Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Válková

Klony na dvouprvkové množině

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Libor Barto, Ph.D.

Studijní program: Matematika,
matematické metody informační bezpečnosti

2008

Ráda bych poděkovala Mgr. Liboru Bartovi za vedení této práce, především potom za pomoc při interpretaci Postova důkazu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4. 8. 2008 Martina Válková

Obsah

Název práce: Klony na dvouprvkové množině
Autor: Martina Válková
Katedra (ústav): Katedra algebry
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Libor Barto, Ph.D.
e-mail vedoucího: libor.barto@gmail.com

Abstrakt: Předložená práce se zabývá popisem všech klonů na dvouprvkové množině, tj. všech podmnožin booleovských funkcí uzavřených na skládání a obsahujících všechny projekce. Studie se zaměřuje především na dílo E. L. Posta, které bylo vůbec prvním soupisem všech klonů booleovských funkcí a důkazem jeho úplnosti. Jevonsova notace, použitá v originále, je nahrazena dnes standardně používanými matematickými termíny a značením. Ve zkrácené formě jsou pak představeny dva další alternativní důkazy téhož: první využívající vlastnosti maximálních podklonů dle J. Kuntzmanna a druhý vyjadřující klony pomocí zakázaných podfunkcí podle článku I. E. Zverovicha.

Klíčová slova: Klony, Postův svaz, zakázané podfunkce

Title: Clones on the two-element set
Author: Martina Válková
Department: Department of Algebra
Supervisor: Mgr. Libor Barto, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: libor.barto@gmail.com

Abstract: The study concerns with description of all clones on the two-element set - i.e. all subsets of Boolean functions closed under composition and containing all projections. The primary list of all closed systems of Boolean functions with the proof of its completeness was publicated by E. L. Post. Therefore, the work principally focuses on this one. The Jevons notation that was used in the original has been replaced by current mathematical language. Other alternative proofs are presented as summaries: the first one uses properties of maximal subclones according to J. Kuntzmann, the second one works with characterization of clones in terms of forbidden subfunctions based on the article by I. E. Zverovich.

Keywords: Clones, Post's lattice, forbidden subfunctions

Kapitola 1

Úvod

Práce se zabývá popisem všech klonů na dvouprvkové množině, tedy popisem množin booleovských funkcí uzavřených na skládání a obsahujících všechny projekce, a předkládá pro ně tři různé důkazy úplnosti.

E. L. Post v roce 1941 publikoval studii The Two-Valued Iterative Systems Of Mathematical Logic [1], v níž podal úplný seznam všech iterativně uzavřených dvouhodnotových systémů, dnes obvykle souhrnně označovaných jako Postův svaz. Postovou aspirací bylo popsat všechny možné funkce na všech dvouhodnotových logikách, což se mu také skutečně podařilo. Navíc dokázal, že každý z daných iterativně uzavřených systémů má konečnou množinu generátorů.

Termín iterativně uzavřený systém se od dnes používané definice klonu liší jen nepatrně. Podstatným rozdílem je jen požadavek na obsah všech projekcí, který pro iterativně uzavřené systémy nemusí být nutně splněn. Avšak platí, že každý klon je iterativně uzavřeným systémem.

Postův důkaz je stěžejní, a proto se tato práce jeho důkazu věnuje nejpodrobněji. Je předložen v téměř úplném rozsahu, jen s vynecháním některých technických detailů. Vzhledem k tomu, že Post pro své důkazy použil tzv. Jevonsovu notaci, která je překonaná a v matematických publikacích se již nepoužívá, bylo toto značení převedeno do dnes standardně užívaného matematického jazyka. Tento postup byl zvolen především v zájmu srozumitelnosti textu.

Pro představu o možnostech různých přístupů k důkazu téhož jsou dále nastíněny i dva další způsoby, jeden založený na hledání maximálních podklonů (dle J. Kuntzmanna, [2]), druhý vyjadřující klony jako třídy zakázaných podfunkcí (Igor' E. Zverovich, [3]).

Úplná klasifikace booleovských klonů je stále aktuálním tématem a postupně jsou hledány nové cesty k nalezení jejích alternativních, kratších a modernějších důkazů. Důvodem je nejen její zajímavost sama o sobě, ale především její význam pro různé oblasti matematiky. Především pak pro universální algebru, která obvykle pracuje právě s klony generovanými základními operacemi, a tak se popis všech klonů hodí například k testování nejrůznějších domněnek.

Jako konkrétní příklad aplikace uveďme problém splnitelnosti výrokových formulí z výpočetní složitostní teorie. O tomto problému, který je též známý jako SAT, bylo dokázáno, že je NP-úplný (Cook-Levin Theorem). Byl to tak vlastně první dokázaný NP-úplný rozhodovací problém. V důsledku tohoto důkazu se zcela přirozeně nabízela otázka, zda může být při nějakém omezení výrokových formulí tento problém jednodušší, efektivně řešitelný, například omezením dovolených výrokových operátorů. A právě s využitím Postovy charakterizace všech klonů se podařilo H. R. Lewisovi dospět k zajímavému výsledku, že splnitelnost výrokových formulí je NP-úplná právě tehdy, když lze z omezené množiny operátorů získat funkci $\not\rightarrow$. [5]

Znalost popisu všech klonů na dvouprvkové množině se dále používá při různých optimalizačních problémech, například u grafů a při sestrojování booleovských okruhů.

Pokusy popsat všechny klony i na vícebodových množinách přinášejí prozatím jen částečné úspěchy. V současnosti již například víme, že svaz všech klonů na libovolné konečné množině má konečně mnoho minimálních klonů a také konečně mnoho maximálních (ty ve své práci popsal I. G. Rosenberg, [6]), ačkoliv svaz sám je nekonečný. Avšak zatímco pro dvoubodovou množinu svaz obsahuje klonů nekonečně, ale spočetně mnoho, pro alespoň tříbodovou množinu už dosahuje mohutnosti kontinua [7], což je zřejmě jednou z hlavních překážek.

Studie poskytující ucelený přehled všech klonů na alespoň tříprvkové množině (po vzoru Postovy práce) by byla nesporně významným krokem k vyřešení dalších matematických problémů. Dosažení takového cíle však prozatím zůstává, alespoň dle dosavadních výsledků, v nedohlednu.

Kapitola 2

Klony

2.1 Základní pojmy

Pro přehlednost zaveďme značení $2 = \{0, 1\}$.

Definice 1. Booleovskou funkcí *rozumíme zobrazení* $f : 2^n \to 2$, $n \geq 1$.

Číslo n *nazýváme* arita *funkce* f, *nebo říkáme, že* f *je* n-árnı́. *Místo* 1*-ární (resp.* 2*-ární,* 3*-ární) funkce říkáme unární (resp. binární, ternární).*

Speciálním typem booleovské funkce je projekce*:* $p^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$.

V tomto textu budeme pracovat výhradně s booleovskými funkcemi, proto budeme přívlastek často vynechávat.

Definice 2. *Buď dána* m*-ární funkce* f *a* m*-tice* n*-árních funkcí* $g_1, \ldots, g_m$*.* Složením *těchto funkcí se rozumí* n*-ární funkce*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Pokud $m \geq n$ *a všechny* g_i *jsou projekce, říkáme, že funkce* h *vznikla z funkce* f redukcí*.*

Definice 3. *Množinu* $\mathcal{C}$ *(booleovských) funkcí nazýváme* klon*, pokud*

1. *$\mathcal{C}$ obsahuje všechny projekce,*

2. *$\mathcal{C}$ je uzavřená na skládání, tj. složením prvků $\mathcal{C}$ je prvek $\mathcal{C}$.*

Podklon $\mathcal{C}'$ *klonu* $\mathcal{C}$ *je klon takový, že* $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$*.*

E. L. Post ve své práci popisoval všechny *iterativně uzavřené systémy*, což jsou množiny funkcí uzavřené na skládání a redukci. Někteří autoři též pracují s *uzavřenými systémy*, tj. množinami funkcí uzavřených na skládání a skládání s projekcemi. Oba pojmy se od pojmu klon liší jen nepatrně a důkazy pro obecnější situaci nejsou složitější, proto v této práci budeme používat předchozí definici.

Následující tvrzení ukazuje, že množina všech klonů je vzhledem k uspořádání inkluzí úplný svaz (tj. částečně uspořádaná množina taková, že každá její podmožina má supremum i infimum).

Tvrzení 2.1.1. *Průnikem libovolné množiny klonů je klon. Pro libovolnou množinu M (booleovských) funkcí existuje vzhledem k inkluzi nejmenší klon obsahující M.*

Důkaz. Snadný. □

Nejmenším klonem je klon $\perp$ - klon obsahující pouze projekce, největším je $\top$ - klon obsahující všechny booleovské funkce.

Definice 4. *Nejmenší klon obsahující množinu M nazýváme klon* generovaný M*, značíme jej $\langle M \rangle$. Pokud pro klon $\mathcal{C}$ platí, že $\langle M \rangle = \mathcal{C}$, říkáme, že $\mathcal{C}$ je generovaný M.*

2.2 Booleovské funkce, jejich vlastnosti

Pro n-tice používáme značení $\mathbf{a} \in 2^n$ a jejich složky značíme $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tedy $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Operace s n-ticemi definujeme po složkách, tedy například

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, \ldots, a_n \wedge b_n).$$

Pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in 2^n$ píšeme $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, pokud $a_i \leq b_i$ pro všechny složky i. Dále pro n-tici $\mathbf{a} \in 2^n$ používáme značení

$$\mathrm{J}(\mathbf{a}) = \{i : a_i = 1\}.$$

Definice 5. *Nechť $f : 2^n \to 2$ je funkce. Říkáme, že f nezávisí na i-té proměnné (nebo i-té souřadnici), pokud $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$ pro nějakou $(n-1)$-ární funkci g a libovolná $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$. V opačném případě říkáme, že f na i-té proměnné (souřadnici) závisí.*

Definice 6. *Jako* monom *označujeme výraz složený z (možno negovaných) proměnných svázaných operátorem konjunkce* $\wedge$.

Z důvodu zjednodušení zápisu budeme znak $\wedge$ v rámci monomů pro větší přehlednost většinou vynechávat.

Značení pro některé funkce

Existují přesně čtyři booleovské funkce jedné proměnné. Konstantní funkce budeme značit 0, 1. Identickou funkci budeme značit x a negaci $\bar{x}$.

Existuje celkem 16 různých binárních funkcí:

xy	00	01	10	11	
f_0	0	0	0	0	Konstanta 0
f_1	0	0	0	1	Funkce xy (binární konjunkce, meet, funkce 'a')
f_2	0	0	1	0	Funkce $x\bar{y} = x \not\to y$
f_3	0	0	1	1	Funkce x
f_4	0	1	0	0	Funkce $\bar{x}y = y \not\to x$
f_5	0	1	0	1	Funkce y
f_6	0	1	1	0	Funkce $x + y$ (součet mod 2)
f_7	0	1	1	1	Funkce $x \vee y$ (binární disjunkce, join, funkce 'nebo')
f_8	1	0	0	0	Funkce $\bar{x}\bar{y}$ (Peirceova funkce: $\downarrow$)
f_9	1	0	0	1	Funkce $x + y + 1 = x \sim y$ (ekvivalence)
f_{10}	1	0	1	0	Funkce $\bar{y}$
f_{11}	1	0	1	1	Funkce $x \vee \bar{y} = y \to x$
f_{12}	1	1	0	0	Funkce $\bar{x}$
f_{13}	1	1	0	1	Funkce $\bar{x} \vee y = x \to y$ (implikace)
f_{14}	1	1	1	0	Funkce $\bar{x} \vee \bar{y}$ (Shefferova funkce: $\uparrow$)
f_{15}	1	1	1	1	Konstanta 1

Definice 7. *Nechť I je libovolná neprázdná podmožina* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Funkci $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i \in I} x_i$ *nazýváme* disjunkcí.

Funkci $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} x_i$ *nazýváme* konjunkcí.

Definice 8. *Nechť $k \geq 3$. Zápisem $m_k(x_1, \ldots, x_k)$ budeme značit funkci definovanou pro libovolnou k-tici $\boldsymbol{a} \in 2^k$ následujícím způsobem:*

$$m_k(\boldsymbol{a}) = 1 \quad \textit{právě tehdy, když} \quad |\mathrm{J}(\boldsymbol{a})| \geq 2.$$

Funkci m_3 *nazýváme* majoritní funkce*.*

Uveďme zde rovněž (duální) funkci:

$$m_k^d(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \bigvee_{i=1}^{k} x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_k.$$

Definice 9. Lineární funkce *je funkce tvaru*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

Pokud $a_0 = 0$*, označujeme ji jako* homogenní *lineární funkci.*

Je zřejmé, že pro každé n existují právě 2 lineární funkce závisející na n-proměnných.

Vlastnosti funkcí

Definice 10. Duální funkci *k* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *označujeme* f^d *a definujeme jako*

$$f^d(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Samoduální funkce *je funkce duální sama k sobě, tj.*

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{f}(x_1, \ldots, x_n).$$

Duální klon $\mathcal{C}^d$ *ke klonu* $\mathcal{C}$ *je klon obsahující funkce duální k funkcím klonu* $\mathcal{C}$*, tj.* $\mathcal{C}^d = \{f^d : f \in \mathcal{C}\}$. Samoduální klon *je klon duální sám k sobě, tedy klon splňující* $\mathcal{C}^d = \mathcal{C}$*.*

Duální funkcí k 0 je 1, duální funkcí k $\vee$ je $\wedge$. Příklady samoduálních funkcí jsou negace, majoritní funkce nebo lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných.

Je snadné nahlédnout, že množina $\mathcal{C}^d$ je skutečně klonem, tedy definice duálního klonu je korektní. To umožňuje v řadě případů dokazovat jen polovinu – druhá polovina plyne přechodem k duálnímu klonu, viz. například Tvrzení 2.4.1.

Definice 11. *Říkáme, že funkce* $f : 2^n \to 2$ zachovává *konstantu* $a \in 2$*, pokud*

$$f(a, a, \ldots, a) = a.$$

Funkce se nazývá idempotentní*, pokud zachovává* 0 *i* 1*.*

Klon se nazývá idempotentní*, pokud obsahuje pouze idempotentní funkce.*

Definice 12. *Funkce $f : 2^n \to 2$ se nazývá* rostoucí, *pokud*

$$\boldsymbol{a} \preceq \boldsymbol{b} \Rightarrow f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{b}) \quad \textit{pro libovolné} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in 2^n.$$

Rostoucí funkce odpovídá Postově funkci splňující $[A : a]$ podmínku. Příklady rostoucích funkcí jsou konstantní funkce, disjunkce a konjunkce. Důsledkem Tvrzení 2.4.2 je, že každá rostoucí funkce je složením funkcí 0, 1, xy, $x \vee y$.

Definice 13. *Nechť $k \geq 2$. Funkci nazýváme k-*coclique*, pokud pro libovolné n-tice $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ platí*

$$f(\boldsymbol{a}^1) = \ldots = f(\boldsymbol{a}^k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}^1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}^k \neq (1, \ldots, 1).$$

*Funkce je k-*clique*, pokud pro libovolné $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ platí*

$$f(\boldsymbol{a}^1) = \ldots = f(\boldsymbol{a}^k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}^1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}^k \neq (0, \ldots, 0).$$

*Funkce f je ∞-*coclique*, pokud je k-coclique pro libovolné k, tj. existuje souřadnice i taková, že pro libovolnou n-tici $\boldsymbol{a} \in 2^n$ platí $f(\boldsymbol{a}) = 0 \Rightarrow a_i = 0$.*

Analogicky je definována ∞-clique funkce.

Protože s k-coclique (resp. k-clique) funkcemi budeme často pracovat, odchylujeme se od častějšího, ale delšího označení 0-oddělující (resp. 1-oddělující) funkce stupně k.

Každá 2-coclique funkce zachovává 1. Příkladem k-coclique funkce, která není $(k+1)$-coclique, je $m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})$.

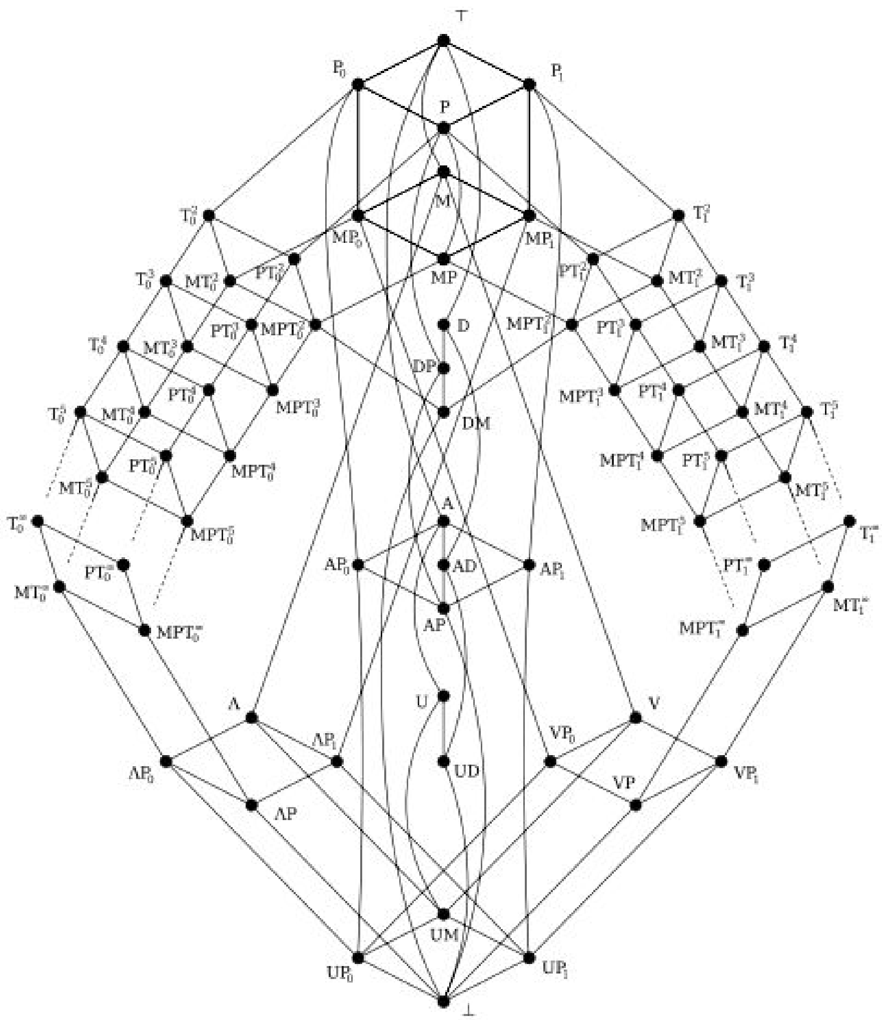
V Postově práci se k-coclique funkce nazývají funkce splňující $[: a_k]$ podmínku (2-coclique odpovídá podmínce $[: aa]$), k-clique funkcím odpovídají funkce splňující $[A_k :]$ podmínku (2-clique odpovídá podmínce $[AA :]$).

2.3 Popis klonů

Následující tabulka obsahuje seznam všech klonů. V prvním sloupci je značení používané v této práci, které se shoduje se značením ve Wikipedii [4]. V druhém sloupci je původní Postovo značení, ve třetím je definice příslušného klonu.

Klon	Post	Definice
U	R_{13}	$\langle 0, \bar{x} \rangle$
UD	R_4	$\langle \bar{x} \rangle$
UM	R_{11}	$\langle 0, 1 \rangle$
UP_0	R_8	$\langle 0 \rangle$
UP_1	R_6	$\langle 1 \rangle$
$\bot$	R_1	projekce
$\top$	C_1	všechny booleovské funkce
P_0	C_3	$\{f : f(0,0,\ldots,0) = 0\}$, funkce zachovávající 0
P_1	C_2	$\{f : f(1,1,\ldots,1) = 1\}$, funkce zachovávající 1
P	C_4	$P_0 \cap P_1$, idempotentní funkce
$\wedge$	P_6	$\{0, 1, x_1 x_2 \ldots x_n\}$, konjunkce
$\wedge P_0$	P_4	$\wedge \cap P_0$
$\wedge P_1$	P_5	$\wedge \cap P_1$
$\wedge P$	P_2	$\wedge \cap P$
$\vee$	S_6	$\{0, 1, x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\}$, disjunkce
$\vee P_0$	S_5	$\vee \cap P_0$
$\vee P_1$	S_4	$\vee \cap P_1$
$\vee P$	S_2	$\vee \cap P$
M	A_1	{f: $a \preceq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$}, rostoucí funkce
MP_0	A_3	$M \cap P_0$
MP_1	A_2	$M \cap P_1$
MP	A_4	$M \cap P$
D	D_3	$\{f : f^d = f\}$, samoduální funkce
DP	D_1	$D \cap P$
DM	D_2	$D \cap M$
A	L_1	$\{a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n : n \geq 0,\ a_i \in 2\}$, lineární funkce
AP_0	L_3	$A \cap P_0$
AP_1	L_2	$A \cap P_1$
AP	L_4	$A \cap P$
AD	L_5	$A \cap D$
T_1^k	F_4^k	k-coclique funkce, $k \geq 2$ nebo $k = \infty$
PT_1^k	F_1^k	$T_1^k \cap P$
MT_1^k	F_3^k	$T_1^k \cap M$
MPT_1^k	F_2^k	$T_1^k \cap P \cap M$
T_0^k	F_8^k	k-clique funkce, $k \geq 2$ nebo $k = \infty$
PT_0^k	F_5^k	$T_0^k \cap P$
MT_0^k	F_7^k	$T_0^k \cap M$
MPT_0^k	F_6^k	$T_0^k \cap P \cap M$

Není těžké ověřit, že výše zmíněné množiny booleovských funkcí jsou skutečně klony (stačí ověřovat pro U, UD, UM, P_0, $\wedge$, M, D, A a T_1^k, protože ostatní klony jsou jejich průnikem nebo duály) a jsou různé. Následující kapitoly pak nabízejí tři různé způsoby důkazu, že tento seznam je úplný.



Obrázek 2.1: Post's lattice

2.4 Množiny generátorů některých klonů

Tvrzení 2.4.1. $\langle x \vee y, \bar{x} \rangle = \top$. *(Duálně* $\langle xy, \bar{x} \rangle = \top$.*)*

Důkaz. Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je libovolná funkce a označme $\mathcal{A} = \{\mathrm{J}(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 1\}$. Pokud $\mathcal{A} = \emptyset$, pak $f(x_1, \ldots, x_n) = 0 = x\bar{x}$. Jinak zřejmě

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{X \in \mathcal{A}} \left(\bigwedge_{i \in X} x_i \ \wedge \bigwedge_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus X} \bar{x}_i \right).$$

Protože $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$, je výraz na pravé straně prvkem $\langle x \vee y, \bar{x} \rangle$. □

Užitím předchozího tvrzení lze snadno dokázat, že $\langle \uparrow \rangle = \langle \downarrow \rangle = \top$.

Všechny nekonstantní rostoucí funkce lze získat z operací $\vee$ a $\wedge$:

Tvrzení 2.4.2. $\langle x \vee y, xy \rangle = MP$.

Důkaz. Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je nekonstantní rostoucí funkce a jako v minulém důkazu označme $\mathcal{A} = \{\mathrm{J}(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 1\}$. Z toho, že f je rostoucí, snadno vyplývá, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{X \in \mathcal{A}} \left(\bigwedge_{i \in X} x_i \right).$$

Poznamenejme, že místo $\mathcal{A}$ můžeme brát pouze minimální prvky $\mathcal{A}$ vzhledem k inkluzi. □

Na druhou stranu, pokud k $x \vee y$ a xy přidáme libovolnou idempotentní funkci, která není rostoucí, dostaneme všechny idempotentní funkce.

Tvrzení 2.4.3. *Nechť* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *je idempotentní funkce, která není rostoucí. Pak* $\langle x \vee y, xy, g(x_1, \ldots, x_n) \rangle = P$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ jsou takové, že $g(\mathbf{a}) = 1$ a $g(\mathbf{b}) = 0$, a uvažujme funkci

$$h(x_1, \ldots, x_m, y) = g(z_1(x_1, \ldots, x_m, y), z_2(x_1, \ldots, x_m, y), \ldots, z_n(x_1, \ldots, x_m, y)),$$

kde

$$z_i(x_1, \ldots, x_m, y) = \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_m & \text{pokud } a_i = b_i = 0, \\ x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_m & \text{pokud } a_i = b_i = 1, \\ y & \text{pokud } a_i = 0, b_i = 1. \end{cases}$$

Tato funkce je "téměř" $\bar{y}$ v následujícím smyslu:

$$\text{Pokud } (0,0,\ldots,0) \neq (c_1,\ldots,c_m) \neq (1,1,\ldots,1), \text{ pak } h(c_1,\ldots,c_m,y) = \bar{y}.$$

Nyní vezměme libovolnou idempotentní funkci $f(x_1,\ldots,x_m)$. Podle Tvrzení 2.4.1 je $f(x_1,\ldots,x_m) \in \langle xy, \bar{x}\rangle$, tedy f lze získat opakovaným skládáním operací xy a $\bar{x}$. Nahradíme-li v tomto složení všechny výrazy tvaru $\bar{A}$ výrazem $h(x_1,\ldots,x_m,A)$, získáme funkci, která leží v $\langle x \vee y, xy, g\rangle$ a je rovna f. □

Stejným trikem lze dokázat následující tvrzení.

Tvrzení 2.4.4. *Nechť $g(x_1,\ldots,x_n)$ je funkce zachovávající 1, která není rostoucí. Pak $\langle xy, 1, g(x_1,\ldots,x_n)\rangle = P_1$.*

Důkaz. Důkaz je téměř totožný s předchozím, s tím rozdílem, že namísto $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ použijeme konstantu 1. □

Poněkud technicky náročnější je dokázat, že majoritní funkce generuje klon všech samoduálních rostoucích funkcí.

Tvrzení 2.4.5. $\langle m_3(x,y,z)\rangle = DM$.

Důkaz. Protože $m_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \vee x_2 \wedge x_3$ (používáme konvenci, že $\wedge$ má vyšší prioritu než $\vee$), lze indukcí snadno dokázat, že

$$m_3(x_1,x_2,m_3(x_1,x_3,m_3(x_1,x_4,\ldots,m_3(x_1,x_{n-1},x_n)\ldots))) =$$

$$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n) \;\vee\; x_2 \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Nechť $f(x_1,\ldots,x_n)$ je rostoucí samoduální funkce a označme opět

$$\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_m\} = \{\mathrm{J}(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 1\}.$$

Dokážeme, že libovolné dva prvky $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ mají neprázdný průnik.

Buď $B = \{1,2,\ldots,n\} \setminus A_i$ a nechť $\mathbf{b}$ je n-tice taková, že $\mathrm{J}(\mathbf{b}) = B$. Ze samoduality f vyplývá $f(\mathbf{b}) = 0$. A protože je funkce rostoucí, je $A_j \not\subseteq B$, takže $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Z právě dokázané vlastnosti pak není těžké nahlédnout, že $f(x_1,\ldots,x_n)$ je rovna funkci

$$\left(\ldots\left(\left(\bigvee_{i\in A_1} x_i \vee \bigwedge_{i\in A_1} x_i\right) \wedge \bigvee_{i\in A_2} x_i \;\vee\; \bigwedge_{i\in A_2} x_i\right) \wedge \cdots \vee \bigwedge_{i\in A_m} x_i\right).$$

□

Tvrzení 2.4.6.

- $\langle PT_1^\infty, m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle = PT_1^k$,
- $\langle T_1^\infty, m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle = T_1^k$,
- $\langle MPT_1^\infty, m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle = MPT_1^k$,
- $\langle MT_1^\infty, m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle = MT_1^k$.

Důkaz. Označme $\mathcal{C} = \langle PT_1^\infty, m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})\rangle$.

Nechť $f(x_1, \ldots, x_n) \in PT_1^k$, tedy f je idempotentní k-coclique funkce. Tvrzení $f \in \mathcal{C}$ dokážeme indukcí podle počtu prvků množiny

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a} \neq (0, 0, \ldots, 0) : f(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Pokud $|\mathbf{A}| < k + 1$, pak f je zřejmě ∞-coclique a není co dokazovat. Jinak vezmeme $k + 1$ různých n-tic $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{k+1} \in \mathbf{A}$ a definujeme n-ární funkce $f_1, \ldots, f_{k+1}$ následovně:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{a}^i, \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z indukčního předpokladu víme, že $f_i \in \mathcal{C}$. Do klonu $\mathcal{C}$ proto patří i funkce

$$g(x_1, \ldots, x_n) = m_{k+1}(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Protože pro libovolné $\mathbf{b} \in 2^n$ se $(k + 1)$-tice $(f_1(\mathbf{b}), \ldots, f_{k+1}(\mathbf{b}))$ liší od konstantní $(k + 1)$-tice $(f(\mathbf{b}), \ldots, f(\mathbf{b}))$ v nejvýše jedné souřadnici, máme $f = g$.

Druhé tvrzení lze dokázat téměř totožným způsobem, indukcí podle počtu prvků množiny $\mathbf{A} = \{\mathbf{a} : f(\mathbf{a}) = 0\}$.

Třetí tvrzení lze dokázat podobně, tentokrát indukcí dle počtu prvků $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} = \{\mathbf{a} : f(\mathbf{a}) = 0\}$, kde $\mathbf{B}$ jsou prvky $\mathbf{A}$, jejichž $\mathrm{J}(\mathbf{a})$ je vzhledem k inkluzi minimální.

Pro důkaz čtvrtého tvrzení si stačí uvědomit, že neidempotentní funkce v daném klonu závisejí pouze na jedné proměnné. $\square$

Kapitola 3

Postův důkaz

3.1 Unární klony

Definice 14. Unární klon $\mathcal{C}$ *je klon, kde každá funkce* $f \in \mathcal{C}$ *závisí na nejvýše jedné proměnné.*

Unární klon je jednoznačně určen unárními funkcemi, které obsahuje. Snadným důsledkem je:

Tvrzení 3.1.1. *Existuje právě* 6 *unárních klonů, a to* U, UD, UM, UP_0, UP_1, $\perp$.

3.2 Klony obsahující pouze lineární funkce

Tvrzení 3.2.1. *Jediné neunární podklony* A *(klon všech lineárních funkcí) jsou* A, AP_0, AP_1, AP, AD.

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je podklonem A a obsahuje funkci, jež závisí na více než jedné proměnné.

Nejdříve předpokládejme, že $\mathcal{C}$ obsahuje funkci závisející na sudém počtu proměnných, tedy pro nějaké sudé přirozené n a konstantu $a \in \{0,1\}$ je $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n + a \in \mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}$ obsahuje konstantu a (protože $a = f(x,x,\ldots,x)$) a rovněž funkci, která závisí na dvou proměnných, totiž funkci $g(x,y) = f(x,x,\ldots,x,y) = x+y+a$. Pokud lineární funkce h závisí na n proměnných, pak funkce $h(g(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_{n+1})$ zřejmě závisí na $n+1$ proměnných. Indukcí dostáváme, že $\mathcal{C}$ obsahuje pro libovolné přirozené n alespoň jednu ze dvou lineárních funkcí závisejících na n proměnných.

Pokud tedy všechny funkce v $\mathcal{C}$ zachovávají 0, dostáváme $\mathcal{C} = AP_0$, pokud všechny funkce v $\mathcal{C}$ zachovávají 1, máme $\mathcal{C} = AP_1$.

Předpokládejme, že v $\mathcal{C}$ existuje funkce f, která nezachovává 0 (tedy $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$), a funkce g, která nezachovává 1. Protože klon $\mathcal{C}$ obsahuje konstantní funkci, obsahuje obě konstantní funkce. Z libovolné lineární funkce závisející na $n + 1$ proměnných dostaneme dosazením konstant obě možné lineární funkce závisející na n proměnných, takže $\mathcal{C} = A$.

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{C}$ obsahuje pouze lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných. Podobně jako výše se ukáže, že $\mathcal{C}$ obsahuje pro každé liché n alespoň jednu z lineárních funkcí závisejících na n proměnných. Pokud jsou všechny funkce v $\mathcal{C}$ bez konstantního členu, tj. tvaru $x_1 + \cdots + x_n$, máme $\mathcal{C} = AP$. V opačném případě existuje v $\mathcal{C}$ funkce tvaru $x_1 + \cdots + x_n + 1$, takže $\bar{x} = x + 1 = x + x + \cdots + x + 1 \in \mathcal{C}$. Negací lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných je druhá z funkcí závisejících na lichém počtu proměnných, tedy $\mathcal{C}$ obsahuje všechny lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných a $\mathcal{C} = AD$. $\square$

3.3 Klony disjunkcí (konjunkcí)

Tvrzení 3.3.1. *Jediné neunární podklony* $\vee$ *jsou* $\vee P_1$, $\vee P_0$, $\vee P$. *(Duálně, jediné neunární podklony* $\wedge$ *jsou* $\wedge P_1$, $\wedge P_0$, $\wedge P$.*)*

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je podklonem $\vee$. Je-li $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 2$, pak také $x \vee y = x \vee x \vee \cdots \vee x \vee y \in \mathcal{C}$. Funkce $x \vee y$ generuje všechny disjunkce, tedy $\vee P \subseteq \mathcal{C}$. Odtud tvrzení snadno plyne. $\square$

3.4 Klony s konstantami, bez negace

V této části dokážeme, že jedinými neunárními klony obsahujícími obě konstanty a neobsahujícími negaci jsou M, $\vee$ a $\wedge$.

Tvrzení 3.4.1. *Libovolný klon, který obsahuje konstantu* 0 *a rostoucí nekonstantní funkci, která není disjunkcí, obsahuje* xy.

Důkaz. Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je rostoucí nekonstantní funkce, která není disjunkcí. Pak systém $\mathcal{A} = \{\mathrm{J}(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 1\}$ obsahuje alespoň jednu nejméně dvouprvkovou množinu A, která je minimálním prvkem $\mathcal{A}$ vzhledem k inkluzi. Vybereme její libovolný prvek $a \in A$ a definujeme pak funkci

$g(x,y) = f(z_1(x,y), \ldots, z_n(x,y))$, kde

$$z_i(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \notin A, \\ x & \text{pokud } i = a, \\ y & \text{pokud } i \in A \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Nyní $g(x,y) = xy$. □

Tvrzení 3.4.2. *Jediné neunární klony, které obsahují obě konstanty a neobsahují negaci, jsou M (klon všech rostoucích funkcí), $\vee$ a $\wedge$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je libovolný klon splňující $0, 1 \in \mathcal{C}$, $\bar{x} \notin \mathcal{C}$.

Předpokládejme, že klon $\mathcal{C}$ obsahuje funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$, která není rostoucí, tedy existují n-tice $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in 2^n$ takové, že $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, $f(\mathbf{a}) = 1$ a $f(\mathbf{b}) = 0$.

Uvažujme funkci $g(x) = f(z_1(x), \ldots, z_n(x))$, kde

$$z_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } a_i = 0, b_i = 0, \\ 1 & \text{pokud } a_i = 1, b_i = 1, \\ x & \text{pokud } a_i = 0, b_i = 1. \end{cases}$$

Máme $g(0) = f(\mathbf{a}) = 1$ a $g(1) = f(\mathbf{b}) = 0$, tedy $g(x) = \bar{x}$. To je spor. Dokázali jsme $\mathcal{C} \subseteq M$.

Z předchozího tvrzení víme, že pokud klon $\mathcal{C}$ obsahuje rostoucí nekonstantní funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$, která není disjunkcí, pak $xy \in \mathcal{C}$. Duálně, pokud $\mathcal{C}$ obsahuje rostoucí nekonstantní funkci, jež není konjunkcí, pak obsahuje $x \vee y$.

Dokázali jsme, že pokud $\mathcal{C} \nsubseteq \wedge$, $\mathcal{C} \nsubseteq \vee$, pak $x \vee y, xy \in \mathcal{C}$ a tvrzení nyní plyne užitím Tvrzení 2.4.2 a Tvrzení 3.3.1. □

3.5 Klony s konstantami a negací

V této části ukážeme, že klony obsahující všechny funkce závisející na nejvýše jedné proměnné jsou U, A a $\top$.

Tvrzení 3.5.1. *Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je nelineární funkce. Pak $\langle f(x_1, \ldots, x_n) \rangle$ obsahuje funkci $g(x,y,z)$ takovou, že mezi hodnotami $g(1,1,1)$, $g(1,0,1)$, $g(1,1,0)$, $g(1,0,0)$ jsou právě tři stejné.*

Důkaz. Z nelinearity funkce f lze snadno nahlédnout, že existuje souřadnice j a n-tice $\mathbf{a}$, kde $a_j = 1$, tak, že mezi hodnotami $f(1, 1, \ldots, 1)$, $f(\mathbf{c})$, $f(\mathbf{a})$, $f(\mathbf{b})$

jsou právě tři stejné, přičemž **c** značí n-tici $(1,1,\ldots,1,0,1,1,\ldots,1)$ s nulou na j-té souřadnici a **b** se liší od **a** jen na j-té souřadnici.

Nyní funkce $g(x,y,z) = f(z_1(x,y,z),\ldots,z_n(x,y,z))$, kde

$$z_i(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{pokud } i \neq j, a_i = 1, \\ y & \text{pokud } i = j, \\ z & \text{pokud } i \neq j, a_i = 0, \end{cases}$$

má požadované vlastnosti, protože $g(1,1,1) = f(1,1,\ldots,1)$, $g(1,0,1) = f(\mathbf{c})$, $g(1,1,0) = f(\mathbf{a})$ a $g(1,0,0) = f(\mathbf{b})$. □

Tvrzení 3.5.2. *Jediné klony obsahující obě konstanty i negaci jsou* $U, A, \top$.

Důkaz. Z Tvrzení 3.2.1 plyne, že jediné podklony A obsahující konstanty i negaci jsou U, A.

Předpokládejme tedy, že $\mathcal{C}$ je klon obsahující konstanty a negaci, který obsahuje nelineární funkci $f(x_1,\ldots,x_n)$. Funkce $h(x,y) = g(1,x,y)$, kde g je funkce z předchozího tvrzení, má stejné hodnoty pro právě tři ze čtyř ohodnocení proměnných. Pomocí negace lze pak získat funkci xy. Tedy podle Tvrzení 2.4.1 je $\mathcal{C} = \top$. □

3.6 Idempotentní klony, částečný popis

V této části nalezneme všechny idempotentní klony $\mathcal{C}$, které obsahují funkci, která není 2-clique, a rovněž obsahují funkci, která není 2-coclique. Takové klony jsou MP, P, AP, DP. Dále nalezneme ještě jediný neunární idempotentní klon, který je současně podklonem T_0^2 i T_1^2, a to DM. Zbyde tedy popsat idempotentní podklony T_0^2 a idempotentní podklony T_1^2.

Následující dvě tvrzení se zaměřují na klony obsahující nesamoduální funkci (klony MP a P).

Tvrzení 3.6.1. *Klon* $\mathcal{C}$*, který obsahuje idempotentní nesamoduální funkci, obsahuje buď funkci* $x \vee y$ *nebo* xy.

Důkaz. Nechť $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{C}$ je idempotentní nesamoduální funkce a n-tice $(a_1,\ldots,a_n) \in 2^n$ taková, že $f(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n) = f(a_1,\ldots,a_n)$. Uvažujme funkci

$$g(x,y) = f(z_1(x,y),\ldots,z_n(x,y)) \in \mathcal{C},$$

kde $z_i(x,y) = x$, pokud $a_i = 0$, $z_i(x,y) = y$, pokud $a_i = 1$. Zřejmě g je idempotentní a $g(x,y) = g(y,x)$, tedy buď $g(x,y) = x \vee y$, nebo $g(x,y) = xy$. □

Tvrzení 3.6.2. *Jediné idempotentní klony obsahující $x \vee y$, které obsahují funkci, jež není 2-coclique, jsou MP a P. (Duálně, jediné idempotentní klony obsahující xy, které obsahují ne 2-clique funkci, jsou MP a P.)*

Důkaz. Nechť $f(x_1, \ldots, x_n)$ je idempotentní funkce, která není 2-coclique. Tedy existují n-tice $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ takové, že $f(\mathbf{a}) = 0$, $f(\mathbf{b}) = 0$ a neexistuje i takové, že $a_i = b_i = 0$. Uvažujme funkci $g(x, y) = f(z_1(x, y), \ldots, z_n(x, y))$, kde

$$z_i(x,y) = \begin{cases} x & \text{pokud } a_i = 1, b_i = 0, \\ y & \text{pokud } a_i = 0, b_i = 1, \\ x \vee y & \text{pokud } a_i = 1, b_i = 1. \end{cases}$$

Platí $g(1, 0) = g(0, 1) = 0$ a g je idempotentní, jedná se tedy o funkci xy. Zbytek plyne z Tvrzení 2.4.2 a 2.4.3. □

Z toho prozatím plyne, že každý idempotentní klon jiný než MP, P buď sestává plně ze samoduálních funkcí, nebo všechny jeho funkce jsou 2-clique, nebo všechny jeho funkce jsou 2-coclique.

Nyní se zaměřme na samoduální idempotentní klony (klony AP, DP, DM).

Budeme potřebovat následující jednoduché, ale užitečné pozorování.

Tvrzení 3.6.3. *Nechť $\mathcal{C}$ je klon a $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Pro libovolnou funkci $g(y, z) \in \langle f_1(1, y, z), f_2(1, y, z)\rangle$ existuje funkce $f(x, y, z) \in \mathcal{C}$ taková, že $f(1, y, z) = g(y, z)$.*

Důkaz. Funkce $g(y, z)$ vznikne opakovaným skládáním funkcí $f_1(1, y, z)$ a $f_2(1, y, z)$. Nahradíme-li v tomto složení výrazy tvaru $f_1(1, A, B)$ výrazy $f_1(x, A, B)$ a podobně s f_2, vznikne hledaná funkce f. □

Tvrzení 3.6.4. *Jediné idempotentní klony samoduálních funkcí, které obsahují funkci, jež není rostoucí, jsou AP a DP.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je klon splňující předpoklady tvrzení a nechť $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$ není rostoucí, tedy existují n-tice $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ takové, že $f(\mathbf{a}) = 1$, $f(\mathbf{b}) = 0$. Uvažujme funkci $g(x, y, z) = f(z_1(x, y, z), \ldots, z_n(x, y, z))$, kde

$$z_i(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{pokud } a_i = b_i = 1, \\ y & \text{pokud } a_i = b_i = 0, \\ z & \text{pokud } a_i = 0,\ b_i = 1. \end{cases}$$

Z $f(\mathbf{a}) = 1$ a $f(\mathbf{b}) = 0$ plyne $g(1, 0, 0) = 1$ a $g(1, 0, 1) = 0$. Ze samoduality vyplývá $g(0, 1, 0) = 1$ a $g(0, 1, 1) = 0$ a z idempotence $g(1, 1, 1) = 1$ a $g(0, 0, 0) = 0$. Pro funkci g zbývají dvě možnosti:

- $g_1(x, y, z) = 1$ pro trojice $(x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$, ostatní s nulovou hodnotou,
- $g_2(x, y, z) = 1$ pro trojice $(x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, ostatní s nulovou hodnotou.

Předpokládejme nejdříve $g_1(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Funkce $g_1(1, y, x) = x \to y$ a $g_1(x, y, 1) = xy$ podle Tvrzení 2.4.4 generují klon P_1. Vezměme libovolnou idempotentní funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ a označme $g(x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n)$. Funkce g zřejmě zachovává 1, takže z $\langle x \to y, xy\rangle = P_1$ a Tvrzení 3.6.3 víme, že klon $\mathcal{C}$ obsahuje funkci $f'(x_1, \ldots, x_n)$ takovou, že $f'(1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$. Ze samoduality dostáváme $f = f'$. Dokázali jsme, že $\mathcal{C} = DP$.

Nakonec předpokládejme $g_2(x, y, z) \in \mathcal{C}$, postupujeme obdobně. Protože $g_2(x, y, z) = x + y + z$ generuje AP (viz. důkaz 3.2.1), máme $AP \subseteq \mathcal{C}$.

Pokud $\mathcal{C}$ obsahuje nelineární funkci, pak užitím Tvrzení 3.5.1 dostaneme funkci $g_3(x, y, z)$, pro kterou $g_3(1, y, z)$ má stejné hodnoty pro právě tři ohodnocení proměnných. Snadno lze nahlédnout, že taková funkce spolu s $y + z + 1$ generuje yz, tedy i P_1 (Tvrzení 2.4.4). Stejně jako v předešlém případě dokážeme $\mathcal{C} = DP$. $\square$

Tvrzení 3.6.5. *Jediný neunární klon idempotentních rostoucích samoduálních funkcí je DM.*

Důkaz. Mějme klon $\mathcal{C}$ s požadovanými vlastnostmi. Snadno lze nahlédnout, že neexistuje žádná idempotentní rostoucí samoduální (IRS) funkce závisející na dvou proměnných a že jediná IRS funkce závisející na třech proměnných je majoritní funkce $m_3(x, y, z)$. Dokážeme, že m_3 v $\mathcal{C}$ leží, důkaz tím bude podle Tvrzení 2.4.5 hotov.

Vezměme IRS funkci $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$ závisející na $n > 3$ proměnných. Označme $\mathcal{A} = \{\mathrm{J}(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 1\}$ a vezměme nějaký vzhledem k inkluzi minimální prvek $A \in \mathcal{A}$. Pokud $|A| = 1$, pak f je projekce (viz. diskuzi v důkazu 2.4.5), takže $|A| \geq 2$. Nechť $a \in A$ je libovolný prvek.

Funkce $m(x, y, z) = f(z_1(x, y, z), \ldots, z_n(x, y, z))$, kde

$$z_i(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{pokud } i \notin A, \\ y & \text{pokud } i = a, \\ z & \text{pokud } i \in A \setminus \{a\}, \end{cases}$$

závisí na proměnných y a z, takže $m = m_3$. $\square$

3.7 Klony s negací, bez konstant

Tvrzení 3.7.1. *Jediné neunární klony, které obsahují negaci a neobsahují konstanty, jsou AD a D.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je klon splňující předpoklady tvrzení.

Pokud $\mathcal{C}$ obsahuje nesamoduální funkci f, pak tato funkce, nebo její negace, je nesamoduální idempotentní funkce a z Tvrzení 3.6.1 dostáváme, že $\mathcal{C}$ obsahuje buď $x \vee y$ nebo xy. Ale $\langle x \vee y, \bar{x} \rangle = \top = \langle xy, \bar{x} \rangle$ (viz. Tvrzení 2.4.1), což je spor. Tedy $\mathcal{C}$ obsahuje pouze samoduální funkce.

Zřejmě $\mathcal{C}$ je sjednocením $\mathcal{C} \cap P$ a negací funkcí z $\mathcal{C} \cap P$. V předchozí části jsme dokázali, že idempotentní část klonu $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \cap P$) je jedním z klonů DP, AP, DM. V prvních dvou případech dostáváme klony D a AD. Klon DM spolu s negacemi funkcí z DM klon netvoří, neboť např. operace $m_3(x, y, \bar{z})$ je idempotentní, ale není rostoucí. □

3.8 Klony s jednou konstantou, částečný popis

Z důvodu zpřehlednění zápisu zavedeme následující značení:

Definice 15. *Nechť $a \in \{0, 1\}$. Klon $\mathcal{C}$ nazýváme a-*klonem*, pokud $\mathcal{C}$ obsahuje konstantu a, neobsahuje konstantu $1 - a$ a neobsahuje negaci.*

V této části nalezneme všechny 1-klony obsahující nějakou funkci, která není 2-coclique. (Duálně 0-klony obsahující ne 2-clique funkci.) Takové klony jsou P_1, $\wedge P_1$, MP_1, AP_1. (Duálně P_0, $\wedge P_0$, MP_0, AP_0.)

Zbyde tedy popsat podklony T_1^2 (duálně T_0^2).

Tvrzení 3.8.1. *1-klon obsahující funkci, která není 2-coclique, obsahuje funkci xy nebo $x + y + 1$.*

Důkaz. Mějme funkci $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$, která není 2-coclique. Tedy existují n-tice $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, pro které $f(\mathbf{a}) = 0$, $f(\mathbf{b}) = 0$ a neexistuje index i takový, že $a_i = b_i = 0$. Definujme funkci $g(x, y) = f(z_1(x, y), \ldots, z_n(x, y))$, kde

$$z_i(x, y) = \begin{cases} x & \text{pokud } a_i = 1, b_i = 0, \\ y & \text{pokud } a_i = 0, b_i = 1, \\ 1 & \text{pokud } a_i = b_i = 1. \end{cases}$$

Máme $g(1,0) = 0$, $g(0,1) = 0$. Protože $\mathcal{C}$ neobsahuje 0 ani $\bar{x}$, je buď $g(x,y) = xy$, nebo $g(x,y) = x + y + 1$. $\square$

Tvrzení 3.8.2. *Jediné* 1*-klony obsahující funkci* xy *jsou* P_1, $\wedge P_1$, MP_1.

Důkaz. Nechť $\wedge P_1 \subseteq \mathcal{C}$ je 1-klon. Pokud $\mathcal{C}$ obsahuje funkci, která není rostoucí, pak $\mathcal{C} = P_1$ podle Tvrzení 2.4.4. Pokud ale $\wedge P_1 \subsetneq \mathcal{C} \subseteq MP_1$, pak podle Tvrzení 3.4.1 (respektive jeho duálu) $x \vee y \in \mathcal{C}$, tedy podle Tvrzení 2.4.2 je $\mathcal{C} = MP_1$. $\square$

Tvrzení 3.8.3. *Jediné* 1*-klony obsahující funkci* $x + y + 1$ *jsou* AP_1, P_1.

Důkaz. Funkce $x+y+1$ generuje klon AP_1. Pokud klon obsahuje nelineární funkci, pak funkce $g(1,x,y)$, kde g je z Tvrzení 3.5.1, nabývá stejné hodnoty pro právě tři ohodnocení. Snadno lze ukázat, že taková funkce spolu s funkcí $x + y + 1$ generuje xy, a podle Tvrzení 2.4.4 se jedná o klon P_1. $\square$

3.9 Klony s nejvýše jednou konstantou, dokončení

V předchozích sekcích jsme popsali všechny klony s negací; klony obsahující obě konstanty; 1-klony, které nejsou podklony T_1^2; idempotentní klony, které nejsou podklony T_1^2 ani T_0^2.

Vzhledem k dualitě můžeme zbývající případy roztřídit následujícím způsobem:

1. idempotentní klony obsahující pouze 2-coclique funkce a obsahující funkci, která není rostoucí
2. idempotentní klony obsahující pouze 2-coclique rostoucí funkce
3. 1-klony obsahující pouze 2-coclique rostoucí funkce
4. 1-klony obsahující pouze 2-coclique funkce a obsahující funkci, která není rostoucí

"Většina" klonů v těchto skupinách obsahuje všechny ∞-coclique funkce příslušných vlastností:

Tvrzení 3.9.1.

1. *Každý klon obsahující pouze* 2*-coclique idempotentní funkce a obsahující funkci, která není rostoucí, obsahuje* ${PT_1}^{\infty}$*.*

2. *Každý neunární klon, kromě* DM *a* $\vee P$*, obsahující pouze* 2*-coclique idempotentní rostoucí funkce, obsahuje* ${MPT_1}^{\infty}$*.*

3. *Každý neunární* 1*-klon, kromě* $\vee P_1$*, obsahující pouze* 2*-coclique rostoucí funkce, obsahuje* ${MT_1}^{\infty}$*.*

4. *Každý* 1*-klon obsahující pouze* 2*-coclique funkce a obsahující funkci, která není rostoucí, obsahuje* ${T_1}^{\infty}$*.*

Důkaz. Pro každou ∞-coclique funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ existuje souřadnice i taková, že $a_i = 1 \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 1$ pro libovolnou n-tici $\mathbf{a} \in 2^n$. Tedy tato funkce je jednoznačně určená funkcí $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Důkaz lze pak provést podobně jako u Tvrzení 3.6.4 užitím Tvrzení 3.6.3. Protože důkaz nepřináší nové myšlenky, detaily neuvádíme. $\square$

Tvrzení 3.9.2. *Nechť* $\mathcal{C}$ *je podklon* T_1^k*, který obsahuje funkci* $f(x_1, \ldots, x_n)$*, jež není* $(k+1)$*-coclique. Pak* $\mathcal{C}$ *obsahuje funkci* $m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1})$*.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že f je idempotentní a $PT_1^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$.

Protože f není $(k+1)$-coclique, existují n-tice $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{k+1}$ takové, že $f(\mathbf{a}^1) = \cdots = f(\mathbf{a}^{k+1}) = 0$, $\mathbf{a}^1 \vee \cdots \vee \mathbf{a}^{k+1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Označme $\mathbf{e}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, kde jednička je na i-té pozici. Definujme $(k+1)$-ární funkce $g_1(x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_{k+1})$ následujícím způsobem:

$$g_i(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \begin{cases} a_i^j & \text{pokud } (x_1, \ldots, x_{k+1}) = \mathbf{e}^j, \\ 0 & \text{pokud } (x_1, \ldots, x_{k+1}) = (0, 0, \ldots, 0), \\ 1 & \text{jinak .} \end{cases}$$

Z toho, že f je k-coclique funkce vyplývá, že g_i je ∞-coclique funkce, která je zřejmě idempotentní rostoucí, čili leží v klonu $\mathcal{C}$. Proto v $\mathcal{C}$ leží i funkce $g(x_1, \ldots, x_{k+1}) = f(g_1(x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_{k+1}))$. Protože $g(\mathbf{e}^i) = f(\mathbf{a}^i)$, je vidět, že $g = m_{k+1}$.

V případě, že f není idempotentní a $T_1^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$, lze tvrzení dokázat podobně, pouze je třeba změnit definici $g_i(0, 0, \ldots, 0)$.

Podle předchozího tvrzení pak již zbývá jen případ $\mathcal{C} = DM$, kde $m_3(x_1, x_2, x_3) \in DM$. $\square$

Nyní se důkaz Postovy věty již snadno dokončí pomocí Tvrzení 2.4.6.

Uvažujme například podklon $\mathcal{C}$ klonu PT_1^2 obsahující funkci, jež není rostoucí. Z Tvrzení 3.9.1 plyne $PT_1^\infty \subseteq \mathcal{C}$. Pokud $PT_1^\infty \neq \mathcal{C}$, vezměme největší přirozené číslo k takové, že $\mathcal{C} \subseteq PT_1^k$, ale $\mathcal{C} \nsubseteq PT_1^{k+1}$. Podle předchozího tvrzení $m_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathcal{C}$, tedy podle Tvrzení 2.4.6 je $\mathcal{C} = PT_1^k$.

V ostatních případech důkaz dokončíme analogicky.

Kapitola 4

Maximální klony

4.1 Charakteristické vlastnosti maximálních podklonů

Definice 16. *Říkáme, že klon* $\mathcal{C}_1$ *je* maximální *v* $\mathcal{C}_2$*, jestliže je vlastním podklonem* $\mathcal{C}_2$*, tedy* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$*, a v případě, že máme nějaký klon* $\mathcal{C}_3$ *takový, že* $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_3 \subseteq \mathcal{C}_2$*, pak nutně* $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1$*, nebo* $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2$*.*

Je-li $\mathcal{C}_1$ maximální v $\mathcal{C}_2$, je nutnou a postačující podmínkou, že přidáme-li k $\mathcal{C}_1$ libovolný prvek z $\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$, jsme schopni nagenerovat celý klon $\mathcal{C}_2$.

Tvrzení 4.1.1. *Nechť* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ *jsou maximální podklony* $\mathcal{C}$*. Předpokládejme, že pro libovolné funkce* $f_i \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_i$*,* $i = 1, \ldots, n$*, platí* $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \mathcal{C}$*. Pak libovolný vlastní podklon* $\mathcal{D}$ *klonu* $\mathcal{C}$ *je podklonem* $\mathcal{C}_i$ *pro nějaké* i *(speciálně,* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ *jsou všechny maximální podklony* $\mathcal{C}$*).*

Důkaz. Mějme libovolný klon $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Pro spor předpokládejme, že pro všechna $i = 1, \ldots, n$ platí $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{C}_i$. Pak pro každé i existuje nějaká funkce $f_i \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}_i$. Tedy máme $f_i \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a z předpokládané vlastnosti množiny maximálních podklonů $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ dostáváme $\langle f_i, \ldots, f_n \rangle = \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, což je spor. □

4.2 Redukce

Uveďme v této části pro základní druhy funkcí jejich redukované tvary. Jsou nezbytné při dokazování maximality podklonů a úplnosti jejich počtu.

Neunární lineární funkce: $x+y$, $x+y+1$, $x+y+z$, $x+y+z+1$.

Nelineární funkce: $xy \vee yz \vee zx$, $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$, $xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$, $z(x \vee y) \vee \bar{z}(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$, $\bar{x}y \vee yz \vee z\bar{x}$, $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee z\bar{x}$, $xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$, $x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee z)$, xy, $\bar{x} \vee \bar{y}$, $x\bar{y}$, $\bar{x} \vee y$, $x \vee y$, $\bar{x}\bar{y}$.

Rostoucí 2-coclique funkce, která není ∞-coclique: m_{k+1}, $k \geq 2$.

Funkce, která není rostoucí: Sjednocením p a q proměnných redukcí dle existujícího ohodnocení $f(0, \underbrace{0,0}_{p}, \underbrace{1,1,1}_{q}) = 1$, $f(1, \underbrace{0,0}_{p}, \underbrace{1,1,1}_{q}) = 0$ získáme redukované tvary:

$p = 0, q = 0$: $\bar{x}$,

$p \neq 0, q = 0$: $\bar{x}\bar{y} \vee xy$, $x \vee \bar{y}$,

$p = 0, q \neq 0$: $\bar{x}y \vee x\bar{y}$, $\bar{x}y$,

$p \neq 0, q \neq 0$: $z(xy \vee \bar{x}\bar{y})$, $z(\bar{x} \vee y)$, $xy \vee z\bar{x}\bar{y}$, $xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}z \vee xy$, $y(\bar{x} \vee z) \vee \bar{x}z$, $z(\bar{x} \vee y) \vee \bar{z}x\bar{y}$, $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$, $y \vee \bar{x}z$, $z(\bar{x} \vee y) \vee \bar{z}x$, $zy \vee z\bar{x} \vee y\bar{x} \vee x\bar{y}\bar{z}$, $y \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z$.

Analogicky lze odvodit redukované tvary pro:

Funkce, která není 2-coclique: 0, xy, $\bar{x}\bar{y}$, $xy \vee \bar{x}\bar{y}$.

Funkce, která není 2-clique: 1, $x \vee y$, $\bar{x} \vee \bar{y}$, $x\bar{y} \vee \bar{x}y$.

Nesamoduální funkce: 0, 1, xy, $x \vee y$, $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x} \vee \bar{y}$.

4.3 Klony a jejich maximální podklony

Nalezení všech klonů probíhá následujícím způsobem. Vycházíme z klonu $\top$ a pomocí Tvrzení 4.1.1 určíme všechny jeho maximální podklony, zároveň dle tohoto tvrzení víme, že všechny vlastní podklony $\top$ jsou obsaženy v některém z těchto jeho maximálních podklonů. Pro nalezené maximální podklony pokračujeme indukcí v hledání. V některých "větvích" se dostaneme až ke klonu $\perp$. Ve zbylých větvích nám vzniknou nekonečné klesající posloupnosti klonů. Vezmeme průniky v rámci posloupností a vznikne 8 nových klonů T_0^∞, PT_0^∞, MT_0^∞, MPT_0^∞, T_1^∞, PT_1^∞, MT_1^∞, MPT_1^∞. Nyní je zřejmě libovolný klon buď jedním z již nalezených klonů, nebo je vlastním podklonem jednoho z osmi výše zmiňovaných. Pokračujeme v hledání maximálních podklonů a nyní již vždy dospějeme do klonu $\perp$. Nalezli jsme proto všechny klony.

Aplikace Tvrzení 4.1.1 vyžaduje rozbor všech možných prvků vně uvažovaných maximálních podklonů a ačkoliv je takový rozbor pro některé klony obtížnější než v jiných případech, důkazy jsou "analogické" (základem je vždy uvědomit si, jak takový prvek vypadá, tj. jak jej lze charakterizovat).

Uvedeme proto na ukázku jen pár důkazů, pro představu o jejich základních charakterech a reálné aplikaci teoretických poznatků.

V posloupnosti důkazů formálně postupujme vzhledem k inkluzi opačným směrem, tj. začněme od klonu $\perp$, přičemž tvrzení pro unární klony jsou triviální. Ještě připomeňme, že v případě dvojice duálních klonů se lze omezit jen na zkoumání jednoho klonu, tvrzení pro druhý klon je platné v duálním tvaru.

Klon	Maximální podklony:
AP	$\perp$
AD	UD, AP

Důkaz. Nejdříve poznamenejme, že klon AD lze charakterizovat jako klon obsahující lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných, klon AP obsahuje pouze homogenní lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných.
Pro dokázání maximality podklonu $\mathcal{C}$ ukážeme, že libovolný prvek z $AD \setminus \mathcal{C}$ spolu s $\mathcal{C}$ generuje AD.
Prvek vně AP je buď $1 + x$ nebo $1 + x + y \ldots + q$ (s lichým počtem proměnných), který redukujeme na $1+x$. Vždy tedy můžeme předpokládat, že máme $\bar{x} = 1 + x$. (Díky tomu společně s funkcemi z AP dokážeme získat rovněž všechny nehomogenní lineární funkce závisející na lichém počtu proměnných, tedy AD. AP je tedy maximálním podklonem v AD.)
Prvek vně UD je lineární funkce s lichým počtem proměnných. Lze ji vždy redukovat na $f_1 = x + y + z$, nebo $f_2 = x + y + z + 1$. (První funkce generuje AP a s přidáním $\bar{x} \in UD$ dostáváme AD, druhá funkce sama je zřejmě generátorem AD. UD je tedy rovněž maximálním podklonem.)
Že se jedná o jediné maximální podklony dokazujeme tak, že z libovolně vybraných prvků (pro jednoduchost opět uvažovaných v již redukovaných tvarech) vně všech předpokládaných maximálních podklonů lze nagenerovat daný klon, zde AD.
Funkce f_1 se redukuje na f_2 dosazením výrazu $x+1$ (získaného vně prvního maximálního podklonu). Máme tedy funkci $x+y+z+1$ a ta již generuje celý AD. Nalezli jsem tedy skutečně všechny maximální podklony klonu AD.

$\square$

AP_0	UP_0, AP
AP_1	UP_1, AP
A	AP_0, AP_1, AD, U
$\vee P$	$\perp$
$\vee P_0$	$\vee P$, UP_0 (pozn. $\vee P_0 = \vee P \cup \{0\}$)
$\vee P_1$	$\vee P$, UP_1 (pozn. $\vee P_1 = \vee P \cup \{1\}$)
$\vee$	$\vee P_0$, $\vee P_1$, UM (pozn. $\vee = \vee P \cup \{0, 1\}$)
MPT_1^∞	$\vee P$

Důkaz. Klon MPT_1^∞ je tvořen funkcemi ve tvaru $x\vee$[disjunkce monomů bez negované proměnné] (disjunkce může být prázdná).
$f \in MPT_1^\infty \setminus \vee P$ je tvaru $x\vee$[disjunkce monomů, z nichž alespoň jeden obsahuje nejméně 2 proměnné různé od x]. Případné samostatně postavené proměnné redukujeme rovností s x, funkce je tedy omezena na: $x\vee$[disjunkce monomů majících vždy minimálně 2 proměnné]$= x \vee yf(\ldots) \vee zg(\ldots) \vee yzh(\ldots)$, kde $f \neq 1, g \neq 1, h \neq 0$. Při substituci $y = z$ bude redukovaný tvar ležet v MPT_1^∞ jen pokud $f \vee g \vee h = 1$, nutně tedy $h = 1$. Vždy lze tedy funkci redukovat na tvar $x \vee yz\vee$[disjunkce monomů na 2 proměnných] a rovností s x pro všechny proměnné různé od y a z ji redukujeme na funkci $x \vee yz$, která generuje MPT_1^∞. □

MT_1^∞	MPT_1^∞, $\vee P_1$

Důkaz. $MT_1^\infty = MPT_1^\infty \cup \{1\}$. Prvek $f \in MT_1^\infty \setminus MPT_1^\infty$ lze redukovat na 1, prvek z $MT_1^\infty \setminus \vee P_1$ leží v $MPT_1^\infty \setminus \vee P$, který dle předchozího důkazu generuje MPT_1^∞. □

DM	$\perp$
MPT_1^k, $k > 2$	MPT_1^{k+1} (pozn. $MPT_1^k = MT_1^k \setminus \{1\}$)
	$MPT_1^2 \supset \ldots \supset MPT_1^k \supset MPT_1^{k+1} \supset \ldots \supset MPT_1^\infty$
MPT_1^2	DM, MPT_1^3
MT_1^k, $k \geq 2$	MPT_1^k, MT_1^{k+1}
	$MT_1^2 \supset MT_1^3 \supset \ldots \supset MT_1^k \supset MT_1^{k+1} \supset \ldots \supset MT_1^\infty$

DP	DM, AP
D	DP, AD
MP	MPT_1^2, MPT_0^2
MP_0	MT_0^2, $\vee P_0$ (pozn. $MP_0 = MP \cup \{0\}$)
M	MP_0, MP_1, $\wedge$, $\vee$ (pozn. $M = MP \cup \{0,1\}$)
PT_1^∞	MPT_1^∞
PT_1^k, $k \geq 2$	PT_1^{k+1}, MPT_1^k
	$PT_1^2 \supset PT_1^3 \supset \ldots \supset PT_1^k \supset PT_1^{k+1} \supset \ldots \supset PT_1^\infty$
P	PT_1^2, PT_0^2, MP, DP
T_1^∞	PT_1^∞, MT_1^∞

Důkaz. Klon T_1^∞ je tvořen funkcemi tvaru: $x \vee$ [disjunkce monomů], klon PT_1^∞ funkcemi tvaru: $x \vee$ [disjunkce monomů, z nichž každý obsahuje nejméně jednu nenegovanou proměnnou].
Prvek z $T_1^\infty \setminus PT_1^\infty$ je tvaru: $x \vee$ [disjunkce monomů, z nichž některý obsahuje jen negované proměnné], redukcí proměnných na jedinou dostaneme 1. Prvek z $T_1^\infty \setminus MT_1^\infty$ je tvaru $x \vee$ [disjunkce monomů, z nichž nejméně jeden obsahuje negovanou proměnnou]. Zbytek mimo x představuje funkci, která není rostoucí, a tu lze případným položením rovnosti 1 pro některé proměnné vždy redukovat na jedinou funkci $x \vee \bar{y}$, z níž lze vytvořit celý klon. □

T_1^k, $k \geq 2$	MT_1^k, T_1^{k+1}, PT_1^k
P_1	P, MP_1, AP_1, T_1^2
$\top$	P_1, P_0, M, A, D

Kapitola 5

Zakázané podfunkce

5.1 Třídy zakázaných podfunkcí

Definice 17. *Nazvěme funkci g* podfunkcí *funkce f, pokud ji lze z f získat redukcí. Označme tento vztah jako $g \lhd f$ a definujme $Sub(f) = \{g : g \lhd f\}$.*

Z definice klonu platí pro každou funkci $f \in \mathcal{C}$, že $Sub(f) \subseteq \mathcal{C}$.

Definice 18. *Funkce f a g nazýváme* podobné*, pokud $f \lhd g$ a $g \lhd f$. Jako $[f]$ označme množinu všech funkcí podobných s f.*

$\lhd$ je zřejmě kvaziuspořádání (tj. reflexivní a tranzitivní relace).

Definice 19. *Nechť Z je libovolná množina booleovských funkcí.* Třídu zakázaných podfunkcí *určenou Z definujeme jako*

$$FS(Z) = \{f : Sub(f) \cap Z = \emptyset\}.$$

Definice 20. *Mějme klon $\mathcal{C}$. Pak funkci $f \notin \mathcal{C}$ nazýváme* minimální zakázaná podfunkce *pro $\mathcal{C}$, pokud $Sub(f) \setminus [f] \subseteq \mathcal{C}$.*

Tvrzení 5.1.1. *Nechť Z^0 je množina všech minimálních zakázaných podfunkcí pro klon $\mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C} = FS(Z^0)$. Navíc pro libovolnou množinu funkcí Z^1 uzavřenou na podobnost (tj. $f \in Z^1 \Rightarrow [f] \subseteq Z^1$) a splňující $\mathcal{C} = FS(Z^1)$ platí $Z^0 \subseteq Z^1$.*

Důkaz. Nechť $Z = \top \setminus \mathcal{C}$. Mějme libovolnou funkci $f \in \mathcal{C}$. Z definice platí $Sub(f) \subseteq \mathcal{C}$, a proto $Sub(f) \cap Z = \emptyset$, tj. $f \in FS(Z)$. Tedy $\mathcal{C} \subseteq FS(Z)$.

Naopak, pokud $f \in FS(Z)$, pak $Sub(f) \cap Z = \emptyset$, tj. $f \notin Z = \top \setminus \mathcal{C}$. Tedy $f \in \mathcal{C}$ a $FS(Z) \subseteq \mathcal{C}$.

Buď Z^0 množina všech minimálních zakázaných funkcí ze Z. Ukážeme, že $\mathcal{C} = FS(Z^0)$.

Z důvodu $Z^0 \subseteq Z$ platí $\mathcal{C} = FS(Z) \subseteq FS(Z^0)$. Dokažme druhou inkluzi, $FS(Z^0) \subseteq FS(Z) = \mathcal{C}$. Mějme $f \in FS(Z^0)$ takovou, že $f \notin \mathcal{C}$. Potom $f \in Z$. Množina $Sub(f)$ obsahuje díky konečnosti nějakou minimální zakázanou funkci g. Neboť $g \in Z^0 \cap Sub(f)$, dostáváme $f \notin FS(Z^0)$ (neboť $f \in FS(Z^0)$ znamená $Sub(f) \cap Z^0 = \emptyset$), což je spor.

Máme tedy $\mathcal{C} = FS(Z^0)$ a dokažme $\mathcal{C} = FS(Z^1)$ implikuje $Z^0 \subseteq Z^1$.

Pro spor mějme $f \in Z^0$, ale $f \notin Z^1$. Z $\mathcal{C} = FS(Z^0)$ a $f \in Z^0$ vyplývá, že $f \notin \mathcal{C}$. Z povahy množiny Z^0 máme $Sub(f) \setminus [f] \subseteq \mathcal{C}$, a protože $\mathcal{C} = FS(Z^1)$, platí $(Sub(f) \setminus [f]) \cap Z^1 = \emptyset$. Z předpokladu $f \notin Z^1$ pak $Sub(f) \cap Z^1 = \emptyset$. Z toho plyne, že $f \in FS(Z^1) = \mathcal{C}$, což je spor s dokázaným $f \notin \mathcal{C}$. □

Tvrzení 5.1.2. *Mějme vyjádření klonů* $\mathcal{C}_1 = FS(Z_1)$, $\mathcal{C}_2 = FS(Z_2)$. *Pak platí*

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = FS(Z_1 \cup Z_2).$$

Důkaz. Pokud $f \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, pak $Sub(f) \cap Z_i = \emptyset$ pro $i = 1, 2$. Tedy $Sub(f) \cap (Z_1 \cup Z_2) = \emptyset$ a $f \in FS(Z_1 \cup Z_2)$. Naopak, nechť $f \in FS(Z_1 \cup Z_2)$. Neboť $Z_i \subseteq Z_1 \cup Z_2$, $i = 1, 2$, dostáváme $FS(Z_1 \cup Z_2) \subseteq FS(Z_i)$ a $f \in FS(Z_i) = \mathcal{C}_i$. Tedy $f \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. □

Poznamenejme, že z množiny $Z_1 \cup Z_2$ opět můžeme vypustit všechny zakázané podfunkce, které nejsou pro daný klon minimální.

Definice 21. Silná podfunkce *(resp.* 0-podfunkce; 1-podfunkce*) funkce f je funkce, kterou lze z f získat redukcí a dosazováním konstant* 0, 1 *(resp. dosazováním* 0*;* 1*). Jejich množiny označujeme jako* $Sub_{01}(f)$, $Sub_0(f)$, $Sub_1(f)$.

Třída zakázaných silných podfunkcí *je potom definována jako*

$$FS_{01}(Z) = \{f : Sub_{01}(f) \cap Z = \emptyset\},$$

analogicky třídy $FS_0(Z)$ *a* $FS_1(Z)$.

Platí pro ně analogie Tvrzení 5.1.1 a 5.1.2.

5.2 Charakterizace klonů pomocí zakázaných podfunkcí

Tvrzení 5.2.1. *Platí následující rovnosti:*

Klon	*Třída zakázaných podfunkcí*
P_0	$FS(1, \bar{x}) = FS_0(1)$
P_1	$FS(0, \bar{x}) = FS_1(0)$
P	$FS(0, 1, \bar{x})$
M	$FS(Z_M) = FS_0(\bar{x}, x + y, x\bar{y}) = FS_1(\bar{x}, x \sim y, x \vee \bar{y}) = FS_{01}(\bar{x})$, *kde* $Z_M = \{\bar{x}, x + y, x \sim y, x\bar{y}, x \vee \bar{y}, g_1, g_2, \ldots, g_8, g_3^d, g_4^d, g_7^d, g_8^d\}$
MP_0	$FS((Z_M \cup \{1\}) \setminus \{x \sim y, x \vee \bar{y}\}) = FS_0(1, x + y, x\bar{y})$
MP_1	$FS((Z_M \cup \{0\}) \setminus \{x + y, x\bar{y}\}) = FS_1(0, x \sim y, x \vee \bar{y})$
MP	$FS((Z_M \cup \{0, 1\}) \setminus \{x + y, x \sim y, x\bar{y}, x \vee \bar{y}\})$
D	$FS(Z_D \cup \bar{Z}_D)$, *kde* $Z_D = \{0, xy, x \vee y\}$
DP	$FS(0, 1, \bar{x}, xy, x \vee y)$
DM	$FS(0, 1, \bar{x}, xy, x \vee y, g_1, g_2)$
A	$FS(Z_A) = FS_0(Z_{A2} \cup \bar{Z}_{A2}) = FS_1(Z_{A2} \cup \bar{Z}_{A2}) = FS_{01}(Z_{A2} \cup \bar{Z}_{A2})$, *kde* Z_A *je množina funkcí ve tvaru* $xy + ax + by + c$; $a, b, c \in \{0, 1\}$, $Z_{A2} = \{xy, x\bar{y}, x \vee y\}$
AP_0	$FS(Z_A \cup \{1, \bar{x}\}) = FS_0(1, xy, x \vee y, x\bar{y})$
AP_1	$FS(Z_A \cup \{0, \bar{x}\}) = FS_1(0, xy, x \vee y, x \vee \bar{y})$
AP	$FS(0, 1, \bar{x}, xy, x \vee y, g_0, g_2)$
AD	$FS(Z_{AD} \cup \bar{Z}_{AD})$, *kde* $Z_{AD} = \{0, xy, x \vee y, g_0, g_2\}$
U	$FS(Z_U \cup \bar{Z}_U) = FS_{01}(Z_{U2} \cup \bar{Z}_{U2})$, *kde* $Z_U = \{xy, x \vee y, x + y, x\bar{y}, g_0, g_1, g_2\}$, $Z_{U2} = \{xy, x \vee y, x + y, x\bar{y}\}$
UP_0	$FS_0(1, xy, x \vee y, x + y, x\bar{y})$
UP_1	$FS_1(0, xy, x \vee y, x \sim y, x \vee \bar{y})$
$\perp$	$FS(0, 1, \bar{x}, xy, x \vee y, g_0, g_1, g_2)$
UD	$FS_{01}(Z_{UD} \cup \bar{Z}_{UD})$, *kde* $Z_{UD} = \{0, xy, x \vee y, g_0, g_1, g_2\}$
UM	$FS_{01}(\bar{x}, xy, x \vee y)$
$\wedge$	$FS(Z_\wedge) = FS_{01}(\bar{x}, x \vee y)$, *kde* $Z_\wedge = \{\bar{x}, x \vee y, x + y, x \sim y, x\bar{y}, x \vee \bar{y}, g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_8^d, g_9\}$
$\wedge P_0$	$FS_0(1, x \vee y, x + y, x\bar{y}, g_0, g_9)$
$\wedge P_1$	$FS_1(0, x \vee y, x \sim y, x \vee \bar{y})$
$\wedge P$	$FS(0, 1, \bar{x}, x \vee y, g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_8^d, g_9)$
$\vee$	$FS(Z_\wedge^d) = FS_{01}(\bar{x}, xy)$
$\vee P_0$	$FS_1(0, xy, x \sim y, x \vee \bar{y}, g_0, g_9^d)$
$\vee P_1$	$FS_0(1, xy, x + y, x\bar{y})$
$\vee P$	$FS(0, 1, \bar{x}, xy, g_0, g_1, g_2, g_3^d, g_4^d, g_8, g_9^d)$

pro všechna $k \geq 2$ a $k = \infty$:

T_0^k	$FS(Z_{T_0} \cup Z^k) = FS_0(\{1, \bar{x}, x+y, x \vee y\} \cup Z^k)$, *kde* $Z_{T_0} = \{1, \bar{x}, x+y, x \vee y, g_1, g_2, g_8^d, g_{10}, g_{11}, g_{12}\}$, $Z^k = T_0^2 \setminus T_0^k$
PT_0^k	$FS(Z_{PT_0} \cup (Z^k \cap P_1))$, *kde* $Z_{PT_0} = \{0, 1, \bar{x}, x \vee y, g_1, g_2, g_8^d\}$
MT_0^k	$FS(Z_{MT_0} \cup (Z^k \cap M)) = FS_0(\{1, \bar{x}, x+y, x \vee y\} \cup (Z^k \cap M))$, *kde* $Z_{MT_0} = \{1, \bar{x}, x+y, x \vee y, x\bar{y}, g_1, g_2, g_3, g_4, g_7^d\}$
MPT_0^k	$FS(Z_{MPT_0} \cup (Z^k \cap MP_1))$, *kde* $Z_{MPT_0} = \{0, 1, \bar{x}, x \vee y, x\bar{y}, g_1, g_2, g_3, g_4, g_7^d\}$
T_1^k	$FS(Z_{T_0}^d \cup Z^{k2}) = FS_1(\{0, \bar{x}, x \sim y, xy\} \cup Z^{k2})$, *kde* $Z^{k2} = T_1^2 \setminus T_1^k$
PT_1^k	$FS(Z_{PT_0}^d \cup (Z^{k2} \cap P_0))$
MT_1^k	$FS(Z_{MT_0}^d \cap (Z^{k2} \cap M)) = FS_1(\{0, \bar{x}, x \sim y, xy\} \cup (Z^{k2} \cap M))$
MPT_1^k	$FS(Z_{MPT_0}^d \cup (Z^{k2} \cap MP_0))$

s použitím označení pro booleovské funkce:
$g_0(x,y,z) = xy + xz + yz,$
$g_1(x,y,z) = x + y + z,$
$g_2(x,y,z) = xy + xz + yz + x + y,$
$g_3(x,y,z) = x(y \sim z),\ g_3^d(x,y,z) = xy + xz + x + y + z,$
$g_4(x,y,z) = x(y \vee \bar{z}),\ g_4^d(x,y,z) = xyz + xy + yz + x + y,$
$g_5(x,y,z) = xy + x + z,$
$g_6(x,y,z) = xy + xz + y,$
$g_7(x,y,z) = xyz + x + y,\ g_7^d(x,y,z) = xyz + xy + xz + yz + z,$
$g_8(x,y,z) = xyz + xy + x + y + z,\ g_8^d(x,y,z) = xyz + xz + yz + x + y,$
$g_9(x,y,z) = x(y \vee z),$
$g_{10}(x,y,z) = xy + xz + y + z,$
$g_{11}(x,y,z) = xyz + x + y + z,$
$g_{12}(x,y,z) = xyz + xy + xz + yz + x + y$
a definováním množin $\bar{Z} = \{\bar{f} : f \in Z\}$, $Z^d = \{f^d : f \in Z\}$.

Důkaz. Podle Tvrzení 5.1.1 hledáme funkce f neležící v klonu $\mathcal{C}$ takové, že všechny funkce ze $Sub(f) \setminus [f]$ již v $\mathcal{C}$ leží. Jejich sjednocení dává hledané Z.

Předpokládejme, že již máme charakterizaci klonu $\mathcal{C} = FS(Z)$. Položme Z_0 jako podmnožinu funkcí ze Z, pro kterou platí: $f \in Z_0$, pokud f nelze získat z žádné funkce ze $Z \setminus f$ dosazením 0. Pak platí $\mathcal{C} = FS_0(Z_0)$. Tedy, je jednoduché získat FS_0-charakterizaci klonu $\mathcal{C}$, máme-li již charakterizaci $\mathcal{C} = FS(Z)$. Podobně získáme i FS_1-charakterizaci a FS_{01}-charakterizaci.

Konkrétní diskuzi pro jednotlivé klony neuvádíme. □

5.3 Kritéria úplnosti v klonech

Tvrzení 5.3.1. (Kritéria úplnosti) *Klon $\mathcal{C}$ je generovaný množinou funkcí F (tj. F je úplná v $\mathcal{C}$) právě tehdy, když F obsahuje následující funkce (viz. druhý sloupec):*

$\mathcal{C}$	F	*Příklad F*
$\top$	$f_0 \notin P_0, f_1 \notin P_1, f_A \notin A, f_D \notin D, f_M \notin M$	$\langle \bar{x}, x \vee y \rangle$
P_0	$f_1 \notin P_1, f_A \notin A, f_M \notin M, f_{T_0} \notin T_0^2$	$\langle x+y, xy \rangle$
P_1	$f_0 \notin P_0, f_A \notin A, f_M \notin M, f_{T_1} \notin T_1^2$	$\langle x+y+1, x \vee y \rangle$
P	$f_D \notin D, f_M \notin M, f_{T_0} \notin T_0^2, f_{T_1} \notin T_1^2$	$\langle x \vee y, x(y \vee \bar{z}) \rangle$
A	$f_0 \notin P_0, f_1 \notin P_1, f_D \notin D, f_U \notin U$	$\langle 1, x+y \rangle$
AP_0	$f_1 \notin P_1, f_U \notin U$	$\langle x+y \rangle$
AP_1	$f_0 \notin P_0, f_U \notin U$	$\langle x+y+1 \rangle$
AP	$f_U \notin U$	$\langle x+y+z \rangle$
AD	$f_0 \notin P_0, f_U \notin U$	$\langle x+y+z+1 \rangle$
D	$f_0 \notin P_0, f_A \notin A$	$\langle \bar{g}_2 \rangle$
DP	$f_A \notin A, f_M \notin M$	$\langle g_2 \rangle$
DM	$f_U \notin U$	$\langle xy+xz+yz \rangle$
MP	$f_{T_0} \notin T_0^2, f_{T_1} \notin T_1^2$	$\langle xy, x \vee y \rangle$
MP_0	$f_1 \notin P_1, f_{T_0} \notin T_0^2, f_\vee \notin \vee$	$\langle 0, xy, x \vee y \rangle$
MP_1	$f_0 \notin P_0, f_{T_1} \notin T_1^2, f_\wedge \notin \wedge$	$\langle 1, xy, x \vee y \rangle$
M	$f_0 \notin P_0, f_1 \notin P_1, f_\wedge \notin \wedge, f_\vee \notin \vee$	$\langle 0, 1, xy, x \vee y \rangle$
T_0^∞	$f_1 \notin P_1, f_M \notin M$	$\langle x\bar{y} \rangle$
PT_0^∞	$f_M \notin M$	$\langle x(y \sim z), x(y \vee \bar{z}) \rangle$
MPT_0^∞	$f_\wedge \notin \wedge$	$\langle x(y \vee z) \rangle$
MT_0^∞	$f_1 \notin P_1, f_\wedge \notin \wedge$	$\langle 0, x(y \vee z) \rangle$
$k \geq 2$:		
PT_0^k	$f_M \notin M, f_{T_0} \notin T_0^{k+1}$	$\langle x(y \vee \bar{z}), m_{k+1}^d \rangle$
T_0^k	$f_1 \notin P_1, f_M \notin M, f_{T_0} \notin T_0^{k+1}$	$\langle x\bar{y}, m_{k+1}^d \rangle$
MPT_0^k	$f_{T_0} \notin T_0^{k+1}$ *a pro* $k=2$ *také* $f_D \notin D$	$\langle x(y \vee z), m_{k+1}^d \rangle$
MT_0^k	$f_1 \notin P_1, f_{T_0} \notin T_0^{k+1}$	$\langle 0, x(y \vee z), m_{k+1}^d \rangle$

Kritéria pro klony $U, \wedge, \vee$ jsou z triviálních důvodů vynechána.

Důkaz. Nutná podmínka je přímo ověřitelná dle následující tabulky, výběrem generujících funkcí (s využitím $T_0^k \supset T_0^\infty$, $m_{k+1}^d \in MPT_0^k \setminus T_0^{k+1}$).

Booleovská funkce	U	P_0	P_1	$\wedge$	$\vee$	M	D	A	T_0^2	T_0^∞	T_1^2	T_1^∞
0	U	P_0	-	$\wedge$	$\vee$	M	-	A	T_0^2	T_0^∞	-	-
$\bar{x}$	U	-	-	-	-	-	D	A	-	-	-	-
1	U	-	P_1	$\wedge$	$\vee$	M	-	A	-	-	T_1^2	T_1^∞
xy	-	P_0	P_1	$\wedge$	-	M	-	-	T_0^2	T_0^∞	-	-
$x\bar{y}$	-	P_0	-	-	-	-	-	-	T_0^2	T_0^∞	-	-
$x \vee y$	-	P_0	P_1	-	$\vee$	M	-	-	-	-	T_1^2	T_1^∞
$x + y$	-	P_0	-	-	-	-	-	A	-	-	-	-
$x \sim y$	-	-	P_1	-	-	-	-	A	-	-	-	-
$x + y + z$	-	P_0	P_1	-	-	-	D	A	-	-	-	-
$xy + xz + yz$	-	P_0	P_1	-	-	M	D	-	T_0^2	-	T_1^2	-
$x(y \vee z)$	-	P_0	P_1	-	-	M	-	-	T_0^2	T_0^∞	-	-
$x(y \vee \bar{z})$	-	P_0	P_1	-	-	-	-	-	T_0^2	T_0^∞	-	-

V důkazech postačující podmínky se používají Kritéria úplnosti. Je třeba dokázat, že množina F obsahující dané funkce generuje klon $\mathcal{C}$. Zkoumá se proto, jaké redukované tvary lze z jednotlivých funkcí $f \notin \mathcal{D} = FS(Z)$, tedy z množiny $Z \cap \mathcal{C}$, získat, a dokazuje se postupným přidáváním jednotlivých tvarů, že z nich lze skládáním (a redukcí) získat generující množinu. Příklady takových generujících množin jsou uvedeny v posledním sloupci tabulky.

Tento postup probíhá analogicky pro všechny jednotlivé případy, jen na ukázku proto uveďme:

Důkaz pro $\top$: Neboť $P_0 = FS(1, \bar{x})$ a $P_1 = FS(0, \bar{x})$, z funkcí f_0 a f_1 získáme $\bar{x}$, nebo $\{0, 1\}$. Neboť $D = FS(Z_D \cup \bar{Z}_D)$, kde $Z_D = \{0, xy, x \vee y\}$, užitím $\bar{x}$ a f_D získáme $\{0, 1\}$, nebo $\langle \bar{x}, xy \rangle = \top$, či $\langle \bar{x}, x \vee y \rangle = \top$. Použitím $f_M \notin M = FS_{01}(\bar{x})$, 0 a 1 získáme $\bar{x}$. Máme tedy $\{0, 1, \bar{x}\}$. Neboť $A = FS_{01}(Z_{A2} \cup \bar{Z}_{A2})$, kde $Z_{A2} = \{xy, x\bar{y}, x \vee y\}$, užitím 0, 1, $\bar{x}$ a f_A získáme jednu z množin $\{\bar{x}, xy\}$, $\{\bar{x}, x \vee y\}$ (xy je generována funkcí $x\bar{y}$: $x\overline{x\bar{y}} = xy$) a ty generují $\top$.

Důkaz pro AP_0: Z $f_1 \notin P_1 = FS(0, \bar{x})$ získáme 0, neboť $\bar{x} \notin AP_0$. Z $f \notin U$ substitucí 0 můžeme získat lineární funkci dvou proměnných, tj. $x + y$ (neboť $x + y + 1 \notin AP_0$), $\langle x + y \rangle = AP_0$. □

5.4 Postova klasifikace klonů

Mějme nějaký klon $\mathcal{C}$. Je zřejmé, že pokud $\mathcal{C} \subseteq U$, $\mathcal{C} \subseteq \wedge$, $\mathcal{C} \subseteq \vee$, pak $\mathcal{C}$ je klonem typu U, $\wedge$, nebo $\vee$. Proto předpokládejme, že klon $\mathcal{C} \nsubseteq U, \wedge, \vee$. Užitím Kritérií úplnosti se ověří, že $\mathcal{C}$ odpovídá nějakému klonu Postovy klasifikace:

1. $\mathcal{C} \subseteq A$:
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = AP$.
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = AP_0$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = AP_1$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$, $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$ a $\mathcal{C} \subseteq D$, pak $\mathcal{C} = AD$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$, $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$ a $\mathcal{C} \nsubseteq D$, pak $\mathcal{C} = A$.
2. $\mathcal{C} \nsubseteq A$ a $\mathcal{C} \subseteq D$:
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq M$, pak $\mathcal{C} = DM$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq M$ a $\mathcal{C} \subseteq P_0$, pak $\mathcal{C} = DP$. ($\mathcal{C} \subseteq P_0 \cap D \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq P_1$)
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$, pak $\mathcal{C} = D$. ($\mathcal{C} \nsubseteq P_0$, $\mathcal{C} \subseteq D \Rightarrow \mathcal{C} \nsubseteq M$)
3. $\mathcal{C} \nsubseteq A, D$ a $\mathcal{C} \subseteq T_0^2$:
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq M$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = MPT_0^k, k \geq 2$, nebo $\mathcal{C} = MPT_0^\infty$.
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq M$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = MT_0^k, k \geq 2$, nebo $\mathcal{C} = MT_0^\infty$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq M$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = PT_0^k, k \geq 2$, nebo $\mathcal{C} = PT_0^\infty$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq M$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = T_0^k, k \geq 2$, nebo $\mathcal{C} = T_0^\infty$.
4. $\mathcal{C} \nsubseteq A, D$ a $\mathcal{C} \subseteq T_1^2$: je duální k případu 3.
5. $\mathcal{C} \nsubseteq A, D, T_0^2, T_1^2$ a $\mathcal{C} \subseteq M$:
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = MP$.
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = MP_0$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = MP_1$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = M$.
6. $\mathcal{C} \nsubseteq A, D, T_0^2, T_1^2, M$:
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = P$.
   Pokud $\mathcal{C} \subseteq P_0$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = P_0$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$ a $\mathcal{C} \subseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = P_1$.
   Pokud $\mathcal{C} \nsubseteq P_0$ a $\mathcal{C} \nsubseteq P_1$, pak $\mathcal{C} = \top$.

Literatura

[1] Post, Emil L.: *The Two-Valued Iterative Systems Of Mathematical Logic*, Princeton university press, Princeton, 1941.

[2] Kuntzmann, J.: *Algèbre de Boole*, Dunod, Paris, **VI** (1965), 190-227.

[3] Zverovich, Igor' E.: *Characterization of closed classes of Boolean functions in terms of forbidden subfunctions and Post classes*, Discrete Applied Mathematics **149** (2005), 200-218.

[4] Post's lattice. Wikipedia [online]. Wikimedia, aktualizace 2008-04-26 [cit. 2008-07-31]. Dostupný z WWW:
< *http://en.wikipedia.org/wiki/Post%27s_lattice* >.

[5] Lewis, H. R.: *Satisfiability problems for propositional calculi*, Mathematical Systems Theory **13** (1979), 45–53.

[6] Rosenberg, I. G.: *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken*, Rozpravy Československé Akad. věd, Ser. Math. Nat. Sci., **80** (1970), 3–93.

[7] Yanov, Yu. I., Muchnik, A. A.: *On the existence of k-valued closed classes without a finite basis, Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **127** (1959), 44-46.