Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Švec

Oceňování opcí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Obor: Finanční matematika

2008

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za odborné vedení a cenné připomínky k této práci.

Dále bych chtěl poděkovat mým rodičům, kteří mě při studiu plně podporují a poskytují mi potřebné zázemí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 2.8.2008 Martin Švec

Obsah

Název práce: Oceňování opcí
Autor: Martin Švec
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedoucího: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme opce a metody jejich oceňování. Uvedeme si základní informace o opcích, rozdělíme si je podle typu a zmíníme se o možnostech využití opcí. Hlavní náplní této práce bude nalezení správné hodnoty opce. Nejdříve si uvedeme hraniční hodnoty, kterých opce může nabývat, a poté se zaměříme na dva nejdůležitější modely oceňování opcí, Black-Scholesův a binomický model. Práce zahrnuje zjednodušené odvození obou modelů. V příloze na CD jsou v systému Wolfram Mathematica® 6.0 naprogramovány oba modely oceňování opcí a v tomto softwaru byly také vytvořeny obrázky, kterými je tento text doplněn.

Klíčová slova: Opce, Oceňování opcí, Black-Scholesův model, Binomický model

Title: Options pricing
Author: Martin Švec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study options and methods of options pricing. We introduce basic information about options, type of options and applications. Main contents of this work will be finding the price of option. At first we introduce natural boundaries, then we focus on two most important models, Black-Scholes model and binomial model. This work includes short development both of models. In appendix on CD are programmed both of options pricing models in Wolfram Mathematica® 6.0. The pictures were created using the same system.

Keywords: Option, Option Pricing, Black-Scholes model, Binomial model

Kapitola 1

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou opce a metody jejich oceňování. Opce spolu s dalšími finančními deriváty jako jsou forwardy, futures a swapy patří dnes k velice využívaným a velmi oblíbeným finančním nástrojům. Co jsou to finanční deriváty? Finanční derivát může být definován jako finanční nástroj, jehož hodnota závisí na ceně podkladového aktiva (bazického instrumentu). Často je podkladovým aktivem cenný papír, komodita, měna, úroková míra atd. Jedná se o termínovaný obchod, tj. čas vypořádání nastává později než čas uzavření. Za sjednání derivátu platí kupující vystaviteli většinou malou částku ve srovnání s hodnotou podkladového aktiva. Svou právní i ekonomickou podstatou se deriváty považují za sázky a hazardní hry. Sjednání derivátu pro jeho tvůrce je sázka, jak se bude v budoucnosti vyvíjet cena podkladového aktiva.

Při sjednávání derivátů je velice důležité, aby osoby, které za společnost derivát sjednávají, dokonale porozuměli fungování daného derivátu a uměli si daný derivát ocenit. Pokud těmto derivátům nerozumí či nedokážou přesně stanovit reálnou hodnotu, potom nemůžou tento derivátový obchod uzavírat. Z takto uzavřených derivátů plynou většinou obrovské ztráty.

V následujícím textu se seznámíme s opcemi a jejich problematikou. Uvedeme si typy a využití opcí. Převážnou část této práce věnujeme základním metodám oceňování opcí – Black-Scholesově a binomickému modelu, porovnáme oba modely a vyhodnotíme jejich výhody a nevýhody. Nejdříve si uvedeme stručnou historii derivátů a účely jejich využití.

1.1 Historie

Finanční deriváty mají bohatou a překvapivě dlouhou historii. Jak tvrdí Kohout [6], první zmínky o opcích pochází již ze starého Řecka a Číny, kde se opce vyskytovaly. Aristotelés[1] ve svém díle Politika napsal příběh o matematikovi a filosofovi Thalétovi[2]

[1] * 384 př. n. l. – † 322 př. n. l., řecký filosof
[2] * okolo 624 př. n. l – † okolo 548 př. n. l.

z Milétu, který byl díky své chudobě pro smích. Chtěl tedy všem ukázat, že je schopen svojí moudrostí vydělat velké peníze, a tím dokázat, že moudrost je pro něj důležitější než majetek. Proto na konci zimy obešel všechny majitele lisů na olivy v okolí a za velmi malou sumu koupil právo na první použití lisů po sklizni. Když začala sklizeň oliv, prodal Tháles tato práva majitelům olivových plantáží za velké peníze.

Na počátku 17. století se rozvíjelo využívání opcí v Holansku, kde se nabízely opce na cibulky tulipánů. Ve Florencii a v Benátské republice se na začátku novověku objevují opce jako součást jiných cenných papírů, tzv. vložené opce. Ty zaručovaly možnost svolání těchto cenných papírů. Tento způsob byl později využit také v Anglii a sloužil ke svolání státních perpetuit – cenných papírů, které zajišťovaly nekonečné pravidelné platby. S některými se dodnes obchoduje na burzách. Ve Spojených státech se opce objevily po vzniku Newyorské burzy (založena 1792). V té době ale nikdo nedokázal správně ocenit jejich hodnotu, proto u investorů docházelo k velkým ztrátám a klesající oblibě. K velkému rozmachu obchodování s opcemi došlo až v roce 1973, kdy trojice Scholes, Black a Merton publikovala svoje práce na téma oceňování opcí. Od této doby se trh s opcemi mnohonásobně zvětšil, k čemu také napomohl vznik CBOE *(Chicago Board Options Exchange)* v roce 1973. Z počátku se na CBOE obchodovalo pouze s CALL opcemi, od června roku 1977 se přidaly také PUT opce. Dnes dosahuje trh s opcemi obrovských objemů a stále roste. V roce 2004 byl objem opčních obchodů na CBOE $165,8 mld., v roce 2005 činil $202,7 mld. a v roce 2006 dokonce $311,7 mld.[3].

Obchodování s deriváty v České republice na Burze cenných papíru Praha, a.s. (BCPP) začalo v srpnu roku 2001, kdy BCPP bylo uděleno povolení od Komise pro cenné papíry organizovat veřejný trh s opcemi a futures.

1.2 Obchodování s deriváty a účely sjednání

Ve světě se s deriváty obchoduje jak na burzách, tak i na trzích OTC (přes přepážku, *over-the-counter markets*). Burzovní trh s deriváty podléhá silné regulaci. Deriváty, které se zde obchodují, jsou vysoce standardizovány (je stanovena splatnost, realizační cena, podkladové aktivum, atd.). Výhodou burzovních trhů je vysoká transparentnost a systém tržního přeceňování, který eliminuje kreditní riziko. Burzovní deriváty slouží především ke spekulaci či zajištění finančních rizik. To už ale neplatí o OTC derivátech, které nejsou nijak specifikovány burzou a záleží na kupujícím a prodávajícím, na jakých parametrech se dohodnou. U mimoburzovních derivátů je také podstatně vyšší riziko nedodržení smlouvy. U těchto derivátových obchodů sjednávaných na OTC trzích je snadné manipulovat s cenou, a proto jsou tyto deriváty převážně využívány finančními podvodníky, kterým slouží k maximalizaci zisku finančních institucí, krácení daní a tunelování společností. Například firmy mohou s využitím derivátů odsouvat výnosy do budoucnosti a tím se vyhýbat placení daní z příjmu, vedení může záměrně uzavírat za úplatek velice nevýhodné a

[3]Zdroj: www.cboe.com

ztrátové deriváty a tím poškozovat akcionáře společnosti. Jak tvrdí Jílek [5], zvlášť významné byly a jsou tunelářské praktiky pomocí derivátů ve státních a polostátních organizací, ve kterých není efektivní kontrola majitelů nad hospodařením společnosti a vedení většinou preferuje vlastní zájmy. Proto by tyto instituce, včetně měst a obcí, neměly sjednávat derivátové obchody vůbec. Ztráty z těchto operací jsou vždycky větší než případný užitek. Mimoburzovní deriváty se samozřejmě také jako burzovní využívají pro spekulace a zajišťování finančních rizik, ale tyto způsoby užití jsou až na posledním místě. Z výše uvedených informací je nám jasné, že OTC trhy jsou několikanásobně větší než burzovní.

Jak bylo zmíněno již výše, jedním z účelů sjednání je **zajištění** (*hedging*). Zajišťovací derivát je derivát splňují podmínky podle účetních předpisů, ať se jedná o účetní zásady US GAAP, mezinárodní účetní standardy IFRS či české účetní standardy. Jedná se vlastně o určitý druh pojištění na ochranu hodnoty určitého aktiva při nepříznivém vývoji úrokových měr, měnových kurzů, akciového trhu či cen komodit. Zajišťovatel je vystaven určitému riziku a snaží se prostřednictvím nákupů derivátů na derivátových trzích toto riziko snížit. Zajištění může riziko pouze snížit, nemůže ho ale úplně eliminovat. To plyne z arbitráže, kterou efektivní trh, který mi budeme předpokládat, neumožňuje.

Arbitráž (*arbitrage*) je využití rozdílných reálných hodnot stejných aktiv na různých trzích ve stejný časový okamžik, a to za účelem dosažení zisku. Dosahovat zisku bez vynaložení jakýkoliv investic a bez rizika není na efektivním trhu, který při oceňování derivátů budeme předpokládat, dlouhodobě možné. Efektivní trh a sami investoři rychle odstraní tyto možnosti pro bezrizikový výnos.

Metoda arbitráže funguje tak, že pokud máme dvě aktiva, označme si je A a B, a aktivum A poskytuje svému majiteli vždy ve stejném čase větší výnos jako aktivum B při stejném riziku, potom nutně musí mít aktivum A větší hodnotu než aktivum B. Pokud by tomu tak nebylo a aktivum B by bylo dražší, potom by žádný investor toto aktivum nedržel a prodal by jej či by jej vůbec nekoupil. Za utržené peníze by nakoupil aktivum A, které by mu přinášelo větší výnosy při stejném riziku. Proto arbitráž při oceňování opcí a derivátů obecně není dlouhodobě možná a pokud budeme mít dvě portfolia A a B, z nichž A bude dávat větší výnosy než B, obě aktiva budou stejně riziková, musí mít A větší hodnotu než B.

Spekulace (*speculation*) spočívá v tom, že investor se snaží vydělat na vývoji kurzu podkladových aktiv a tím dosáhnout zisku. Spekulant vytváří otevřené pozice, tj. otevírá úrokové, akciové, komoditní a měnové pozice a akceptuje zvýšené riziko svého portfolia. Spekulant má určitou představu o budoucím pohybu cen nebo úrokových měr a spekulační derivát představuje pro něj jakousi sázku na budoucí vývoj kurzu podkladového aktiva. Derivátový trh tedy představuje pro spekulanta obrovskou hernu či sázkovou kancelář.

Dalším způsobem využití může být **derivát jako forma odměny pro zaměstnance** (*remuneration derivative*). Tyto deriváty nejsou sjednávány za tržních podmínek. Reálná hodnota v době sjednání je pro zaměstnance vždy kladná, tj. představuje pro něj odměnu. Pro společnost je reálná hodnota ve stejné výši záporná.

Nejběžnejším typem těchto derivátů je opce na nákup vlastních akcií, která je společnostmi většinou poskytována členům statutárních orgánů a umožňuje jim v budoucnu koupit akcie společnosti za realizační cenu mírně vyšší než tržní cenu v den sjednání opce. Toto má sloužit jako motivace managementu k dobrým hospodářským výsledkům.

Kapitola 2

Opce

Opce *(option)* je derivát, který dává kupujícímu opce (vlastník opce - *holder, buyer*) právo prodat (prodejní opce - *put option*) nebo koupit (kupní opce - *call option*) podkladové aktivum (*underlying asset)* za pevně stanovenou cenu (realizační cena - *exercise price, strike price*) v pevně stanovené době *(expiration time)* a povinnost prodávajícího opce (vystavitel opce - *seller, writer*) prodat nebo koupit dané podkladové aktivum za stejných podmínek, pokud bude opce majitelem uplatněna. Kupující opce za to platí prodávajícímu předem stanovenou částku, která se nazývá opční prémie *(premium)*. Opční prémie je obvykle splatná v okamžiku sjednání opce nebo někdy také později, nejčastěji v okamžiku splatnosti opce. Opce dávají svým majitelům právo, nikoliv povinnost daný obchod uzavřít.

Pokud je možné opci uplatnit po celou dobu existence opce, tj. kdykoliv od doby sjednání opce po den její expirace, jedná se o americkou opci. Jestliže může být uplatněna pouze v den expirace, mluvíme o opci evropské.

2.1 Typy opcí

Call opce - kupní opce
Call opce je právo koupit dané podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu v předem stanovené době. Pisatel opce, poskytovatel práva, má povinnost prodat podkladové aktivum a je v pozici čekatele, v krátké pozici *(short position)*. Čeká na rozhodnutí majitele opce, který je v dlouhé pozici *(long position)*, jestliže danou opci využije a koupí podkladové aktivum.

Put opce - prodejní opce
Put opce je právo prodat dané podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu v předem stanovené době. Pisatel opce má povinnost koupit podkladové aktivum, pokud se majitel rozhodne opci uplatnit. Stejně jako u call opcí je její majitel v dlouhé pozici - rozhoduje, zda se obchod uskuteční, a pisatel opce v krátké pozici, tj. čeká na rozhodnutí majitele, jestli toto právo využije.

2.2 Americká opce a evropská opce

Americkou a evropskou opci můžeme kdykoliv během jejího života koupit či prodat. Rozdíl je ve způsobu jejich uplatnění. Americká opce může být uplatněna kdykoliv během svého života, evropská opce pouze v den její expirace. Americká opce má tedy navíc možnost uplatnění po celou dobu života. Je tedy logické, že pokud budeme mít dvě stejné opce (tj. na stejné podkladové aktivum, se stejnou realizační cenou a se stejným dnem expirace) s tím rozdílem, že jedna bude americká a druhá evropská, bude cena americké opce rovna nebo vyšší než cena opce evropské. Stejnou hodnotu budou mít v době expirace. Rozdíl v ceně během života opcí by se měl rovnat hodnotě práva kdykoliv tuto opci uplatnit.

2.3 Opce v penězích, na penězích a mimo peníze

Podle vztahu aktuální ceny akcie S_t v čase t a realizační ceny K rozlišujeme:

- opce v penězích (*in the money*) - $S_t > K$ pro call opci, $S_t < K$ pro put opci,
- opce na penězích (*at the money*) - $S_t = K$ pro call i put opci,
- opce mimo peníze (*out of the money*) - $S_t < K$ pro call , $S_t > K$ pro put.

Při uplatnění opce v penězích získá majitel peníze - vnitřní hodnotu opce. Vnitřní hodnota opce (*intrinsic value*) je částka, kterou majitel získá při uplatnění opce a je definována jako:

- $\max(S_t - K, 0)$ pro call opci,
- $\max(K - S_t, 0)$ pro put opci.

Opci mimo peníze v čase t, pokud může být v tomto čase uplatněna, neuplatníme. Obecně, jestliže do času expirace zbývá ještě nějaký čas ($t < T$) a opce je v čase t mimo peníze, není tato opce bezcenná. Má určitou časovou hodnotu (*time value*), která představuje oceněnou možnost, že během zbývajícího života opce cena podkladové akcie vzroste (v případě call opce) nebo klesne (u put opce). S přibližující se dobou expirace časová hodnota klesá. V době expirace má opce pouze vnitřní hodnotu.

Tržní cena opce se tedy skládá z vnitřní hodnoty a časové hodnoty.

2.4 Podkladová aktiva

Opce je kontrakt s právem výměny podkladových nástrojů k určitému datu v budoucnosti. Tímto podkladovým nástrojem můžou být například:

- akcie,
- dluhopisy,
- úrokové míry,
- cizí měny,
- futures,
- komodity,
- burzovní indexy a další.

Akciová opce (*equity option*) je opce, která dává svému majiteli právo na výměnu pevné částky - realizační ceny - za akcie. (Jedná o násobek akcií, většinou sto akcií na jeden kontrakt.)

Úvěrová opce (*credit option*) je opce na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za neznámou částku hotovosti ve stejné měně. Budoucí částka závisí na rizikové úrokové míře určitého subjektu.

Úroková opce (*interest rate option*) je opce na výměnu pevné částky v jedné měně za neznámou částku hotovosti, dluhový cenný papír nebo pohledávku, a to ve stejné měně. Tato neznámá částka na rozdíl od úvěrové opce nezávisí na rizikové úrokové míře obou partnerů a závisí pouze na budoucí spotové bezrizikové úrokové míře. Kupující call opce předpokládá rostoucí úrokovou míru, zatímco kupující put opce se domnívá, že úroková míra bude klesat. Využitím úrokových opcí si můžeme své pohlédávky či závazky zajistit proti změnám úrokových sazeb

Měnová opce (*currency option*) je opce, která dává právo na výměnu předem stanovené částky v jedné měně za jinou měnu v předem dohodnutém kurzu k určitému datu v budoucnosti. Realizační cena je v tomto případě dohodnutý měnový kurz - realizační kurz.

Opce na futures (*futures option*) je opce, kde podkladovým nástrojem je futures, tj. standardizovaný forward - derivát s vypořádáním obou podkladových nástrojů v budoucnosti, s kterým se obchoduje na burze. Vypořádání futures probíhá většinou zanedlouho po expiraci opce.

Komoditní opce (*commodity option*) je opce na výměnu předem stanovené částky hotovosti za komoditní nástroj (obilniny, ropa, plyn, maso atd.) k určitému datu v budoucnosti.

Výše jsme si uvedli několik informací o hlavních podkladových aktivech. Při oceňování opcí platí jedna velmi důležitá věc a to, že způsob oceňování opcí nezávisí na typu podkladového aktiva. Způsob oceňování je tedy až na určité případy (např. měnové opce) stejný. U těchto speciálních případů musíme vzorce nepatrně upravit.

Kapitola 3

Hodnocení opcí

Hlavním a také nejdůležitějším úkolem jakékoliv opční teorie je nalezení správné hodnoty opce. Dnešní oceňovací modely jsou díky počítačové technice velice dobře použitelné a pro investory velice důležité. Není totiž možné uzavírat derivátový obchod, který si nemůžeme správně a přesně ohodnotit.

Mezi základní přístupy pro určení teoretické hodnoty opcí patří binomický model. Tento model v časopisu Journal of Financial Economics v roce 1979 prezentovali pánové Cox, J., Ross, S. a Rubinstein, M. Jedná se o jednodušší, přesto velice důležitý model, který za jistých předpokladů konverguje k Black-Scholesově modelu. Tento model umožňuje ocenit americkou put opci, u které není možné použít Black-Scholesův model. Black-Scholesův model byl zveřejněn v roce 1973 v časopisu Journal of Political Economy a představoval nový nástroj pro investory. Do této doby bylo určování hodnoty opcí velice riskantní a vzhledem k povaze opcí obtížné. Autory byli pánové Fischer Black a Myron Scholes. Robert Merton následně tento model zobecnil a uvolnil některé předpoklady a omezení. Myron Scholes a Robert Merton obdrželi v roce 1997 Nobelovu cenu za ekonomii právě za svůj příspěvek k oceňování opcí. Fischer Black se této ceny nedožil.

V této práci se zaměříme na oceňování opcí, jejichž podkladovým aktivem jsou akcie. Než si uvedeme oba dva oceňovací modely, zaměříme se na faktory ovlivňující cenu opce a na vztah mezi put a call opcemi, tzv. put-call paritu.

3.1 Značení

V této práci budeme značit S cenu podkladového akcie, u které budeme předpokládat, že v průběhu života opce nebude vyplacena žádná dividenda, K realizační cenu, r bezrizikovou úrokovou míru, která je shodná pro vypůjčování i půjčování kapitálu a T dobu do expirace. Symbolem c budeme značit cenu evropské call opce a p cenu evropské put opce. Podobně symbolem C cenu americké call opce a P cenu americké put opce. Symbolem S_t budeme značit cenu podkladové akcie v čase t, podobně c_t, p_t atd. Ceny v čase vypršení S_T, podobně c_T, p_T atd.

3.2 Faktory ovlivňující cenu opce

Faktorů ovlivňujících cenu opce je celá řada. Mezi šestici nejdůležitějších patří:

1. S_t – cena podkladové akcie v čase t,
2. K – realizační cena,
3. $(T - t)$ – čas zbývající do vypršení,
4. r – bezriziková úroková míra,
5. σ – volatilita (rizikovost) akcie,
6. očekávané vyplacení dividendy.

Tyto faktory mají na cenu opcí zásadní vliv. Většina dalších faktorů působí na cenu opcí pouze okrajově a často je těžké tyto faktory nějakým způsobem správně kvantifikovat, aby se daly použít. Mezi okrajové faktory patří např. daňové zákony, tržní podmínky, regulační podmínky atd.

Závislost hodnoty opce na jednotlivých rizikových faktorech , tzv. opční charakteristiky (*The Greeks*), si uvedeme v části 3.7.

3.2.1 Cena podkladového akcie

Cena podkladové akcie je hlavní faktor ovlivňující cenu opce. Call opce je právo koupit podkladovou akcii za přesně stanovenou realizační cenu. Jestliže akcie na trhu podraží, musí stoupnout cena call opce a naopak, jestliže cena akcie klesne, musí i cena call opce klesnout. Call opce nám tedy přináší větší výnosy, pokud cena akcie roste, a menší výnosy, pokud klesá. U put opce je tomu přesně naopak. Jestliže cena podkladové akcie roste, cena put opce klesá, pokud ale cena akcie klesá, cena put opce bude mít pro nás větší hodnotu, neboť právo prodat akcii za určitou realizační cenu při nižší ceně akcie je pro nás výhodné a přináší nám zisk. Platí tedy:

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow c_t(S_1) \leq c_t(S_2) \text{ a } p_t(S_1) \geq p_t(S_2),$$
$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow C_t(S_1) \leq C_t(S_2) \text{ a } P_t(S_1) \geq P_t(S_2).$$

3.2.2 Realizační cena

Realizační cena je cena dohodnutá předem při vypsání opce. Pokud vlastníme call opci, je pro nás výhodnější nížší realizační cena. Nakupovat levněji je pro nás výhodné. Čím nižší je realizační cena, tím vyšší musí být i cena call opce. U put opce je tomu naopak. Prodat za vyšší cenu je pro majitele put opce výhodnější, takže čím vyšší je realizační cena u put opce, tím dražší je tato opce.

$$K_1 \leq K_2 \Rightarrow c_t(K_1) \geq c_t(K_2) \text{ a } p_t(K_1) \leq p_t(K_2),$$
$$K_1 \leq K_2 \Rightarrow C_t(K_1) \geq C_t(K_2) \text{ a } P_t(K_1) \leq P_t(K_2).$$

3.2.3 Čas do vypršení

Čas zbývající do realizace opce má vliv na hodnotu opce. S klesající dobou do vypršení se zmenšuje pravděpodobost výrazné změny ceny podkladové akcie. Americká put a call opce má větší hodnotu, jestliže čas zbývající do vypršení roste. Máme dvě stejné americké opce s různou dobou expirace, jednu krátkodobou a jednu dlouhodobou. Dlouhodobá opce nám přináší stejné možnosti jako opce krátkodobá a ještě něco navíc - možnost uplatnění v době následující po expiraci krátkodobé opce. Prostor pro změny kurzu akcie je větší. Proto musí být dlouhodobá opce dražší. U evropských opcí většinou platí, že s rostoucí dobou do expirace roste jejich cena. Ale není to vždy pravidlo. Delší put opce za jinak stejných parametrů nemusí být vždy dražší.

3.2.4 Bezriziková úroková míra

Ke srovnávání různých investičních příležitostí nám slouží bezriziková úroková míra. Změna úrokové míry bude mít jiný vliv na call opci a jiný vliv na put opci. U call opce si držitel možná v budoucnu koupí akcii za realizační cenu K. Čím vyšší je úroková míra, tím dnes potřebuje menší částku k uložení, aby v budoucnu měl k dispozici právě K. Hodnota call opce se musí s rostoucí úrokovou mírou zvětšovat. Při uplatnění put opce získá majitel částku v budoucnosti. Při rostoucí úrokové míře se současná hodnota této částky snižuje a cena put opce tedy klesá. Změna bezrizikové úrokové míry působí na změnu cen opcí z této šestice faktorů nejméně.

3.2.5 Volatilita akcie

Volatilita akcie (směrodatná odchylka výnosů z akcie) je míra, jak neočekávaně se bude v budoucnosti vyvíjet cena akcie. Akcie mají typicky volatilitu mezi 20% až 50%. U společnosti, jejíž akcie mají nízkou volatilitu, se dá předpovědět vývoj kurzu akcie pro budoucí období. U těchto společností se nedá předpokládat výrazná změna kurzu akcie. Cena opce na akcie této společnosti bude relativně nízká. Pokud ale akcie společnosti mají na burze velké výkyvy, může majitel opce dosáhnout obrovských zisků, ale také velkých ztrát. Cena opce musí být proto vyšší než u akcií s nízkou volatilitou.

3.2.6 Očekáváné vyplacení dividendy

U evropské call opce na akcii, která bude v průběhu života vyplácet dividendu, nemá na tuto dividendu majitel opce nárok. Den, podle kterého se bude vyplácet dividenda (tzv. ex-dividend date) je dříve, než den, kdy může tuto opci uplatnit. Cena akcie po výplatě dividendy určitě klesne. Cena evropské call opce na akcii, která ponese dividendu, bude nižší, než cena opce bez dividendy s jinak stejnými parametry. Cena evropské put opce na akcii s dividendou bude naopak vyšší než bez dividendy za jinak stejných podmínek. Cena akcie po výplatě dividendy na trhu určitě klesne a majitel má právo ji prodat za realizační cenu, která je pravděpodobně vyšší než cena na trhu. U amerických opcí je to o něco složitější. Vliv dividendy u amerických opcí si vysvětlíme níže v části 3.4.

3.3 PUT-CALL parita

I když mají call a put opce mnoho různých vlastností, funguje mezi nimi určitý vztah. Nyní si tento vztah, tzv. put-call paritu vysvětlíme mezi evropskou call a put opcí. Máme tedy dvě evropské opce, jednu put a jednu call. Obě dvě mají stejné parametry (stejná podkladová akcie, stejná realizační cena a stejný je i čas zbývající do vypršení). Podle postupu vyloženého v Dupačová a kol. (2002) si sestavíme portfolio, které se skládá z akcie a z put opce na tuto akcii, které vlastníme (dlouhá pozice), a z prodané call opce na tuto akcii (krátká pozice). Toto portfolio si označíme π. Hodnota tohoto portfolia v čase t je

$$\pi_t = S_t + p_t - c_t. \tag{3.1}$$

V době expirace bude hodnota portfolia

$$\pi_T = S_T + \max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0). \tag{3.2}$$

Jestliže v čase T bude $S_T \leq K$, tj. cena akcie bude nižší než realizační cena, potom hodnota portfolia bude $\pi_T = S_T + K - S_T - 0 = K$, pokud $S_T \geq K$, potom $\pi_T = S_T + 0 - (S_T - K) = K$. Portfolio má tedy v čase T hodnotu rovnu realizační ceně K ($\pi_T = K$) a poskytuje tedy bezrizikový výnos K. Efektivní trh, který předpokládáme, neumožňuje arbitráž. Z tohoto důvodu musí mít naše portfolio v čase t stejnou hodnotu jako je hodnota budoucí částky K v čase t, tj. hodnotu $Ke^{-r(T-t)}$, kde r je bezriziková úroková míra. Z tohoto dostáváme vztah pro put-call paritu pro evropské opce bez dividend

$$S_t + p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.3}$$

Tento vztah lze použít pouze pro evropské opce bez dividend. Pro evropské opce s dividendou a pro americké opce platí vzahy jiné. Ty jsou uvedeny např. v [1].

3.4 Hranice pro ceny opcí

V části 3.2 jsme uvedli závislosti hodnoty opcí na změně faktorů. Nyní se zaměříme na horní a dolní hranice pro hodnotu opcí. Opce je právo koupit nebo prodat určité aktivum za předem stanovenou cenu. Toto právo tedy určitě nebude bezcenné. Základní vlastností opcí tedy je, že americké i evropské call i put opce mají nezápornou hodnotu, tj.

$$c_t \geq 0,\ p_t \geq 0,\ C_t \geq 0,\ P_t \geq 0. \tag{3.4}$$

Americká opce má stejné vlastnosti jako opce evropská. Navíc může být uplatněna kdykoliv do doby expirace. Americká opce musí být dražší nebo alespoň stejně drahá jako opce evropská. Rozdíl v ceně se bude rovnat hodnotě tohoto práva kdykoliv opci uplatnit:

$$C_t \geq c_t,\ P_t \geq p_t. \tag{3.5}$$

Cena americké i evropské call opce je maximálně rovna ceně podkladové akcie. Pokud by tomu tak nebylo a cena podkladové akcie by byla vyšší jak cena opce, stačilo by call opci prodat a koupit akcii. Tím bychom utržili zisk a nebyli bychom vystaveni žádnému riziku. Tato strategie by nám bez rizika poskytovala zaručený výnos a to bez jakékoliv počáteční investice. To jsme ale vyloučili předpokladem nemožnosti arbitráže.

$$c_t \leq S_t,\ C_t \leq S_t. \tag{3.6}$$

Cena americké i evropské put opce je maximálně rovna realizační hodnotě. Jestliže by cena americké put opce byla vyšší jak realizační cena, zaujmeme bezrizikovou pozici tak, že prodáme put opci. Pokud by majitel tuto put opci uplatnil, získané prostředky z prodeje opce nám pokryjí náklady na koupi podkladové akcie a ještě nám zůstane určitý obnos, což je ve sporu s předpokladem nemožnosti arbitráže.

$$p_t \leq K,\ P_t \leq K. \tag{3.7}$$

Pro evropskou put opci můžeme upřestnit vztah (3.7). Platí, že

$$p_t \leq Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.8}$$

Pokud by vztah (3.8) neplatil, stačí zvolit následující strategii: prodáme put opci za cenu p_t a koupíme diskontní dluhopis za cenu $Ke^{-r(T-t)}$. V době expirace jsou dvě možnosti:

1. $S < K$, put opce bude uplatněna a my jsme nuceni koupit akcii za cenu K. Prostředky ke koupi nám dává zakoupený diskontní dluhopis, který v čase T maturuje a přináší nám právě K. Zisk z této operace je ve výši minimálně S.

2. $S \geq K$, put opce nebude uplatněna a nám zůstává minimálně částka K.

Opět je tu spor s předpokladem nemožnosti arbitráže a vztah (3.8) platí.

Pro hodnotu evropské call a put opce platí:

$$c_t \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0), \tag{3.9}$$

$$p_t \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0). \tag{3.10}$$

Tyto dva vztahy vyplývají přímo ze vzorce put-call parity (3.3) dosazením $p_t \geq 0$ a $c_t \geq 0$.

Pro americkou call i put opci platí, že jejich hodnota musí být větší nebo alespoň stejně velká jako jejich vnitřní hodnota, tj.

$$C_t \geq \max(S_t - K, 0),\ P_t \geq \max(K - S_t, 0). \tag{3.11}$$

Pokud by pro americkou call opci platilo, že $C_t < S_t - K$, pak bychom mohli prodat akcii za cenu S_t a koupit call opci na tuto akcii. Následně bychom tuto opci uplatnili a koupili akcii za realizační cenu K. Výsledný zisk této bezrizikové operace by činil $S_t - K - C_t$. Podobně pro put opci. Pokud by pro americkou put opci platilo $P_t < K - S_t$, koupili bychom akcii za cenu S_t a put opci na tuto akcii. Následně bychom tuto opci uplatnili a prodali akcii za realizační cenu K. Výsledný zisk by byl ve výši $K - S_t - P_t$. Obě dvě možnosti jsou v rozporu s bezarbitrážním principem.

V části 3.2.6 jsme si objasnili vliv dividendy na cenu evropských opcí. Nyní si upravíme vzorec (3.9) a (3.10). Pro evropskou call a put opci na akcii nesoucí dividendu platí:

$$c_t \geq \max(S_t - Ke^{-r(T-t)} - D, 0), \tag{3.12}$$

$$p_t \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t + D, 0), \tag{3.13}$$

kde D je současná hodnota všech dividend, na jejichž výplatu má majitel akcie nárok do doby expirace.

U amerických opcí na akcii s dividendou je situace o něco složitější. Majitel americké call opce může tuto opci uplatnit kdykoliv v průběhu jejího života. Má tedy přístup k vyplácené dividendě. Nyní zvolíme postup odvození hodnoty americké call opce vyložený v [1].

Z (3.5) a (3.12) pro opce na akcii s dividendou platí, že

$$C_t \geq c_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} - D. \tag{3.14}$$

Pro opce na akcii bez dividendy z (3.5) a (3.9) platí

$$C_t \geq c_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} > S_t - K. \tag{3.15}$$

Hodnota americké call opce na akcii bez dividendy je tedy vždy větší než její vnitřní hodnota. **Americká call opce na akcii, která nenese dividendu nebude nikdy uplatněna před časem expirace.** Pro majitele bude vždy výhodnější opci prodat, než realizovat.

Pokud bude hodnota vyplacené dividendy D dostatečně malá, potom bude platit:

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} - D > S_t - K. \tag{3.16}$$

Hodnota call opce bude stále větší než její realizační hodnota. V tomto případě nebude call opce uplatněna. Úpravou nerovnosti (3.16) dostaneme

$$K(e^{r(T-t)} - 1) > De^{r(T-t)}. \tag{3.17}$$

Kdyby tedy tuto opci majitel uplatnil, musí vynaložit částku K, za kterou koupí akcii. Ztrácí tak úroky ve výši $K(e^{r(T-t)} - 1)$, které by mu obnos K vydělal, kdyby opci uplatnil až v čas expirace. Naopak ale získá právo na dividendu. Tím získá částku $De^{r(T-t)}$, neboť musíme přičíst také úroky, které nám dividenda vynese do konce expirace.

Americká call opce na akcii nesoucí dividendu nebude určitě v čase t uplatněna, pokud úrok z investice K za dobu $T - t$ při úrokové míře r je větší než hodnota vyplacené dividendy D s úroky za dobu $T - t$. Pokud úrok z investice je menší než hodnota vyplacené dividendy s úroky, opce může být uplatněna.

Pro amerikou put opci na akcii s dividendou z (3.5) a (3.13) platí:

$$P_t \geq p_t \geq Ke^{-r(T-t)} + D - S_t. \tag{3.18}$$

Neexistuje žádná jednoduchá podmínka pro uplatnění put opce, jak tomu bylo u call opce. Majitel americké put opce na akcii s dividendou ji uplatní většinou v případě, že kurz akcie na trhu je podstatně menší než je realizační hodnota.

3.5 Black-Scholesův model

Nyní se zaměříme na odvození Black-Scholesova modelu pro hodnocení evropské call opce na akcii, která nenese dividendu. Toto odvození je poměrně složité a vede ke konstrukci a řešení diferenciální rovnice. V této práci si cestu k Black-Scholesově rovnici zjednodušíme a o některých použitých metodách se bez předchozího odvození pouze zmíníme. Podrobné odvození a důkazy najdeme např. v [4].

Po odvození rovnice pro evropskou call opci na akcii bez dividendy se zaměříme na vztah pro evropskou put opci na akcii bez dividendy. Následně si uvedeme vliv dividendy na hodnotu evropských opcí a možnosti pro hodnocení amerických opcí.

3.5.1 Předpoklady a odvození

Black-Scholesův model je založen na předpokladu existence dokonalého (efektivního) trhu. Na tomto trhu neexistuje možnost arbitráže, tj. situace, kdy je možné s nulovou počáteční investicí a s nenulovou pravděpodobností dosáhnout kladného zisku v budoucnosti. Dále se předpokládá, že neexistují žádné transakční náklady a daně a všechny akcie na trhu jsou neomezeně dělitelné - je možno koupit jakoukoliv část akcie. Bezriziková úroková míra je jen jedna a je stejná pro půjčování i vypůjčování kapitálu. Obchodování probíhá spojitě a subjekty nejsou nasyceny, tj. preferují více před méně.

Cena podkladové akcie zásadně ovlivňuje hodnotu opce. Pro cenu akcie - náhodnou veličinu S - předpokládáme, že se řídí geometrickým Brownovým pohybem[1]. Tento stochastický proces předpokládá, že se pohyb kurzu akcie skládá z konstantní změny (driftu) a náhodné fluktuace (odchylky).

Konstantní změna

Model předpokládá, že cena podkladové akcie buď konstatně roste nebo klesá. Je-li S_t cena podkladové akcie v čase t, očekávaná změna ceny akcie za čas δt je

[1]Jedná se o modifikaci standardního Wienerova procesu, více a odvození kap. 11.2 v [4].

$\mu S_t \delta t$, kde μ je konstantní parametr - míra výnosnosti akcie za čas δt, vyjádřená ve tvaru podílu. Pokud má akcie nulovou volatilitu a cena akcie jen konstantě roste nebo klesá, bude pro tento stochastický model platit rovnice

$$\delta S_t = \mu S_t \delta t. \tag{3.19}$$

Náhodná fluktuace

Ve skutečnosti každá akcie v čase vykazuje určitou volatilitu[2]. Bude tedy náhodně oscilovat kolem své konstatní změny. Velikost této odchylky akcie v hodnotě S_t za čas δt model předpokládá ve tvaru

$$\sigma S_t \epsilon \sqrt{\delta t}, \tag{3.20}$$

kde konstanta σ je volatilita a ϵ je náhodná proměnná s normovaným normálním rozdělenín $N[0, 1]$. Výraz $\epsilon\sqrt{\delta t}$ značí přírůstek standardního Wienerova procesu za malý časový okamžik δt.

Spojením (3.19) a (3.20) získáváme diskrétní pravděpodobnostní model geometrického Brownova pohybu - model chování ceny podkladové akcie

$$\delta S_t = S_{t+\delta t} - S_t = \mu S_t \delta t + \sigma S_t \epsilon \sqrt{\delta t} \tag{3.21}$$

nebo

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = \mu \delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\delta t}, \tag{3.22}$$

kde μ je očekávaná míra výnosnosti akcie na jednotku času a σ je volatilita akcie. Oba tyto parametry budeme předpokládat konstantní. Výnosy ze dvou nepřekrývajících se období jsou vzájemně nezávislé. Levá strana rovnice (3.22) značí výnos akcie za krátkou dobu δt. Výraz $\mu\delta t$ je očekávaná hodnota tohoto výnosu a $\sigma\epsilon\sqrt{\delta t}$ je stochastická část výnosu. Rozptyl této části, a proto i celého výnosu je $\sigma^2 \delta t$. Náhodná veličina $\frac{\delta S_t}{S_t}$ má tedy normální rozdělení se střední hodnotou $\mu\delta t$ a směrodatnou odchylkou $\sigma\sqrt{\delta t}$.

Dá se dokázat, že platí

$$\ln S_{t+\delta t} \sim N[\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta t, \sigma\sqrt{\delta t}]. \tag{3.23}$$

Z toho plyne, že náhodná veličina rozdělení kurzů akcie $S_{t+\delta t}$ má logaritmicko-normální rozdělení. Toto představuje návod, jak vypočítat interval hodnot, ve kterém se bude pohybovat cena akcie za čas δt na určité hladině spolehlivosti. Ze vztahu (3.23) plyne především způsob pro odvození odhadu roční volatility σ pomocí naměřených historických hodnot (tzv. historická volatilita). Pokud jsme z dat kurzu

[2] V praxi totiž každý investor má rozdílné preference na míru výnosnosti akcie při ceně akcie 1000 Kč, jak při ceně 5000 Kč.

akcie S_t za čas δt odhadli směrodatnou odchylku s hodnot $\ln(S_{t+\delta t}/S_t)$, potom roční odhad volatility $\widehat{\sigma}$ je:

$$\widehat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\delta t}}, \tag{3.24}$$

kde δt je čas vyjádřen ve tvaru podílu (např. pokud budeme mít data za 1 měsíc, bude $\delta t = 1/12$). Volatilitu lze také spočítat pomocí Black-Scholesova vzorce. Tím dostáváme tzv. implicitní volatilitu.

Konstrukce diferenciální rovnice, jejímž řešením bude Black-Scholesův vzorec pro hodnotu evropské call opce, je založena na sestrojení portfolia složeného z prodané call opce a koupených akcií v takovém poměru, aby toto portfolio bylo imunní vůči malé změně hodnoty akcie za velmi krátký časový interval δt. Podle postupu vyloženém v Hull (2002) toto optimální porfolio obsahuje:

- jednu prodanou call opce na akcii,
- $\frac{\partial c}{\partial S}$ těchto akcií.

Parciální derivace hodnoty call opce c podle S, $\frac{\partial c}{\partial S} = \Delta_c$, se nazývá delta call a vyjadřuje, jak se změní hodnota call opce, pokud se změní kurz podkladové akcie. Delta call platí ale jen pro velmi malé změny kurzu.

Pro hodnotu Π tohoto portfolia platí:

$$\Pi = -c + \frac{\partial c}{\partial S} S. \tag{3.25}$$

Pro změnu hodnoty portfolia $\delta\Pi$ za krátký časový interval δt platí:

$$\delta\Pi = -\delta c + \frac{\partial c}{\partial S}\delta S. \tag{3.26}$$

Užitím Itoova lemmatu, které je ve stochastickém diferenciální počtu obdobou klasického totálního diferenciálu (více kap. 11.6 v [4]) a pro změnu ceny call (ale i put) opce má v diskrétní verzi tvar

$$\delta c = (\frac{\partial c}{\partial S}\mu S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\delta t + \frac{\partial c}{\partial S}\sigma S \epsilon\sqrt{\delta t}, \tag{3.27}$$

a dosazením diskrétního modelu chování ceny podkladové akcie (3.21) do (3.26) dostáváme

$$\delta\Pi = (-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\delta t. \tag{3.28}$$

Portfolio Π je bezrizikové a pokud se za časový okamžik δt změní hodnota portfolia, musí být tato změna stejná jako u bezrizikového aktiva. Je-li r bezriziková úroková míra, potom platí

$$\delta\Pi = \Pi r \delta t. \tag{3.29}$$

Dosazením (3.25) a (3.28) do (3.29) a zkrácením δt dostáváme základní Black-Scholes-Mertonovu diferenciální rovnici

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial c}{\partial S} rS - rc = 0. \tag{3.30}$$

Rovnice (3.30) má obecně mnoho řešení[3]. V případě evropské call opce v čase expirace platí, že

$$c_T = \max(S_T - K, 0). \tag{3.31}$$

Diferenciální rovnice (3.30) s okrajovými podmínkami (3.31) má jednoznačné řešení a tím je **Black-Scholesův vzorec**.

3.5.2 Black-Scholesova rovnice

Pro cenu evropské call opce na akcii, která nenese dividendu platí:

$$\boxed{c_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),} \tag{3.32}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Funkce $\Phi(d)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina s normálním rozdělením $N[0,1]$ bude menší než d.

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$$

Odvození Black-Scholesovy formule pro evropskou put opci můžeme provést pomocí put-call parity (3.3). Připomeňme, že pro evropskou put a call opci platí vztah:

$$S_t + p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)}.$$

Dosadíme-li do výše uvedeného vzorce rovnici (3.32), dostaneme po úpravě:

$$p_t = S_t(\Phi(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(d_2) - 1).$$

Pro normální rozdělení platí $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$. Úpravou předchozí rovnice dostáváme rovnici pro hodnotu evropské put opce na akcii bez dividendy:

$$\boxed{p_t = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1).} \tag{3.33}$$

[3]Parciální diferenciální rovnice jsou obtížně řešitelné, naštěstí tato rovnice je výjimkou. Jak je uvedeno v Slačálek (1998), pomocí substituce lze tuto rovnici převést na rovnici vedení tepla, která je analyticky řešitelná.

Mezi velké problémy Black-Scholesova modelu patří volatilita, jejíž měřitelnost je nejobtížnější. Volatilitu můžeme odhadnout pomocí historických kurzů akcie (historická volatilita), nebo využít Black-Scholesův vzorec (implicitní volatilita). O historické volatilitě jsme se již zmínili v části 3.5.1. Implicitní volatilitu vypočítáme následujícím způsobem. Pokud je např. call opce obchodovatelná na trhu a známe její cenu c_t, můžeme tuto cenu spolu s parametry S_t, K, r, T dosadit do rovnice pro cenu call opce:

$$c_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2). \tag{3.34}$$

Jejím vyřešením dostaneme hodnotu σ. Rovnici (3.34) musíme řešit numericky iterační metodou, protože tato rovnice není analyticky řešitelná. Druhým problémem volatility je předpoklad její konstantní hodnoty. V reálném světě není volatilita výnosů konstantní a objevuje se u ní několik poruch. Více o problémech volatility najedeme v kap. 15 v [4].

3.5.3 Vliv dividend

Dosud jsme předpokládali, že akcie, na kterou je opce vypsána, nenese dividendu. Na akcie je ale velmi často vyplácena dividenda a my si nyní upravíme vztah (3.32) a (3.33) tak, aby platil i pro opce na akcii, která v průběhu života opce vyplácí dividendu. Dividenda bývá většinou vyplácena jedenkrát ročně a opce jsou nejčastěji krátkodobé. Pokud bude na akcii vyplácena dividenda mimo období života opce, nebude mít tato dividenda vliv na hodnotu opce a výpočet pro evropské opce bude podle předchozího vztahu.

Předpokládejme, že známe výši vyplácených dividend a i jejich termín. Cena akcie na trhu se v tomto případě skládá ze dvou částí. První bezriziková část se skládá z budoucích vyplacených dividend. Bezriziková část v čase t je současná hodnota všech budoucích vyplacených dividend během života opce diskontovaná bezrizikovou úrokovou míro r z data, podle kterého je vyplácena dividenda (tzv. ex-dividend date) k času t. Druhá riziková část je vlastní kurz akcie. V době expirace opce T již byly vyplaceny očekáváné dividendy a kurz akcie musí být tedy o hodnotu vyplacených dividend nižší. Black-Scholesův model počítá pouze s rizikovou složkou. Musíme tedy od aktuální ceny podkladové akcie S_t odečíst současnou hodnotu bezrizikové části. Výše této současné hodnoty $PV_t(d_1, ..., d_n)$ v čase t pro n vyplacených dividend $d_1, ..., d_n$ s časem výplaty $t_1, ..., t_n$, je

$$PV_t(d_1, ..., d_n) = \sum_{j=1}^{n} d_j e^{-r(t_j - t)}. \tag{3.35}$$

Cena podkladové akcie, kterou použijeme k výpočtu hodnoty opce podle rovnice (3.32) či (3.33), je rovna

$$S_t = S_t^* - PV_t(d_1, ..., d_n), \tag{3.36}$$

kde S_t^* je cena akcie na trhu.

3.5.4 Americké opce

V případě americké call opce na akcii bez dividendy jsme si v části 3.4 ukázali, že tato opce nebude uplatněna dříve než v čas expirace. Pro tento případ platí vztah (3.32). Hodnota americké call opce na akcii nesoucí dividendu, která nebude uplatněna podle (3.16), je stejná jako hodnota evropské call opce za stejných podmínek a vypočítá se podle vztahu pro evropskou call opci na akcii s dividendou. Pro americké call opce na akcie vyplácející dividendu vztah (3.32) neplatí. Je možné použít binomický model, který si vysvětlíme dále. Také pro tento případ existují speciální výpočetní postupy, které se pokouší hodnotu odhadnout. Např. Fisher Black vytvořil aproximaci, při které oceňuje americkou call opci pomocí dvou evropských call opcí s různou dobou expirace za jinak stejných podmínek (více kap. 12.13 a v příloze 12B v [4]). Pro put opce je situace ještě složitější. Americké put opce s dividendou jsou dražší než bez dividendy a dá se ukázat, že vhodný čas pro uplatnění opce je těsně po datu výplaty dividendy.

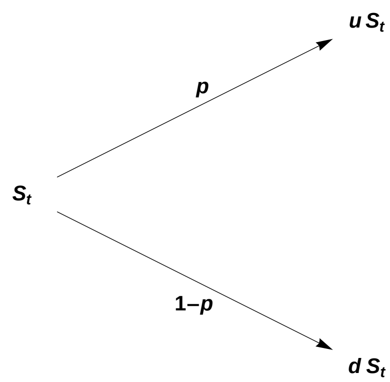
3.6 Binomický model oceňování opcí

Předpoklady binomického modelu jsou stejné jako u Black-Scholesova modelu. Trh je efektivní, neuvažujeme žádné transakční náklady, daně ani poplatky, existuje jediná bezriziková úroková míra, která je stejná pro půjčování i vypůjčování kapitálu, akcie jsou nekonečně štěpitelné a nevyplácí dividendu.

Binomický model je založen na předpokladu, že se cena akcie S mění jen v ekvidistantních časových okamžicích délky δt. Tyto časové intervaly jsou vždy stejně dlouhé a můžou to být např. měsíce, dny, hodiny či minuty. Model změny ceny podkladové akcie je jednoduchý. Předpokládejme, že cena akcie S_t v čase t se v následujícím časovém okamžiku s pravděpodobností p změní na hodnotu uS_t a s pravděpodobností $1-p$ na hodnotu dS_t. Platí tedy:

$$P(S_{t+\delta t} = uS_t | S_t) = p, \; P(S_{t+\delta t} = dS_t | S_t) = 1-p. \tag{3.37}$$

Situaci vystihuje následující obrázek:



Obrázek 3.1: Možné ceny akcie v čase $t + \delta t$

Předpokládáme, že d je menší změna a u je změna větší. Často se předpokládá, že $d < 1 < u$. Cena akcie tedy buď proporcionálně vzroste o $u - 1$ s pravděpodobností p, nebo klesne o $1 - d$ s pravděpodobností $1 - p$. Pro bezrizikovou úrokovou míru r musí z předpokladu nemožnosti arbitráže platit, že $r + 1 < u$. Kdyby tento vztah neplatil a platilo by $r + 1 > u$, vyplatilo by se uložit peníze do státních dluhopisů za bezrizikovou úrokovou míru a akcie by nikdo nekupoval.

Nyní si zkonstruujeme binomický model pro evropskou call opci. Pokud do konce života opce zbývá pouze jedno období a opce maturuje v čase $t + \delta t$, označíme si $c^u_{t+\delta t}$ hodnotu call opce v době expirace, pokud za toto období cena akcie vzroste na uS_t, a $c^d_{t+\delta t}$ hodnotu opce, pokud cena akcie klesne na dS_t. Výplata v čase $t + \delta t$ je rovna:

$$c^u_{t+\delta t} = \max(uS_t - K, 0) \text{ s pravděpodobností } p, \tag{3.38}$$

$$c^d_{t+\delta t} = \max(dS_t - K, 0) \text{ s pravděpodobností } 1-p. \tag{3.39}$$

Nyní prozkoumáme očekávanou hodnotu ceny akcie. Předpokládejme, že se nacházíme v bezrizikovém prostředí. V tomto prostředí jsou všechny očekávané výnosnosti rovny bezrizikové úrokové míře a budoucí peněžní toky jsou zde oceňovány diskontováním bezrizikovou úrokovou mírou jejich očekávaných hodnot. Očekávaná cena akcie, která se chová podle našich výše uvedených předpokladů, je rovna:

$$E(S_{t+\delta t}|S_t) = puS_t + (1-p)dS_t. \tag{3.40}$$

V rizikově neutrálním prostředí musí tedy být výše výnosnosti akcie stejná jako výnosnost bezrizikového kapitálu. Platí tedy:

$$puS_t + (1-p)dS_t = e^{r\delta t}S_t, \tag{3.41}$$

kde $e^{r\delta t}$ je výnosnost kapitálu za období δt. Řešením rovnice (3.41) je:

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}. \tag{3.42}$$

Jelikož platí $e^{r\delta t} < u$ (výnosnost akcií musí být vyšší jak výnosnost státních dluhopisů), je p pravděpodobnost a nazývá se rizikově neutrální pravděpodobnost změny hodnoty akcie o $u - 1$ v bezrizikovém prostředí. Rozptyl ceny akcie, která se chová podle našich předpokladů, je roven

$$var(S_{t+\delta t}|S_t) = pu^2S_t^2 + (1-p)d^2S_t^2 - (pu + (1-p)d)^2S_t^2. \tag{3.43}$$

Ze vztahu (3.23) pro cenu akcie, která se řídí stochastickým procesem, plyne, že rozptyl ceny akcie s volatilitou σ za malý časový okamžik δt je $\sigma^2\delta t$. Chceme-li srovnat volatilitu akcie s parametry binomického modelu, platí:

$$pu^2S_t^2 + (1-p)d^2S_t^2 - (pu + (1-p)d)^2S_t^2 = \sigma^2\delta tS_t^2. \tag{3.44}$$

Úpravou předchozího vztahu a dosazením (3.42) dostáváme rovnici:

$$e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t} = \sigma^2\delta t. \tag{3.45}$$

Třetí podmínkou, kterou přidali Cox, Ross a Rubinstein, je

$$u = \frac{1}{d}. \tag{3.46}$$

Zanedbáním mocnin δt vyšších jak 1 mají rovnice (3.41) a (3.45) s předchozí podmínkou řešení, které lze aproximovat následujícími rovnicemi:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \tag{3.47}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}. \tag{3.48}$$

Při takto zvolených parametrech dává binomický model stejné výsledky jako model Black-Scholesův. Nyní si odvodíme rovnici pro výpočet hodnoty evropské call opce, pokud v následujícím období opce expiruje.

Sestavíme dvě portfolia:

- portfolio 1 obsahuje Δ akcií a vypůjčené peníze za bezrizikovou úrokovou míru ve výši L,
- portfolio 2 obsahuje call opci na akcii z portfolia 1.

Požadujeme, aby se hodnota portfolia 1 na konci prvního období v čase $t + \delta t$ rovnala hodnotě portfolia 2 bez ohledu na to, jestli cena akcie vzroste nebo klesne. Musí tedy platit:

$$\Delta u S_t + e^{r\delta t} L = c^u_{t+\delta t}, \tag{3.49}$$

$$\Delta d S_t + e^{r\delta t} L = c^d_{t+\delta t}. \tag{3.50}$$

Řešením soustavy rovnic (3.49) a (3.50) dostáváme:

$$\Delta = \frac{c^u_{t+\delta t} - c^d_{t+\delta t}}{S_t(u-d)}, \tag{3.51}$$

$$L = \frac{c^d_{t+\delta t} - c^u_{t+\delta t}}{e^{r\delta t}(u-d)}. \tag{3.52}$$

Portfolio jsme zkonstruovali stejným způsobem jako u Black-Scholesova modelu. Jak jsme již dříve uvedli, Δ je důležitá opční charakteristika, která udává rychlost změny ceny opce při změně ceny podkladového aktiva. Cena call opce s rostoucí cenou podkladové akcie roste, platí: $c^u_{t+\delta t} \geq c^d_{t+\delta t}$. Proto $L \leq 0$ a znamená to vypůjčené peníze ve výši L. Pokud bude naše portfolio obsahovat Δ akcií a vypůjčenou částku L, na konci období bude mít vždy stejnou hodnotu jako call opce bez ohledu na vývoj kurzu akcie. Z předpokladu neexistence arbitráže tato portfolia musí mít i stejnou současnou hodnotu:

$$c_t = \Delta S_t + L. \tag{3.53}$$

Dosazením (3.51) a (3.52) do předchozího vztahu a jednoduchou úpravou dostáváme:

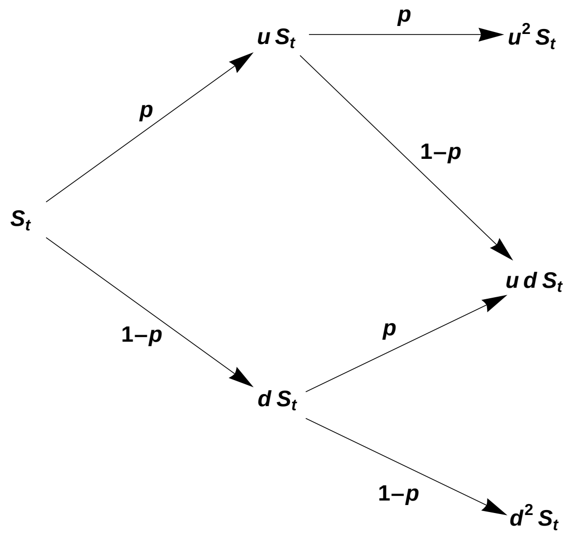
$$c_t = \left(\frac{e^{r\delta t} - d}{u-d} c^u_{t+\delta t} + \frac{u - e^{r\delta t}}{u-d} c^d_{t+\delta t}\right)/e^{r\delta t}. \tag{3.54}$$

Tuto rovnici využitím vztahu (3.42) upravíme na výsledný tvar:

$$c_t = (p c^u_{t+\delta t} + (1-p) c^d_{t+\delta t})/e^{r\delta t}. \tag{3.55}$$

Současná hodnota call opce c_t je tedy očekávaná hodnota opce v čase $t + \delta t$ diskontovaná k času t.

Nyní si tento model zobecníme pro více období. Pro dvě období, která zbývají do doby expirace opce, vystihuje situaci následující obrázek:



Obrázek 3.2: Možné ceny akcie v čase $t + 2\delta t$

Cena akcie v čase $t{+}2\delta t$ může být $u^2 S_t$, udS_t nebo $d^2 S_t$. Hodnoty pravděpodobností jednotlivých cen vyjadřují následující vztahy:

$$\begin{aligned}
&P(S_{t+2\delta t} = u^2 S_t | S_t) = p^2,\\
&P(S_{t+2\delta t} = udS_t | S_t) = 2p(1-p),\\
&P(S_{t+2\delta t} = d^2 S_t | S_t) = (1-p)^2.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Možné hodnoty opce na konci druhého období v čase $t + 2\delta t$ budou ve výši ($c^{uu}_{t+2\delta t}$ značí hodnotu call opce, pokud cena akcie dvakrát proprociálně vzroste o $(1 - u)$, atd.):

$$\begin{aligned}
c^{uu}_{t+2\delta t} &= \max(u^2 S_t - K, 0) \text{ s pravděpodobností } p^2,\\
c^{ud}_{t+2\delta t} &= \max(udS_t - K, 0) \text{ s pravděpodobností } 2p(1-p),\\
c^{dd}_{t+2\delta t} &= \max(d^2 S_t - K, 0) \text{ s pravděpodobností } (1-p)^2.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Nyní vypočítáme hodnoty call opce na konci prvního období, tedy hodnoty $c^u_{t+\delta t}$ a $c^d_{t+\delta t}$. Při tomto výpočtu využijeme rovnici (3.55), která vyjadřuje, že hodnota opce se dá vypočítat pomocí hodnot opce v období následujícím.

Předpokládejme, že v čase $t + 2\delta t$ jsou hodnoty opce $c^{uu}_{t+2\delta t}$ a $c^{ud}_{t+2\delta t}$. Pro hodnotu $c^u_{t+\delta t}$ podle rovnice (3.55) platí:

$$c^u_{t+\delta t} = (pc^{uu}_{t+2\delta t} + (1-p)c^{ud}_{t+2\delta t})/e^{r\delta t}. \tag{3.58}$$

Pokud v čase $t + 2\delta t$ jsou hodnoty opce $c^{dd}_{t+2\delta t}$ a $c^{ud}_{t+2\delta t}$, pro hodnotu $c^{d}_{t+\delta t}$ platí:

$$c^{d}_{t+\delta t} = (pc^{ud}_{t+2\delta t} + (1-d)c^{dd}_{t+2\delta t})/e^{r\delta t}. \tag{3.59}$$

Již víme hodnoty opcí na konci prvního období, tedy v čase $t + \delta t$. Aplikujeme tedy rovnici (3.55) na tyto hodnoty. Tím získáme cenu opce v čase t, tedy hodnotu c_t:

$$c_t = (pc^{u}_{t+\delta t} + (1-p)c^{d}_{t+\delta t})/e^{r\delta t}. \tag{3.60}$$

Dosazením vypočítaných hodnot z (3.58) a (3.59) můžeme rovnici (3.60) upravit na tvar:

$$c_t = (p^2 c^{uu}_{t+2\delta t} + 2p(1-p)c^{ud}_{t+2\delta t} + (1-p)^2 c^{dd}_{t+2\delta t})/e^{2r\delta t}. \tag{3.61}$$

Nyní dosaďme do této rovnice hodnoty z (3.57). Dostáváme rovnici:

$$c_t = (p^2 \max(u^2 S_t - K, 0) + 2p(1-p)\max(udS_t - K, 0) + (1-p)^2 \max(d^2 S_t - K, 0))/e^{2r\delta t}, \tag{3.62}$$

kterou můžeme přepsat do tvaru:

$$c_t = \sum_{j=0}^{2} \frac{2!}{(2-j)!j!} p^j (1-p)^{2-j} \max(u^j d^{2-j} S_t - K, 0)/e^{2r\delta t}. \tag{3.63}$$

Pokud do konce života opce zbývá n období ($T = t + n\delta t$) a v těchto n obdobích cena akcie j krát vzroste o $(1-u)$ a $(n-j)$ krát klesne o $(1-d)$, je výsledná pravděpodobnost této změny rovna:

$$P(S_T = u^j d^{n-j} | S_t) = \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j}, j = 0, ..., n. \tag{3.64}$$

Cena akcie, která se chová podle našich předpokladů, má tedy binomické rozdělení. Rozšířením vztahu (3.63) dostáváme vztah pro hodnotu evropské call opce vypočítanou pomocí binomického modelu:

$$c_t = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S_t - K, 0)/e^{nr\delta t}, \tag{3.65}$$

kde p je rizikově neutrální pravděpodobnost změny hodnoty akcie o $(1-u)$ v bezrizikovém prostředí vypočítaná podle vztahu (3.42). Výraz $\max(u^j d^{n-j} S_t - K, 0)$ vyjadřuje cenu při expiraci. Tato cena nebude nulová a opce skončí v penězích, pokud $u^j d^{n-j} S_t > K$. Označme si J nejmenší hodnotu j, pro kterou platí $u^j d^{n-j} S_t > K$.

$$J > \frac{\ln K/d^n S_t}{\ln(u/d)},\ J \in \mathbf{N}. \tag{3.66}$$

Sumu ve vzorci (3.65) můžeme sčítat od $j = J$, neboť členy sumy pro $j < J$ jsou nulové. Pro tyto $j > J$ je výraz $\max(u^j d^{n-j} S_t - K, 0) = u^j d^{n-j} S_t - K$. Použitím předchozích úvah a roznásobením dostáváme:

$$c_t = S_t \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j}/e^{nr\delta t} - K \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j}/e^{nr\delta t}. \tag{3.67}$$

Zavedeme novou proměnnou $\bar{p}$, pro kterou platí:

$$\bar{p} = \frac{up}{e^{r\delta t}}. \tag{3.68}$$

Nyní využijeme vztah (3.42) pro rizikově neutrální pravděpodobnost změny hodnoty akcie p. Z tohoto vztahu plyne:

$$1 - \bar{p} = \frac{d(1-p)}{e^{r\delta t}}. \tag{3.69}$$

Dosadíme-li (3.68) a (3.69) do rovnice (3.67), dostaneme:

$$c_t = S_t \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} \bar{p}^j (1-\bar{p})^{n-j} - K \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} / e^{nr\delta t}. \tag{3.70}$$

Označíme-li si:

$$\begin{aligned} Bi_J[n,\bar{p}] &= \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} \bar{p}^j (1-\bar{p})^{n-j}, \\ Bi_J[n,p] &= \sum_{j=J}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

můžeme vyjádřit rovnici (3.70) ve zkráceném tvaru:

$$\boxed{c_t = S_t Bi_J[n,\bar{p}] - K e^{-nr\delta t} Bi_J[n,p].} \tag{3.72}$$

Pokud bychom chtěli binomický model pro evropskou put opci, můžeme stejně jako u Black-Scholesova modelu využít put-call paritu.

Binomický model je tedy velice jednoduchý nástroj, který je v podstatě jediný možný pro ocenění americké put opce jak bez dividendy, tak s ní. Oceňování amerických opcí a opcí vyplácejících dividendu je založeno na rozdělení doby života trvání opce do malých časových úseků, ve kterých sledujeme vývoj kurzů a ceny opce. V každém oddobí ověřujeme, zda není vhodná doba pro uplatnění opce. Postup oceňování amerických opcí najdeme např. v [4]. Další výhodou je jeho přesnost. Při vhodně zvolených parametrech u a d konverguje pro $n \to \infty$ binomický model k Black-Scholesově modelu. Abychom dosáhli přibližně stejných hodnot, stačí zvolit počet období n dostatečně velké.

3.7 Opční charakteristiky

V části 3.2 jsme si uvedli parametry, které cenu opce ovlivňují nejvíce. Zopakujme, že pro opci na akcii, která nenese dividendu, to jsou: cena podkladové akcie S_t, realizační cena K, bezriziková úroková míra r, volatilita akcie σ a čas zbývající do realizace $(T - t) =: \tau$. V této části se zaměříme na závislost hodnoty opce na změně jednoho parametru, na tzv. opční charakteristiky (*The Greeks*). Mezi tyto charakteristiky patří již zmíněné delta call Δ_c, které jsme při odvození Black-Scholesovi rovnice využili k vytvoření bezrizikového portfolia. Znalosti těchto charakteristik je tedy především možné využít k tvorbě zajištěných portfolií.

Budeme předpokládat, že opce je evropská, nenese dividendu a je oceněna pomocí Black-Scholesovi rovnice.

3.7.1 Delta

Delta Δ je jedna z nejdůležitějších a nejpoužívaných opčních charakteristik. Je definována jako parciální derivace ceny opce podle ceny podkladové akcie:

$$\Delta_c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t}, \tag{3.73}$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p_t}{\partial S_t}. \tag{3.74}$$

Delta měří závislost hodnoty opce na změně ceny podkladové akcie. Dá se dokázat, že:

$$\Delta_c = \Phi(d_1),\ \Delta_p = \Phi(d_1) - 1 = -\Phi(-d_1) = \Delta_c - 1. \tag{3.75}$$

Ze vztahu $\Delta_p = \Delta_c - 1$ plyne, že změna ceny akcie působí na hodnotu call opce opačně než na hodnotu put opce. S rostoucí cenou podkladové akcie roste cena call opce, proto $0 < \Delta_c < 1$ a klesá cena put opce, proto $-1 < \Delta_p < 0$.

Delta nám také udává zajišťovací poměr (*hedge ratio*). Portfolio, které se skládá z Δ_c akcií a jedné call opce na tuto akcii, bude imunní vůči malým změnám ceny podkladové akcie.

3.7.2 Gamma

Gamma Γ je druhá derivace ceny opce podle ceny podkladové akcie a měří závislost Δ_c a Δ_p na změně ceny podkladové akcie:

$$\Gamma_c = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2}, \tag{3.76}$$

$$\Gamma_p = \frac{\partial \Delta_p}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 p_t}{\partial S_t^2}. \tag{3.77}$$

Pokud je Γ malé, Δ se mění pomalu a není nutné často poměr akcií a opce v našem portfoliu upravovat. Pokud je ale Γ velké, Δ je citlivé na změnu ceny akcie a my budeme nuceni častěji upravovat poměr akcií a opce.

Výpočet Γ je stejný pro call i put opci:

$$\Gamma_c = \Gamma_p = \frac{\varphi(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}, \tag{3.78}$$

kde $\varphi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d^2}{2}}$ je hustota normovaného normální rozdělení $N[0,1]$.

3.7.3 Theta

Theta Θ měří závislost ceny opce na čase zbývajícím do doby expirace $(T-t) =: \tau$. V části 2.3 jsme si uvedli, že hodnota opce se skládá z vnitřní a časové hodnoty a s ubývajícím časem do splatnosti se časová hodnota snižuje. Parametr theta je definována jako záporná derivace ceny opce podle času zbývajícího do realizace:

$$\Theta_c = -\frac{\partial c_t}{\partial \tau}, \tag{3.79}$$

$$\Theta_p = -\frac{\partial p_t}{\partial \tau}. \tag{3.80}$$

Derivováním lze odvodit, že:

$$\Theta_c = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{\tau}} \varphi(d_1) - Kre^{-r\tau}\Phi(d_2). \tag{3.81}$$

Jelikož jsou oba dva členy výše uvedené rovnice záporné, je Θ_c vždy záporná. S ubývající dobou do splatnosti hodnota call opce klesá. Derivováním put-call parity (3.3) podle t a využitím předchozího vztahu dostáváme pro Θ_p rovnici:

$$\Theta_p = \Theta_c + rKe^{-r\tau} = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{\tau}} \varphi(d_1) + rKe^{-r\tau}\Phi(-d_2). \tag{3.82}$$

Theta put opce tedy nemusí být vždy záporná, ale ve většině případech tak tomu je.

3.7.4 Rho

Rho ρ měří závislost změny ceny opce na změně úrokové míry.

$$\rho_c = \frac{\partial c_t}{\partial r}, \tag{3.83}$$

$$\rho_p = \frac{\partial p_t}{\partial r}. \tag{3.84}$$

Derivováním lze opět odvodit, že:

$$\rho_c = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{3.85}$$

$$\rho_p = -K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2). \tag{3.86}$$

Rho call opce je vždy kladné a rho put opce záporné. Pokud tedy poroste bezriziková úroková míra, bude se hodnota call opce zvyšovat. U put opce je tomu přesně naopak.

3.7.5 Vega

Předpokládali jsme, že volatilita σ je konstantní. Již ale víme, že tomu tak není. Volatilita se v reálném světě s časem mění a má tedy smysl měřit závislost změny hodnoty opce na změně volatility. Tato charakteritika se nazývá vega a značí se řeckým písmenem ν:

$$\nu_c = \frac{\partial c_t}{\partial \sigma}, \tag{3.87}$$

$$\nu_p = \frac{\partial p_t}{\partial \sigma}. \tag{3.88}$$

Pro evropskou call i put opci bez dividendy platí:

$$\nu_c = \nu_p = S_t \sqrt{T-t}\, \varphi(d_1). \tag{3.89}$$

Vliv změny volatility akcie na cenu opce je tedy pro call i put opci stejný.

Kapitola 4

Oceňování opcí v systému Wolfram Mathematica® 6.0

Hlavní obsah této kapitoly je na přiloženém CD. Na něm se nachází soubor oce-novaniopci.nb, k jehož spuštění musíme mít na počítači nainstalovaný vynikající matematický software Wolfram Mathematica®. Tento soubor je v textové podobě jako příloha součástí této práce.

V tomto souboru je naprogramovaný Black-Scholesův a binomický model pro evropské opce. Kromě samotného výpočtu pro hodnotu opce jsou také naprogramovány funkce pro výpočet opčních charakteristik a implicitní volatility. Závislost hodnoty opce na různých parametrech lze také zobrazit pomocí grafů. Po každé definici důležité funkce či grafu si způsob volání ukážeme na příkladech.

Kapitola 5

Závěr

Opce jsou v dnešní době nedílnou součástí finančních trhů a obchodování s opcemi nabývá každým rokem na objemu. Pro správné rozhodování při nákupu těchto finančních derivátů a při obchodováním s nimi je nesmírně důležité si danou opci správně a přesně ocenit. Jak jsme si uvedli, k ocenění opcí slouží především Black-Scholesův a binomický model. Oba dva modely jsou při správně zvolených parametrech stejně přesné a kvalitní, což jsme si ukázali na příkladu v kapitole 4. Při správném zvolení parametrů se tedy hodnoty přibližně rovnají. Black-Scholesův model využijeme především u evropských opcí a lze ho také částečně použít u americké call opce. Pro americkou put opci a také call opci je výhodnější použít binomický model. Výhodou tohoto modelu je rozdělení doby života opce na krátké časové úseky, ve kterých sledujeme vývoj kurzů akcie a hodnoty opce a testujeme, zda není vhodná doba pro uplatnění opce.

Literatura

[1] Ambrož, L.: *Oceňování opcí*, 1. vydání, C. H. Beck, Praha, 2002.

[2] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] Hurt, J.: *Výpočetní prostředky finanční a pojistné matematiky LS 2007/2008*, http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼ hurt/VPFPM2008.nb.

[4] Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 5. vydání, Prentice Hall, New Jersey, 2002.

[5] Jílek, J.: *Finanční a komoditní deriváty*, Grada, Praha, 2005.

[6] Kouhout, P.: *Nobelova cena za ekonomii 1997: Oceňování opcí*, Seminář České společnosti ekonomické, Praha, 1998.

[7] Sláčálek, J.: *Blackův-Scholesův model oceňování opcí*, Diplomová práce, FSV UK, Praha, 1998.