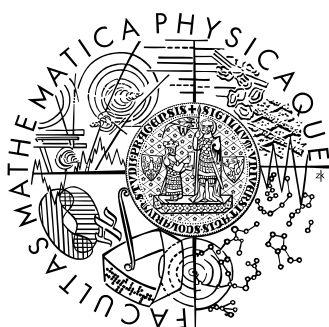


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ing. Milan Valenta

Vliv rizikových parametrů na optimální portfolio

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: matematika, finanční matematika

2008

Děkuji vedoucímu bakalářské práce, panu RNDr. Ing. Miloši Kopovi, Ph.D., za vstřícnou pomoc a rady vedoucí k úspěšnému zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2008

Milan Valenta

Obsah

Úvod	5
1 Jednoperiodický model	6
1.1 Markowitzova teorie portfolia.....	6
1.2 Vztah rizika a výnosu v jednoperiodickém modelu	10
2 Multiperiodický model	12
2.1 Základní model.....	12
2.2 Rozšířený model.....	16
3 Simulace modelů	19
3.1 Data	19
3.2 Výsledky simulací jednoperiodického modelu	21
3.3 Výsledky simulací multiperiodického modelu.....	24
4 Zhodnocení dosažených výsledků a závěr	30
Literatura	31

Název práce: Vliv rizikových parametrů na optimální portfolio

Autor: Ing. Milan Valenta

Katedra: Pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme chování optimálního portfolio s ohledem na vztah investora k riziku. Riziko může být vyjádřeno několika způsoby (rozptyl, VaR, užitkové funkce). Náš přístup vychází z Markowitzovy teorie portfolio a k popisu rizika využívá rozptylu, resp. směrodatné odchylky výnosů portfolio. Pro tvorbu modelů používáme reálná data šestice akcií z Pražské burzy cenných papírů za posledních pět let. Ověříme vliv rizikového parametru u analytického jednoperiodického modelu a zaměříme se na víceperiodický model řešený scénářovým stromem. Pro víceperiodický model volíme délku tří období. Jednotlivé modely se snažíme navrhovat tak, aby i přes svou jednoduchost co možná nejlépe simulovaly reálný trh a na případné rozpory upozorňujeme. Pro popis celého problému a veškeré simulace používáme matematického systému Mathematica 6.

Klíčová slova: optimalizace portfolio, Markowitzův model, víceperiodický model, scénářový strom.

Title: Impact of risk parameters on optimal portfolio

Author: Ing. Milan Valenta

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Supervisor's e-mail adress: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study behaviour of an optimal portfolio with respect to investor's risk attitude. We can express the risk in several ways (variance, VaR, utility functions). Our approach rises from Markowitz's portfolio theory and uses variance of portfolio returns to describe risk. We use historical data from Prague Stock Exchange (PSE) to build our models. There were six stocks which continuously appeared for last five years in PSE. In analytical one period model we verify the impact of risk aversion to optimal portfolio. In multiperiod model we use scenario approach with three periods and observe the behaviour of portfolio when changing risk parameter. Models are developed with respect to its simplicity and credibility at the same time. Eventual differences between reality and model are directly notified. For all calculations and verifications we use simulation system Mathematica 6.

Key words: portfolio optimization, Markowitz model, multiperiod model, scenario tree.

Úvod

„Jistá oběť v současnosti za cenu nejistého zisku v budoucnosti“ [2], i tak lze definovat investici na finančních trzích. Racionálně uvažující investor se od počátků investování snaží současnou oběť a budoucí riziko neboli nejistotu ve smyslu naší definice minimalizovat a zároveň maximalizovat budoucí zisk.

Ačkoliv míra rizika byla dříve pouze intuitivní, pro snížení této budoucí nejistoty se už dávno používalo pravidlo rozdělování majetku do více druhů investic, neboli diverzifikace. V polovině minulého století byly publikovány finančně matematické postupy, které analyticky popisovaly chování finančních trhů. Z našeho pohledu byla nejvýznamnější prací publikace H. Markowitze o teorii portfolia – „*Portfolio Selection*“ [5], za kterou byl později odměněn Nobelovou cenou za ekonomii.

V naší práci se zaměříme, jak už téma napovídá, na vliv rizikového parametru na optimální neboli eficientní portfolio. Jako rizikový parametr budeme používat rozptyl náhodných výnosů na konci investičního období. Existují i další míry rizika jako VaR, CVaR, které se snaží zachytit nejhorší případy, či užitkové funkce, ale z důvodu rozsahu práce se budeme podrobně zabývat právě prvně jmenovaným přístupem.

První kapitola pojedná o klasickém jednoperiodickém Markowitzově modelu. V úvodu této kapitoly zavedeme značení a budeme diskutovat podmínky reálného akciového trhu.

Druhá kapitola pak bude věnována heuristickému postupu optimalizace víceperiodického modelu portfolia pomocí scénářového stromu.

V úvodních dvou kapitolách se zaměříme na teoretický popis modelů, na vztah jejich parametrů a na jejich vliv na optimální řešení. V kapitole třetí uvedeme výsledky simulací modelů a zhodnotíme vliv jednotlivých parametrů a podmínek akciového trhu na výsledné portfolio. K výpočtům použijeme historická data Pražské burzy cenných papírů z let 2003-2008.

Kapitola 1

Jednoperiodický model

1.1 Markowitzova teorie portfolia

Markowitzova teorie portfolia [5] byla publikována již před více než padesáti lety. Přístupy použité v této kapitole jsou tedy známé a tato kapitola bude sloužit jako vstup do teorie portfolia s rizikem měřeným pomocí rozptylu.

Chování finančních trhů může být popsáno následujícími principy, z nichž některé jsou reálnému trhu vlastní, jiné jsou omezující a další se ani v reálném světě objevit nemohou. Pro jednoduchost v následujícím uvedeme některé nejčastější předpoklady a u jednotlivých modelů budeme diskutovat jejich splnění. Přestože se budeme snažit popisovat trh tak, aby co možná nejlépe zobrazoval skutečnost, v některých modelech se s ohledem na jednoduchost nebo časovou náročnost numerického výpočtu objeví i nerealistické chování. V modelech budeme používat následující předpoklady a jejich negace. Předpoklady jsou převzaty z [2], [3], ale zejména z možného chování investorů a reálného finančního trhu.

- a) Investoři se rozhodují výhradně na základě informací založených na očekávaných výnosech a kovarianční matici výnosů.
- b) Mezi portfolii se stejným rizikem (rozptylem) si investor vybere portfolio s maximálním výnosem.
- c) Mezi portfolii se stejným výnosem si investor vybere portfolio s minimálním rizikem (rozptylem).
- d) Aktiva jsou nekonečně dělitelná.
- e) Investiční horizont je jedno časové období.
- f) Neexistují transakční náklady a daně
- g) Existuje jediná bezriziková úroková míra, za kterou si mohou všichni investoři půjčovat nebo mohou půjčovat.

- h) Všechna uvažovaná aktiva jsou okamžitě obchodovatelná.
- i) Prodeje nakrátko nejsou povoleny
- j) Žádný investor nemůže ovlivnit nákupem akcií jejich výnos
- k) Všechny nezbytné informace jsou k dispozici všem investorům ve stejný čas.

V následujících odstavcích zavedeme důležité pojmy a značení. Ve shodě s [2] zavedeme značení jednotlivých veličin. Složky vektorů budeme značit dolním indexem.

Nejprve definujme portfolio jako skupinu N finančních aktiv, v našem případě akcií N společností. Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti zvolme objem počáteční investice jednotkový. Odnormováním pak můžeme přejít k libovolnému objemu financí. Máme tedy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)'$, kde x_i označuje objem investice do i -tého aktiva (váhu). Otázkou diskuse je podmínka nezápornosti x_i , která odpovídá zákazu prodejů nakrátko.

Prodeje nakrátko jsou totiž často regulovány nebo zakázány z důvodu spekulací na pokles akcií. Na reálném trhu, který se chová odlišně než charakterizuje bod j), mohou prodeje nakrátko tzv. „ve velkém“ vyvolat paniku a ovlivnit tak vývoj výnosů. Z burz cenných papírů jsou známy výprodeje, které jsou ovlivněny právě spekulacemi.

V našich výpočetních modelech budeme tedy většinou předpokládat $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, N$, přestože podle [2] v takovém případě nebudeme schopni explicitně vyjádřit optimální řešení. V teoretické části tedy uvedeme řešení optimalizační úlohy s povolením prodejů nakrátko právě z důvodu možnosti vyjádřit řešení.

Označme náhodné výnosy N aktiv jako $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)'$ a očekávaný výnos $\mathbf{r} = E\boldsymbol{\rho} = (r_1, r_2, \dots, r_N)'$. Dále definujme kovarianční matici $\mathbf{V} = (\sigma_{ij})$, kde $(\sigma_{ij}) = \text{cov}(\rho_i, \rho_j)$, $i, j = 1, \dots, N$. Míra rizika aktiva je dána rozptylem σ_i^2 . Vlastnosti matice \mathbf{V} závisí na existenci bezrizikového aktiva. Pokud bezrizikové aktivum připustíme, bude matice pozitivně semidefinitní. V opačném případě bude pozitivně definitní.

Vyjádřeme nyní na základě předchozího očekávaný výnos daného portfolia

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{x} \tag{1.1}$$

a rozptyl, tedy naši míru rizika

$$\sigma_p^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} \tag{1.2}$$

Dříve než začneme hledat optimální řešení, definujme si optimální alokaci počátečních zdrojů, neboli eficientní portfolio. Portfolio s váhami \mathbf{x}^* je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistují jiné váhy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)'$ splňující podmínku $\sum_{n=1}^N x_n = 1$, pro které je rozptyl hodnot výnosů menší nebo roven a očekávaný výnos větší nebo roven, než pro váhy \mathbf{x}^* , přičemž alespoň jedna z nerovností musí být ostrá.

Předchozí definice naznačuje, že investor, chová-li se podle b) a c), hledá právě eficientní portfolio.

V této části se omezíme na modely s povolenými prodeji nakrátko, ze kterých lze explicitně vyjádřit váhy \mathbf{x}^* optimálního portfolio. V části věnující se simulaci modelů pak můžeme některé podmínky přidat nebo vynechat z důvodu numerického výpočtu optimálního portfolio, u kterého nezáleží na vyjádření výsledku v explicitním tvaru.

Optimální portfolio lze najít řešením následujících optimalizačních úloh, se známými parametry.

- 1) $\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{1}' \mathbf{x} = 1$, $\mathbf{r}' \mathbf{x} \geq \mu$, kde μ je minimální požadovaný očekávaný výnos hledaného portfolio.
- 2) $\max_{\mathbf{x}} \mathbf{r}' \mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{1}' \mathbf{x} = 1$, $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} \leq \sigma^2$, kde σ^2 je maximální přijatelný rozptyl výnosů hledaného portfolio.
- 3) $\max_{\mathbf{x}} \lambda \cdot \mathbf{r}' \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{1}' \mathbf{x} = 1$, kde parametr λ udává investorovu averzi vůči riziku.

Další optimalizační úlohou velmi podobnou k již uvedeným, je maximalizace tzv. „Sharpova poměru“. V této úloze jde o maximalizaci výnosu na jednotku rizika, podrobnosti např. v [2]. Lze ukázat [3], že úlohy 1) - 3) jsou při vhodné volbě parametrů ekvivalentní. Zabýváme-li se tedy vlivem rizikového parametru na optimální portfolio neboli řešíme-li úlohu 2), pro volbu rizikového parametru σ^2 dostaneme portfolio \mathbf{x}_σ^* . Z ekvivalence plyne, že můžeme najít takový výnosový parametr μ z úlohy 1), pro který bude optimálního řešení úlohy 1) dosaženo shodnou alokací aktiv, tedy $\mathbf{x}_\mu^* = \mathbf{x}_\sigma^*$. Vztah parametrů σ^2 a μ je přitom jednoznačně určen [3].

Řešení optimalizačních úloh, neboli optimální alokace počátečních zdrojů \mathbf{x}^* , lze nalézt například použitím metody Lagrangeových multiplikátorů a postup uvádí řada publikací [2-6]. Zde se omezíme pouze na výsledky.

Pro portfolio složené pouze z rizikových aktiv s povolením prodejů nakrátko pro uvedené úlohy máme postupně

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mu\beta - \gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} + \frac{\mu\alpha - \beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{x}^* = -\sqrt{\frac{\alpha\sigma^2 - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha\sigma^2 - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}} + \frac{1}{\alpha} \right) \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} + \frac{1 - \lambda\beta}{\alpha} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}, \quad (1.5)$$

kde $\alpha = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}$, $\beta = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$ a $\gamma = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$.

Přidáme-li bezrizikové aktivum, jehož vlastnostem se na reálném finančním trhu blíží například státní dluhopisy, dostaneme modifikace předchozích úloh. N rizikových aktiv x_1, x_2, \dots, x_N doplníme jedním bezrizikovým s váhou x_0 a výnosem r_0 , který je menší než očekávaný výnos libovolného rizikového aktiva. Dimenze portfolia se zvětší o jednotku a tvar portfolia se změní na $\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)'$. Vzhledem k ekvivalenci uvedeme již pouze jeden tvar optimalizační úlohy a jejího řešení.

$$4) \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} \text{ za podmínek } \mathbf{1}'\tilde{\mathbf{x}} = 1, \quad x_0 r_0 + \mathbf{r}'\mathbf{x} \geq \mu,$$

kde μ je minimální požadovaný očekávaný výnos hledaného portfolia.

Optimální alokace aktiv je v tomto případě

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mu - r_0}{2r_0\beta - \gamma - r_0^2\alpha} \mathbf{V}^{-1} (r_0\mathbf{1} - \mathbf{r}) \quad (1.6)$$

pro riziková aktiva a

$$x_0^* = 1 - \frac{\mu - r_0}{2r_0\beta - \gamma - r_0^2\alpha} (r_0\alpha - \beta) \quad (1.7)$$

pro aktivum bezrizikové, přičemž α , β a γ mají stejný význam jako v předchozím.

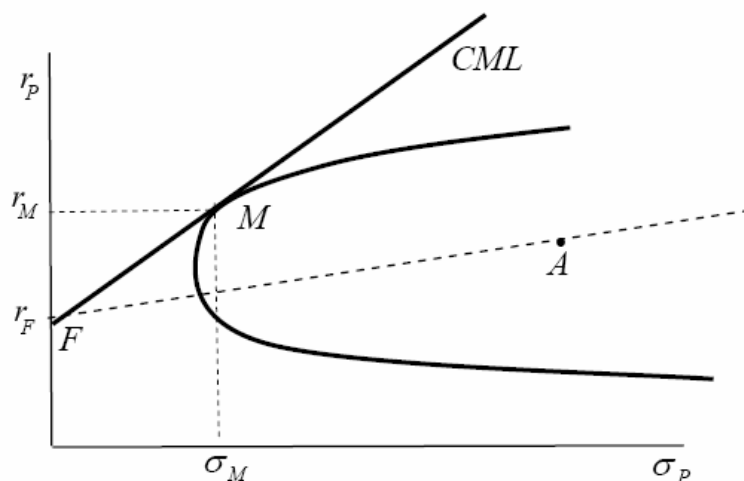
V kapitole 3 věnované simulacím shrneme výsledky použití těchto modelů s bezrizikovým aktivem i bez něj.

1.2 Vztah rizika a výnosu v jednoperiodickém modelu

V této podkapitole rozebereme možné vlivy investorovy averze vůči riziku na výsledné portfolio.

Nejprve vezmeme v úvahu takový přístup, při němž nám na podstoupeném riziku nezáleží. V tomto triviálním případě je řešením nákup portfolia s největším očekávaným výnosem. Naopak, pokud je naším jediným cílem získat portfolio s co nejnižším rizikem bez ohledu na výnos, řešíme úlohu typu výběru aktiva s nejnižším rozptylem.

Chceme-li ale řešit komplexnější úlohy jako jsou 1) - 4) musíme objasnit zejména vztah parametrů μ a σ^2 obsažených v našich optimalizačních úlohách. Pro lepší porozumění vztahu těchto parametrů a vlivu rizikového parametru na optimální portfolio si uvedeme grafické vyjádření níže definované eficientní hranice v tzv. „risk-return“ rovině. Ve finanční a ekonomické literatuře se při popisu vztahu rizika a výnosu ve většině případů uvádí na „rizikové“ ose směrodatná odchylka. Proto se i my výjimečně při následujícím popisu přidržíme této rizikové míry. Také níže definované pojmy jako běžně používaná přímka CML, či tečné portfolio by v grafu s rozptylem na horizontální ose ztrácely smysl.



Obr. 1: Grafické vyjádření vztahu rizika a výnosu [1]

Porozumění grafu (Obr.1) je pro zjištění vlivu rizikového parametru na optimální portfolio nezbytné. Nejprve si zavedme pojem eficientní hranice portfolia tvořeného pouze rizikovými aktivy (EF). Je to konkávní část křivky (Obr.1), na níž leží všechny eficientní alokace rizikových aktiv a je shora omezená umístěním celého objemu počáteční investice do aktiva s maximálním výnosem μ_{\max} . Zdola je omezená kombinací rizikových aktiv s minimálním rizikem, které odpovídá určitý očekávaný výnos μ_{\min} . To

znamená, že nemá smysl hledat řešení s očekávaným výnosem mimo interval $\langle \mu_{\min}, \mu_{\max} \rangle$.

Přidáme-li do našeho portfolia bezrizikové aktivum, změní se eficientní hranice na přímku kapitálového trhu (CML), která je dána hodnotou výnosu r_f bezrizikového aktiva a bodem dotyku M , ležícím na EF portfolia rizikových aktiv. Rovnice CML je

$$r_p = r_f + \sigma_p \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}, \quad (1.8)$$

kde r_p je očekávaný výnos celého portfolia (riziková aktiva i bezrizikové aktivum), r_M je očekávaný výnos tzv. tečného (tržního) portfolia a σ_M^2 je jeho rozptyl. Tečné portfolio udává jak se rozdělí kapitál určený pro riziková aktiva v úloze s bezrizikovým aktivem. Graf (Obr.1) tedy vyjadřuje vztah výnosového a rizikového parametru jak pro pouze riziková aktiva (křivka EF), tak i pro kombinaci s bezrizikovým aktivem (CML). V této souvislosti je třeba zdůraznit, že investor, který se řídí Markowitzovou teorií portfolia, vždy pro podíl financí vložený do rizikových aktiv zvolí alokaci určenou tržním portfoliem. Jeho rozhodnutím je pouze jak velký podíl z celkového objemu vloží do rizikového a jak velký do bezrizikového aktiva. Toto rozhodnutí je závislé na vztahu investora k riziku

Analytický vztah EF vyjadřuje závislost očekávaného výnosu na riziku a lze jej vyjádřit například dosazením řešení (1.4) optimalizační úlohy 2) do podmínky $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{x}^* \geq \mu$ pro požadovaný očekávaný výnos ekvivalentní úlohy 1). Dostaneme tak odmocninou závislost (1.8) výnosového parametru μ na rizikovém parametru σ^2 .

$$\mu = -\sqrt{\frac{\alpha\sigma^2 - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}}\gamma + \left(\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha\sigma^2 - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}} + \frac{1}{\alpha} \right) \beta \quad (1.9)$$

Tuto závislost a rozdíl eficientních hranic pro model s bezrizikovými aktivy i bez něj budeme simulovat v kapitole 3.

Kapitola 2

Multiperiodický model

2.1 Základní model

V této kapitole uvedeme základní analytický víceperiodický model optimalizace portfolia a jeho převedení do scénářového modelu. Pro přehlednost nejprve zavedeme rozšíření značení z předchozí kapitoly.

Uvažujme jako v předchozím N rizikových aktiv s náhodnými výnosy. Délka investice, tj. počet období, je rovna T přičemž na počátku prvního období máme k dispozici majetek o objemu $X_0 = 1$. V tomtéž časovém okamžiku rozdělíme počáteční majetek mezi N aktiv a získáme počáteční portfolio $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,N})'$. Označme dále jako X_t takový objem financí, který bychom dosáhli prodejem všech držených aktiv na počátku období t . Na počátku každého období můžeme zvolit novou alokaci aktiv a portfolio obměnit. Jednotlivé takto získané alokace označíme $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,N})'$, pro $t = 0, 1, \dots, T-1$, kde $x_{t,i}$ je objem investovaný do i -tého aktiva na počátku období t . Výnosy rizikových aktiv v každém období t budeme podle první kapitoly značit vektorem $\mathbf{p}_t = (\rho_{t,1}, \rho_{t,2}, \dots, \rho_{t,N})'$ kde $\rho_{t,i}$ je náhodný výnos i -tého aktiva v období t . Abychom mohli definovat optimalizační úlohu, zavedeme pojem investiční strategie. Množina rozhodnutí $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{T-1}\}$, která v každém časovém období t , danému majetku X_t přiřadí alokaci \mathbf{x}_t , tedy $\pi_t(X_t) = \mathbf{x}_t$, pro $t = 0, 1, \dots, T-1$, se nazývá investiční strategie.

Pro víceperiodický model založený na Markowitzově teorii bude naším úkolem najít investiční strategii, která je řešením jedné z následujících optimalizačních úloh 5), 6). Takové investiční strategii π^* , pro kterou dostaneme v posledním časovém období majetek X_T^* budeme říkat optimální, neboli eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistuje jiná investiční strategie π s konečným majetkem X_T , pro kterou platí $EX_T \geq EX_T^*$ a současně $\text{var } X_T \leq \text{var } X_T^*$, a alespoň jedna z nerovností je ostrá [3].

Pro základní model předpokládáme chování investorů a trhu dle a) – j) s výjimkou bodů e) a g) týkajících se počtu období a bezrizikového aktiva.

Formulujme nyní optimalizační úlohy, které chceme řešit jako analogie k úlohám 1) a 2).

$$5) \min_{\pi} \text{var}(X_T) \text{ za podmínek } \mathbf{1}'\mathbf{x}_0 = 1, EX_T \geq \mu, X_{t+1} = \sum_{i=1}^N \rho_{t,i} x_{t,i}, \text{ skoro jistě (s. j.), } x_{t,i} \geq 0 \text{ pro } t = 0, 1, 2, \dots, T-1, i = 1, 2, \dots, N.$$

kde μ je minimální požadovaný očekávaný výnos po T obdobích.

$$6) \max_{\pi} EX_T \text{ za podmínek } \mathbf{1}'\mathbf{x}_0 = 1, \text{ var } X_T \leq \sigma^2, X_{t+1} = \sum_{i=1}^N \rho_{t,i} x_{t,i}, \text{ s. j., } x_{t,i} \geq 0 \text{ pro } t = 0, 1, 2, \dots, T-1, i = 1, 2, \dots, N$$

kde σ^2 je maximální přijatelný rozptyl objemu majetku po T obdobích.

V diplomové práci [3] byl uveden postup analytického řešení podobného modelu za pomoci sestavení pomocné úlohy. My se ale, zejména z důvodu pozdějšího srovnání s výsledky rozšířeného modelu, pro který by bylo převedení na pomocnou úlohu velice komplikované a výpočetní nároky vysoké, budeme věnovat řešení scénářovým způsobem.

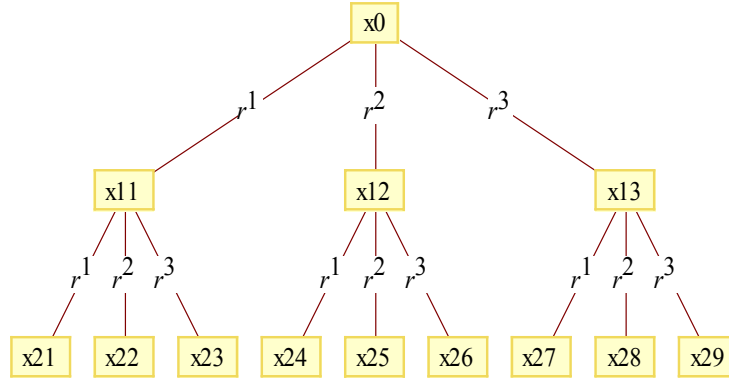
Existuje více způsobů využití scénářů. My jsme si pro další modelování portfolia vybrali jeden z jednodušších, kdy z každého uzlu stromu s výjimkou listů vychází shodný, konečný počet větví (hran). Nejprve ale formálněji definujme scénářový strom.

Množinu uzlů scénářového stromu pro rozhodovací proměnnou a výnosy aktiv označme $U = \left\{ \bigcup_{t=0}^T U_t \right\}$. U_t značí uzly odpovídající období t , ve kterých je alokace rozhodovací proměnné \mathbf{x}_t^s , kde s udává jednu cestu od kořene k listu (scénář). Označme $0 \in U_0$ kořen a U_T množinu listů scénářového stromu. Mějme $u \in U_t$ aktuální uzel, pak jeho předchůdce označme $\tau(u) \in U_{t-1}$.

Tento model scénářového stromu zjednodušuje předchozí model tím, že nahrazuje spojité náhodné veličiny \mathbf{p}_t konečným počtem již deterministických realizací \mathbf{r}_t^u . Výnosy \mathbf{r}_t^u jsou určeny hranami scénářového stromu mezi uzlem u a jeho předchůdcem $\tau(u)$ a složka vektoru \mathbf{r}_t^u označuje výnos i -tého aktiva v období příslušícímu uzlu u .

Náš model využívá rovnoměrného diskrétního rozdělení, tj. pravděpodobnosti scénářů jsou stejné: $\frac{1}{P}$, kde P je počet hran vycházejících z jednoho uzlu. Počet hran P je jak bylo výše uvedeno, stejný pro všechny uzly kromě listů.

Posledním pojmem, který používáme bude objem majetku v kořenu, uzlech a listech scénářového stromu $Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u$, $u \in U_t$, $t = 0, 1, \dots, T$. Pro názornost uveďme jednoduchý scénářový strom pro tři období graficky.



Obr. 2: Scénářový strom pro 3 období

K přechodu na scénářový model musíme ještě zavést očekávaný výnos na konci investičního období

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \quad (2.1)$$

a výběrový rozptyl reprezentující riziko

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \quad (2.2)$$

Nyní můžeme předefinovat optimalizační úlohy 5) a 6) za pomoci scénářového přístupu.

$$7) \min \left[\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \right] \text{ za podmíněk}$$

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \geq \mu, \quad \sum_{i=0}^N x_i^0 = 1, \quad Y^u = \sum_{i=0}^N r_i^u x_i^{\tau(u)},$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u \text{ pro } u \in U \setminus \{0\}, \quad x_i^u \geq 0 \text{ pro } u \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

kde μ je minimální požadovaný očekávaný výnos po T obdobích.

8) $\max \left(\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)$ za podmínek

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \leq \sigma^2, \quad \sum_{i=0}^N x_i^0 = 1, \quad Y^u = \sum_{i=0}^N r_i^u x_i^{\tau(u)},$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u \quad \text{pro } u \in U \setminus \{0\}, \quad x_i^u \geq 0 \quad \text{pro } u \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

kde σ^2 je maximální přijatelný rozptyl objemu majetku po T obdobích.

Řešením těchto optimalizačních úloh již není jediná optimální investiční strategie, ale optimální alokace aktiv v kořenu a uzlech scénářového stromu. Vypočítané optimální řešení úlohy 7) je uvedeno v kapitole 3, kde také budeme diskutovat výsledek. Simulace dalších modelů z této kapitoly lze najít v souborech .nb na příloženém CD.

2.2 Rozšířený model

Pokusme se nyní o modifikaci předchozího modelu z důvodu přiblížení k vlastnostem reálného trhu. V takovém případě je investor nucen za každou investici na začátku období zaplatit tzv. transakční poplatek. Tyto transakční náklady jsou často nezanedbatelnou položkou, a proto by měly být zahrnuty do reálného modelu. Obzvláště markantní je podíl transakčních nákladů při malých transakcích, za které se platí paušální částka.

V našem modelu navážeme na práci [3], kde byly transakční náklady vyjádřeny poměrnou částkou vzhledem k velikosti transakce. Takový model ale nemá vliv na nízkoobjemové transakce, které by na reálném trhu nenastaly. Zavedeme-li platbu konstantní paušální částky C pro transakce nepřevyšující určitý objem, zamezíme tím vzniku výše zmíněných transakcí s malým objemem.

Definujme nyní velikost transakčních nákladů příslušnou k uzlu u (2.3) a kořenu scénářového stromu (2.4)

$$TC^u = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N |x_i^u - r_i^u x_i^{\tau(u)}| \right\}, \quad u \in U_t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (2.3)$$

$$TC^0 = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N x_i^0 \right\} \quad (2.4)$$

Konstanta c vyjadřuje velikost poměrného transakčního poplatku, obvykle 5 – 10 %. Rozšířený model se zavedením transakčních nákladů bude

$$9) \min \left[\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \right] \text{ za podmíněk}$$

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \geq \mu, \quad \sum_{i=0}^N x_i^0 + TC^0 = 1, \quad TC^0 = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N x_i^0 \right\}$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N r_i^u x_i^{\tau(u)} \quad \text{pro } u \in U \setminus \{0\}$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u + TC^u, \quad TC^u = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N |x_i^u - r_i^u x_i^{\tau(u)}| \right\}, \quad x_i^u \geq 0 \quad \text{pro}$$

$$u \in U_t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

kde μ , c , C jsou již známé parametry.

10) $\max \left(\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)$ za podmínek

$$\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \leq \sigma^2, \quad \sum_{i=0}^N x_i^0 + TC^0 = 1,$$

$$TC^0 = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N x_i^0 \right\},$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N r_i^u x_i^{\tau(u)} \quad \text{pro } u \in U \setminus \{0\}$$

$$Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u + TC^u, \quad TC^u = \max \left\{ C, c \sum_{i=0}^N |x_i^u - r_i^u x_i^{\tau(u)}| \right\}, \quad x_i^u \geq 0 \quad \text{pro}$$

$$u \in U_t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

kde σ^2 , c , C jsou již známé parametry.

Výpočetní systém Mathematica je schopen pro takto zadaný model nalézt optimální množinu uzlů - alokací splňující všechny podmínky. Některým numerickým systémům, by ale mohla vadit nediferencovatelnost podmínek daná zahrnutím transakčních nákladů. Naznačíme tedy možnost formulace transakčních nákladů (2.3, 2.4) v tomto duchu.

Absolutní hodnotu rozdílu objemů i -tého aktiva v portfoliu mezi dvěma po sobě jdoucími obdobími odstraníme za pomoci nových nezáporných proměnných b_i^u , s_i^u vyjadřujících nákup, resp. prodej i -tého aktiva příslušející uzlu u . Další podmínky musíme přidat, chceme-li odstranit nediferencovatelnost způsobenou paušálním poplatkem C . Pro TC budeme tedy v následující optimalizační úloze mít skupinu podmínek

$$TC^u \geq c \sum_{i=0}^N (b_i^u - s_i^u), \quad TC^0 \geq c \sum_{i=0}^N b_i^0 \quad (2.5)$$

$$TC^u \geq C, \quad TC^0 \geq C \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} (TC^u - C) \cdot (TC^u - c \sum_{i=0}^N (b_i^u - s_i^u)) &= 0, \\ (TC^0 - C) \cdot (TC^0 - c \sum_{i=0}^N b_i^0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde b_i^u , s_i^u je definováno pomocí vztahu $x_i^u = r_i^u x_i^{\tau(u)} + b_i^u - s_i^u$ pro $u \in U_t$,
 $t = 1, 2, \dots, T-1$, $i = 0, 1, \dots, N$

Definujme nyní rozšířený model pro typ úlohy 8).

$$\begin{aligned}
11) \max & \left(\frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right) \text{ za podmínek} \\
& \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} \left(Y^u - \frac{1}{P^T} \sum_{u \in U_T} Y^u \right)^2 \leq \sigma^2, \quad \sum_{i=0}^N x_i^0 + TC^0 = 1, \\
& Y^u = \sum_{i=0}^N r_i^u x_i^{\tau(u)} \text{ pro } u \in U \setminus \{0\} \\
& Y^u = \sum_{i=0}^N x_i^u + TC^u, \quad x_i^u = r_i^u x_i^{\tau(u)} + b_i^u - s_i^u, \quad TC^u \geq c \sum_{i=0}^N (b_i^u - s_i^u), \quad TC^u \geq C, \\
& (TC^u - C) \cdot (TC^u - c \sum_{i=0}^N (b_i^u - s_i^u)) = 0, \quad b_i^u \geq 0, \quad s_i^u \geq 0, \quad b_i^u s_i^u = 0, \quad x_i^u \geq 0 \\
& \text{pro } u \in U_t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1, \quad i = 0, 1, \dots, N, \\
& TC^0 \geq c \sum_{i=0}^N b_i^0, \quad TC^0 \geq C, \quad (TC^0 - C) \cdot (TC^0 - c \sum_{i=0}^N b_i^0) = 0 \text{ pro} \\
& i = 0, 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

kde σ^2 , c , C jsou opět již známé parametry.

V následující kapitole provedeme rozbor řešení optimalizačních úloh 7) - 10), která jsme obdrželi simulací. Budeme diskutovat vliv rizikového parametru na alokace v jednotlivých uzlech scénářového stromu, vliv velikosti parametrů c a C transakčních nákladů na výnos, resp. rozptyl konečného majetku.

Kapitola 3

Simulace modelů

3.1 Data

Po teoretickém rozboru optimalizačních úloh můžeme nahlédnout na výsledky simulací modelů, založených na konkrétních datech. Celá kapitola 3 je věnována simulacím jedno- i víceperiodických modelů s použitím reálných dat, proto se nejprve budeme zabývat vstupy našich simulací, tedy použitými daty.

Většina dat pochází z prostředí Pražské burzy a byla získána volně přes internetový portál Pražské burzy, www.pse.cz. Každý potenciální investor si zde může stáhnout denní data všech obchodovaných cenných papírů na burze a to až několik let zpětně. Z těchto dat, která obsahují ceny jednotlivých cenných papírů lze pomocí vztahu

$$r_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad (3.1)$$

vypočítat výnosy za období délky 1. Pro naše účely jsme zvolili jako jednotkové období jeden kalendářní rok, resp. období mezi prvními obchodními dny na burze po začátku roku dvou po sobě následujících let. Stejně tak a bez jakýchkoliv změn lze použít libovolnou jinou délku období, pro kterou jsou data k dispozici. Data, která jsme pro výpočet použili, byla data z let 2003-2008. Měli jsme tedy k dispozici pět hodnot výnosů pro akcie každé společnosti. Počet společností $N = 6$ byl zvolen tak, aby každá akcie byla obchodována na Pražské burze v celém sledovaném období. Tuto podmínku splňovaly akcie pouze šestice společností. Jedná se o ČEZ, Erste Bank, Komerční Bank, Philip Morris, Pražská Energetika a Unipetrol.

Nevýhodou hodnot výnosů získaných z cen akcií na pražské burze je nezapočítání případné dividendy, která se na ceně akcie nijak neprojeví, ale měla by být uvažována jako součást výnosu. Tato dodatečná data jsme získali z výročních zpráv jednotlivých společností jejichž akcie tvořily naše portfolio a upravili tak hodnoty výnosů podle vztahu

$$r_t = \frac{P_{t+1} - P_t + D_t}{P_t} \quad (3.2)$$

Za pomoci těchto dat jsme již mohli modelovat optimalizační úlohy, resp. vyjádřit výnosy, kovarianční matici a pro víceperiodický model vygenerovat scénářový strom.

V následující tabulce uvedeme použítá data a shrneme jejich nejzákladnější charakteristiky. Při pohledu na tuto tabulku je zjevné, že výnosy v posledních letech byly velmi vysoké u všech sledovaných společností. Tento fakt snižuje vypovídací hodnotu našich závěrů vyplývajících ze simulací. Zbývá jen dodat, že bezrizikové aktivum bylo uvažováno s ročním výnosem 5 %.

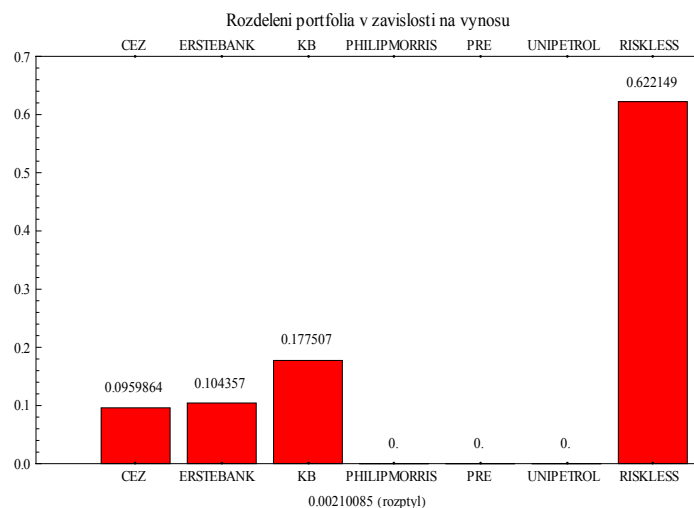
	2003	2004	2005	2006	2007	průměr	rozptyl
ČEZ	0,6395	1,4214	1,1616	0,3543	0,4057	0,6395	0,2242
Erste Bank	0,6149	-0,6149	0,1749	0,1818	-0,2017	0,6149	0,2139
Komerční Banka	0,1709	0,4463	0,0682	-0,0252	0,4441	0,1709	0,0467
Philip Morris	0,5027	0,1875	0,1559	-0,3595	-0,1875	0,5027	0,1147
Unipetrol	0,5453	0,2673	0,4963	0,0468	0,3853	0,5453	0,0399
Pražská Energetika	0,9494	0,4430	1,3826	0,0188	0,3787	0,9494	0,2850

Tab. 1: Historická data použitá pro výpočty a simulace

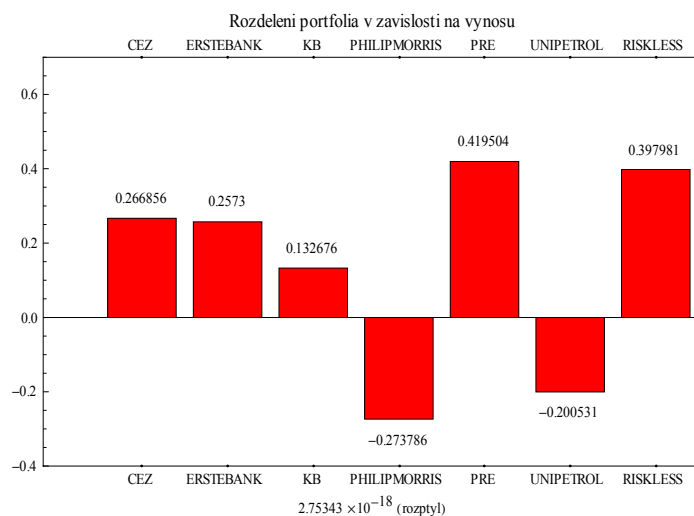
3.2 Výsledky simulací jednoperiodického modelu

Od teorie jsme se v této kapitole dostali k simulacím modelů. Nejříve shrneme výsledky jednoperiodického modelu a to jak pro případ pouze rizikových aktiv, tak i v kombinaci s bezrizikovým aktivem. Výsledkem každého výpočtu je optimální alokace aktiv v závislosti na hodnotě požadovaného výnosu nebo hodnotě rozptylu.

V příloženém CD v souboru “Markowitz_rocni.nb“ jsou výsledky zpracované v přehledné podobě, jak ukazují ilustrační obrázky (Obr. 3, 4). Pro hodnoty parametrů, požadovaných výnosů resp. rozptylů v rozpětí 0 – 0,8 resp. 0 – 0,25, můžeme sledovat v krocích 0,05 resp. 0,01 změny optimální alokace portfolia vlivem změn těchto parametrů.

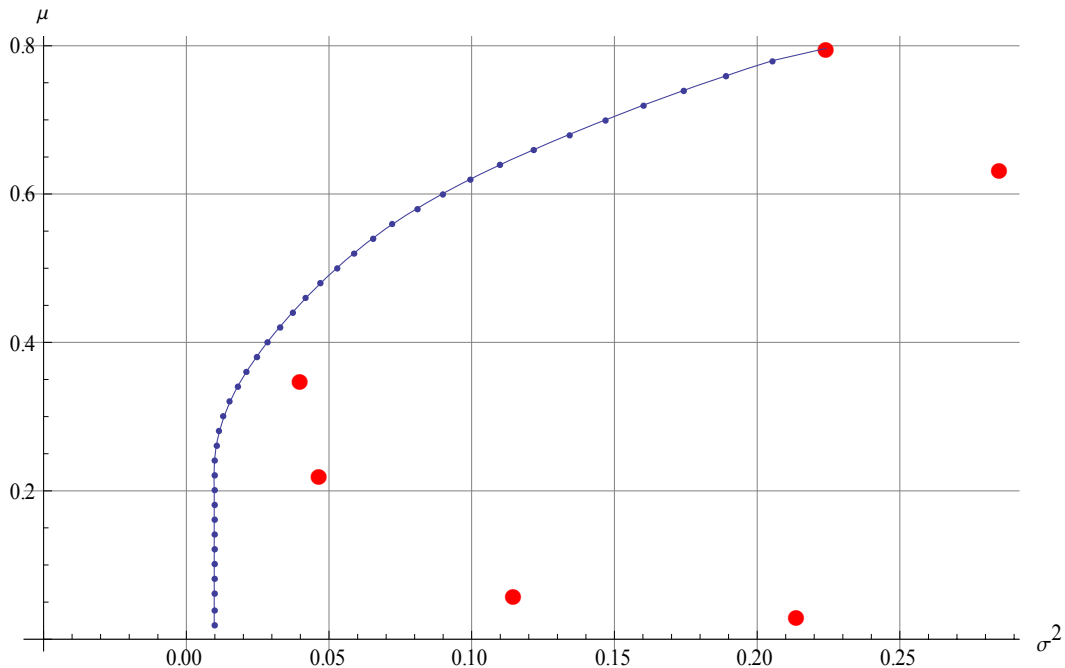


Obr. 3: Alokační aktiv pro očekávaný výnos 15%

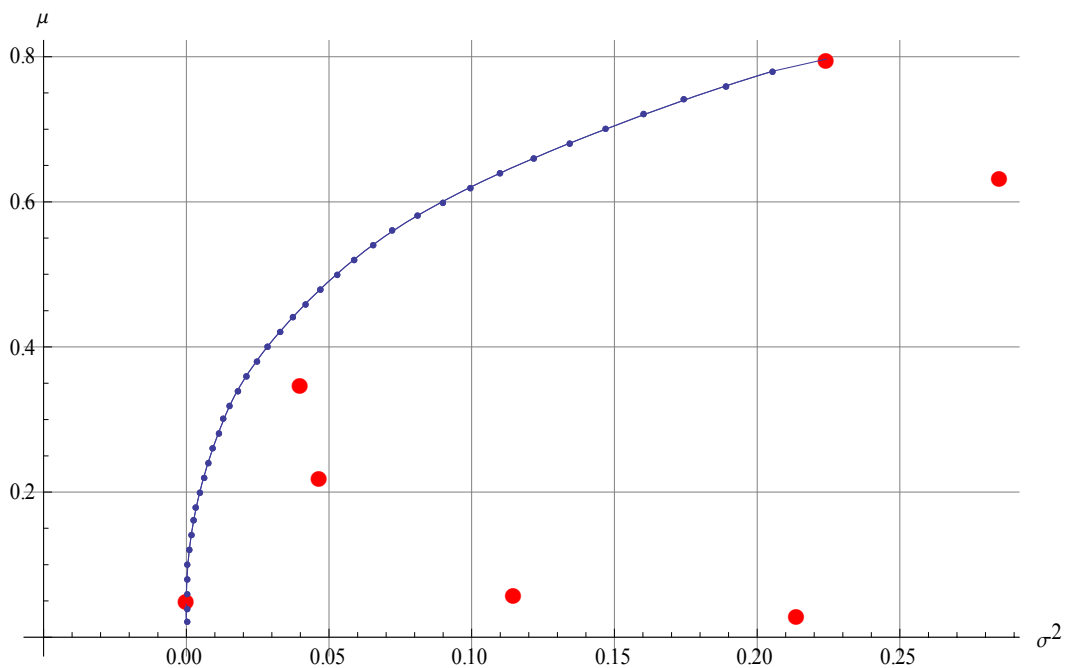


Obr. 4: Alokační aktiv pro očekávaný výnos 15% s povolením prodejů nakrátko

Tyto výsledky lze také interpretovat, jak bylo v první kapitole zmíněno, jako křivka EF. Grafy (Obr. 5, 6) vyjadřují vztah výnosu a rizika pro portfolio rizikových aktiv a kombinaci rizikových aktiv a aktiva bezrizikového.



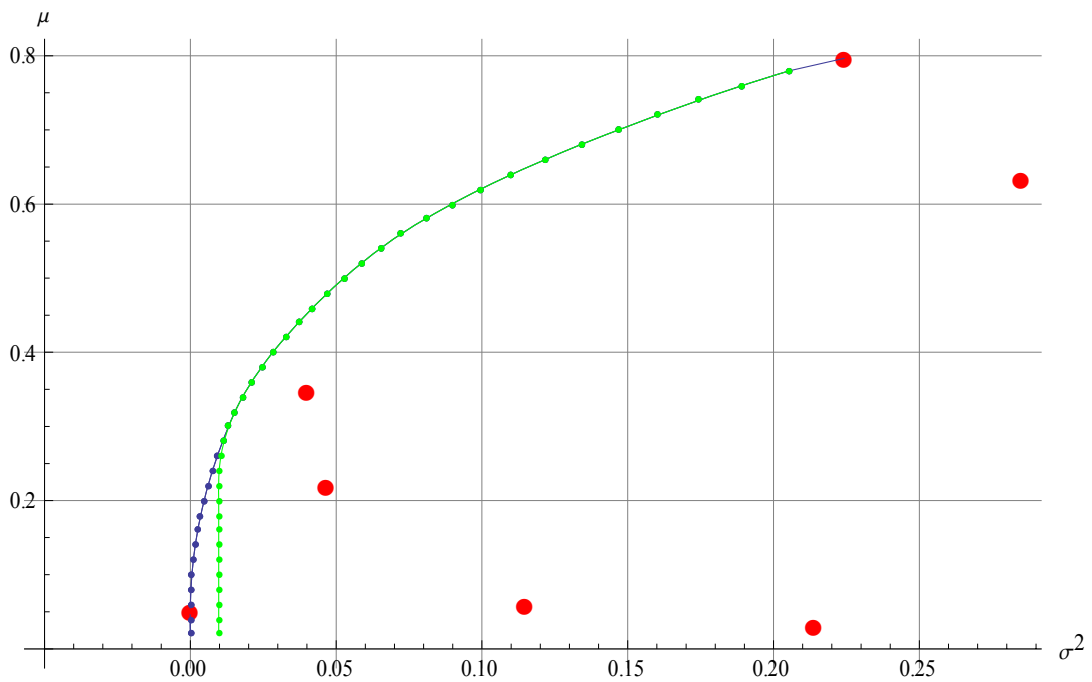
Obr. 5: Simulace vztahu rozptylu (rizika) a výnosu pro portfolio složené pouze z rizikových aktiv



Obr. 6: Simulace vztahu rizika a výnosu pro portfolio složené z rizikových aktiv v kombinaci s bezrizikovým aktivem

Následující graf (Obr. 7) sdružuje předchozí a je na něm viditelný rozdíl plynoucí z možnosti investovat do bezrizikového aktiva. Jednotlivé křivky patří alokacím s rizikovými aktivy (zeleně) a alokacím s rizikovými aktivy i

s bezrizikovým aktivem (modře). Červené body reprezentují alokaci celého objemu financí do jednoho aktiva. Povšimněme si, že aktivum s nejvyšším výnosem a bezrizikové aktivum leží přímo na eficientní hranici.



Obr. 7: Rozdíl eficientní hranice pro portfolio s bezrizikovým aktivem a portfolio pouze s rizikovými aktivy

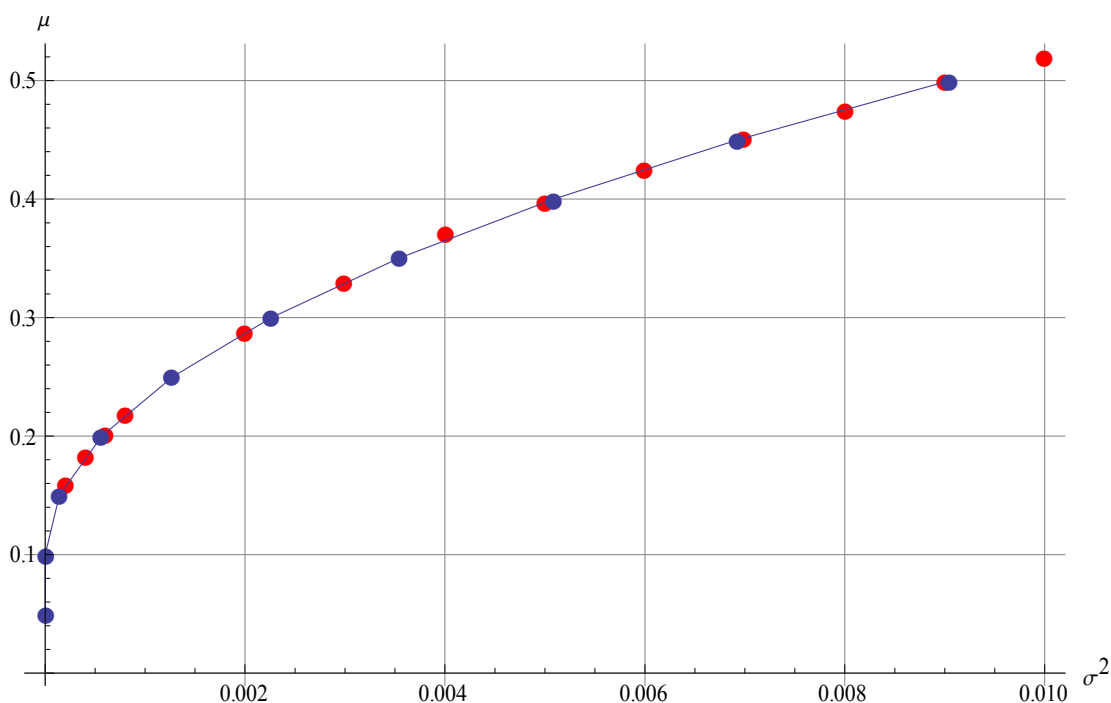
Hranice eficiency jsme simulovali jak pro úlohu 1) změnami požadovaného výnosu, tak také pro ekvivalentní úlohu 2), u které jsme měnili rizikový parametr. Výsledkem bylo očekávané zjištění, že hranice eficiency pro oba typy úloh splývají.

3.3 Výsledky simulací multiperiodického modelu

Dříve než přikročíme k prezentaci výsledků simulací víceperiodického modelu, věnujme se konstrukci scénářového stromu. V kapitole 2 jsme sestrojili model, který obsahuje deterministické vektory výnosů. Hrany vycházející z jednotlivých uzlů reprezentují vždy stejnou operaci násobení portfolia výchozího uzlu jednoznačně určeným výnosovým vektorem. Výnosových vektorů je pět a jsou reprezentovány výnosy minulých pěti let (viz tabulka historických dat).

Jde o poněkud naivní metodu, která vede ke scénářovému stromu, jehož scénáře jsou odvozeny od minulých průběhů výnosů. Rozhodně tedy ani počtem větví ani charakteristikami výnosů nepokrýváme všechny možné scénáře. Pro ověření funkčnosti modelů a budoucí vylepšení je však tento přístup postačující.

Nyní přejdeme k výsledkům simulací. Nejprve uvedeme simulace vztahů parametrů našich modelů pro základní a rozšířený model, poté se budeme zabývat vlivem dodatečných parametrů c a C modelu, který zahrnuje transakční náklady a nakonec uvedeme tabulky s alokacemi aktiv pro konkrétní úlohy a výsledné scénářové stromy (viz příloha)

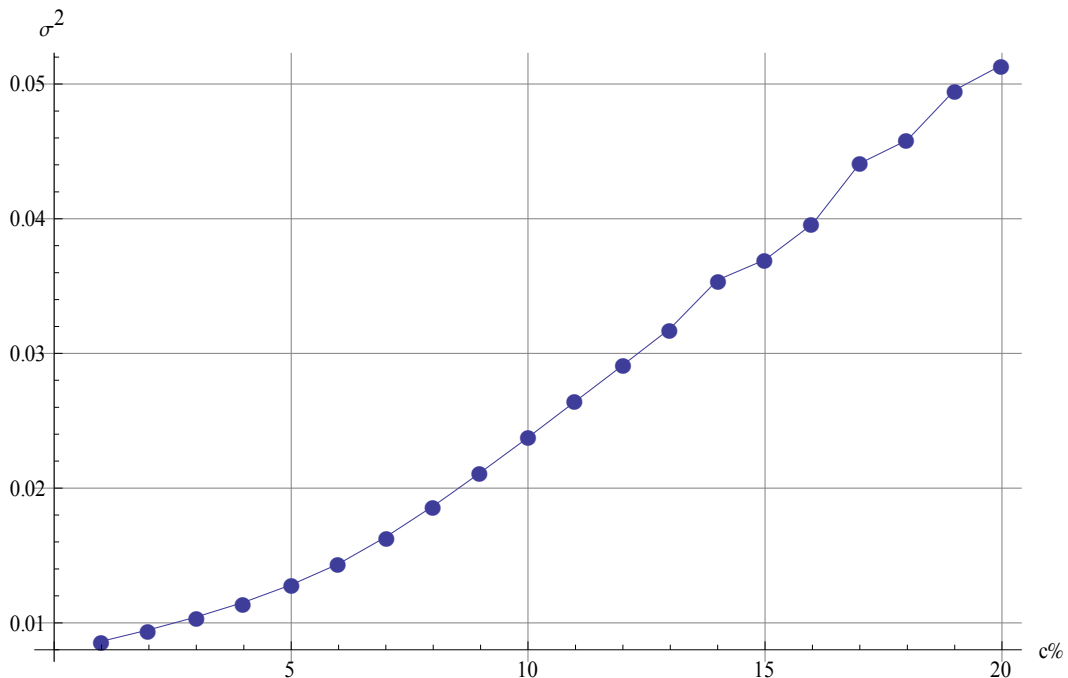


Obr. 8: Srovnání hranice optimality pro modely s bezrizikovým aktivem jako řešení úloh typu 9) a 10)

Protože v této práci zjišťujeme vliv rizikového parametru na portfolio, tedy i vztah rizikového parametru a výnosu portfolio, simulovali jsme opět křivku EF pro optimalizační úlohy 9) a 10).

Nejprve se zabýváme křivkou (Obr. 8). Tvar závislosti očekávaného výnosu na rozptylu je podobný pro eficientní hranici jednoperiodického modelu. Potvrdilo se, že eficientní hranice pro model z úlohy 9) (modré body) a úlohy 10) (červené body) kopírují stejnou křivku. Z důvodu velké výpočetní náročnosti jsme však spočítali jen několik bodů hranice optimality pro každou z úloh a spojili je lomenou čarou. Nemůžeme tak vyloučit, že v některých souřadnicích se mohou hodnoty lišit.

Dalšími výsledky (Obr. 9 až 12), které se již týkají rozšířeného modelu, jsou závislosti rizikového parametru a výnosu na velikosti parametrů c , C transakčních nákladů.

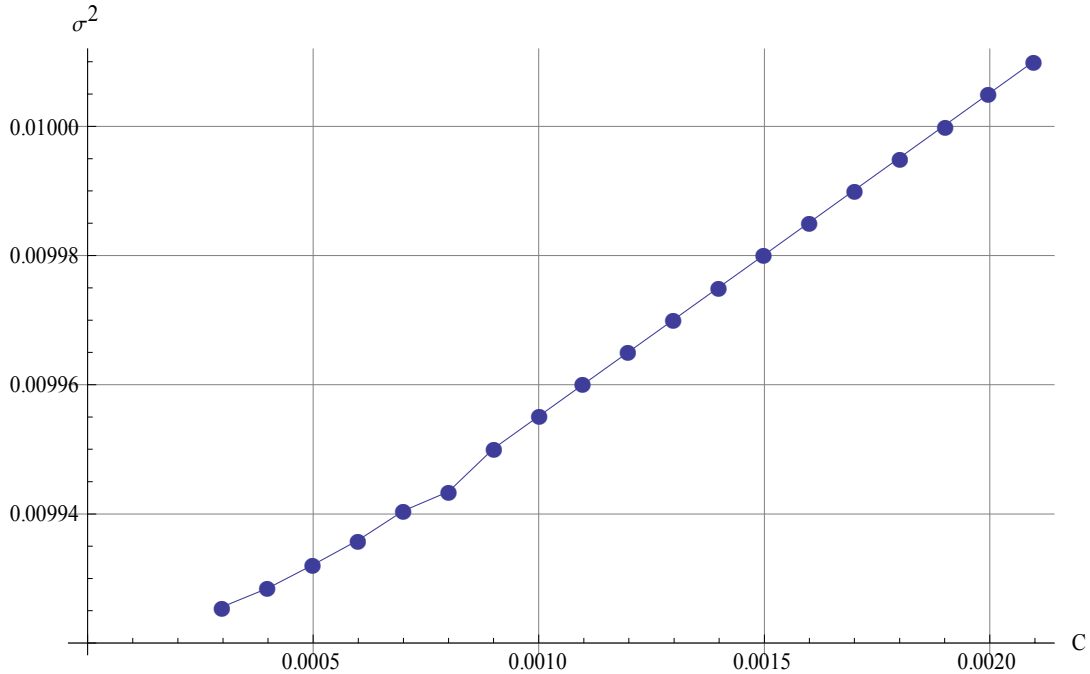


Obr. 9: Závislost rozptylu konečného majetku na velikosti poměrného transakčního poplatku c pro úlohu 9), očekávaný výnos 50% a $C = 0,0005$.

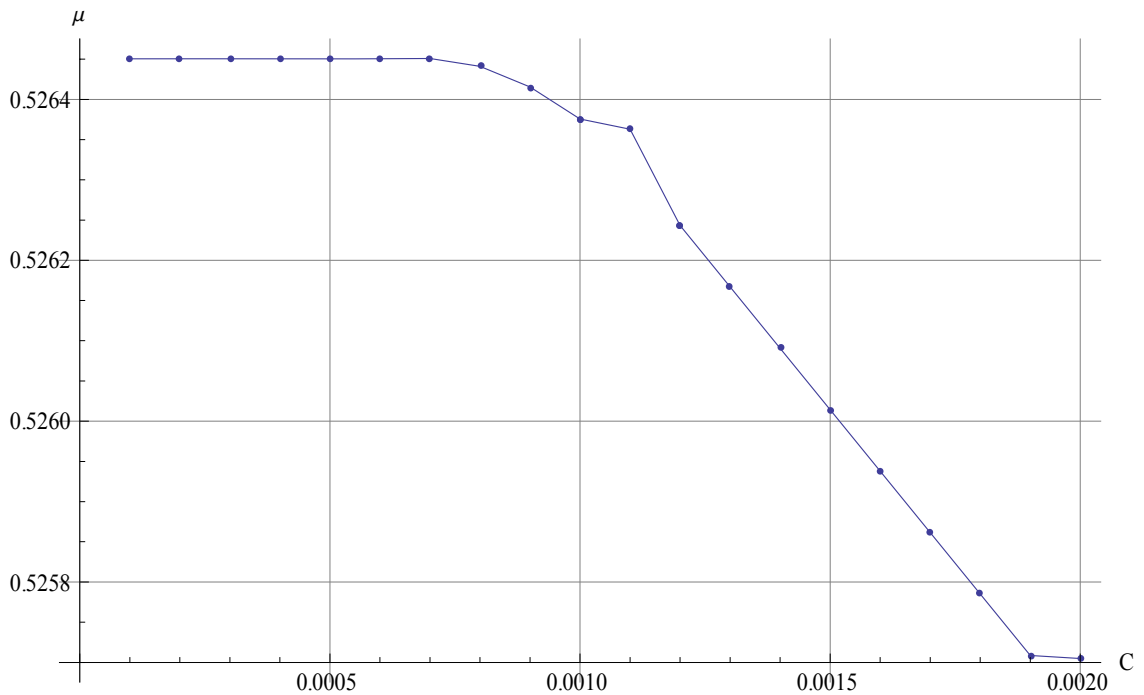
Parametry jsme měnili v mezích, které lze na reálném finančním trhu očekávat, tj. c od 1 % do 20 %, C od 0.3 % do 2.1 % z počáteční částky, což by pro investici 1000000 byl paušální poplatek za transakci 300 až 2100. Při sledování uvedených grafů zjistíme, že zvyšování hodnot parametrů c a C má celkem logický vliv na rozptyl i výnos.

Podíváme-li se na trend jednotlivých lomených čar, uvidíme, že se zvyšováním obou parametrů se rozptyl zvyšuje a očekávaný výnos snižuje. Jak je ale z grafů vidět, na absolutní hodnoty výnosu a rozptylů mají změny parametrů transakčních nákladů v našem rozsahu rozdílný vliv. Zatímco změna rozptylu resp. očekávaného výnosu při zvýšení procentní sazby c z 1 % na 20 % se pohybuje v řádu setin, resp. jednotek procent, zvýšení paušální částky se

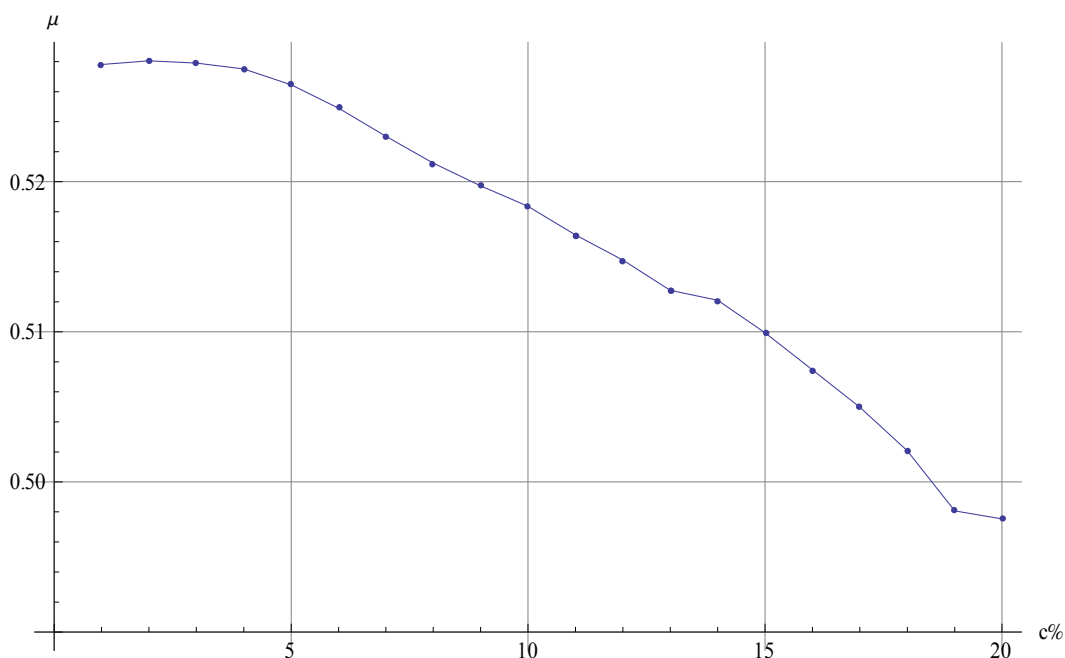
na změně rozptylu resp. očekávaného výnosu příliš neprojeví. To je dáno tím, že absolutní hodnota paušálního poplatku je v porovnání s hodnotami poměrných transakčních nákladů zanedbatelná. Vliv paušálního poplatku by se více projevil při menších objemech investic.



Obr. 10: Závislost rozptylu konečného majetku na velikosti paušálního poplatku C v transakčních nákladech pro úlohu 9), očekávaný výnos 50% a $c = 0,05$.



Obr. 11: Závislost střední hodnoty objemu konečných výnosů na velikosti paušálního poplatku C v transakčních nákladech pro úlohu 10), $\sigma^2 \leq 0,01$ a $c = 0,05$.



Obr. 12: Závislost střední hodnoty objemu konečných výnosů na velikosti poměrného transakčního poplatku c pro úlohu 10), $\sigma^2 \leq 0,01$ a $C = 0,0005$.

Nyní přistoupíme k samotným scénářovým stromům a alokacím aktiv. Uvedeme zde výsledky pro model základní bez bezrizikového aktiva a rozšířený. V jednotlivých řádcích tabulek (Tab. 2 a 3) jsou uzly scénářových stromů, které jsme pro snazší orientaci uvedli v příloze.

Scénářové stromy a jim odpovídající tabulky alokací jsou výsledkem optimalizační úlohy 9) s parametry $\mu = 0,5$, $c = 0,05$, $C = 0,0005$ pro portfolio s bezrizikovým aktivem (Tab. 3) a bez něj (Tab. 2).

Nyní uveďme postup, jakým se potenciální investor může řídit, chce-li využít našich výsledků a na konci třetího období dosáhnout očekávaného zhodnocení 50 %. Počáteční alokaci zvolí podle prvního uzlu. Po uplynutí prvního období zjistí jaký byl skutečný vektor výnosů za toto období a který vektor výnosů ze scénářového stromu mu nejvíce odpovídá. Např. metodou nejmenších čtverců vybere jednu z pěti hran scénářového stromu a přeskupí svoje aktiva podle vybraného uzlu. Tímto způsobem pokračuje až do posledního období.

Alokace v jednotlivých uzlech scénářového stromu, který je výsledkem optimalizační úlohy 7, jsou seřazeny do tabulky (Tab. 2). Rozptyl hodnot konečného objemu financí je 0,0216992 a očekávaný výnos je 0,63732. Narazili jsme tedy zřejmě na dolní hraniční bod křivky EF.

Další tabulka (Tab. 3) uvádí analogické výsledky pro úlohu 9), kdy bylo dosaženo rozptylu 0,0005994 a očekávaný výnos byl výnosem z podmínky, tedy 0,5. Rozdíly ve velikostech rizikového parametru jsou nejlépe patrné přímo z pohledu na hodnoty majetku na konci investičního období, tedy v listech obou výsledných scénářových stromů v příloze.

období	ČEZ	Erste Bank	Komerční Banka	Philip Morris	Unipetrol	Pražská Energetika
0	0	0,2727	0,6648	0,0134	0	0
1	0	0,3961	0,8265	0	0	0
1	0,1816	0,3365	0,5444	0	0	0
1	0,2273	0,3022	0,4935	0	0	0
1	0,3045	0,2549	0,3879	0	0	0
1	0,0181	0,3589	0,7981	0	0	0
2	0	0,5395	0,9594	0,0888	0	0
2	0,1452	0,4011	0,7906	0	0	0
2	0,1452	0,4014	0,7906	0	0	0
2	0,2409	0,3516	0,657	0	0	0
2	0	0,493	1,0011	0	0	0
2	0,0004	0,4443	0,9954	0	0	0
2	0,1389	0,3975	0,8009	0	0	0
2	0,1243	0,4022	0,8214	0	0	0
2	0,3381	0,3049	0,5193	0	0	0
2	0,1916	0,3781	0,7272	0	0	0
2	0,0529	0,4258	0,9221	0	0	0
2	0,1197	0,4045	0,8276	0	0	0
2	0,1273	0,4015	0,8171	0	0	0
2	0,3669	0,291	0,4784	0	0	0
2	0,2373	0,3599	0,6629	0	0	0
2	0,1486	0,3925	0,7878	0	0	0
2	0,1143	0,4062	0,8351	0	0	0
2	0,1419	0,3965	0,7966	0	0	0
2	0,4361	0,2588	0,3779	0	0,01	0
2	0,3334	0,3157	0,5201	0	0,01	0
2	0	0,519	1,0041	0	0	0
2	0,1576	0,3939	0,7734	0	0	0
2	0,1843	0,3757	0,7398	0	0	0
2	0,2982	0,3245	0,5757	0	0	0
2	0	0,4504	0,9971	0	0	0

Tab. 2: Výsledné alokace – optimalizační úloha 9)
portfolio bez bezrizikového aktiva

období	ČEZ	Erste Bank	Komerční Banka	Philip Morris	Unipetrol	Pražská Energetika	Bezrizikové aktivum
0	0,3556	0,2048	0,2725	0	0,1096	0,009	0
1	0,0492	0,0404	0,0583	0	0,0118	0	1,1616
1	0	0	0	0,0001	0	0	1,3691
1	0	0	0	0,0001	0	0	1,3689
1	0,2861	0,2241	0,3315	0	0,0996	0	0,1552
1	0,1999	0,1733	0,2639	0	0,0527	0	0,4928
2	0,0004	0,0008	0,0015	0	0	0	1,4273
2	0	0	0	0	0	0	1,4311
2	0	0	0	0	0	0	1,4309
2	0,031	0,0362	0,0618	0	0	0	1,2656
2	0,0178	0,024	0,043	0	0	0	1,324
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0	0	0	0	0	0	1,4314
2	0	0	0	0	0	0	1,4313
2	0	0	0	0	0	0	1,4313
2	0	0	0	0	0	0	1,4313
2	0	0	0	0	0	0	1,4313
2	0,004	0,0043	0,0072	0	0,0002	0	1,4101
2	0	0	0	0	0	0	1,4355
2	0	0	0	0	0	0	1,4356
2	0,1915	0,2141	0,3415	0	0	0	0,4682
2	0,1023	0,1409	0,2546	0	0	0	0,807
2	0	0	0	0	0	0	1,433
2	0	0	0	0	0	0	1,4341
2	0	0	0	0	0	0	1,4315
2	0,1243	0,1571	0,2658	0	0	0	0,7373
2	0,069	0,0942	0,1698	0	0	0	1,013

Tab. 3: Výsledné alokace – optimalizační úloha 9)
portfolio s bezrizikovým aktivem

Kapitola 4

Zhodnocení dosažených výsledků a závěr

V této závěrečné práci jsme zkoumali výsledky jednoperiodického Markowitzova modelu teorie portfolia a využili scénářového přístupu k řešení víceperiodického modelu. Oproti citované práci [2] jsme zavedli jiný model transakčních nákladů a použili k výpočtům systém Mathematica.

Pro jednoperiodický model jsme určili eficientní hranici pro portfolio s bezrizikovým aktivem i bez něj a simulací modelů zjišťovali prostor pro snížení rizika přidáním bezrizikového aktiva. Porovnali jsme alokace aktiv pro modely s povolenými a zakázanými prodeji nakrátko.

Ve víceperiodickém modelu jsme navrhli nový přístup k transakčním nákladům přidáním paušálního poplatku C . V třetí kapitole jsme pro běžné hodnoty parametrů c , C zjistili pouze nepatrný vliv velikosti transakčních nákladů na očekávaný konečný výnos a rozptyl. Modely pro více období jsme ve všech případech doplnily podmínkou zakazující prodeje nakrátko.

Počáteční nadšení z možnosti využití univerzálního softwaru Mathematica vystřídaly rozpaky z hardwarové náročnosti při výpočtech. Pro 3 období, (úrovně scénářového stromu) a 5 hran vycházejících z každého uzlu, což znamená 125 scénářů se pro 7 druhů aktiv doba výpočtu optimálního stromu na PC s procesorem Centrino 1,6GHz, 512MB RAM, přiblížila deseti hodinám. Podle Charamzy [3] byl software GAMS schopen podobně složitou optimalizační úlohu vyřešit v čase desetkrát kratším. Nespornou výhodou programu Mathematica ale zůstává jeho univerzálnost a možnost i graficky prezentovat výsledky práce.

Zajímavým pokračováním práce by mohlo být sestavení „realističtějšího“ scénářového stromu s využitím více period a více scénářů. Zejména pro konstrukci scénářů může být použito několik lepších metod, které přiblíží scénářový strom více realitě.

Literatura

- [1] Dědek, O.: *Teorie a řízení portfolia*, Studijní text k předmětu Řízení finančních rizik, Institut ekonomických studií, Fakulta sociálních věd University Karlovy, 2002
- [2] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [3] Charamza, P.: *Zobecnění Markowitzova modelu*, Diplomová práce MFF-UK, Praha, 2004
- [4] Kim, S., J., Boyd, S.: *Robust Efficient Frontier Analysis with a Separable Uncertainty Model*, Focus Center Research Program Center for Circuit & System Solutions, 2007
- [5] Markowitz, H., M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New York, Wiley, 1959
- [6] Steinbach, M., C.: *Markowitz Revisited: Single-Period and Multi-Period Mean-Variance Models*, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, 1999

Seznam příloh:

Příloha 1: Rozhodovací strom pro úlohu 9), portfolio bez bezrizikového aktiva

Příloha 2: Rozhodovací strom pro úlohu 9), portfolio s bezrizikovým aktivem