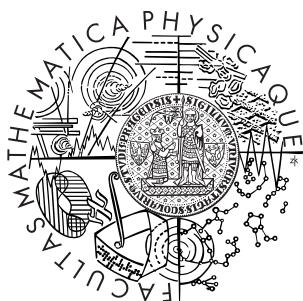


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Seifert

Otevřené problémy teorie kontinuí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc.

Studijní program: Obecná matematika

2008

Mé poděkování patří mé mamince, která mě při mých studiích bezmezně podporuje. Dále pak velký dík patří mému vedoucímu panu Pavlu Pyrihovi, jenž mi pomáhal při problémech s matematickými náležitostmi tohoto textu. A nakonec bych chtěl poděkovat za velkou trpělivost a shovívavost mé přítelkyni Ivance, která mi dodávala potřebnou sílu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Jan Seifrt

Obsah

1	Základní použité termíny	5
1.1	Definování pojmu	6
1.2	Příklady motivované magnetickými body	9
1.3	Několik faktů a tvrzení uvedených bez důkazů	15
2	ΩP vlastnost u dendritů s nekonečnou $B(X)$ a dendrity s ΩEP vlastností	17
2.1	Několik pozorovaní o ΩEP vlastnosti	18
2.2	Motor	19
2.3	Null-comb	22
	Literatura	37

Název práce: Otevřené problémy teorie kontinuí

Autor: Jan Seifrt

Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc.

e-mail vedoucího: pohoda@gmail.com

Abstrakt: Předložená práce se zabývá vztahem magnetických a konečně periodických bodů v jistých kompaktních souvislých množinách. Těžíste práce spočívá v podrobném rozboru dvou publikovaných výsledků (motor a null-comb). Fungování těchto příkladů je zachyceno na řadě pomocných obrázků. Práce obsahuje potřebné definice a základní tvrzení bez důkazů. V práci jsou dále dokázána i další tvrzení z dané problematiky.

Klíčová slova: dendrit, ΩEP vlastnost, magnetické body a null-comb

Title: Open problems in Continuum theory

Author: Jan Seifrt

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc.

Supervisor's e-mail address: pohoda@gmail.com

Abstract: In the present work we study the relation between non-wandering and eventually-periodic points in certain compact connected sets. The goal of the work consists of detailed study of two published results (engine and null-comb). How these examples work is demonstrated by a sequence of figures. The work contain all needed definitions and facts without proofs. In the work are proved some other propositions related to the topic.

Keywords: dendrit, ΩEP property, nonwandering points and null-comb

Kapitola 1

Základní použité termíny

V textu se bude vyskytovat několik základních pojmu z teorie kontinuí, které si zde pro přehlednost připomeneme. Společně s těmito definice si uvedeme bez důkazů několik důležitých faktů a tvrzení. Jedná se hlavně o všeobecně známé skutečnosti a označení v této oblasti matematiky.

Budeme se zvláště zabývat vlastností ΩEP vlastnost. Jde o zajímavou vlastnost, která má původ v topologické dynamice. Jde o vztah konečně periodických bodů a magnetických bodů. V "hodných" množinách jsou magnetické body v uzávěru konečně periodických bodů. Nás budou ale zajímat množiny "zlobivé". Jmenuji zatím alespoň jednu zlobivou množinu, a to Gehmanův droid, obvykle označovaný jako droid G . Tento droid je pozoruhodně jednoduchým příkladem droidu bez ΩEP vlastnosti. Dále si uvedeme několik krásných tvrzení ohledně dědičnosti zkoumané vlastnosti u dendritů. Z nich bych vyzdvíhl jedno lemma, které mám umožní přenášet vlastnosti jednoho dendritu na jiné za pomocí spojitých zobrazení a to i jen na jeho části.

1.1 Definování pojmu

Uvedeme definice z oblasti topologie, ale i z oblasti geometrie, protože dentrity a jejich spojité zobrazení se zkoumají jak z pohledu topologického, tak z pohledu geometrického.

Značení 1.1.1. • Prostorem X v tomto textu budeme rozumět vždy metrický prostor, pokud neřekneme jinak,

- pro podmnožinu $A \subset X$ budeme značit \overline{A}^X uzávěr množiny A v prostoru X , a $\partial_X A$ znamená hranici množiny A v prostoru X . Zkráceně budeme psát pouze \overline{A} či ∂A , pokud bude jasné, vzhledem k jakému prostoru se to vztahuje.
- $\text{card } A$ označuje kardinalitu, neboli mohutnost, množiny A ,
- úsečku mezi body p a q budeme značit jako \overline{pq} ,
- lineární lomenou čarou, která spojuje body a_1, a_2, \dots, a_n za pomocí úseček, budeme označovat jako $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Značení 1.1.2. • Spojitým zobrazením, zkráceně zobrazením, budeme mít na mysli spojité zobrazení z prostoru X do prostoru X ,

- složení dvou spojitych zobrazení je spojité a proto můžeme označit $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-krát}}$ jako n -tou složeninou zobrazení f pro $n \in \mathbb{N}$, speciálně potom f^0 značí identitu,
- nechť X, Y jsou prostory, zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazveme monotónní, pokud je vzor každého bodu v Y souvislý v X ,
- nechť $Y \subset X$, pokud $f|_Y : Y \rightarrow Y$ je identita na Y , potom nazveme f retrakcí a o podprostoru Y říkáme, že je retrakce prostoru X .

Značení 1.1.3 (speciální podmnožiny). Nechť X je prostor, $f : X \rightarrow X$ je zobrazení, potom označujeme:

- množinu $F(f)$ jako množinu pevných bodů prostoru X při zobrazení f , $x \in F(f)$ právě když $f(x) = x$,

- množina $P(f)$ označuje množinu periodických bodů X zobrazení f , $x \in P(f)$, právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^n(x) = x$, je-li navíc $f^k(x) \neq x$ pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$, pak říkáme, že n je periodou bodu x ,
- množina $R(f)$ označuje množinu rekurzivních bodů X zobrazení f , $x \in R(f)$ právě když pro každou $U \subset X$ otevřenou obsahující x , existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^n(x) \in U$,
- množina $EP(f)$ označuje množinu konečně periodických bodů X zobrazení f , $x \in EP(f)$ právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ a existuje $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ tak, že $f^m(x)$ je periodický bod s periodou n ,
- $\Omega(f)$ množina magnetických bodů, $x \in \Omega(f)$ právě když pro libovolné otevřené okolí $U \subset X$ obsahující x existuje $y \in U$ a $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^n(y) \in U$,
- orbita bodu x označuje množinu $\text{orb}(f, x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$,
- historií bodu x označujeme množinu $\text{hist}(f, x) = \{y : x = f^n(y) \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}\}$.

Poznámka 1.1.4. Nechť $x \in X$ je konečně periodickým bodem prostoru X při zobrazení f , orbita $\text{orb}(x, f)$ je konečná právě tehdy, když existuje prvek z $\text{orb}(x, f)$, který je periodický.

Fakt 1.1.5. Nechť X je metrický prostor a f je spojité zobrazení, pak platí:

$$F(f) \subset P(f) \subset R(f) \subset \Omega(f) \subset X, \quad (1.1)$$

$$P(f) \subset EP(f); f(P(f)) \subset P(f); f(\Omega(f)) \subset \Omega(f), \quad (1.2)$$

$$\Omega(f) \text{ je uzavřený.} \quad (1.3)$$

Důkaz. :

1.1: Plyne okamžitě z Definice 1.1.3 jednotlivých množin. Tak například $F(f) \subset P(f)$ z toho, že kažký pevný bod je periodický s periodou jedna. Inkluze $R(f) \subset \Omega(f)$ plyne z toho, že pro libovolné $x \in R(f)$ existuje otevřené okolí $U \subset X$ takové, že existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^n(x) \in U$, a tedy za hledané y v definici množiny $\Omega(f)$ lze volit x ,

1.2: inkluze $P(f) \subset EP(f)$ je zřejmá z definic obou množin. Inkluze $f(P(f)) \subset P(f)$ platí, neboť pro libovolný bod $x \in P(f)$ můžeme zkoumat $f(x)$. Protože x je periodickým bodem, tak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^n(x) = x$. Tedy $f^n(x) = f^{n-1} \circ f(x) = x$ a to znamená, že i pro bod $f(x)$ existuje $(n-1) \in \mathbb{N}$ tak, že $f^{n-1} \circ f(x) = x$ a tedy $f(x) \in P(f)$. To projde pro $n > 1$, pokud $n = 1$, pak jde o pevný bod.

$f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ plyne obdobně jako předchozí inkluze, ovšem pro úplnost ji dokážeme. Pro $x \in \Omega(f)$ a okolí $U \in X$ bodu x existuje $y \in U$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f^m(y) \in U$. Ale potom i $f^{m-1}(f(y)) \in U$ a tedy i pro bod $f(x)$ existuje $\tilde{y} := f(y)$ a $(m-1) \in \mathbb{N}$ tak, že $f^{m-1}(\tilde{y}) \in U$.

1.3: Nechť $\{x_n\} \subset \Omega(f)$ je posloupnost konvergující k $x \in X$. Chceme, aby platilo $x \in \Omega(f)$. Pro každé x_n a každé otevřené okolí $U_n \subset X$ bodu x_n existují $y_n \in U_n$ a $m_n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{m_n}(y_n) \in U_n$. Definujeme $U := \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j$. Jistě je otevřené a $U \subset X$, a také $x \in U$. Neb $x_n \rightarrow x$, tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in U_n$ (otevřené okolí), tj. $\forall w \in X : |w - x_n| < \varepsilon \Rightarrow w \in U_n$. Dále si definujeme $y := \lim_{n \rightarrow \infty}$ a existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $f^m(y) \in U$. To můžeme, neboť $y_n \in U_n$ takové, že $f^{m_n}(y_n) \in U_n$ a f je spojité zobrazení, tedy i f^k je spojitá pro všechna $k \in \mathbb{N}$. A pokud $\varepsilon > 0$, pak pro $|y - w| < \delta : |f(y) - f(w)| < \varepsilon \Rightarrow |f^k(y) - f^k(w)| < \varepsilon$. A tedy y_n konverguje k y .



Definice 1.1.6. O prostoru X říkáme, že má:

- *periodicko-rekurentní vlastnost*, jestliže pro všechna $f : X \rightarrow X$ spojité zobrazení platí rovnost $\overline{P(f)} = R(f)$. A píšeme, že prostor X má PR -vlastnost,
- *magneticko-periodickou vlastnost*, pokud pro každé spojité zobrazení $f : X \rightarrow X$ platí $\overline{\Omega(f)} = \overline{P(f)}$. Označujeme X má ΩP -vlastnost¹.
- *magneticko-konečně periodickou vlastnost*, jestliže pro každé spojité zobrazení platí inkluze $\Omega(f) \subset \overline{EP(f)}^X$. Píšeme, že prostor X má ΩEP vlastnost.

¹Tato vlastnost se dá ekvivalentně definovat, jestliže je splněna inkluze $\Omega(f) \subset P(f)$, neboť opačná inkluze je platná vždy za daných předpokladů z Faktu 1.1.5 z inkluzí 1.1.

Definice 1.1.7. :

- *oblouk* je prostor, který je homeomorfní s uzavřeným intervalem $[0, 1]$,
- *kontinuum* je kompatkní souvislý (metrický) prostor,
- *graf* je kontinuum, které můžeme napsat jako sjednocení konečně mnoha oblouků, které jsou po dvou disjuktní nebo se dotýkají v jednom či obou krajních bodech,
- *strom* je graf, který neobsahuje žádnou uzavřenou křivku,
- *dendrit* je lokálně souvislé a obloukově (lineárně) souvislé kontinuum D , pro které platí: jsou-li $A, B \subset D$ souvislé takové, že $A \cup B = D$, potom $A \cap B$ je souvislé.

Definice 1.1.8. Nechť X je kontinuum a $w \in X$ a nechť n je kardinální číslo. Potom řádem bodu w v kontinuu X , který označujeme $\text{ord}(w, X)$, rozumíme:

- $\text{ord}(w, X) \leq n$, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje otevřené okolí U bodu w tak, že $\text{diam } U \leq \varepsilon$ a $\text{card}(\partial U) \leq n$,
- $\text{ord}(w, X) = n$, pokud $\text{ord}(w, X) \leq n$ a pro všechna $m < n$ neplatí $\text{ord}(w, X) \leq m$,
- $\text{ord}(w, X) = \omega$, pokud pro bod w existuje jeho libovolně malé otevřené okolí U s konečnou hranicí a $\text{card}(\partial U)$ není ohrazeno žádným $n \in \mathbb{N}$.

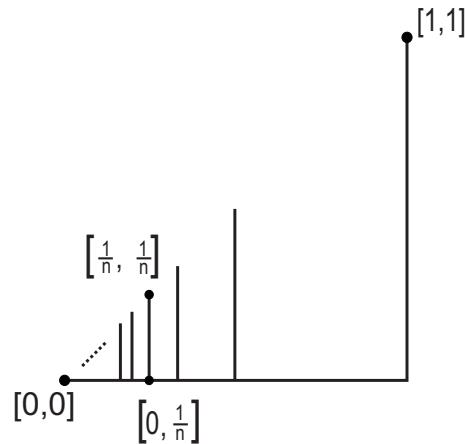
Tedy pro kontinuum X je $\text{ord}(w, X) \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega, \aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$.

Definice 1.1.9. Nechť X je kontinuum, bod $w \in X$ nazýváme

- *koncovým bodem*, pokud $\text{ord}(w, X) = 1$, množinu koncových bodů označíme $E(X)$,
- *bodem větvení*, jestliže $\text{ord}(w, X) \geq 3$, množinu bodů větvení označíme $B(X)$.

1.2 Příklady motivované magnetickými body

Uvedeme 4 příklady, na kterých budeme demonstrovat výše popsané vlastnosti. První a druhý ukazují problematiku konstrukce magnetických bodů. Třetí je vějíř s volitelným počtem magnetických a periodických bodů. Čtvrtý je dendroid bez ΩEP vlastnosti.



Obrázek 1.1: Dendrit W

Dentrit W poprvé

Definice 1.2.1.² Nechť X je prostor, pak definujme dendrit W jako množinu bodů

$$W := ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N} \right\} \right)$$

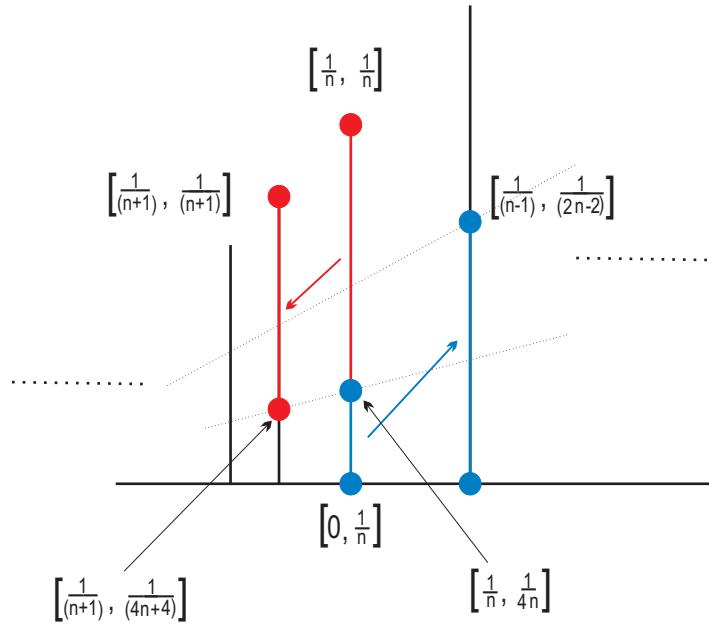
Na tomto dendritu si nyní definujeme spojité zobrazení f tak, že úsečka $\overline{(\frac{1}{n}, 0) (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}$ se zobrazí spojitě lineárně na úsečku $\overline{(\frac{1}{n+1}, 0) (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})}$, úsečce $\overline{(\frac{1}{n-1}, 0) (\frac{1}{n}, 0)}$ přiřadí úsečku $\overline{(\frac{1}{n}, 0) (\frac{1}{n+1}, 0)}$. A dále bod $(0, 0)$ se zobrazí sám na sebe. Zobrazení je jistě spojité. Do množiny $EP(f)$ patří tedy pouze bod $(0, 0)$. Je to zřejmé, neboť všechny ostatní body se postupným skládáním zobrazení f posouvají k bodu $(0, 0)$.

Vidíme, že bod $(0, 0)$ je magnetický i periodický. $P(f) = \Omega(f)$. Magnetická vlastnost bodu $(0, 0)$ byla zajištěna již prvním zobrazením libovolného blízkého bodu. Nyní zkusíme magnetickou vlastnost zajistit komplikovanějším způsobem.

Dentrit W podruhé

Zadefinujeme zobrazení $f : W \rightarrow W$ pomocí následujících vztahů:

²Tento dendrit je vyobrazený na Obrázku 1.1.



Obrázek 1.2: Zobrazení f na dendritu W

$$f \left(\overline{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)} \right) = \overline{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{4(n+1)} \right)} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right)$$

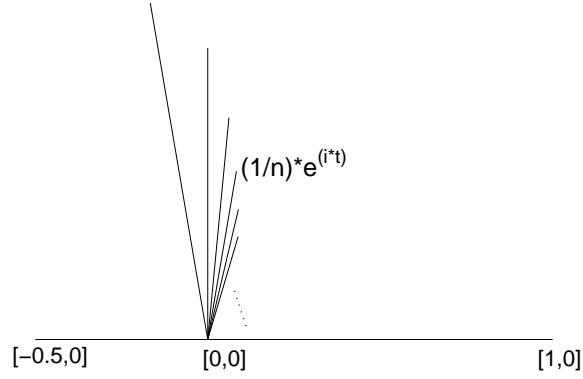
a

$$f \left(\overline{\left(\frac{1}{n}, 0 \right) \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{4n} \right)} \right) = \overline{\left(\frac{1}{n-1}, 0 \right)} \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2(n-1)} \right).$$

Pokud bychom s takovým zobrazením zkoumali magnetickou vlastnost bodu $(0, 0)$, můžeme použít body z horní části svislých úseček, ty se k $(0, 0)$ přibližují díky první vlastnosti f . Pokud bychom chtěli, můžeme magnetickou vlastnost $(0, 0)$ ověřit i s body v dolní části svislých úseček. S takovými body se však budeme nějakou dobu vzdalovat díky druhé vlastnosti f , až se dostanou do horní části svislých úseček a začnou se přibližovat. Viz Obrázek 1.2.

V bodech $(\frac{1}{n}, \frac{1}{4n})$ nejde hledané zobrazení spojitě dodefinovat a tak tento pokus opustíme. Mimoto by byl počátek nutně pevným bodem.

Poznamenejme, že naznačený mechanismus vzdalování a přibližování je pro konstrukci prostoru bez ΩEP vlastnosti důležitý. Samozřejmě musíme počátek někam přemístit (i s okolím) a pak se s některými blízkými body vracet na (skoro!) původní místo.



Obrázek 1.3: Dendrit F

Dentrit F_ω

Definice 1.2.2. ³ Nechť X je protor, pak definujme dendrit F_ω jako množinu bodů

$$F_\omega = \left\{ re^{it} : n = 1, 2, \dots; t = \frac{2\pi}{n}, 0 \leq r \leq n \right\}$$

Věta 1.2.3. Nechť X je prostor a F_ω je výše definovaný dendrit. Pak existují zobrazení $f_{m,n} : F_\omega \rightarrow F_\omega$ taková, že $\text{card}(\Omega(f_{m,n})) = m$ a $\text{card}(P(f_{m,n})) = n$.

Důkaz. Důkaz provedeme konstrukcí tohoto zobrazení a to pouze pro $m = 3$ a $n = 2$. Pro ostatní m, n se to udělá podobně⁴. Zkonstruujeme zobrazení f tak, že bude mít $\Omega(f) = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0)\}$ a $P(f) = \{(0, 0)\}$. Pro tento učel si

³Tento dendrit je vyobrazený na Obrázku 1.3.

⁴Důkaz pro jiná m a n je popsán v [1, na str. 33].

označime tyto množiny komplexních čísel pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \left\{ re^{\frac{2\pi}{n}} : 0 \leq r \leq \frac{1}{n} \right\} \subset F_\omega, \\ J_n &= \left\{ (x, 0) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n-2} \right\} \subset F_\omega, \\ J &= \left\{ (x, 0) : \frac{1}{2} < x \leq 1 \right\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} J_n. \end{aligned}$$

Dále definujeme zobrazení f takto:

- $f(\{(x, 0) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ nebo } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}) = \{(0, 0)\},$
- $f(I_n) = I_{n-1}$ pro $n > 2$; $f(I_2) = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\},$
- $f(J_n) = I_n$, pro $n \geq 2$.

Indukcí lze ukázat platnost $f^n(I_n) = \{(0, 0)\}$ pro všechna $n \geq 2$, neboť každé I_n je větve vějíře F_ω a ty se postupným zobrazením při zobrazení f posouvají o jednu větve⁵ doleva. A po $(n-2)$ -tém složení zobrazení f se I_n zobrazi na I_2 . A množina $f^2(I_2) = \{(0, 0)\}$, jak je vidět z definice zobrazení. A tedy $\Omega(f) \cap I_n = \{(0, 0)\}$, pro $n \geq 2$.

Také je okamžitě z definice zobrazení vidět, že $\Omega(f) \cap \{(x, 0) : 0 < x \leq \frac{1}{2}\} = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$. Z toho dostáváme, že $f^m(J) \cap J = \emptyset$ pro všechna $m > 2$, tudíž $\Omega(f) \cap J_n = \emptyset$. Potom $\Omega(f) = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0)\}$ a $P(f) = \{(0, 0)\}$.

Existuje spojité zobrazení $g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ takové, že $\Omega(g) = P(g) = \{(0, 1)\}$. Například takové, které množinu $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ zobrazuje na množinu $\{e^{it} + 1 : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi\}$ a naopak a ostatní body roviny na nulu.

A označíme sjednocením⁶ zobrazení $f_{3,2} = f \cup g : F_\omega \cup [0, 1] \times \{0\} \rightarrow F_\omega \cup [0, 1] \times \{0\}$. Toto zobrazení jistě splňuje $\text{card}(\Omega(f_{3,2})) = 3$ a $\text{card}(P(f_{3,2})) = 2$. \(\ddot{\wedge}\)

Gehmanův dendroid

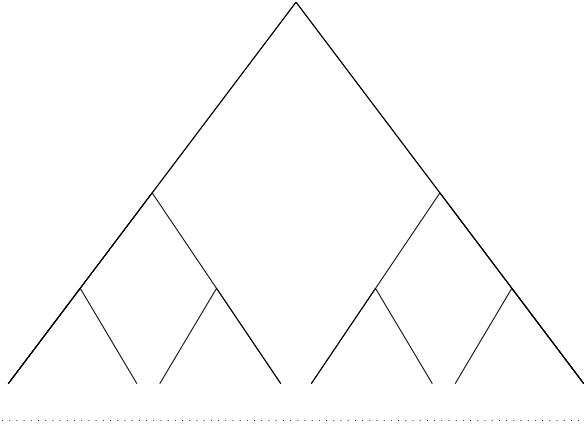
Na tomto dendroidu existuje zobrazení f , pro které platí $\Omega(f) \not\subseteq \overline{EP(f)}$.

Definice 1.2.4. ⁷ Gehmanův dendroid G je nekonečný binární strom s kořenem v bodě p a platí $\text{ord}(p, G) = 2$, jehož množina konečných bodů je homeomorfní s Cantorovým diskontinuem C . Pro každý bod větvení $w \in B(G)$ platí, že $\text{ord}(w, G) = 3$.

⁵Větví myslím hranu v grafu množiny F_ω , která je znázorněna na Obrázku 1.3

⁶Sjednocením myslíme to, že body z F_ω zobrazuji pomocí zobrazení f a body z množiny $[0, 1] \times \{0\}$ zobrazuji pomocí g .

⁷Je vyobrazený na Obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Gehmanův dendroid G

Poznámka 1.2.5. Nyní popíšeme pouze náznak konstrukce homeomorfismu⁸ $g : G \rightarrow G$, který $\Omega(f) \not\subseteq \overline{EP(f)}$. Proto nejprve homeomorfismus $h : C \rightarrow C$ takový, že $\Omega(h) = C$ a $P(h) = \emptyset$. Pro $n \in \mathbb{N}$:

- $h_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$,
- $h_n(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, kde
 - $b_1 = a_1 + 1(\text{mod } 2)$ pro $2 \leq i \leq n$,
 - $b_i = a_i + 1(\text{mod } 2)$ pro $a_{i-1} = 1$ a $b_{i-1} = 0$,
 - $b_i = a_i$ jinak.

Potom definujeme $h(a_1, a_2, a_3, \dots) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$, kde $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = h_n(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a h nazýváme *binárním přídavným zobrazením*. Lze ukázat, že pro každé $x \in C$ je $\text{orb}(x, h)$ hustá v C . A z toho plyne, že $\Omega(h) = C$ a $P(h) = \emptyset$.

Nechť g je rozšíření zobrazení h takové, že platí následující vlastnosti:

1. g má pouze jeden pevný bod a to bod $p = P(g)$,
2. $g^{-1}(p) = \{p\}$,

⁸Více je napsáno v [5, str. 44].

3. $g|_C = h$,
4. pro všechna $x \in G \setminus (C \cup \{p\})$ je $\text{dist}(p, x) > \text{dist}(p, g(x))$.

Pro takto definovaný homeomorfismus platí $EP(g) = \{p\}$ a $\Omega(g) = C \cup \{p\}$.

1.3 Několik faktů a tvrzení uvedených bez důkazů

V této části uvedeme některé věty, za jakých podmínek je kontinuum dendritem, nebo kdy je dendrit stromem a obdobné výsledky. A nebo za jakých podmínek mají dané množiny jisté vlastnosti⁹. Všechny tyto věty a tvrzení uvedeme bez důkazů.

Věta 1.3.1. ¹⁰ *Kontinuum X je dendritem právě tehdy, když každé podkontinuum X je monotonní retrakcí X .*

Věta 1.3.2. ¹¹ *Dendrit X je stromem právě tehdy, když X není spojitou kopií ani F_ω ani W .*

Věta 1.3.3. ¹² *Dendrit X je stromem právě tehdy, když X má konečnou množinu $B(X)$ pro všechny body s konečným ord.*

Věta 1.3.4. ¹³ *Nechť X je strom a $f : X \rightarrow X$ je zobrazení. Jestliže $\Omega(f)$ je konečná, potom $\Omega(f) = P(f)$.*

Lemma 1.3.5. ¹⁴ *Nechť X, Y jsou prostory a Y je uzavřený podprostor X . Nechť $g : Y \rightarrow Y$ je zobrazení. Pokud $r : X \rightarrow Y$ je retrakce a $f := g \circ r : X \rightarrow Y$ potom platí:*

- $f^n = g^n \circ r$,
- $P(f) = P(g)$,
- $R(f) = R(g)$,

⁹Např. PR vlastnost či ΩEP vlastnost.

¹⁰Viz [3, Věta 1, str. 157].

¹¹Viz [2, Věta 4, str. 224].

¹²Viz [5, Sekce 4, str. 44].

¹³Viz [5, Věta 1.1, str. 36].

¹⁴Viz [6, Lemma 2.9, str. 5].

- $Y \cap EP(f) = EP(g)$,
- $\Omega(f) = \Omega(g)$.

Důsledky Lemmatu 1.3.5 je několik tvrzení o podmínkách, kdy má dendrit nějakou množinovou vlastnost a jak je charakterizován strom.

Tvrzení 1.3.6. :¹⁵

1. *Graf je stromem právě tehdy, když má PR vlastnost.*
2. *Dendrit X má PR vlastnost právě tehdy, když X není spojitou kopii Gehmanova dendritu G .*
3. *Dendroid X s konečně mnoha body větvení je topologickou kopíí dendritu F_ω právě tehdy, když pro každou dvojici přirozených čísel k, l , kde $k < l$, existuje spojité zobrazení $f_{k,l} : X \rightarrow X$ tak, že $k = \text{card}(P(f_{k,l}))$ a $l = \text{card}(\Omega(f_{k,l}))$ ¹⁶.*

¹⁵Viz [6, Tvrzení 2.11 a 2.13, str. 5].

¹⁶Toto tvrzení jsme již popisovali výše ve Větě 1.2.3.

Kapitola 2

ΩP vlastnost u dendritů s nekonečnou $B(X)$ a dendrity s ΩEP vlastností

Hlavním cílem této kapitoly je popsat dva příklady dendritů a spojitého zobrazení na dendritu, které nemá ΩEP vlastnost, tj. $\Omega(f) \not\subseteq \overline{EP(f)}$. Tyto příklady budeme ilustrovat i názornými obrázky. Prvním příkladem bude dendrit¹ a zobrazení na něm je definováno tak, aby dva body se zobrazovali mezi sebou. A ostatní body se postupným skládáním tohoto zobrazení dostávají blíže a blíže do jejich okolí, a pak se u několika bodu toto poruší a definuje jinak, ale to probereme až níže.

Druhým příkladem bude tzv. null-comb. Tento dendrit se částečně podobá dendritu W , avšak je o něco komplikovanější. Lze na něm definovat spojité zobrazení, které místo oscilace dvou bodů využívá zobrazení ve dvou směrech na usečky postupně se zmenšující jako tomu bylo u dendritu 1.2.1.

Předně poznamenáme několik pozorování, které se zabývají ΩEP vlastností. Kdy se tato vlastnost dědí na podprostory či kdy graf nebo kontinuum má nebo nemá tuto vlastnost.

¹Viz [4].

2.1 Několik pozorovaní o ΩEP vlastnosti

ΩEP vlastnost jsme definovali v Definici 1.1.6. Velmi jednoduchým příkladem, který má ΩEP vlastnost, je uzavřený interval². Naopak lehkým příkladem, která nemá ΩEP vlastnost, je zobrazení na jednotkové kružnici v komplexní rovině, a to jakákoli iracionální rotace³ r . Je jednoduché se přesvědčit, že nezobrazuje body na stejné po žádném konečném složení. A tedy množina $EP(r)$ je prázdná, naopak množina $\Omega(r)$ je celá jednotková kružnice.

Poznámka 2.1.1.⁴ Nechť prostor X má ΩEP vlastnost a $Y \subset X$ je retrakt prostoru X , potom i podprostor Y má ΩEP vlastnost. To znamená, že ΩEP vlastnost je uzavřena vůči retrakcím.

Důkaz. Nechť $g : Y \rightarrow Y$ spojité zobrazení, která nemá ΩEP vlastnost, a nechť $r : X \rightarrow Y$ je retrakce. Pak definujeme spojité zobrazení $f : X \rightarrow Y$ jako $f = g \circ r$. Dále podle Lemmatu 1.3.5 pro $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $f^n = g^n \circ r$. Nechť $y \in Y$ je takový, že $y \in \Omega(g) \setminus \overline{EP(g)}$. Pak ale podle Lemmatu 1.3.5 platí $y \in \Omega(f) \setminus \overline{EP(f)}$. To ale znamená, že $\Omega(f) \not\subseteq \overline{EP(f)}$. A tedy pokud retrakce nemá ΩEP vlastnost, pak jí nemá ani rozšířené zobrazení. \mathfrak{K}

Poznámka 2.1.2. Graf je stromem právě tehdy, když má ΩEP vlastnost.

Důkaz. Důkaz implikace ' \Rightarrow ' je popsán v [5, Věta 1.2.36]. Druhá implikace se opírá o poznatek, že každý strom neobsahující kružnici má ΩEP vlastnost. Pak je již důkaz jednoduchý. Nechť prostor X má ΩEP vlastnost. Pak neobsahuje kružnici, neboť pokud je Y uzavřená kružnice v X a Y je i grafem, protože vlastnost grafu je uzavřená vůči retrakcím. Nechť $r : X \rightarrow Y$ je retrakce, $g : Y \rightarrow Y$ spojité zobrazení takové, že $\Omega(g) \not\subseteq \overline{EP(g)}$. Potom, podle Lemmatu 1.3.5, ani $f = g \circ r$ nemá ΩEP vlastnost. A tedy X neobsahuje kružnice a má ΩEP vlastnost a tedy je stromem. \mathfrak{K}

Poznámka 2.1.3.⁵ Nechť kontinuum X je spojitá kopie dentritu G^6 , pak nemá ΩEP vlastnost.

²Viz [2, Věta C].

³Iracionální rotace pro nás znamená, že bodu přiřadí bod pootočený o úhel rovný iracionálnímu násobku π .

⁴Viz [6, Tvrzení 5.1, str. 13].

⁵Viz [6, Pozorovaní 5.3].

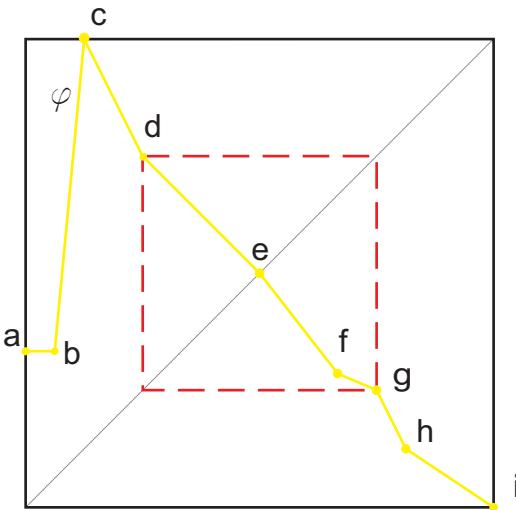
⁶Viz Definice 1.2.4.

2.2 Motor

V [4] je uvedena konstrukce prostoru bez ΩEP vlastnosti. Idea spočívá v zajímavém zobrazení prostoru $[0, 1]$ na sebe. Toto zobrazení si nyní popíšeme. Vyjdeme ze zobrazení φ , které zmodifikujeme později na zobrazení ψ .

Základní zobrazení φ

Předně si označíme několik bodů $a = (0, \frac{1}{3})$, $b = (\frac{1}{16}, \frac{1}{3})$, $c = (\frac{1}{8}, 1)$, $d = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f = (\frac{2}{3}, \frac{2}{7})$, $g = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $h = (\frac{13}{16}, \frac{1}{8})$, $i = (1, 0)$. Těmito proložíme po částech lineární lomenou čáru, která je grafem zobrazení φ : $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Tedy definujeme zobrazení φ tak, že jeho grafem je lineární lomená čára $abcdefghi$. Vše je vyobrazeno na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Zobrazení φ

Hranici čtverce C , jehož vrcholy jsou v bodech $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ a $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, označíme L . Body $1/4$ a $3/4$ jsou periodické body. Označíme $P = \{1/4, 3/4\}$. Dalším speciálním bodem je bod $1/2$, který je pevným bobem φ .

Tvrzení 2.2.1. Nechť $q \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, pak $\varphi(q) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ a navíc bod $\varphi(q)$ je blíže k množině P než bod q .

Důkaz. Zobrazení na tomto intervalu lze vyjádřit pomocí vztahů

$$\varphi(x) = -x + 1, \text{ pro } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad (2.1)$$

$$\varphi(x) = -\frac{9}{7}x + \frac{8}{7}, \text{ pro } x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \quad (2.2)$$

$$\varphi(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}, \text{ pro } x \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]. \quad (2.3)$$

Bod z intervalu $w \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ dosadíme do vztahu 2.1, dostaneme bod $1 - w$. A tento bod leží v intervalu $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Tedy nám stačí zkoumat co se děje s body v tomto intervalu.

Bod z intervalu $w \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ dosadíme do vztahu 2.2 a dostaneme bod $\frac{8-9w}{7}$. Nejmenší bodem po dosazení hodnoty za w , je pro $w = \frac{2}{3}$. A dostaneme bod $\frac{2}{7}$, což je větší než $\frac{1}{4}$. Naopak největší hodnotu $\frac{1}{2}$ nabývá v bodě $w = \frac{1}{2}$. Body z intervalu $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ se zobrazí do $[\frac{2}{7}, \frac{1}{2}]$.

Naprosto stejně bychom ze vztahu 2.3 dostali, že body z intervalu $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ se zobrazí do $[\frac{1}{4}, \frac{2}{7}]$.

K důkazu tvrzení navíc nám stačí složit dvakrát zobrazení φ podle vztahů definovaných výše. Tedy pro bod $q \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ ze vztahu 2.1 a 2.2 platí

$$\varphi^2(q) = \varphi(1 - q) = \frac{9q - 1}{7}$$

Dále rozdíl bodů $q - \frac{9q-1}{7}$ je menší než nula pro $q \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. A tedy bod $\frac{9q-1}{7}$ je blíže k množině P . Podobně tento výsledek vyjde i pro interval $q \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

Pro bod $q \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ ze vztahu 2.2 a 2.1 platí

$$\varphi^2(q) = \varphi(\frac{9q-1}{7}) = 1 - \frac{9q-1}{7}.$$

Dále rozdíl bodů $q - (1 - \frac{9q-1}{7})$ je větší než nula pro $q \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$. A tedy bod $1 - \frac{9q-1}{7}$ je blíže k množině P . Pobodně tento výsledek vyjde i pro interval $q \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$.

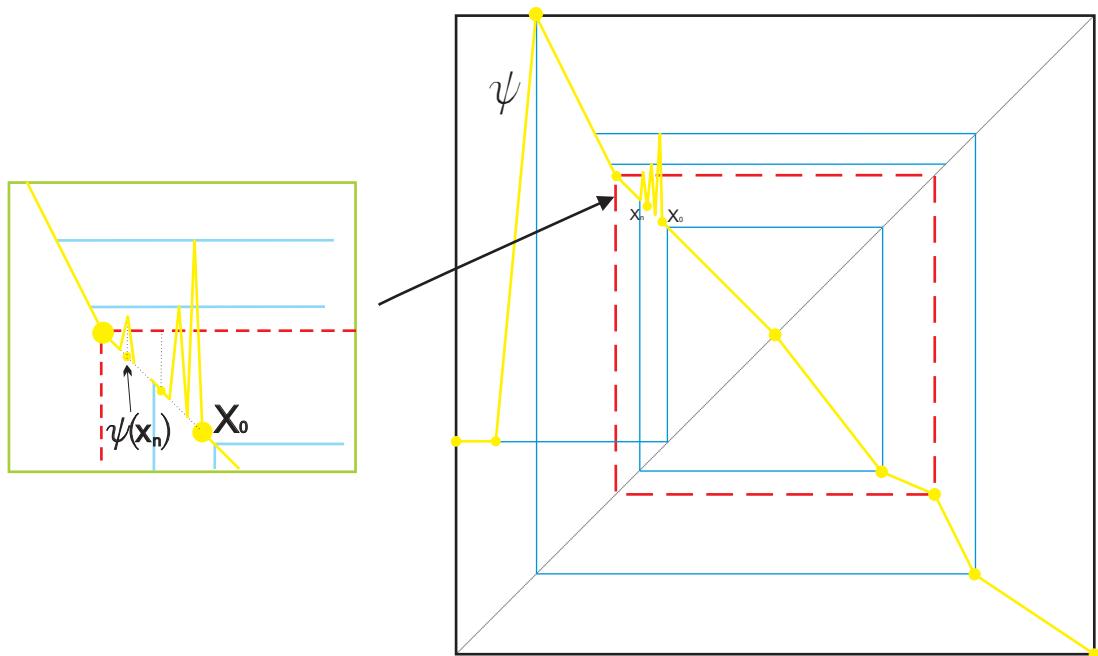
Ale to znamená, že se body v intervalu $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ se nezobrazí ven z něj a budou se pouze přibližovat k množině P . 

Tedy při postupném zobrazení pomocí zobrazení φ (postupujeme podobně jako při hledání pevného bodu a znázorňujeme lomenou čáru procházející postupně body $(q, \varphi(q)), (\varphi(q), \varphi^2(q)), (\varphi^2(q), \varphi^3(q), \dots)$) vidíme "hranatou spirálu" zevnitř approximující hranici L .

Tento geometrický přístup budeme používat i v dalším textu a příslušnou hranatou trajektorii budeme nazývat *čára života*.

Pokud tedy čára života protíná vnitřek čtverce, čeká ji approximování L zevnitř. Čáry života procházející mimo C v blízkosti L se naopak od L vzdalují. To zařizujejí sklonky úseček \overline{cd} a \overline{gh} . Důkaz by probíhal podobně, jako předešlý.

Rozvinuté zobrazení φ , neboli ψ



Obrázek 2.2: Rozšířené zobrazení ψ

Budeme modifikovat zobrazení φ na zobrazení ψ . Pro tuto úlohu si fixujeme rostoucí prostou posloupnost bodů $x_0 = \varphi(0) > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi^3(0)$. Dále si označíme body

$$\begin{aligned} O_n &= (\varphi^{2n-2}(x_{n-1}), \varphi^{2n-1}(x_{n-1})) , \\ K_n &= (\varphi^{2n-2}(x_n), \varphi^{-2n+1}(0)) , \\ M_n &= (\varphi^{2n-2}(x_{n+1}), \varphi^{2n-1}(x_{n+1})) . \end{aligned}$$

Při první modifikaci zaměníme úsečku spojující body O_1 a M_1 za úsečky $\overline{O_1 K_1}$ a $\overline{K_1 M_1}$ tedy vytvoříme hrot a vrchol tohoto hrotu $\varphi^{-1}(0)$ je v hist $(\varphi, 0)$. Tedy tím jsme dostali bod x_1 do hist $(\varphi, 0)$ a to díky druhé složce bodu K_1 , tedy orbita bodu x_1 je množina $\{x_1, \psi(x_1) = 1 = \varphi^{-1}(0), \varphi(0), \varphi^2(0), \dots\}$. A takto upravený, s vytvořeným hrotom, upravený graf zobrazení φ použijeme jako graf zobrazení ψ .

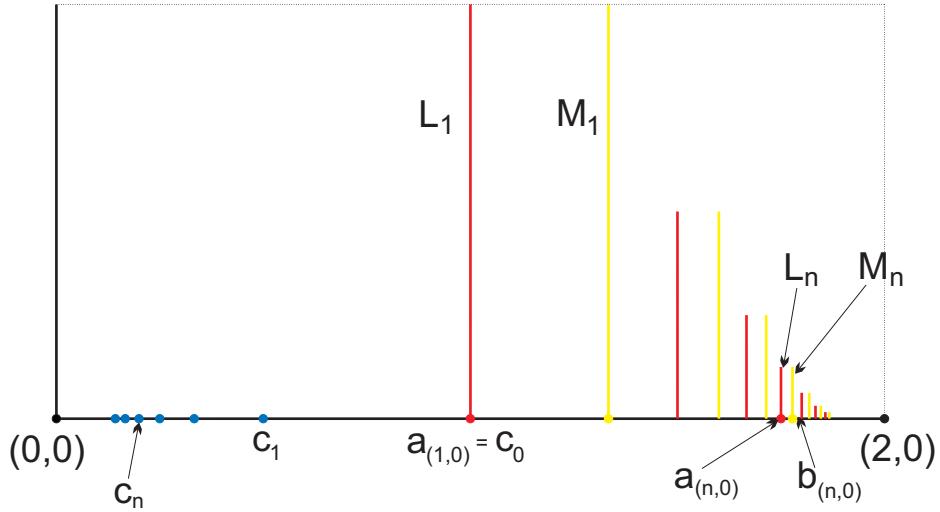
Při dalších modifikacích budeme chtít dostat body x_n do hist $(\varphi, 0)$. A proto vytvořím podobné hroty v jejich okolí a definujeme je jako zobrazení ψ . Tedy úsečku $\overline{O_n M_n}$ v grafu φ nahradíme úsečkami $\overline{O_n K_n} \cup \overline{K_n M_n}$. Potom $\text{orb}(\psi, x_n) = \{x_n, \varphi^1(x_n), \varphi^2(x_n), \dots, \varphi^{2n-2}(x_n), \varphi^{-2n+1}(0), \varphi^{-2n+2}(0), \dots, \varphi^{-2}(x_n), \varphi^{-1}(x_n), 0, \varphi(0), \varphi^2(0), \varphi^3(0), \dots\}$. Tato modifikace je naznačena na Obrázku 2.2. Tím se nám body x_n dostanou do orbity bodu 0. A po konečném počtu kroků se vrátí zpět do bodů $\varphi(0)$ a $\varphi^3(0)$. To znamená, že leží v množině $\Omega(\psi)$ a protože se nikdy nezobrazí zpět do bodů x_n neleží v množině $EP(\psi)$. To je zajistěno tím, že po zobrazení na bod $\varphi^3(0)$ se tento bod dalším skládáním zobrazení ψ už bude pouze pohybovat uvnitř čtverce ohraničeného hranicí L a přitom se bude přibližovat k hranici. Které ovšem v konečném čase nedosáhne.

Všimněme si toho, že bod $1/4$ má ve svém pravém okolí body, které se k němu svojí čárou života přibližují podobně jako čára života bodu $\psi(0)$, která prochází bodem $\psi^3(0), \psi^5(0), \dots$. Ale jsou tam i body, které svojí čárou života vyskočí ze čtverce P , vzdalují se od něj a po tomto čase odloučení opět skončí v čáre života $\psi(0)$. Situace zde modeluje ve vylepšené verzi motivační příklad (viz Obrázek 1.2), kde se k jistému bodu blížíme po předchozím vzdalování.

Tuto zobrazení ψ je použito ke konstrukci prostorů, které nemají ΩEP vlastnost v [4]. Podobné "blížení po vzdalování" je použito u následujícího příkladu.

2.3 Null-comb

Tento příklad je popsán v [6, Příklad 5,7]. Je to další příklad dentritu a zobrazení, která nemá ΩEP vlastnost. Tento dendrit se skládá z dvojic stejně velkých úseček, které mají mezi sebou malou vzdálenost. Každá tato dvojice je postupně menší a menší. Velikost těchto dvojic klesá podle vzdálenosti od bodu $(2, 0)$. Je zobrazen na Obrázku 2.3. A na tomto dendritu předvedeme zobrazení, které bude zobrazovat jednu úsečku z dvojice jedním směrem a druhou druhým. K tomu použijeme značení, které bylo zavedeno v [6].



Obrázek 2.3: Dendrit W , neboli null-comb

Definujeme si množiny L_n , M_n a W takto:

$$L_n = \left\{ 2 - \frac{2}{2^n} \right\} \times [0, \frac{1}{2^{n-1}}], \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

$$M_n = \left\{ 2 - \frac{2}{2n+1} \right\} \times [0, \frac{1}{2^{n-1}}], \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

$$W = ([0, 2] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{L_n \cup M_n\} \right). \quad (2.6)$$

A pro tento dendrit W , který je vykreslen na Obrázku 2.3, nyní popíšeme konstrukci spojitého zobrazení bez ΩEP vlastnosti. Přesněji najdeme $f : W \rightarrow W$ tak, že $\Omega(f) \not\subseteq \overline{EP(f)}^W$. K tomuto účelu nechť platí označení pro $n \in \mathbb{N}$ a pro $j \in \{0, 4, 6, 7, 8\}$:

- bod $a_{(n,j)} = \left(2 - \frac{2}{2^n}, \frac{j}{8} \frac{1}{2^{n-1}} \right)$,
- bod $b_{(n,j)} = \left(2 - \frac{2}{2n+1}, \frac{j}{8} \frac{1}{2^{n-1}} \right)$,
- bod $c_n = \left(\frac{1}{n+2}, 0 \right)$.

Dodefinujeme pak $a_{(0,0)} = c_1$, $c_0 = a_{(1,0)}$ a $Y = [0, 2] \times \{0\}$.

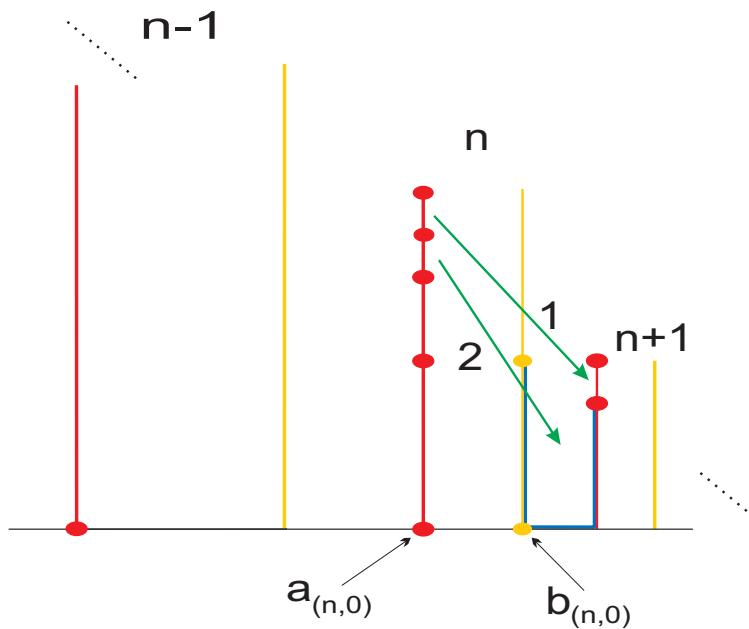
Značení 2.3.1. Nechť $\overline{xz}, \overline{qw} \in W$, pak $xz \xrightarrow{f} qw$ pro nás bude značit, že obraz usečky \overline{xz} při zobrazení f je usečka \overline{qw} . A to tak, že $f(x) = q$ a $f(z) = w$.

Ted' budeme definovat zobrazení f , která bude zobrazovat null-comb sám na sebe. Skládáním tohoto zobrazení získáme body z množin $EP(f)$ (zde jde o body z množiny $F(f)$) a z množiny bodů $\Omega(f)$.

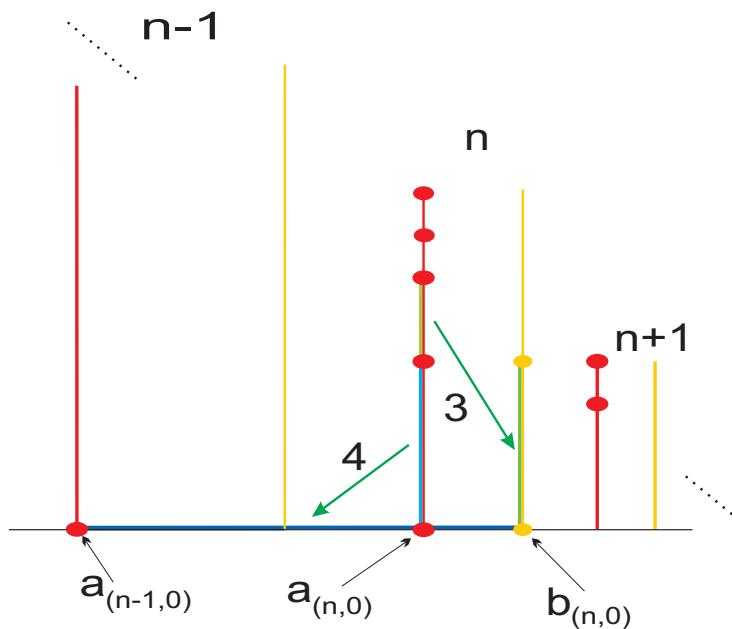
Jak vypadá množina $EP(f)$ zjistíme přesně, ale o množině $\Omega(f)$ toho moc nezjistíme, to nám ale nezabrání rozhodnout zde-li zobrazení f má či nemá ΩEP vlastnost.

Definice 2.3.2. Definujeme spojité zobrazení $f : W \rightarrow W$ pomocí následujících vztahů pro $n \in \mathbb{N}$:

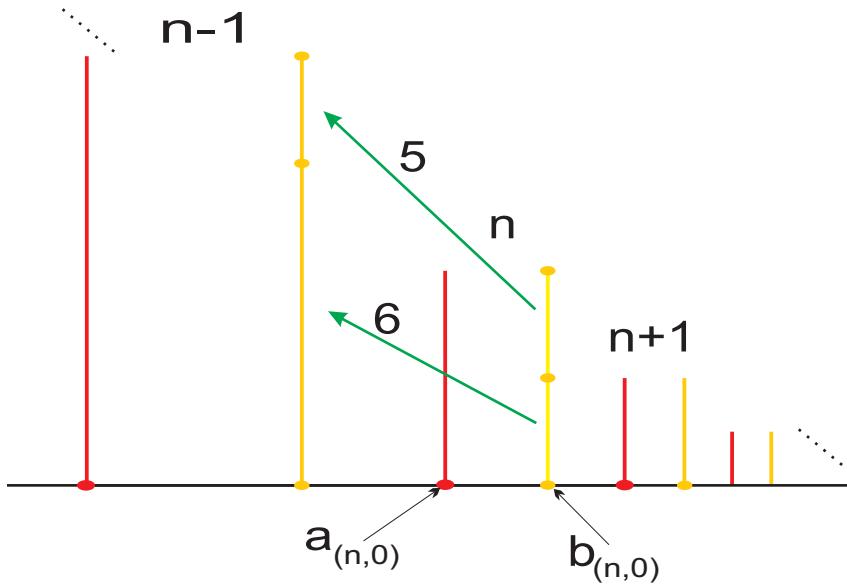
1. $a_{(n, 7)}a_{(n, 8)} \xrightarrow{f} a_{(n+1, 6)}a_{(n+1, 8)},$
2. $a_{(n, 6)}a_{(n, 7)} \xrightarrow{f} b_{(n, 4)}a_{(n+1, 6)},$
3. $a_{(n, 4)}a_{(n, 6)} \xrightarrow{f} b_{(n, 0)}b_{(n, 4)},$
4. $a_{(n, 0)}a_{(n, 4)} \xrightarrow{f} a_{(n-1, 0)}b_{(n, 0)},$
5. $b_{(n, 4)}b_{(n, 8)} \xrightarrow{f} b_{(n-1, 6)}b_{(n-1, 8)},$ pro $n \geq 2,$
6. $b_{(n, 0)}b_{(n, 4)} \xrightarrow{f} b_{(n-1, 0)}b_{(n-1, 6)},$ pro $n \geq 2,$
7. $b_{(1, 0)}b_{(1, 8)} \xrightarrow{f} a_{(1, 0)}a_{(1, 8)},$
8. $a_{(n, 0)}b_{(n, 0)} \xrightarrow{f} a_{(n-1, 0)}b_{(n-1, 0)},$ pro $n \geq 2,$
9. $b_{(n, 0)}a_{(n+1, 0)} \xrightarrow{f} b_{(n-1, 0)}a_{(n, 0)},$ pro $n \geq 2,$
10. $a_{(1, 0)}b_{(1, 0)} \xrightarrow{f} a_{(0, 0)}a_{(1, 0)} = c_1c_0,$
11. $b_{(1, 0)}a_{(2, 0)} \xrightarrow{f} \{a_{(1, 0)}\},$
12. $c_n c_{n-1} \xrightarrow{f} c_{n+1} c_n,$
13. $f((0, 0)) = (0, 0),$
14. $f((2, 0)) = (2, 0).$



Obrázek 2.4: Definice zobrazení f - 1, 2



Obrázek 2.5: Definice zobrazení f - 3, 4



Obrázek 2.6: Definice zobrazení f - 5, 6

Definice 2.3.2 zobrazení f je znázorněna na obrázcích 2.4 - 2.10. Nyní ji přiblížíme, abychom pochopili, na které body se máme zaměřit při snaze o pochopení příkladu.

Na Obrázcích 2.4 a 2.5 je vidět jak se množina L_n , tedy jinak úsečka $\overline{a_{(n,0)}a_{(n,8)}}$ zobrazuje pomocí f . Všimnout si je zapotřebí, že úsečka $\overline{a_{(n,7)}a_{(n,8)}}$ se zobrazuje na úsečku $\overline{a_{(n+1,6)}a_{(n+1,8)}}$ a poté úsečku $\overline{a_{(n,6)}a_{(n,7)}}$ zobrazíme na úsečku $\overline{b_{(n,4)}a_{(n+1,6)}}$, čímž budeme zkráceně označovat sjednocení úseček $\overline{a_{(n+1,6)}a_{(n+1,0)}} \cup \overline{a_{(n+1,0)}b_{(n,0)}} \cup \overline{b_{(n,0)}a_{(n,4)}}$. Toto sjednocení je na Obrázku 2.4 vyznačeno modrou lomenou čarou při zobrazení 2). Dále pak na Obrázku 2.6 je potřeba si všimnout, že platí toto zobrazení useček $b_{(n,4)}b_{(n,8)} \xrightarrow{f} b_{(n-1,6)}b_{(n-1,8)}$.

Co vše toto znamená nejprve nematematičky objasníme. Horní část L_1 se postupně zobrazuje na horní část L_2 a pak dále doprava. Když klesne dostatečně nízko, je částečně přenesena na M_k pro jisté k přirozené. Pak nastane postupný přenos doleva na M_{k-1} a pak dál až se dostane skoro na své původní místo. Tím se zaručena magnetická vlastnost. Budeme postupně dokazovat vlastnosti W a f .

Tvrzení 2.3.3. Pro každé $n \geq 3$ přirozené platí:

$$\left(1, 1 - \frac{1}{2^n}\right) a_{(1,8)} \xrightarrow{f^{n-2}} \left(2 - \frac{2}{2(n-1)}, \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n}\right) a_{(n-1,8)}$$

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle n . Po dosazení za $n = 3$ dokazujeme tvrzení:

$$\left(1, 1 - \frac{1}{8}\right) a_{(1,8)} \xrightarrow{f} \left(2 - \frac{2}{2 \cdot 2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) a_{(2,8)} .$$

Přepíšeme-li si body do podoby z definice bodu $a_{(n,j)}$ tak, že $\left(1, 1 - \frac{1}{8}\right) = a_{(1,7)}$ a že $\left(2 - \frac{2}{2 \cdot 2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = a_{(2,6)}$, pak je okamžitě vidět, že délka úseček $\overline{a_{(1,7)}a_{(1,8)}}$ a $\overline{a_{(2,6)}a_{(2,8)}}$ je stejná a rovná se $\frac{1}{8}$. To nelze jinak než-li f zobrazuje úsečku $\overline{a_{(1,7)}a_{(1,8)}}$ na úsečku $\overline{a_{(2,6)}a_{(2,8)}}$.

Pro $n \geq 3$ jistě platí $\left(1, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_{(1,8)} \subset \left(1, 1 - \frac{1}{2^n}\right) a_{(1,8)}$ a tedy z indukčního předpokladu dostaváme:

$$\left(1, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_{(1,8)} \xrightarrow{f^{n-2}} \left(2 - \frac{2}{2(n-1)}, \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_{(n-1,8)} .$$

Opět z definice bodu $a_{(n,j)}$ máme rovnost $\left(2 - \frac{2}{2(n-1)}, \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = a_{(n-1,7)}$. Na takto vzniklou úsečku aplikujeme zobrazení f , přesněji 1) v Definici 2.3.2, máme $a_{(n-1,7)}a_{(n-1,8)} \xrightarrow{f} a_{(n-1,6)}a_{(n-1,8)}$ a složením s předchozím, pak dostaneme:

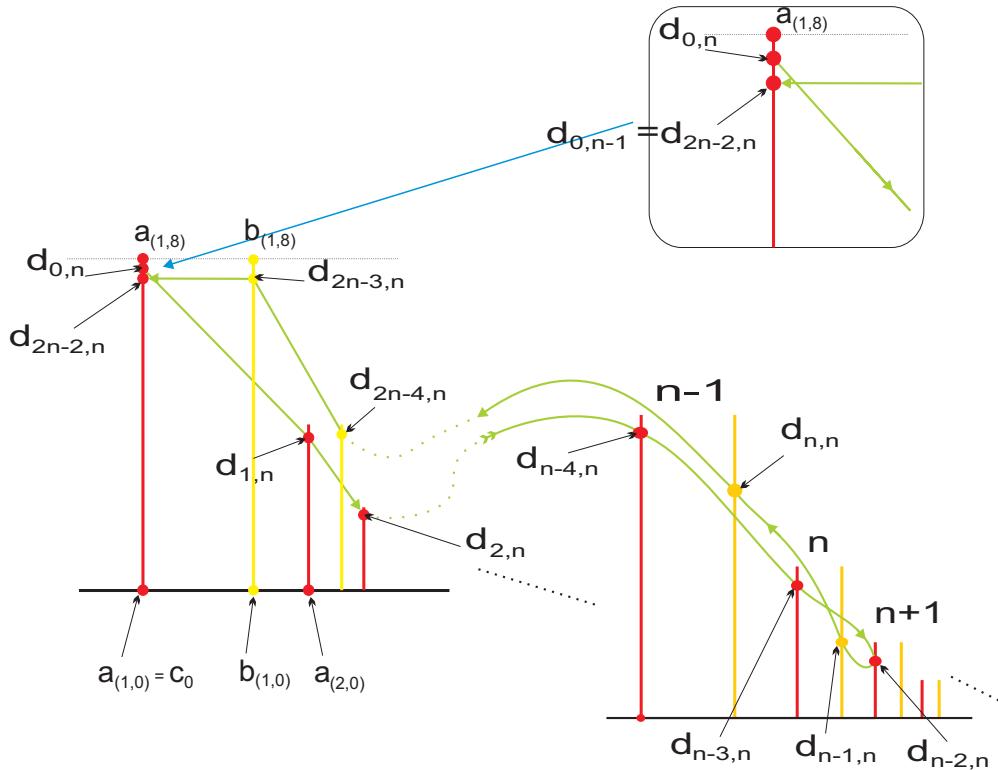
$$\left(1, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_{(1,8)} \xrightarrow{f^{n-1}} a_{(n-1,6)}a_{(n-1,8)} = \left(2 - \frac{2}{2n}, \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_{(n-1,8)} .$$

Což je to co jsme chtěli ukázat. □

Toto tvrzení nám tedy popisuje jakým způsobem se nám úsečka $\overline{a_{(n,7)}a_{(n,8)}}$ posunuje doprava a v jakém smyslu se natahuje. Naopak následující tvrzení říká to jak se smrštují úsečky $\overline{b_{(n,4)}b_{(n,8)}}$ na množinách M_n a postupně se zobrazují doleva a následně pak do okolí bodu $a_{(n,8)}$.

Tvrzení 2.3.4. Pro každé $n \geq 2$ přirozené platí:

$$b_{(n,4)}b_{(n,8)} \xrightarrow{f^{n-1}} \left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^n}\right) b_{(1,8)} .$$



Obrázek 2.7: Důkaz toho, že bod $(1, 1) \in \Omega(f)$

Důkaz. Důkaz provedeme postupným opakovaným následující úvahy. Z 5) Definice 2.3.2 máme $b_{(n,4)}b_{(n,8)} \xrightarrow{f^{n-1}} b_{(n-1,6)}b_{(n-1,8)}$, dále jistě platí tato inkluze $\overline{b_{(n-1,6)}b_{(n-1,8)}} \subset \overline{b_{(n-1,4)}b_{(n-1,8)}}$ a opět využiji 5) a dostaneme $b_{(n-1,4)}b_{(n-1,8)} \xrightarrow{f} b_{(n-2,6)}b_{(n-2,8)}$. Tedy dohromady dostáváme:

$$b_{(n,4)}b_{(n,8)} \xrightarrow{f} \left(2 - \frac{2}{2(n-2)+1}, \frac{1}{2^{n-3}} - \frac{1}{2^n}\right) b_{(n-2,8)} .$$

Pokud tuto úvahu zopakujeme $(n-1)$ - krát získáme požadované. A tudíž jsme hotovi. \square

Z těchto dvou tvrzení, která hovoří pouze o posouvání úseček pomocí skládání zobrazení f , dostaneme velmi užitečné trvzení, jež nám dá vědět něco málo o množině $\Omega(f)$. Důkaz následujícího tvrzení lze názorně demonstrovat obrázkem, a proto je Obrázek 2.7 vizuálním důkazem tohoto tvrzení.

Tento obrázek totiž poukazuje na existenci bodů v blízkosti bodu $(1, 1)$, které zajišťují jeho magnetickost vůči zobrazení f . A přesně i tento bod najdeme v důkazu tvrzení.

Tvrzení 2.3.5. Bod $(1, 1) \in W$ leží v množině $\Omega(f)$.

Důkaz. Podle definice $\Omega(f)$ nám stačí nalézt bod v blízkém bodu $(1, 1)$, jenž se zobrazí po konečně mnoha složení f zpět do okolí bodu $(1, 1)$. Pohyb tohoto bodu je znázorněn na Obrázku 2.7 zelenou čárou. A přesně podle tohoto obrázku povedeme i důkaz. Vhodným kandidátem na tento bod, je tedy bod $(1, 1 - \frac{1}{2^n})$, pro $n \geq 3$, který jsme na Obrázku 2.7 označili jako $d_{0,n}$ a jeho obrazy v zobrazení f jsou označeny jako $d_{j,n} = f^j(d_{0,n})$. Podle Tvrzení 2.3.3 platí:

$$f^{n-2} \left(\left(1, 1 - \frac{1}{2^n} \right) \right) = \left(2 - \frac{2}{2(n-1)}, \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} \right) = a_{(n-1, 6)} .$$

Poté na tento bod aplikujeme zobrazení f a dostaneme, že $f(a_{(n-1, 6)}) = b_{(n-1, 4)}$ podle 3) z Definice 2.3.2. Bod $b_{(n-1, 4)}$ se nám zobrazí na bod $(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}})$ pomocí f^{n-2} podle Tvrzení 2.3.4.

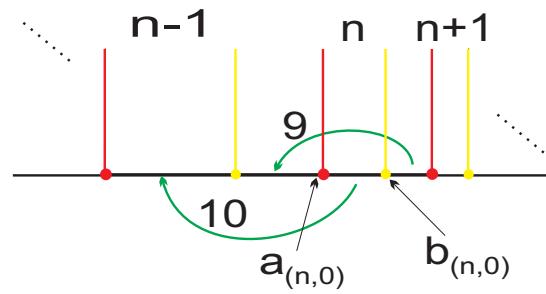
Dále použijeme 7) z Definice 2.3.2, tedy to, že $b_{(1, 0)}b_{(1, 8)} \xrightarrow{f} a_{(1, 0)}a_{(1, 8)}$ a pak $f((\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}})) = (1, 1 - \frac{1}{2^{n-1}})$. A z toho dostáváme, že

$$f^{2n-2} \left(\left(1, 1 - \frac{1}{2^n} \right) \right) = \left(1, 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) .$$

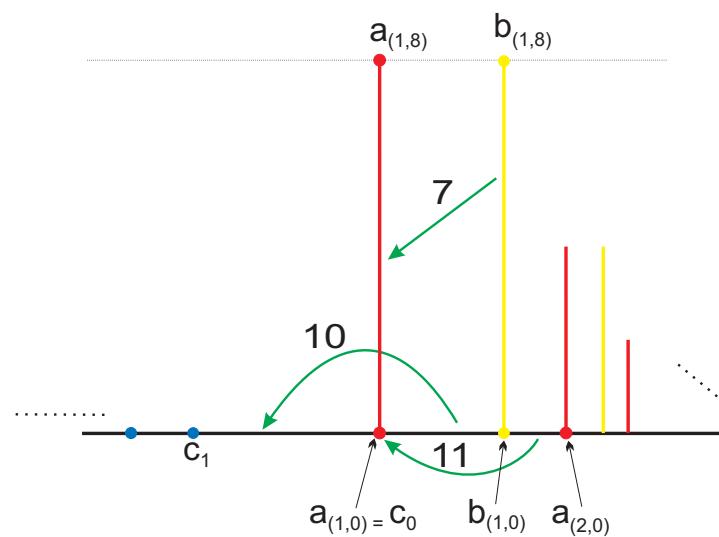
A tím jsme se dostali s bodem $(1, 1 - \frac{1}{2^{n-1}})$ zpět do okolí bodu $(1, 1)$. Což znamená, že $(1, 1) \in \Omega(f)$ a důkaz je tedy dokončen. ξ

A nyní již víme jaký bod leží v množině $\Omega(f)$. Abychom ukázali, že f nemá ΩEP vlastnost, nám stačí zjistit, že není v množině $EP(f)$ ani v jejím uzávěru. Jak vlastně vypadá tato množina? Přímo z 13) a 14) Definice 2.3.2 vyplývá, že body $(0, 0)$ a $(2, 0)$ jsou pevné body zobrazení f , tedy jsou i periodické a leží i v $EP(f)$.

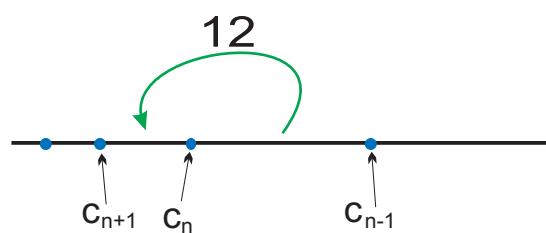
Otázka je, jaké jiné body jsou obsaženy v množině $EP(f)$? Pokusíme se ukázat, že žádné další body z W tam nejsou. Jistě je jednoduché, že body $a_{(n, 8)}$ a $b_{(n, 8)}$ nejsou obsaženy v množině $EP(f)$. Nebot' podle Definice 2.3.2 platí $f(a_{(n, 8)}) = a_{(n+1, 8)}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f(b_{(n, 8)}) = b_{(n-1, 8)}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a k tomu $f(b_{(1, 8)}) = a_{(1, 8)}$. Z toho se bod $a_{(n, 8)}$ postupným skládáním f zobrazuje do pevného bodu $(2, 0)$ a bod $b_{(n, 8)}$ se vrací zpět



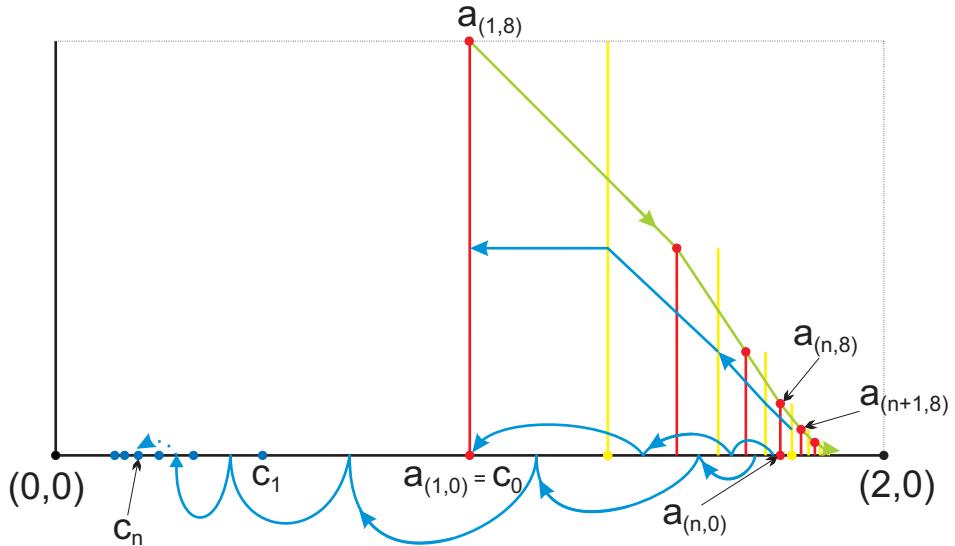
Obrázek 2.8: Definice zobrazení f - 8, 9



Obrázek 2.9: Definice zobrazení f - 7, 10, 11



Obrázek 2.10: Definice zobrazení f - 12



Obrázek 2.11: Zobrazování ke dvěma bodům

doleva po množinách M_k až do bodu $b_{(1,8)}$, který se přenese na $a_{(1,8)}$ a ten se opět zobrazuje směrem do bodu $(2, 0)$. To je také vidět na Obrázku 2.11, kde je to vyznačeno zelenou čárou, jak se pohybují tyto body. A proto žádný z nich se nevrátí zpět do původního bodu.

Dalším jednoduchým tvrzením je to, že body úsečky $\overline{(0, 0)(2, 0)}$ bez krajních bodů neleží v množině $EP(f)$. Tuto množinu označíme jako A a tedy $A := \overline{(0, 0)(2, 0)} \setminus \{(0, 0), (2, 0)\}$. Jak je vykresleno na Obrázku 2.11, body množiny A se postupně zobrazují k bodu $(0, 0)$ a tedy nemohou být v $EP(f)$. Nyní ještě negraficky.

Víme, že $f(A) \subset A$, to platí díky 8) - 12) z Definice 2.3.2. Dále množinu A můžeme napsat jako sjednocení

$$A = \bigcup \left(\overline{c_n c_{n-1}} \cup \overline{a_{(n,0)} b_{(n,0)}} \cup \overline{b_{(n,0)} a_{(n+1,0)}} \right) .$$

Nebo si stačí prohlédnout obrázky 2.8-2.9, kde je vidět, že body na ose x se pouze posouvají doleva a zůstávají na ose x . Z čehož také plyne plastnost $f(q) < q$ pro všechny body $q \in A$.

Tvrzení 2.3.6. Nechť bod $q \in W$ je takový, pro který existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $f^m(q) \in A$, potom platí $q \notin EP(f)$. A navíc platí $A \cap EP(f) = \emptyset$.

Důkaz. K důkazu toho, že $q \notin EP(f)$, si stačí uvědomit tuto myšlenku. Protože existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f^m(q) \in A$ a proto, že $f(A) \subset A$, pak pokud by byl $q \in W \setminus A$, pak se tento bod již nemůže vrátit k bodu q . A tedy $q \notin EP(f)$. A pokud $q \in A$, pak platí $f(q) < q$ a tedy tento bod se při skládání zobrazení f posouvá pouze doleva k bodu $(0, 0)$, a tedy opět není prvkem množiny $EP(f)$. A z této poslední uvahy plyne i tvrzení. \square

V důsledku tohoto Tvrzení 2.3.6 a podle 4) z Definice 2.3.2 dostaneme platnost vztahu $f(\overline{a_{(n,0)}a_{(n,4)}}) \subset A$ a tedy $\overline{a_{(n,0)}a_{(n,4)}} \cap EP(f) = \emptyset$.

Zbývají ještě body na úsečkách $\overline{a_{(n,4)}a_{(n,8)}}$ bez krajních bodů a usečky $\overline{b_{(n,0)}a_{(n,8)}}$ bez krajních bodů, o kterých nevíme jestli obsahují nějaké body z množiny $EP(f)$. K tomu dokážeme několik tvrzení a ukážeme, že

$$(\overline{a_{(n,4)}a_{(n,7)}} \cup \overline{b_{(n,0)}b_{(n,6)}}) \cap EP(f) = \emptyset .$$

Předně, úsečka $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,8)}}$ má stejnou délku jako úsečka $\overline{b_{(1,0)}b_{(1,8)}}$ a podle 7) z definice 2.3.2 máme $b_{(1,0)}b_{(1,8)} \xrightarrow{f} a_{(1,0)}a_{(1,8)}$ a tedy platí $f(b_{(1,0)}b_{(1,8)}) = a_{(1,0)}a_{(1,6)}$. A potřebujeme znát, že $\overline{a_{(1,4)}a_{(1,7)}} \cap EP(f) = \emptyset$, což je obsahem následujícího tvrzení.

Tvrzení 2.3.7. $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,7)}} \cap EP(f) = \emptyset$.

Důkaz. Pro úsečku $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,4)}}$ již víme, že nemá žádný bod v $EP(f)$ ⁷. Z 3) a 7) z definice 2.3.2 dostáváme:

$$f^3(a_{(1,4)}a_{(1,6)}) = \overline{a_{(0,0)}b_{(1,0)}} \subset A$$

a to nám dává, že $\overline{a_{(1,4)}a_{(1,6)}} \cap EP(f) = \emptyset$. Dále platí

$$f(a_{(1,6)}a_{(1,7)}) = \overline{b_{(1,4)}a_{(2,6)}} = \overline{a_{(2,6)}a_{(2,4)}} \cup \overline{a_{(2,4)}a_{(2,0)}} \cup \overline{a_{(2,0)}b_{(1,0)}} \cup \overline{b_{(1,0)}b_{(1,4)}} .$$

A podle Lemmatu 1.3.5 můžeme zkoumat množinu $EP(f)$ bodů místo na úsečce $\overline{b_{(1,4)}a_{(2,6)}}$, ale na výše uvedeném sjednocení úseček. Teď se podíváme na jednotlivé úsečky sjednocení. Úsečka $\overline{b_{(1,0)}b_{(1,4)}}$ se zobrazí pomocí f na $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,4)}}$ a ta neobsahuje bod z $EP(f)$ a tedy $\overline{b_{(1,0)}b_{(1,4)}} \cap EP(f) = \emptyset$.

Pokud na úsečku $\overline{a_{(2,6)}a_{(2,4)}}$ aplikujeme f^3 , potom dostaneme úsečku $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,6)}}$, která nemá⁸ body v $EP(f)$, a tedy ani původní úsečka nemá bod z množiny $EP(f)$. A úsečku $\overline{a_{(2,4)}a_{(2,0)}}$ po zobrazení f budeme mít

⁷Viz odstavec nad tvrzením.

⁸Již dříve dokázané v tomto důzaku.

v množině A , kde leží i úsečka $\overline{a_{(2,0)}b_{(1,0)}} \subset A$. A proto ani tyto úsečky neobsahují body z množiny $EP(f)$. A tak dohromady dostaváme, že

$$\overline{a_{(1,0)}a_{(1,7)}} \cap EP(f) = \emptyset$$

a tím je důkaz dokončen. □

Tvrzení 2.3.8. $(\overline{a_{(n,0)}a_{(n,7)}} \cup \overline{b_{(n,0)}b_{(n,6)}}) \cap EP(f) = \emptyset$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Předně úsečka $\overline{a_{(n,0)}a_{(n,4)}}$ nemá podle důsledku Tvrzení 2.3.6 společný bod s množinou $EP(f)$. Zbývající části ukáží indukcí podle n . Pro $n = 1$ to je Tvrzení 2.3.7, neboť úsečka na množině M_1 se zobrazí na úsečku do množiny L_1 , o které mluví tvrzení.

Nyní budeme předpokládat platnost pro $n = m$ a chci ukázat platnost pro $n = m + 1$. Rozdělíme si důkaz na dvě části v první ukážeme, že $\overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,6)}} \cap EP(f) = \emptyset$ a v té druhé, že $\overline{a_{(m+1,0)}a_{(m+1,7)}} \cap EP(f) = \emptyset$.

Z 5) a 6) z definice 2.3.2 je $f|_{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,8)}} : \overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,8)}} \rightarrow \overline{b_{(m,0)}b_{(m,8)}}$ homeomorfismus, který posílá bod $b_{(m+1,0)}$ do bodu $b_{(m,0)}$ a bod $b_{(m+1,8)}$ do bodu $b_{(m,8)}$. Podle Tvrzení 2.3.4 platí následující vztah $f^m(b_{(m+1,6)}) = (\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{m+2}})$. Z toho ale dostaváme, že

$$f^m(b_{(m+1,0)}b_{(m+1,6)}) = \overline{(1, 0) \left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{m+2}} \right)}.$$

A pro dokončení důkazu první části nám stačí ukázat, že úsečka

$$\overline{(1, 0) \left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{m+2}} \right)}$$

nemá žádné body z množiny $EP(f)$.

Pro důkaz tohoto faktu použijeme indukci. Máme tedy ukázat, že

$$\overline{(1, 0) \left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{l+2}} \right)} \cap EP(f)$$

je prázdná množina. První krok je pro $l = 1$ a tedy máme ukázat, že $\overline{(1, 0) \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{8} \right)}$ nemá body z $EP(f)$, ale podle Tvrzení 2.3.7 platí. Máme to ukázat pro $2 \leq l \leq m$, když předpokládáme platnost pro $l - 1$. Z toho nám stačí ukázat

$$\overline{\left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{l+1}} \right)} \left(\frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{2^{l+2}} \right) \cap EP(f) = \emptyset.$$

A na vše jestě můžeme aplikovat zobrazení f a tím si tyto body posunout na usečku $\overline{(1, 1 - \frac{1}{2^{l+1}})(1, 1 - \frac{1}{2^{l+2}})}$, která je součástí úsečky $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,8)}}$, a zkoumat chování na ní. Díky Tvrzení 2.3.3 máme, že $(1, 1 - \frac{1}{2^{l+1}})a_{(1,8)} \xrightarrow{f^{l-1}} (2 - \frac{2}{2^l}, \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{l+1}})a_{(l,8)}$ a tedy pro zkoumanou úsečku to vypadá takto $(1, 1 - \frac{1}{2^{l+1}})(1, 1 - \frac{1}{2^{l+2}}) \xrightarrow{f^{l-1}} (2 - \frac{2}{2^l}, \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{l+1}})(2 - \frac{2}{2^l}, \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{l+2}})$. A toto lze přepsat pomocí definice bodů $a_{(n,j)}$ a použít body $(2 - \frac{2}{2^l}, \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2^{l-1}}) = a_{(l,6)}$ a $(2 - \frac{2}{2^l}, \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2^{l-1}}) = a_{(l,7)}$. Což podle indukčního přepokladu víme, že úsečka $\overline{a_{(l,6)}a_{(l,7)}}$ má prázdný průnik s množinou $EP(f)$. To ale znamená, že ani úsečka $\overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,6)}}$ nemá žádný společný bod s množinou $EP(f)$.

Nyní provedeme druhou část toho důkazu, tedy $\overline{a_{(m+1,0)}a_{(m+1,7)}} \cap EP(f) = \emptyset$. Opět se stačí omezit na menší usečku, přesněji na $\overline{a_{(m+1,4)}a_{(m+1,7)}}$, neboť pro úsečku $\overline{a_{(n,0)}a_{(n,4)}}$ to již víme⁹. A dále podle 3) z Definice 2.3.2 víme, že úsečka $\overline{a_{(m+1,4)}a_{(m+1,6)}}$ se zobrazí pomocí f na úsečku $\overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,4)}}$ a z prvního kroku víme, že nemá společný bod s množinou $EP(f)$.

Nyní ukážeme, že úsečka $\overline{a_{(m+2,4)}a_{(m+2,6)}}$ nemá společný bod s množinou $EP(f)$. Což je jednoduché, stačí ji zobrazit pomocí zobrazení f a dostaneme úsečku $\overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,4)}}$, jenž má, podle první časti tohoto důkazu, prázdný průnik s množinou $EP(f)$.

K tomu, abychom dokončili důkaz, musíme ještě ukázat, že ani zbývající úsečka ve sjednocení, konkrétně $\overline{a_{(m+1,6)}a_{(m+1,7)}}$, nemá žádný společný bod s $EP(f)$. Podle 2) z Definice 2.3.2 platí: $f(a_{(m+1,6)}a_{(m+1,7)}) = \overline{b_{(m+1,4)}a_{(m+2,6)}} = \overline{a_{(m+2,6)}a_{(m+2,4)}} \cup \overline{a_{(m+2,4)}a_{(m+2,0)}} \cup \overline{a_{(m+2,0)}b_{(m+1,0)}} \cup \overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,4)}}$. Díky Tvrzení 2.3.6 můžeme tvrdit, že úsečky $\overline{a_{(m+2,4)}a_{(m+2,0)}}$ a $\overline{a_{(m+2,0)}b_{(m+1,0)}}$ ve sjednocení mají prázdný průnik s množinou $EP(f)$. A dále z první části tohoto důkazu ani úsečka $\overline{b_{(m+1,0)}b_{(m+1,4)}}$ nemá společný bod s množinou $EP(f)$.

Čímž jsme dokázali i druhou část důkazu a tedy důkaz je u konce. \diamond

Tvrzení 2.3.9. $W \cap EP(f) = \{(0, 0), (2, 0)\}$.

Důkaz. Jistě v množině $EP(f)$ leží dva pevné body zobrazení f a tedy $\{(0, 0), (2, 0)\} \subset EP(f)$. A podle Tvrzení 2.3.6 a Tvrzení 2.3.8 nám stačí zjistit, že $(\overline{a_{(n,7)}a_{(n,8)}} \setminus \{a_{(n,8)}\}) \cap EP(f) = \emptyset$. A to proto, že úsečku $\overline{b_{(n,0)}b_{(n,8)}}$ zobrazím pomocí f^n na úsečku $\overline{a_{(1,0)}a_{(1,8)}}$ a tedy jí nemusíme zkoumat samostatně.

Jak vypadají body z úsečky $q \in \overline{a_{(n,7)}a_{(n,8)}} \setminus \{a_{(n,8)}\}$? Bod q má tvar $q = (2 - \frac{2}{2^n}, s)$, kde s probíhá interval $[\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}]$. Nechť $m \geq 3$ přirozené

⁹Je to důsledkem Tvrzení 2.3.6.

a nechť $s \in [\frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^m}), \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^{m+1}})]$, pak podle 1) z definice 2.3.2 platí nasledující:

jestliže $m = 3$, potom $f(q) \in \overline{a_{(n+1, 6)}a_{(n+1, 7)}}$,

jestliže $m = 4$, potom $f^2(q) \in \overline{a_{(n+2, 6)}a_{(n+2, 7)}}$,

jestliže $m = 5$, potom $f^3(q) \in \overline{a_{(n+3, 6)}a_{(n+3, 7)}}$,

⋮

Z Tvrzení 2.3.8 žádné z těchto q není prvkem množiny $EP(f)$ a tedy pro žádné konečné $m \in \mathbb{N}$ není $q \in EP(f)$ a tedy $\overline{a_{(n, 7)}a_{(n, 8)}} \cap EP(f) = \emptyset$. A tím je důkaz hotov. \square

Co z těchto uvedených tvrzení vlastně vzniklo? Podle Tvrzení 2.3.9 známe přesně jak vypadá množina $EP(f) = \{(0, 0), (2, 0)\}$. Avšak Tvrzení 2.3.5 nám říká, že v množině $\Omega(f)$ leží bod $(1, 1)$. Proto jistě nemůže platit tato inkluze

$$\Omega(f) \subset \overline{EP(f)}^W$$

to ale znamená, že zobrazení f nemůže mít ΩEP vlastnost, což bylo naším cílem ukázat.

Vše důležité ještě o null-combu shrneme. Zobrazení f je definované v často zmiňované Definici 2.3.2 a nemá ΩEP vlastnost. A díky čemu to tak vlastně je? Hlavně díky tomu, že bod $(1, 1) \in \Omega(f)$ a nikoliv v množině $EP(f)$. To je zajištěno roztahovaním useček $\overline{a_{(n, 7)}a_{(n, 8)}}$ na úsečky $\overline{a_{(n+1, 6)}} \overline{a_{(n+1, 8)}}$, tím se blízké body u bodu $a_{(n, 8)}$ postupně dostanou dál od bodů $a_{(m, 8)}$ pro $m > n$ a následně se díky přesunu některých bodů z množin L_n na množiny M_n dostanou na úsečku $\overline{b_{(k, 0)}a_{(k, 4)}}$ a to hlavně díky 2) a 3) z definice f . A následně tyto body začnou posunovat zpět doleva díky zobrazením mezi množinami M_n a M_{n-1} , jež je definované v 5) a 6) v definici f . Dále pak se tyto body dostanou zpět do okolí bodu $(1, 1)$, a to díky 7). Avšak sám bod $(1, 1)$ je hnán do pevného bodu $(2, 0)$, což je zajistěno 14) v definici 2.3.2.

Ostatní body z dendritu W se postupným skládáním zobrazení f dostávají na osu x , přesněji na úsečku $\overline{(0, 0)(2, 0)}$. A to se děje za pomoci 4), když se tak děje jen s body množiny L_n . To ovšem nevadí, neboť body z množin M_n se časem přesunou na množiny L_n . A to vše se děje pomocí po částech prostého zobrazování. I díky tomu se na množinách L_n a M_n nevyskytují konečně periodické body zobrazení f , jak je možné se přesvědčit v Tvrzení

2.3.8. O body na ose x je pro pečlivost také postaráno. Nejen že zůstanou již v množině A , ale ještě k tomu postupným skládaním zobrazení f se posouvají směrem k pevnému bodu $(0, 0)$. Jeho pevnost je zajistěna velmi snadno a to 13) v definici f . A proto se ani uzavřením množiny $EP(f)$ vůči W nedostaneme k bodu $(1, 1)$, který leží v $\Omega(f)$.

Literatura

- [1] Aria T., Chinen N. and Suda T.: *Continuous maps of dendrites with finitely many branch points and nonwandering sets*, Top. Proc. 26 (2001 – 2002), 29 – 36.
- [2] Block L. S.: *Continuous maps of the interval with finite nonwandering set*, Trans. Amer. Math. Soc. 240 (1978), 221 – 230.
- [3] Gordh G. R., Jr. and Lum L.: *Monotone retract and some characterizations of dendrites*, Prop. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 156 – 158.
- [4] Hladký J., Novák J., Pyrih P., Sterzik M. and Tancer M.: *An engine breaking the ΩEP -property*, Top. Appl. 153 (2006), 3621 – 3626.
- [5] Hosaka H. and Kato H.: *Continuous maps of trees and nonwandering sets*, Top. Appl. 81 (1997), 35 - 46.
- [6] Charatonik J. J. and Illanes A.: *Mappings on Dendrites*, UNAM, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, 04510, México DF, Mexico, (2003).