom

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}(|f|) = \inf\{c > 0; \delta_d[|f| > c] = 0\} =$$

$$= \inf\{c > 0; d \notin [|f| > c]\} = \inf\{c > 0; |f(d)| \leq c\} = |f(d)| < \infty\,.$$

Z toho

$$\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}(|f\chi_{E_m}|) = \inf\{c > 0; d \notin [|f\chi_{E_m}| > c]\}$$

a keďže d leží v konečnom počte množín E_m, je $\|f\chi_{E_m}\|$ rovné nule pre všetky m väčšie ako nejaké M. $\square$

Podobným spôsobom môžeme odvodiť absolútnu spojitosť L^∞ priestorov s Diracovou mierou v konečnom počte bodov. To, že charakteristické funkcie konvergujú bodovo k nule vlastne znamená, že množiny $\{E_m\}$ "odídu" mimo všetky atómy.

Veta 4.5. *Nech $(\mathbb{R}, \mu)$ je merateľný priestor a μ je Diracova miera v konečnom počte bodov $\{d_n\}_{n=1}^s$. Potom $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ má absolútne spojitú normu.*

Dôkaz. To, že postupnosť množín $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ splňuje $E_m \to \emptyset\ \mu - s.v.$ znamená, že každý atóm leží v konečnom počte množín E_m. Preto existuje $M \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $m > M$ platí: $\{d_n\}_{n=1}^s \notin E_m$. Z toho dostávame pre ľubovoľnú funkciu $f \in L^\infty$:

$$\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}(|f\chi_{E_m}|) = \inf\{c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |f(d_n)\chi_{E_m}(d_n)| \leq c\}$$

a to je rovné nule pre všetky $m > M$ a teda $\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} \xrightarrow{m\to\infty} 0$. $\square$

Dôsledok 4.6. Nech μ je čisto atomická miera s konečným počtom atómov. Potom priestor $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ má absolútne spojitú normu.

Pre čisto atomickú mieru μ s nekonečným počtom atómov, kde každý atóm má rovnakú mieru $\delta > 0$, je situácia analogická priestoru l^∞, priestoru obmedzených postupností. Počítacia miera μ v l^∞ priradzuje každému prirodzenému číslu mieru 1 a každá množina má mieru rovnú počtu prirodzených čísiel ktoré obsahuje.

Veta 4.7. *V priestore obmedzených postupností l^∞ majú absolútne spojitú normu práve postupnosti ležiace v c_0, priestore postupností konvergujúcich do nuly v nekonečne.*

Dôkaz. 1)$l_a^\infty \subset c_0$:
Majme $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_a^\infty$, teda $\|x\|_{l^\infty} = \sup\{|x_n|\}_{n=1}^\infty < \infty$ a $\|x\chi_{E_m}\|_{l^\infty} \to 0$ pre každú postupnosť $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ splňujúcu $E_m \to \varnothing$ $\mu - s.v.$, tj. pre ktorú $\chi_{E_m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ bodovo $\mu - s.v.$, čo znamená, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M,\ n \notin E_m\ ,$$

teda každé n leží v konečnom počte množín E_m.
Pre spor predpokladajme, že $x \notin c_0$, teda existuje $\varepsilon > 0$, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje $n' > n$také, že $x_{n'} > \varepsilon$. Voľme postupnosť množín $E_m = [m, \infty)$, pre ktoré platí $E_m \to \varnothing$ $\mu - s.v.$ (n-tú zložku postupnosti $|x\chi_{E_m}|$ označme $|x\chi_{E_m}|_n$). Potom

$$\|x\chi_{E_m}\|_{l^\infty} \quad = \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x\chi_{E_m}|_n\} = \sup_{n\in E_m}\{|x_n|\}.$$

Posledný výraz ale nejde k nule pre $m \to \infty$, pretože pre každé $n, m \in \mathbb{N}$ môžeme nájsť $M > \max\{n, m\}$ tak, že $x_M > \varepsilon$, z čoho $x \notin l_a^\infty$.

2)$c_0 \subset l_a^\infty$:
Opäť zvoľme ľubovoľné $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in c_0$, teda

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n' \in \mathbb{N} : \forall n \geq n'\, je\, x_n < \varepsilon.$$

A ľubovoľnú postupnosť množín $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ splňujúcu: $E_m \to \varnothing$ $\mu - s.v.$ Potom existuje $M \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : n < n'$ a $\forall m > M$ je $n \notin E_m$. A z toho

$$\|x\chi_{E_m}\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x\chi_{E_m}|_n\} = \sup_{n\in E_m}\{|x_n|\} < \varepsilon$$

pre $m > M$. ε sme volili na začiatku ľubovoľne, preto $\|x\chi_{E_m}\|_{l^\infty} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$ □

Nasledujúca veta ukazuje obdobný výsledok aj pre čisto atomickú mieru μ, ktorá nepriradzuje každému atómu rovnakú mieru.

Veta 4.8. *Nech $(\mathbb{R}, \mu)$ je merateľný priestor a μ je čisto atomická miera s nekonečným počtom atómov $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(b_n) > 0$. Potom $f \in L_a^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ práve vtedy,* *keď* $f(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Dôkaz. Nech $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ splňuje $f(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n' \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n > n'$ je $f(b_n) < \varepsilon$. Majme ľubovoľnú postupnosť množín $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ splňujúcu: $E_m \to \varnothing\ \mu - s.v.$ To zaručuje existenciu $M \in \mathbb{N}$ tak, že pre $\forall n < n'$ a $\forall m > M$ je $b_n \notin E_m$. Potom

$$\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \mu[|f\chi_{E_m}| > c] = 0\} =$$

$$= \inf\{c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |f(b_n)\chi_{E_m}(b_n)| \leq c\}$$

a to je menšie ako ε pre všetky $m > M$. ε sme volili na začiatku ľubovoľne, teda $\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ a $f \in L^\infty$. Ak by funkcia $f \in L^\infty_a$ nesplňovala $f(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ukážeme, že $f \notin L^\infty_a$. Pre takúto funkciu nájdeme $\varepsilon > 0$, splňujúce:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists n' > n : |f(b_{n'})| \geq \varepsilon.$$

Podobne ako v predošlom príklade, za množiny $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ voľme $E_m = \{b_n\}_{n=m}^\infty$. Potom

$$\|f\chi_{E_m}\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |f(b_n)\chi_{E_m}(b_n)| \leq c\} \geq |f(b_{n'})| \geq \varepsilon$$

pre všetky $m \in \mathbb{N}$ a teda $f \notin L^\infty_a$. □

Veta 4.9. *Banachov priestor funkcií $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ má absolútne spojitú normu práve vtedy, keď μ je čisto atomická miera s konečným počtom atómov.*

Dôkaz. Ak by μ nebola čisto atomická, existovala by množina kladnej miery, ktorá by neobsahovala atóm a funkcie nenulové na tejto množine by nemali absolútne spojitú normu z Vety 4.2. Z predošlej vety máme nutnosť konečného počtu atómov. Opačná inplikácia plynie z Dôsledku 4.6. □

5. Príklady Banachových priestorov na $(\mathbb{R},\lambda)$

Na priestore reálnych funkcií jednej reálnej premennej s Lebesgueovou mierou je veľa možností, ako zkonštruovať Banachovu normu a príslušný Banachov priestor funkcií. V tejto kapitole uvedieme niekoľko takýchto noriem, k nim príslušné Banachove priestory funkcií a ukážeme, ktoré funkcie tvoria podpriestory X_a, X_b a asociovaný priestor X'.

Príklad 5.1. Nech $(\mathbb{R}^+, \lambda)$ je nekonečný interval reálnych čísiel $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mierou λ. Pre $f \in \mathcal{M}_0^+$ definujme $\rho(f)$ nasledovne:

$$\rho(f) = \int_0^1 f(x) d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x).$$

Ukážme, že ρ je dobre definovaná Banachova norma a teda určuje Banachov priestor funkcií:

Keďže f je nezáporná funkcia, je $\int_0^1 f(x) d\lambda \geq 0$, a tiež $\operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x) \geq 0$ a teda aj $\rho(f) \geq 0$ pre všetky $f \in \mathcal{M}_0^+$.

(P1): ak $\rho(f) = 0$ potom musí každý sčítanec byť nulový (f je nezáporná). Teda ak $\int_0^1 f(x) d\lambda = 0$, potom $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na $(0, 1]$. Takisto ak $\operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x) = 0$, potom $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na $[1, \infty)$, teda $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na celom intervale $(0, \infty)$. Naopak, nech $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na $(0, \infty)$, potom integrál aj esenciálne supremum sú rovné nule a $\rho(f) = 0$. Ďalej, pre $\alpha \geq 0$

$$\rho(\alpha f) = \int_0^1 \alpha f(x) d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} \alpha f(x) =$$

$$= \alpha \int_0^1 f(x) d\lambda + \alpha \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x) = \alpha \rho(f).$$

A trojuholníková nerovnosť:

$$\rho(f + g) = \int_0^1 (f + g) d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} \big(f(x) + g(x) \big) =$$

$$= \int_0^1 f d\lambda + \int_0^1 g d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x) + \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} g(x) =$$

$$= \rho(f) + \rho(g).$$

(P2): $0 \leq g \leq f$ $\lambda - s.v.$, potom $\int_0^1 g d\lambda \leq \int_0^1 f d\lambda$ a $\operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} g(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq x < \infty} f(x)$, a z toho $\rho(g) \leq \rho(f)$.

(P3): Podobne ako v (P1) a (P2), $\rho(f_n)$ a $\rho(f)$ rozdelíme na sčítance a požadovanú vlastnosť, konvergenciu, dokážeme pre každú časť zvlášť, z čoho už plynie konvergencia $\rho(f_n) \nearrow \rho(f)$.

(P4): nech $\lambda(E) < \infty$, potom $\rho(\chi_E) = \int\limits_0^1 \chi_E d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1\le x<\infty} \chi_E(x) \le 1 + 1 < \infty$.

(P5): nech $\lambda(E) < \infty$, označme $A = E \cap (0,1]$ a $B = E \setminus (0,1]$, potom

$$\int\limits_E f d\lambda = \int\limits_A f d\lambda + \int\limits_B f d\lambda \le \int\limits_0^1 f d\lambda + \lambda(B) \operatorname{ess\,sup}_{1\le x<\infty} f(x)$$

$$\le C_E \rho(f),$$

kde $C_E = \max\{1, \lambda(B)\}$.
Priestor funkcií $X = X(\rho)$, pre ktoré je $\rho(f) < \infty$ je Banachov priestor funkcií.

Funkcie z X s absolútne spojitou normou sú funkcie, pre ktoré $\int\limits_0^1 f(x)\chi_{E_m}(x) d\lambda + \operatorname{ess\,sup} f(x)\chi_{E_m}(x) \to 0$ pre všetky $E_m \to \varnothing$ $\lambda - s.v.$ Teda

$$\int\limits_0^1 f(x)\chi_{E_m}(x) d\lambda \quad \to \quad 0 \ a \ \operatorname{ess\,sup}_{1\le x<\infty} f(x)\chi_{E_m}(x) \to 0.$$

Pre $f \in X_a$ dostávame použitím Vety 4.2., že f je nulová skoro všade na $[1, \infty)$. A ak je f nulová skoro všade na $[1, \infty]$ dostávame z Vety 4.2. absolútnu spojitosť normy f. Takže $f \in X$ má absolútne spojitú normu práve keď $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na $[1, \infty)$.

Z Vety 3.8. vieme, že $X_a \subset X_b$, preto stačí nájsť L_b^∞ na intervale $[1, \infty)$. Ukážme, že L_b^∞ na $[1, \infty)$ sú práve funkcie konvergujúce do nuly v nekonečne:
Nech $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ $\lambda - s.v.$, teda pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $M \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{ess\,sup}_{M\le x<\infty} |f(x)| < \varepsilon$. Vzhľadom k Vete 3.7. potrebujeme nájsť obmedzené funkcie g_n definované na $[1, \infty)$, splňujúce: $\lambda(spt(g_n)) < \infty$ a $\|f - g_n\|_{L^\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. g_n definujme takto: $g_n = f\chi_{[1,n]}$, $(n = 1,\, 2,\, 3, ...)$. Pre všetky $n = 1,\, 2,\, 3, ...$ sú g_n obmedzené $\lambda - s.v.$(z obmedzenosti f $\lambda - s.v.$) a majú nosič konečnej miery, teda všetky ležia v X_b. Voľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne, potom

$$\operatorname{ess\,sup}_{1\le x<\infty} |(f - g_n)(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{n\le x<\infty} |f(x)|$$

a to je menšie ako ε pre všetky $n > M$, kde ε sme volili na začiatku ľubovolne, z toho $\|f - g_n\|_{L^\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Ukážme, že ak $f \in L_b^\infty$ potom $f(x)$ konverguje do nuly $\lambda - s.v.$ pre $x \to \infty$. Pre spor predpokladajme $f \in L_b^\infty$ a f nekonverguje do nuly v nekonečne; teda existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pre všetky $m \in \mathbb{N}$ je $\operatorname{ess\,sup}_{m\le x<\infty} |f(x)| \ge \varepsilon$ a existujú $g_n \in X_b$ tak, že $\|f - g_n\|_{L^\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Z obmedzenosti nosičov funkcií g_n existuje $m_n \in \mathbb{N}$ tak, že $(spt\, g_n) \cap [m_n, \infty) = 0$. Potom ale

$$\|f - g_n\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{1 \le x < \infty} |(f - g_n)(x)| \ge$$

$$\ge \operatorname{ess\,sup}_{m_n \le x < \infty} |f(x)| > \varepsilon.$$

a $\|f - g_n\|_{L^\infty} > \varepsilon$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Z toho $f \in X_b$ práve vtedy, keď $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$.

Ukážme, že asociovaný priestor X' sú práve funkcie ležiace v Banachovom priestore funkcií

$$Y = \{f \in \mathcal{M}_0^+ : \rho_Y(f) < \infty\}$$

s normou

$$\rho_Y(f) \quad = \quad \operatorname{ess\,sup}_{0 < x \le 1} f(x) + \int\limits_1^\infty f d\lambda.$$

Vzhľadom k Dôsledku 2.6. Lorentzovej-Luxemburgovej vety stačí, ak $X \subset Y'$ a zároveň $Y \subset X'$.
Nech $f \in X$, teda $\int\limits_0^1 f d\lambda < \infty$ a $\operatorname{ess\,sup}_{1 \le x < \infty} f(x) < \infty$. Potom

$$\rho'_Y(f) = \sup\{\int\limits_{\mathbb{R}} fg d\lambda : \|g\|_Y \le 1\} = \sup\{\int\limits_0^1 fg d\lambda + \int\limits_1^\infty fg d\lambda : \|g\|_Y \le 1\} \le$$

$$\le \int\limits_0^1 f d\lambda + \operatorname{ess\,sup}_{1 \le x < \infty} f(x) < \infty$$

a $f \in Y'$.

A pre $f \in Y$, tj. $\operatorname{ess\,sup}_{0 < x \le 1} f(x) < \infty$ a $\int\limits_1^\infty f d\lambda < \infty$ platí

$$\rho'(f) = \sup\{\int\limits_{\mathbb{R}} fg d\lambda : \|g\|_X \le 1\} = \sup\{\int\limits_0^1 fg d\lambda + \int\limits_1^\infty fg d\lambda : \|g\|_X \le 1\} \le$$

$$\le \operatorname{ess\,sup}_{0 < x \le 1} f(x) + \int\limits_1^\infty f d\lambda < \infty$$

a $f \in X'$.

Príklad 5.2. Nech $(\mathbb{R}, \lambda)$ je priestor reálnych čísiel s Lebesgueovou mierou λ. $\rho(f)$ pre funkcie $f \in \mathcal{M}_0^+$ definujme takto:

$$\rho(f) \quad = \quad \max\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\lambda, \operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x)\}.$$

Opäť ukážme, že ρ je dobre definovaná Banachova norma:

Pre $f \in \mathcal{M}_0^+$, teda nezápornú funkciu je každý člen $\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\lambda, \operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x)\}$ väčší alebo rovný nule, preto aj ρ je nezáporné zobrazenie.

(P1): ak $\rho(f) = 0$ potom aj $\operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x) = 0$ a $f = 0$ $\lambda - s.v.$ Ak $f = 0$ $\lambda - s.v.$, potom aj integrál aj esenciálne supremum sú nulové, teda $\rho(f) = 0$. Pre $\alpha \geq 0$ je $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)d\lambda = \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\lambda$ a $\operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} \alpha f(x) = \alpha \operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x)$, teda táto vlastnosť platí aj pre maximum. Trojuholníková nerovnosť a vlastnosti (P2) a (P3) platia tiež pre každý člen zvlášť, preto aj pre maximum.

(P4): nech $\lambda(E) < \infty$, potom

$$\begin{aligned} \rho(\chi_E) = \max\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_E d\lambda, \operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} \chi_E(x)\} \leq \\ \leq \max\{\lambda(E), 1\} < \infty. \end{aligned}$$

(P5): nech $\lambda(E) < \infty$ teda $\int\limits_E f d\lambda \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \leq \max\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\lambda, \operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x)\}$, teda $C_E = 1$.

ρ je teda Banachova norma z čoho vyplýva, že $L^1 \cap L^\infty$ je Banachov priestor funkcií. Jeho absolútne spojitú časť tvoria iba funkcie nulové $\lambda - s.v.$, pretože Lebesgueova miera je neatomická a aby pre $m \to \infty$ platilo $\operatorname{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} f(x)\chi_{E_m}(x) \to 0$ pre každú postupnosť $E_m \to \varnothing$ $\lambda - s.v.$, musí byť funkcia nulová $\lambda - s.v.$ (Veta 4.2.).

Podobne ako v predošlom príklade, X_b sú funkcie z X, pre ktoré $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ a $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$.

Príklad 5.3. Nech $(\mathbb{R}, \lambda)$ je priestor reálnych čísiel s Lebesgueovou mierou λ. $\rho(f)$ pre funkcie $f \in \mathcal{M}_0^+$ definujme takto:

$$\rho(f) = \sup_{|E|=1} \int\limits_E f(x)d\lambda,$$

kde supremum počítame zo všetkých množín miery 1.

ρ je Banachova norma:

Pre nezápornú funkciu f je i $\int_E f d\lambda$ nezáporný, a teda aj supremum zo všetkých množín E miery 1.

(P1): Ak $\sup_{|E|=1} \int_E f d\lambda = 0$ potom $\int_E f d\lambda = 0$ pre všetky množiny miery 1, z čoho $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na celom $\mathbb{R}$. Nech $f = 0$ $\lambda - s.v.$ na $\mathbb{R}$ potom $\int_E f d\lambda = 0$ pre všetky množiny miery 1 a teda i supremum cez všetky takéto množiny je rovné nule. Takisto aj pre zvyšné časti (P1), ako aj pre (P2) a (P3), dané vlastnosti platia pre každú množinu miery 1, a teda aj pre supremum zo všetkých takýchto množín.

(P4): ak $\lambda(A) < \infty$, potom $\sup_{|E|=1} \int_E \chi_A d\lambda = \min\{1, \lambda(A)\} < \infty$.

(P5): Nech $\lambda(A) < \infty$, potom buď $\lambda(A) \leq 1$, a vtedy $\int_A f d\lambda \leq \rho(f)$, alebo $\lambda(A) > 1$. V druhom prípade platí $\int_A f d\lambda \leq \lambda(A) \sup_{|E|=1} \int_E f d\lambda \leq \lambda(A)\rho(f)$. Teda $C_E = \max\{1, \lambda(A)\}$.

Dokázali sme, že ρ je Banachova norma. Teda platí, že $X = X(\rho)$, priestor funkcií s konečnou normou ρ je Banachov priestor funkcií.

Ukážme, že $X_a = X$. Vzhľadom k Vete 3.2. stačí ukázať, že $\|f\chi_{E_n}\|_X \searrow 0$ pre každú postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujúcu $E_n \searrow \varnothing$ $\mu - s.v.$ Zvoľme ľubovoľne takúto postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom existuje $M \in \mathbb{N}$ a množina F, $\mu(F) = 1$ tak, že pre všetky $n > M$ platí $E_n \subset F$. Pre tieto n počítajme

$$\|f\chi_{E_n}\|_X = \sup_{|E|=1} \int_E f(x)\chi_{E_n}(x) d\lambda = \int_F f(x)\chi_{E_n}(x) d\lambda = \|f\chi_{E_n}\|_{L^1_F}.$$

Ale na priestore L^1_F, v ktorom ležia všetky funkcie $f \in X$, majú absolútne spojitú normu všetky funkcie z L^1_F, teda $X_a = X$. Použitím Vety 3.8. máme $X_a \subset X_b$ teda $X_a = X_b = X$.

Asociovaný priestor k preistoru X je práve priestor $L^1 \cap L^\infty$ z predošlého Prikladu 5.2., a to

$$Y = \{g : g \in M_0^+, \max\{\|g\|_{L^1}, \|g\|_{L^\infty}\} < \infty\}.$$

Vzhľadom k Dodatku 2.6. Lorentzovej-Luxemburgovej vety stačí ukázať, že $Y' \subset X$ a zároveň $X' \subset Y$: Nech $g \in Y'$, teda

$$\|g\|_{Y'} = \sup\{\int_{\mathbb{R}} fg d\lambda : f \in \mathcal{M}^+, \max \|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\} \leq 1\} < \infty.$$

Vidno, že pre každú charakteristickú funkciu množiny E miery 1 platí $\max\{\|\chi_E\|_{L^1}, \|\chi_E\|_{L^\infty}\} = 1$.

Z toho pre všetky množiny E miery 1:

$$\int_E g = \int_{\mathbb{R}} g\chi_E \leq \sup\{\int_{\mathbb{R}} gfd\lambda : f \in \mathcal{M}^+, \max\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\} \leq 1\} = \|g\|_{Y'},$$

a teda i supremum zo všetkých množín miery jedna je menšie alebo rovné ako $\|g\|_{Y'} < \infty$ a $g \in X$.

Opačne, nech $f \in X'$, tj.

$$\|f\|_{X'} = \sup\{\int_{\mathbb{R}} fgd\lambda : g \in \mathcal{M}^+, \sup_{|E|=1} \int_E gd\lambda \leq 1\} < \infty.$$

, a pre spor predpokladajme, že f neleží v Y, teda $\max\{\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\} = \infty$, čo platí iba vtedy, ak aspoň jeden člen je nekonečný. Ukážme, že v obidvoch prípadoch dospejeme k $f \notin X'$. Nech $\|f\|_{L^\infty} = \infty$, potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje množina kladnej konečnej miery E_n tak, že $f(x) > n$ $\lambda - s.v.$ na E_n. Definujme postupnosť funkcií $g_n = \frac{\chi_{E_n}}{|E_n|}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, ktoré ležia v $\mathcal{M}^+$ a $\sup_{|E|=1} \int_E g_n d\lambda \leq 1$. Potom

$$\sup\{\int_{\mathbb{R}} fgd\lambda : g \in \mathcal{M}^+, \sup_{|E|=1} \int_E gd\lambda \leq 1\} \geq \int_{\mathbb{R}} fg_n = \int_{E_n} \frac{f}{|E_n|} \geq n$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$, z čoho $\|f\|_{X'} = \infty$ a $f \notin X'$. Pre druhý prípad, keď $\int_{\mathbb{R}} fd\lambda = \infty$ stačí voliť $g = 1$ ($g \in \mathcal{M}^+$a $\sup_{|E|=1} \int_E gd\lambda = 1$) . Potom totiž

$$\sup\{\int_{\mathbb{R}} fgd\lambda : g \in \mathcal{M}^+, \sup_{|E|=1} \int_E gd\lambda \leq 1\} \geq \int_{\mathbb{R}} fd\lambda = \infty$$

teda $\|f\|_{X'} = \infty$ a $f \notin X'$. Dokázali sme, že ak $f \in X'$ a $f \notin Y$ potom $f \notin X'$, teda $X' \subset Y$, čo spolu s predošlým dáva asociovanosť X a Y.

Príklad 5.4. Nech (R, λ) je inerval $[0, 1]$ s Lebesgueovou mierou λ. $\rho(f)$ pre $f \in \mathcal{M}_0^+$ definujme takto:

$$\rho(f) = \sup_{0<h\leq 1} \frac{1}{h} \int_0^h f(x)d\lambda.$$

ρ je dobre definovaná Banachova norma:
Vlastnosti (P1), (P2) a (P3) platia pre každé $h \in (0, 1]$ a preto i pre supremum z $0 < h \leq 1$. Pre vlastnosť (P4) majme ľubovoľnú množinu E, $\lambda(E) < \infty$ (môžme predpokladať

$E \subset [0,1]$), potom $\rho(\chi_E) = \sup_{0<h\leq 1} \frac{1}{h} \int\limits_0^h \chi_E = 1$. A pre (P5) stačí zvoliť $C_E = 1$ (opäť môžme predpokladať $E \subset [0,1]$):

$$\int\limits_E f \leq \int\limits_0^1 f \leq \sup_{0<h\leq 1} \frac{1}{h} \int\limits_0^h f = 1\rho(f).$$

ρ je dobre definovaná Banachova norma a $X = \{f : f \in \mathcal{M}_0^+, \rho(f) < \infty\}$ je Banachov priestor funkcií.

Nájdime jeho asociovaný priestor. Najprv ukážme, že pre $f, g \in \mathcal{M}_0^+$ a g je klesajúca, platí:

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx \leq \rho(f) \int\limits_0^1 g(x)dx.$$

Ku klesajúcej funkcii $g \in \mathcal{M}_0^+$ dokážeme nájsť postupnosť funkcií $g_n \nearrow g$ takých, že $g_n(x) = \int\limits_x^1 h_n(t)dt$, kde $h_n \in \mathcal{M}_0^+$. Žiadanú nerovnosť dokážeme pre takéto funkcie g_n a s použitím Leviho vety o monotónnej konvergencií ([2], Veta 18.25.) dostaneme platnosť nerovnosti aj pre funkciu g. Použitím per partes dostávame

$$\int\limits_0^1 f(x)g_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x) \int\limits_x^1 h_n(t)dtdx =$$

$$= \left[\int\limits_0^x f(t)dt \int\limits_x^1 h_n(t)dt \right]_0^1 - \int\limits_0^1 -h_n(t) \int\limits_0^t f(x)dxdt =$$

$$0 + \int\limits_0^1 h_n(t) \int\limits_0^t f(x)dxdt = \int\limits_0^1 t\, h_n(t) \tfrac{1}{t} \int\limits_0^t f(x)dxdt \leq$$

$$\leq \rho(f) \int\limits_0^1 t\, h_n(t)dt = \rho(f) \int\limits_0^1 g_n(x)dx\,.$$

Posledná rovnosť platí, pretože:

$$\int\limits_0^1 g_n(x)dx = \int\limits_0^1 \int\limits_x^1 h_n(t)dtdx = \left[t \int\limits_t^1 h_n(x)dx \right]_0^1 - \int\limits_0^1 -t\, h_n(t)dt = \int\limits_0^1 t\, h_n(t)dt$$

tiež s použitím per partes. Pre $g \in \mathcal{M}_0^+$ definujme $\tilde{g}(x) = \operatorname{ess\,sup}_{x\leq y\leq 1} g(y)$. Potom $\tilde{g}$ je klesajúca a $g \leq \tilde{g}$ $\lambda - s.v.$ na $[0, 1]$. Definujme

$$\varrho : \mathcal{M}_0^+ \to [0, \infty], \qquad \varrho(g) = \int_0^1 \tilde{g}(x)dx.$$

ϱ je dobre definovaná Banachova norma:
(P1): ak $\int_0^1 \tilde{g}(x)dx = 0$, potom $\operatorname{ess\,sup}_{x \leq y \leq 1} g(y) = 0$ $\lambda - s.v.$, a teda aj $g = 0$ $\lambda - s.v.$ Opačná implikácia, teda že pre $g = 0$ $\lambda - s.v.$ je $\int_0^1 \tilde{g}(x)dx = 0$ je zrejmá. Zvyšné časti (P1), ako aj (P2) a (P3), vyplývajú z vlastností esenciálneho suprema.
(P4): $\lambda(E) < \infty$, potom $\int_0^1 \tilde{\chi}_E = 1\lambda(E)$ a (P5): $\int_E f \leq \int_E \tilde{f} \leq \int_0^1 \tilde{f} = \varrho(f)$ teda $C_E = 1$.

ϱ je Banachova norma a $Y = \{f : f \in \mathcal{M}_0^+, \varrho(f) < \infty\}$ je Banachov priestor, asociovaný k $X = \{f \in \mathcal{M}_0^+, \rho(f) < \infty\}$ (dokázané v [5] str. 337-350).

Zoznam literatúry

[1] Bennett C., Sharpley R. (1988): Interpolation of Operators. Academic Press Inc.

[2] Lukeš J. (1977): Teorie míry a integrálu I. Státní pedagogické nakladatelství Praha.

[3] Kufner A., John O., Fučík S. (1977): Function Spaces. Noordhoff I.P.

[4] Bergh J., Löfström J. (1976), Interpolation spaces, an introduction. Springer, New York.

[5] Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C. (1966): Some examples of normed Köthe spaces. Mathematische Annalen 162.