

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**



Věra Davidová

### **Modely úrokových měr**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Andrea Karlová

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

2008

Chtěla bych na tomto místě velmi poděkovat vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Andree Karlové nejen za její ochotu při hledání odpovědí na mé otázky a další cenné informace, ale také za poskytnutí studijních materiálů. Můj dík patří v neposlední řadě mým rodičům za jejich podporu při mém studiu a tvorbě této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4. srpna 2008

Věra Davidová

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Základy stochastické analýzy pro modely úrokových měř</b>	<b>6</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	6
1.2 Wienerův proces . . . . .	7
1.3 Itôův kalkulus . . . . .	8
1.4 Kvadratická variace . . . . .	10
<b>2 Základní pojmy v teorii oceňování</b>	<b>12</b>
2.1 Úročení, diskontování a základní typy úrokových měř . . . . .	12
2.2 Ekvivalentní martingalová míra a neexistence arbitráže . . . . .	15
<b>3 Oceňování úrokových derivátů pomocí Hull-Whiteova modelu</b>	<b>19</b>
3.1 Ornstein-Uhlenbeckův proces . . . . .	19
3.2 Řešení stochastické diferenciální rovnice Ornstein - Uhlenbeckova procesu . . . . .	20
3.3 Hull-Whiteův model . . . . .	22
3.3.1 Rozšíření Vašíčkova modelu . . . . .	23
3.3.2 Oceňování opcí rozšířeným Vašíčkovým modelem . . . . .	26
3.3.3 Rozšíření CIR modelu . . . . .	28
3.3.4 Časová struktura úrokových měř v Hull-Whiteově modelu . . . . .	29
3.3.5 Konstrukce trinomických stromů úrokových měř . . . . .	30
<b>Literatura</b>	<b>36</b>
<b>A Zdrojové kódy k trinomickým stromům</b>	<b>37</b>
A.1 Výpočet první fáze . . . . .	37
A.2 Výpočet druhé fáze . . . . .	38

**Název práce:** Modely úrokových měř

**Autor:** Věra Davidová

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí bakalářské práce:** Mgr. Andrea Karlová

**e-mail vedoucího:** karlova@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Modelování budoucího vývoje úrokových měř je jednou ze základních oblastí finanční matematiky. Existuje celá řada modelů úrokových měř. Předmětem této práce je zaměřit se na Hull-Whiteův model, který patří k nejjednodušším jednofaktorovým modelům. Používá se k oceňování úrokových derivátů jako jsou např. evropské opce na diskontované dluhopisy. V Hull-Whiteově modelu se vývoj úrokové míry řídí Ornstein-Uhlenbeckovým procesem, který má pro modelování časové struktury úrokových měř velmi důležité vlastnosti. Cílem této práce je popsat Hull-Whiteův model nejen jako nástroj k oceňování, ale také z teoretického hlediska jako velmi zajímavý stochastický proces.

**Klíčová slova:** Hull-Whiteův model, Ornstein-Uhlenbeckův proces, úroková míra

**Title:** Short rate interest rate models

**Author:** Věra Davidová

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** Mgr. Andrea Karlová

**Supervisor's e-mail address:** karlova@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** Modelling the future development of the interest rates is one of the fundamental fields in financial mathematics. There are many kinds of models of interest rates. The subject of this thesis is to focus on Hull-White model. This model is used for pricing interest rate financial derivatives such as European options on discount bonds. The dynamics of the interest rate in Hull-White model follows Ornstein-Uhlenbeck process, whose characteristic is very important in modelling the term structure of interest rates. The goal of this work is to describe Hull-White model not only as a pricing instrument but also as a very interesting stochastic process in a theoretical way.

**Keywords:** Hull-White model, Ornstein-Uhlenbeck process, interest rate

# Úvod

Při modelování problémů z reálného světa se velmi často setkáváme s jevy, jejichž vývoj v čase není deterministicky dán a tudíž je nemůžeme plně předvídat. Jedním z těchto jevů je také nejistý vývoj úrokové míry. Díky snaze mnoha odborníků z oblasti finanční matematiky však existují různé modely úrokových měr, které se snaží popsat budoucí vývoj úrokové míry pomocí stochastických diferenciálních rovnic.

Prapočátky půjčování peněz za nějaký poplatek neboli úrok se objevily již v Mezopotámii několik tisíciletí před Kristem a staly se běžnou součástí lidského života. Ve středověku se tento princip však setkal s nesouhlasem křesťanské církve, neboť podle ní šlo o poplatek za čas a ten patří Bohu, tudíž s ním nelze obchodovat. V té době se jakémukoli půjčování peněz za úrok říkalo lichva a byl to jeden z nejtěžších křesťanských hříchů. Islámské náboženství dokonce zakazuje půjčování peněz za úrok dodnes. Na českém území byla lichva povolena až od konce 15. století a úroky získaly poprvé právní podobu až v polovině 16. století. Tehdy úroky činily asi 10 až 35%.

Z ekonomického hlediska jsou úroky jako cena za poskytnutý kapitál převážně záležitostí počátku 20. století, kdy se ekonomové jako např. Adam Smith zabývali vlivem úrokových měr na společnost. Ovšem již v roce 1847 se Francouzská Centrální Banka poprvé pokusila prostřednictvím peněžních zásob regulovat vývoj úrokové míry.

První snaha o modelování vývoje úrokové míry se objevila v sedmdesátých letech 20. století. Vznikla pak celá řada modelů úrokových měr, které se dnes používají k oceňování finančních derivátů, jejichž podkladem je úroková míra, tzv. úrokových derivátů. Obchodování s finančními deriváty se těší v současné době nejen v České republice, ale především v USA a západní Evropě velké oblibě. Úrokové deriváty umožňují investorovi zajistit své finanční prostředky proti nepříznivému vývoji úrokové míry. Jejich oceňování je tedy velmi významnou oblastí finanční matematiky.

V této práci se budeme věnovat především Hull-Whiteovu modelu publikovanému v článku Hull, White [6]. V první kapitole se zaměříme na teoretické podklady modelu, tedy nastíníme oblast stochastické analýzy užitečnou pro modelování časové struktury úrokových měr. Druhá kapitola nám dá představu o matematické podobě spravedlivého finančního trhu. Ve třetí kapitole se budeme nejprve zabývat Ornstein-Uhlenbeckovou stochastickou diferenciální rovnicí a poté její ekonomickou aplikací, tedy Hull-Whiteovým modelem.

Při studiu této práce je zapotřebí znát základy finanční teorie týkající se úrokových měr a také základní terminologii v oblasti teorie pravděpodobnosti.

# Kapitola 1

## Základy stochastické analýzy pro modely úrokových měr

Tato kapitola je přehledem základní teorie potřebné k dobrému porozumění problematice modelování časové struktury úrokových měr.

### 1.1 Základní pojmy

**Definice 1.1.1 (Filtrace)** *Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor. Systém  $\sigma$ -algeber  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  neklesající vzhledem k inkluzi nazveme filtrací na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , jestliže  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  pro všechna  $0 \leq s \leq t < \infty$ .*

**Definice 1.1.2 (Stochastický proces)** *Stochastický proces je množina náhodných veličin  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Řekneme, že stochastický proces  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný, jestliže náhodná veličina  $X_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelná pro všechna  $t \geq 0$ . Stochastický proces  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  budeme značit zkráceně  $\{X_t\}$ .*

#### Poznámka

Na proces  $\{X_t\}$  se lze dívat dvěma způsoby. Zobrazení  $X_t(\omega) : \Omega \otimes \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  můžeme chápat jednak jako funkci  $\omega \in \Omega$  pro pevné  $t \in \mathbb{R}^+$ , ale také jako funkci  $t \in \mathbb{R}^+$  pro pevné  $\omega \in \Omega$ . Pro nás bude zásadní druhý způsob nahlížení na proces, tedy  $\{X_t\}$  jako reálná funkce  $t \in \mathbb{R}^+$ . Tu nazveme trajektorií stochastického procesu.

**Definice 1.1.3 (Přirozená filtrace)** *Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\{\mathcal{F}_t\}$  a  $\{X_t\}$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný proces. Přirozenou filtrací stochastického procesu  $\{X_t\}$  nazveme systém  $\sigma$ -algeber  $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$  takový, že  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$ .*

Význam  $\sigma$ -algeber lze pro potřeby finanční matematiky ale také fyziky interpretovat jako aktuálně dostupnou informaci, a tedy filtrace bude představovat seřazení těchto informací. Získáváme tak vyjádření informace  $\mathcal{F}_t$  dostupné do času  $t$ . Na stochastický proces můžeme z tohoto hlediska nahlížet jako na náhodné "vytváření" této informace. Budeme uvažovat nejmenší  $\sigma$ -algebru obsahující informaci dostupnou do daného časového okamžiku, tedy přirozenou filtraci, a procesy měřitelné vzhledem k této filtraci.

## 1.2 Wienerův proces

Wienerův proces je nejdůležitějším stochastickým procesem, neboť je základem pro modelování složitějších stochastických procesů a našel své uplatnění v mnoha oblastech. Byl pojmenován po americkém matematikovi Norbertu Wienerovi. Wienerův proces bývá ve fyzice častěji označován jako Brownův pohyb, neboť o jeho objevení se zasloužil roku 1827 Robert Brown, který pozoroval chování pylových zrněk ve vodě. Fyzikální podstatu tohoto jevu však objasnil roku 1905 až Albert Einstein. Příkladem prvního užití Wienerova procesu ve finanční matematice je práce francouzského matematika Louise Bacheliera z roku 1900, kde použil Wienerova procesu k modelování cen akciových opcí. Wienerův proces hraje zásadní roli v popisování mechanismů finančního trhu.

**Definice 1.2.1 (Wienerův proces)** *Stochastický proces  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se nazývá Wienerův proces, jestliže platí:*

- (i)  $W_0 = 0$  s.j.
- (ii)  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  je proces s nezávislými přírůstky, t.j. pro všechna  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$  rozdíl  $W_{t_4} - W_{t_3}$  je nezávislý s rozdíly  $W_{t_2} - W_{t_1}$
- (iii) přírůstky  $W_t - W_s$  mají pro všechna  $0 \leq s < t < \infty$  normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $|t - s|$
- (iv) pro všechna  $\omega \in \Omega$  je funkce  $t \mapsto W_t(\omega)$  spojitá.

Pokud budeme v definici Wienerova procesu uvažovat jeho přirozenou filtraci, tedy  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ , podmínka (ii) bude ekvivalentní s

- (ii)' rozdíly  $W_t - W_s$  jsou nezávislé s  $\mathcal{F}_s$  pro  $0 \leq s < t < \infty$ .

Nebude-li řečeno jinak, budeme v této části dále uvažovat přirozenou filtraci Wienerova procesu. Poznamenejme ještě, že z definice rovnou plyne, že  $W_t \sim N(0, t)$ , neboť  $W_t$  můžeme zapsat jako  $W_t - W_0$ .

Dalším důležitým nástrojem pro modelování finančních trhů je užití martingalů a martingalových měr. Martingal je stochastický proces takový, že jeho očekávaná hodnota v určitém čase  $t$  za podmínky, že známe informaci do času  $s \leq t$ , je dána hodnotou procesu v čase  $s$  skoro jistě. Definujme martingal následujícím způsobem.

**Definice 1.2.2 (Martingal)** *Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Řekneme, že stochastický proces  $\{X_t\}$  je  $\mathcal{F}_t$ -martingal, jestliže  $\{X_t\}$  je  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný,  $E|X_t| < \infty$  pro všechna  $t \geq 0$  a  $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$  P - s.j. pro všechna  $0 \leq s \leq t < \infty$ .*

*Pokud budeme v definici uvažovat přirozenou filtraci, tedy  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ , řekneme jednoduše, že  $\{X_t\}$  je martingal.*

Jedním a zároveň velmi důležitým příkladem martingalu je Wienerův proces, což je předmětem následujícího lemmatu.

**Lemma 1.2.1** *Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Necht'  $\{W_t\}$  je Wienerův proces a  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ . Potom  $\{W_t\}$  je martingal.*

*Důkaz.*

Jelikož  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ , rozdíly  $W_t - W_s$  jsou nezávislé s  $\mathcal{F}_s$  pro  $0 \leq s < t < \infty$ . Užijeme vlastností podmíněné střední hodnoty a dostáváme, že

$$\begin{aligned} E[W_t | \mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + E[W_s | \mathcal{F}_s] = \\ &= E[W_t - W_s] + W_s = W_s \quad P\text{-s.j.} \end{aligned}$$

Q.E.D.

### Poznámka

Wienerův proces lze aproximovat symetrickou náhodnou procházkou (popř. jiným stacionárním stochastickým procesem s diskrétním časem a nezávislými přírůstky). Tento postup lze nalézt např. ve Štěpán [10]. Ačkoli Wienerův proces je proces se spojitými trajektoriemi, trajektorie Wienerova procesu nemají konečnou první variaci na každém omezeném intervalu  $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$ , a tedy nemají v žádném bodě intervalu  $(0, \infty)$  konečnou derivaci. Následující věta, jejíž znění i s důkazem je možno nalézt ve Štěpán [10], pojednává o této vlastnosti Wienerova procesu.

**Věta 1.2.1** *Trajektorie Wienerova procesu mají s pravděpodobností jedna nekonečnou první variaci na každém omezeném intervalu.*

## 1.3 Itôův kalkulus

Japonský matematik Kyioshi Itô dal matematice velmi užitečný nástroj k popisování náhodných procesů a to stochastický integrál. Díky tomu můžeme pracovat s rovnicemi typu  $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW(t)$ , které modelují vývoj úrokové míry jako náhodný proces  $\{r_t\}_{t \geq 0}$ . Integrace podle Wienerova procesu nemůže být považována za integraci ve smyslu Riemannova integrálu, neboť, jak již bylo řečeno, trajektorie Wienerova procesu nemají konečnou variaci. Proto se v následující části budeme věnovat vysvětlení definice Itôova integrálu, jenž je pro náhodný proces  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  tvaru

$$I(X)(\omega) = \int_0^T X_t(\omega) dW_t.$$

Idea zavedení Itôova integrálu spočívá ve dvou krocích. Nejprve definujeme tento integrál na třídě jednoduchých funkcí a tuto definici pak spojitě rozšíříme na větší třídu funkcí. Aby byla definice smysluplná, musí být pro  $X = X_t(\omega) = X(t, \omega)$  splněny podmínky měřitelnosti a integrovatelnosti. Necht'  $\mathcal{B}$  je borelovská  $\sigma$ -algebra podmnožin  $[0, T]$ ,  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$  je přirozená filtrace a  $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$  je součinnová  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t$  a  $\mathcal{B}$ .

**Definice 1.3.1 (Třída integrandů Itôova integrálu)** *Necht'  $X$  je stochastický proces na  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ . Necht'  $X(\cdot, \cdot)$  je  $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ -měřitelný,  $X(t, \cdot)$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný pro všechna  $t \in [0, T]$  a platí, že*

$$E \left[ \int_0^T X^2(t, \omega) dt \right] < \infty.$$



Potom takto definovanou množinu procesů nazveme třídou integrandů Itôova integrálu a označíme ji  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0, T]$ .

Označme dále  $\mathcal{H}_0^2$  podmnožinu  $\mathcal{H}^2$  procesů splňujících  $X(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{I}_{(t_i < t \leq t_{i+1}]}$ , kde  $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ ,  $E(a_i^2) < \infty$  a  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ .

**Definice 1.3.2 (Itôův integrál pro jednoduché procesy)** Necht'  $\{X(t, \omega)\}$  je proces z  $\mathcal{H}_0^2$ . Potom Itôův integrál definujeme jako

$$I(X)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

**Lemma 1.3.1 (Itôova izometrie na  $\mathcal{H}_0^2$ )** Necht'  $X \in \mathcal{H}_0^2$ . Potom

$$E \left[ \int_0^T X(t, \omega) dW_t \right]^2 = E \left[ \int_0^T X^2(t, \omega) dt \right].$$

Důkaz tohoto lemmatu je možno nalézt např. ve Steele [9]. Itôův integrál jsme tedy definovali pro jednoduché procesy a díky lemmatu o Itôově izometrii jsme schopni spojitě rozšířit tuto definici na složitější procesy. Je však třeba dodat, že  $\mathcal{H}_0^2$  je hustá v  $\mathcal{H}^2$ , a proto je tato aproximace korektní.

**Definice 1.3.3 (Itôův integrál)** Necht'  $X \in \mathcal{H}^2$  a  $\{X_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$  je posloupnost procesů taková, že  $\{X_n\}$  konvergují k  $X$  ve smyslu  $E \left[ \int_0^T (X_n(t, \omega) - X(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Potom Itôův integrál pro proces  $X$  je jednoznačně určen vztahem  $I(X)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n)$  ve smyslu konvergence v  $L^2$  neboli  $\int_0^T X_n(t, \omega) dW_t \xrightarrow{L^2} \int_0^T X(t, \omega) dW_t$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

Prostor  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je úplný a posloupnost  $\{I(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  je díky Itôově izometrii Cauchyovská v tomto prostoru, takže takto definovaná limita skutečně existuje.

### Poznámka

Ostatní úvodní teorii týkající se Itôova integrálu je možno nalézt opět ve Steele [9]. Uvádím zde pouze základní poznatky, které jsou důležité pro správnou interpretaci a pochopení tohoto nástroje stochastické analýzy. Stěžejní je Itôovo lemma, které se objevuje v různých podobách, v jednodušších či složitějších formách. Uvedu základní formuli, která se nejčastěji vyskytuje v literatuře finanční matematiky.

**Definice 1.3.4 (Itôův proces)** Proces  $\{X_t\}$  nazveme Itôův proces, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s,$$

kde  $\mu(t)$ ,  $\sigma(t)$  jsou takové  $\mathcal{F}_t$ -adaptované procesy, že integrály existují. Zjednodušeně můžeme psát ve tvaru stochastického diferenciálu jako  $dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$ . Diferenciální rovnici tvaru  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$  s počáteční podmínkou  $X_0 = x_0$  nazýváme lineární stochastickou diferenciální rovnicí.

**Lemma 1.3.2 (Itôovo lemma)** *Necht'  $\{X_t\}$  je Itôův proces tvaru  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$  a  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Potom pro stochastický proces  $\{f(t, X_t)\}$  platí*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 dt =$$

$$= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu(t, X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2(t, X_t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma(t, X_t)dW_t,$$

kde  $\partial x$  značí parciální derivaci podle druhé souřadnice.

### Poznámka

V této pasáži o Itôově kalkulu jsem převážně vycházela ze Steele [9] a Málek [8]. Význam Itôova lemmatu spočívá v poskytnutí nástroje k popisu funkcí stochastických procesů, resp. k popisu jejich změn v čase. Pokud bychom si místo  $dX_t$  intuitivně představili  $X_{t+\epsilon} - X_t$  pro  $\epsilon > 0$ , získáváme možnost reálně modelovat změny funkce stochastického procesu v čase. Vývoj úrokových měr můžeme z hlediska matematického modelování popsat např. stochastickou diferenciální rovnicí typu  $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$  (Vašíčkův model). Díky Itôově lemmatu nyní umíme vyjádřit, co je  $f(t, r_t)$ .

## 1.4 Kvadratická variace

Kvadratická variace je jeden z typů variace používaný ve stochastické analýze pro stochastické procesy. Protože Wienerův proces je základním kamenem stochastické analýzy a jeho kvadratická variace je, jak později uvidíme, na intervalu  $[0, T]$  skoro jistě rovna  $T$ , stojí tato vlastnost za pozornost. Zjistíme, že ačkoli trajektorie Wienerova procesu mají na každém omezeném intervalu nekonečnou první variaci, kvadratická variace je konečná.

**Definice 1.4.1 (Kvadratická variace náhodného procesu)** *Necht'  $\Pi = \{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}$  je dělení intervalu  $[0, t] \subseteq [0, T]$ . Potom pro stochastický proces  $\{X_t\}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definujeme  $\Pi$ -kvadratickou variaci procesu  $\{X_t\}$  jako náhodnou veličinu  $Q_\Pi(X_t) = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$ .*

*Necht'  $\{V_t\}$  je proces takový, že  $Q_{\Pi_n}(X_t) \xrightarrow{P} V_t$  pro všechna dělení  $\{\Pi\}$  intervalu  $[0, t]$  taková, že  $\|\Pi\| = \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Potom řekneme, že  $\{V_t\}$  je kvadratickou variací procesu  $\{X_t\}$  a značíme  $\langle X \rangle_t$ .*

**Věta 1.4.1** *Kvadratická variace trajektorií Wienerova procesu na intervalu  $[0, T]$  je  $\langle W \rangle_T = T$  s.j.*

**Věta 1.4.2** Necht'  $\{X_t\}$  je Itôův proces tvaru  $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$ . Potom kvadratická variace  $\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds$ .

**Poznámka**

Důkazy obou vět lze nalézt např. ve Steele [9]. Neformálním důsledkem věty 1.4.2. je, že  $(dW_t)^2 = dt$ , což je velmi důležité při praktických výpočtech. Formálně se pravidla, jimiž se řídí výpočty se symboly  $dt$  a  $dW_t$ , někdy nazývají box-kalkulus nebo box-algebra. Následující tabulka dává pravidla pro násobení těchto symbolů.

$\cdot$	$dt$	$dW_t$
$dt$	$0$	$0$
$dW_t$	$0$	$dt$

Díky těmto pravidlům např. víme, že pro proces  $X_t = \mu dt + \sigma dW_t$  platí  $dX_t \cdot dX_t = \sigma^2 dt$ . Celá tato problematika je přehledně zpracována ve Steele [9], pro nás však budou postačující jen tyto základní poznatky.

# Kapitola 2

## Základní pojmy v teorii oceňování

V této kapitole se nejprve zaměříme na definici základních pojmů teoretické finanční matematiky a na vazby mezi jednotlivými typy úrokových měr. Dále si zavedeme předpoklady pro spravedlivý finanční trh, což je založeno na podmínce neexistence arbitráže a ekvivalentní martingalové míře.

### 2.1 Úročení, diskontování a základní typy úrokových měr

**Definice 2.1.1 (Bankovní účet)** *Hodnotu bankovního účtu v čase  $t \geq 0$  definujeme jako  $B(t)$ . Předpokládejme, že  $B(0) = 1$  a vývoj  $B(t)$  v čase je dán diferenciální rovnicí  $dB(t) = r_t B(t) dt$ ,  $B(0) = 1$ , kde  $r_t$  je nezápornou funkcí času a jde o okamžitou úrokovou míru, s níž se bankovní účet zhodnocuje.*

*Ekvivalentně lze zapsat, že  $B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ .*

V definici bankovního účtu tedy předpokládáme, že v čase 0 máme částku 1 a tuto částku spojitě úročíme úrokovou mírou  $r_t$ . Jiný způsob vyjádření zhodnocování finančních prostředků je diskontování. Pokud máme částku 1 v nějakém čase  $t > 0$ , můžeme určit její současnou hodnotu, tedy diskontovat do času 0.

Úrokovou míru v definici bankovního účtu uvažujeme jako deterministickou funkci. Jelikož však budeme modelovat úrokovou míru jako stochastický proces, bankovní účet i diskontní faktor budou rovněž stochastické procesy. Diskontní faktor obecně mezi časy  $t$  a  $T$  definujeme následovně.

**Definice 2.1.2 (Diskontní faktor)** *Diskontní faktor  $D(t, T)$  mezi dvěma časovými okamžiky  $t$  a  $T$  je částka v čase  $t$  ekvivalentní jedné jednotce měny splatné v čase  $T$  a je definován jako*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right).$$

**Definice 2.1.3 (Dluhopis s nulovým kupónem)** *(Diskontovaný) dluhopis s nulovým kupónem splatný v čase  $T$  je cenný papír garantující jeho držiteli platbu jedné jednotky měny v čase  $T$ . Hodnotu tohoto dluhopisu v čase  $t < T$  označíme jako  $P(t, T)$  a  $P(T, T) = 1$  pro všechna  $T$ .*

V běžném životě se nejčastěji setkáváme s úročením v diskrétních časových okamžicích jako je např. roční či měsíční úročení, ovšem z pohledu finanční matematiky je nejdůležitějším typem úročení spojitě. V následující části si však ukážeme, jak by vypadaly spotové úrokové míry i pro tyto běžné typy úročení a že tyto způsoby jsou na nekonečně malém intervalu ekvivalentní.

**Definice 2.1.4 (Spotová úroková míra při spojitém úročení)** *Spotová úroková míra při spojitém úročení uvažovaná v čase  $t$  pro dobu splatnosti  $T$  je konstantní míra, jíž se investice  $P(t, T)$  jednotek měny v čase  $t$  spojitě zhodnotí na jednu jednotku měny v čase  $T$ . Značíme ji  $R(t, T)$  a formálně zapisujeme jako*

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{\tau(t, T)},$$

kde  $\tau(t, T)$  je doba mezi časovými okamžiky  $t$  a  $T$  podle běžných časových konvencí.

Pro dluhopis s nulovým kupónem tedy platí

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1$$

a jeho cenu proto můžeme vyjádřit jako

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}.$$

Spotovou úrokovou míru při jednoduchém úročení uvažovanou v čase  $t$  pro dobu splatnosti  $T$  si označíme  $L(t, T)$ . Značení  $L$  je odvozeno od úrokové míry LIBOR (London InterBank Offered Rate), která je spotovou úrokovou mírou tohoto typu. Při ročním úročení označíme  $Y(t, T)$  spotovou úrokovou míru uvažovanou v čase  $t$  pro dobu splatnosti  $T$ . Pro úročení  $k$ -krát ročně označíme spotovou úrokovou míru analogicky  $Y^k(t, T)$ . Tyto spotové úrokové míry spočteme jako

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)},$$

$$Y(t, T) = \frac{1}{[P(t, T)]^{1/\tau(t, T)} - 1},$$

$$Y^k(t, T) = \frac{k}{[P(t, T)]^{1/k\tau(t, T)} - 1} - k,$$

kde  $\tau(t, T)$  je opět doba mezi časovými okamžiky  $t$  a  $T$  podle zvolené časové konvence. Většinou budeme uvažovat jednoduše  $\tau(t, T) = T - t$  jako rozdíl v letech. Běžnými denními časovými konvencemi většinou míníme Actual/365, Actual/360 nebo 30E/360.

Pro dluhopis s nulovým kupónem tedy musí platit, že

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1,$$

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1,$$

$$P(t, T) \left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{k\tau(t, T)} = 1$$

a tedy cenu dluhopisu s nulovým kupónem, pokud známe příslušné spotové úrokové míry můžeme vyjádřit jako

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)},$$

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}},$$

$$P(t, T) = \left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{-k\tau(t, T)}.$$

Spotové úrokové míry při spojitém úročení lze vyjádřit jako limitu spotových úrokových měř při úročení  $k$ -krát ročně pro  $k \rightarrow \infty$ , neboť

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y^k(t, T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{[P(t, T)]^{1/k\tau(t, T)}} - k = -\frac{\log P(t, T)}{\tau(t, T)} = R(t, T).$$

Takto lze alternativně definovat spotovou úrokovou míru  $R(t, T)$ . Dále pro pevné  $Y$  platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Y}{k}\right)^{k\tau(t, T)} = e^{Y\tau(t, T)}.$$

Poznamenejme, že všechny výše definované typy spotových úrokových měř jsou na nekonečně malém intervalu ekvivalentní. Okamžitou spotovou úrokovou míru lze tedy vyjádřit jako limitu kterékoli z těchto spotových úrokových měř.

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y^k(t, T) \text{ pro všechna } k.$$

K výše definovaným spotovým úrokovým mírám přidejme ještě definici forwardové úrokové míry, která vyjadřuje očekávanou sazbu v čase  $t$  mezi dvěma okamžiky v budoucnosti  $T$  a  $S$ .

Forwardovou úrokovou míru při jednoduchém úročení uvažovanou v čase  $t$  a platnou mezi časy  $T$  a  $S$ , kde  $t < T < S$ , značíme  $F(t, T, S)$  a určíme ji jako

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right).$$

Okamžitá forwardová úroková míra je definována jako

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{P(t, S)} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} =$$

$$-\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}.$$

Na závěr dodejme, že stěžejním pojmem ve finanční literatuře je tzv. časová struktura úrokových měř (term structure of interest rates). Tímto pojmem se většinou rozumí závislost úrokové míry na době do splatnosti dluhopisu s nulovým kupónem. Pokud se doba zbývající do splatnosti blíží k 0, limitní hodnotou časové struktury úrokových měř je právě okamžitá spotová úroková míra. V této části jsem čerpala převážně z Brigo, Mercurio [2].

## 2.2 Ekvivalentní martingalová míra a neexistence arbitráže

Jednou z významných oblastí finanční matematiky je vytvoření modelu spravedlivého finančního trhu, tedy trhu kde neexistuje možnost arbitráže. Arbitráž představuje možnost nabytí zisku bez podstoupení rizika a bez počáteční investice kapitálu, jinými slovy pokud existují dva trhy, kde je stejné aktivum obchodováno za různou cenu, lze koupit aktiva na jednom trhu a okamžitým prodeji na trhu druhém inkasovat cenový rozdíl. Situace, kdy by šlo bez nulové počáteční investice získat v budoucím čase nezápornou částku, je značně nepřírozená a v modelu finančního trhu nežádoucí. Pokud tedy budeme uvažovat dvě portfólia, které vyplácí stejnou částku v daném čase v budoucnu, musí mít dnes stejnou hodnotu. Při modelování časové struktury úrokových měr a oceňování opčních derivátů je podmínka neexistence arbitráže samozřejmostí a je ji tedy nutno správně definovat.

Dalším stavebním kamenem jsou martingalové míry, které vnášejí do oceňování právě onu spravedlivost. Uvažujme portfólio a opci, kterou toto portfólio replikuje, a tedy hodnota opce i portfólia je v daném budoucím okamžiku stejná. Podmínka neexistence arbitráže nám říká, že jejich hodnota by měla být stejná i v počátečním okamžiku. Když bychom však cenu opce v počátečním okamžiku vyjádřili jako očekávanou hodnotu ceny opce v budoucím čase, museli bychom zajistit shodu i s touto částkou. Tedy vypočítat střední hodnotu vzhledem k míře, která nám tuto shodu dopřeje, a to je právě martingalová míra. Pokud uvažujeme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  a na něm definovaný martingal  $\{S_t\}$ , říkáme, že proces  $\{S_t\}$  je martingal vzhledem ke  $Q$  a že  $Q$  je martingalová míra pro proces  $\{S_t\}$ . V následujícím textu budu vycházet především z Delbaen, Schachermayer [4] a Brigo, Mercurio [2].

Pro zjednodušení budeme uvažovat konečnou množinu  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  a  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}$  jako potenční množinu  $\Omega$ . Dále uvažujme pravděpodobnostní míru  $P$  tak, že  $P(\omega_n) = p_n > 0$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ . Prostory  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  a  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tedy budou představovány prostorem  $\mathbb{R}^N$ . Pro zachování obecnosti definic se však budeme držet běžného obecného značení.

**Definice 2.2.1 (Model finančního trhu)** *Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ , kde  $T \geq 1$  a  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Model finančního trhu je  $\mathbb{R}^{k+1}$ -rozměrný  $\mathcal{F}_t$ -adaptovaný stochastický proces  $\hat{S} = \{\hat{S}_t\}_{t=0}^T = \{\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^k\}_{t=0}^T$ , pro který platí  $\hat{S}_t^0 > 0$  pro všechna  $t = 0, \dots, T$  a  $\hat{S}_0^0 = 1$ .*

### Poznámka

Aktivum  $\hat{S}_t^0$  často nazýváme numéraire a představuje jakousi základní jednotku, k níž se vztahují jiná aktiva (může to být jiné aktivum než aktivum  $\hat{S}_t^0$ , ale my jsme si jako numéraire zvolili toho). V našem značení je  $\hat{S}_t^0$  jednoduše bankovní účet  $B(t)$ . Pokud předpokládáme, že se tato částka zhodnocuje konstantní úrokovou mírou  $r$ , bude  $\hat{S}_t^0 = e^{rt}$ . Nebo můžeme např. uvažovat zhodnocování stochastickými úrokovými mírami  $r_t$  v pevných intervalech mezi okamžiky  $t-1$  a  $t$  délky  $h > 0$ , a tedy  $\hat{S}_t^0 = \exp(r_0h + r_1h + \dots + r_{t-1}h)$ . Rozhodování o koupi či prodeji aktiv v čase  $t$  probíhá na základě známé informace dostupné v tomto časovém okamžiku, která je představována  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_t$ .

**Definice 2.2.2 (Obchodní strategie)** *Obchodní strategie  $\{\hat{H}_t\}_{t=1}^T = \{\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, \dots, \hat{H}_t^k\}_{t=1}^T$  je  $\mathbb{R}^{k+1}$ -rozměrný stochastický proces, pro který platí, že  $\hat{H}_t$  je  $\mathcal{F}_{t-1}$ -měřitelný.*

### Poznámka

$\hat{H}_t^j$  v obchodní strategii interpretujeme jako množství aktiva  $j$  drženo mezi časy  $t - 1$  a  $t$ . Tato hodnota může být i záporná při prodeji aktiva  $j$  - short selling.  $\mathcal{F}_{t-1}$ -měřitelnost je vyžadována, neboť rozhodování probíhá v čase  $t - 1$  a tedy je zapotřebí informace dostupná právě v tomto čase. Budeme pracovat s obchodní strategií, kde při změně z  $\hat{H}_{t-1}$  na  $\hat{H}_t$  nedochází ke změně peněžních toků. O tomto pojednává následující definice.

**Definice 2.2.3 (Samofinancující se obchodní strategie)** *Obchodní strategie  $\{\hat{H}_t\}_{t=1}^T$  se nazývá samofinancující se obchodní strategie, pokud pro všechna  $t = 1, \dots, T - 1$  platí*

$$(\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t) \text{ neboli } \sum_{j=0}^k \hat{H}_t^j \hat{S}_t^j = \sum_{j=0}^k \hat{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j.$$

Požadovanou počáteční investicí bude v tomto případě  $\hat{V}_0 = (\hat{H}_1, \hat{S}_0)$  a  $\mathcal{F}_t$ -měřitelnou náhodnou veličinu definovanou jako  $\hat{V}_t = (\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t)$  nazveme hodnotou portfolia v čase  $t$ .

### Poznámka

Jak již bylo řečeno, aktivum  $\hat{S}_0$  považujeme za numéraire. Nyní tohoto využijeme a budeme diskontovat ceny aktiv. Víme, že  $\hat{S}_0^0 = 1$  v čase 0 a to je ekvivalentní množství  $\hat{S}_t^0$  v čase  $t$ . Definujme

$$S_t^j := \frac{\hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0} \text{ pro všechna } j = 1, \dots, k \text{ a všechna } t = 0, \dots, T.$$

Zřejmě nyní  $S_t^0 = 1$  pro všechna  $t = 0, \dots, T$ . Protože  $\hat{S}_0^0 = 1$ , pro počáteční investici  $\hat{V}_0$  platí

$$\hat{V}_0 = (\hat{H}_1, \hat{S}_0) = \sum_{j=0}^k \hat{H}_1^j \hat{S}_0^j = \hat{H}_1^0 + \sum_{j=1}^k \hat{H}_1^j \hat{S}_0^j = \hat{H}_1^0 + \sum_{j=1}^k \hat{H}_1^j S_0^j.$$

Nyní definujeme obchodní strategii  $\{H_t\}_{t=1}^T = \{H_t^1, \dots, H_t^k\}_{t=1}^T$  jako  $\mathbb{R}^k$ -rozměrný proces takový, že  $H_t^j = \hat{H}_t^j$  pro všechna  $j = 1, \dots, k$ , tedy odstraněním nulté souřadnice. Podle Delbaen, Schachermayer [4] lze ukázat, že pro každou obchodní strategii  $\{H_t\}_{t=1}^T = \{H_t^1, \dots, H_t^k\}_{t=1}^T$  existuje jednoznačně samofinancující se obchodní strategie  $\{\hat{H}_t\}_{t=1}^T = \{\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, \dots, \hat{H}_t^k\}_{t=1}^T$  taková, že  $\hat{H}_t^j = H_t^j$  pro všechna  $t = 1, \dots, T$  a všechna  $j = 1, \dots, k$  a  $\hat{H}_1^0 = 0$ .

Diskontovaná hodnota portfolia  $V_t$  bude v tomto kontextu definována jako

$$V_t = \frac{\hat{V}_t}{\hat{S}_t^0} \text{ pro } t = 0, \dots, T.$$

Důležité je, že závisí pouze na  $\{H_t\}_{t=1}^T = \{H_t^1, \dots, H_t^k\}_{t=1}^T$  a nezávisí tedy na investici do numéraire  $\{H_t^0\}_{t=1}^T$ . Neboť  $\hat{S}_0^0 = 1$  a  $\hat{H}_1^0 = 0$ , pro počáteční investici platí, že

$$\hat{V}_0 = V_0 = \sum_{j=1}^k \hat{H}_1^j \hat{S}_0^j.$$



Užitím rovnosti  $(\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_{t+1})$  lze ukázat, že pro přírůstek diskontované hodnoty portfólia platí  $\Delta V_{t+1} = V_{t+1} - V_t = (H_{t+1}^j, \Delta S_{t+1}^j)$ , kde  $(\cdot, \cdot)$  je skalární součin v  $\mathbb{R}^k$ . Pro konečnou hodnotu  $V_T$  tedy platí, že

$$V_T = V_0 + \sum_{t=1}^T (H_t, \Delta S_t) = V_0 + (H \cdot S)_T.$$

**Definice 2.2.4 (Stochastický integrál)** *Stochastický integrál  $H \cdot S = \{(H \cdot S)_t\}_{t=0}^T$  je reálný stochastický proces takový, že*

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^t (H_u, \Delta S_u) \text{ pro } t = 0, \dots, T,$$

kde  $(\cdot, \cdot)$  je skalární součin v  $\mathbb{R}^k$ .

### Poznámka

Takto definovaný stochastický integrál je diskrétní podobou Itôova integrálu definovaného v sekci 1.3 a poslouží nám k modelování zisku či ztráty do času  $t$  při následování strategie  $H$ . Na počátku tedy máme  $V_0 = 0$  a aplikací strategie  $H$  získáme hodnoty  $V_t = (H \cdot S)_t$ . Diskontováním jsme získali užitečnější nástroje než ty původně definované, a budeme se jich tedy i nadále držet. Vztahením na numéraire získáváme širší možnosti užití teorie, neboť si toto aktivum můžeme zvolit libovolně (s ohledem na jeho nezápornost).

**Definice 2.2.5 (Množina dosažitelných kontraktů)** *Nechť  $K$  je podprostor  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  takový, že  $K = \{(H \cdot S)_T, H \in \mathcal{H}\}$ . Potom jej nazveme množinou dosažitelných kontraktů (při nulové počáteční investici).*

### Poznámka

Pokud bychom chtěli definovat množinu dosažitelných kontraktů při počáteční investici  $a$ , definujeme ji jako  $K_a = a + K$ , tedy posunutím podprostoru  $K$  o  $a$ . Pro nás však bude postačující množina  $K$ . Tu můžeme interpretovat jako množinu výplatních funkcí  $f = (H \cdot S)_T$  v čase  $T$ , které lze replikovat při nulové počáteční investici a aplikování nějaké obchodní strategie  $H$ . Dodejme, že jsou tímto myšleny náhodné funkce, tedy závislé na  $\omega \in \Omega$ .

**Definice 2.2.6 (Podmínka neexistence arbitráže)** *Finanční trh  $S$  splňuje podmínku neexistence arbitráže (NA), pokud*

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = 0,$$

kde  $0$  značí funkci identicky rovou nule.

**Definice 2.2.7 (Ekvivalentní martingalová míra)** *Pravděpodobnostní míra  $Q$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  se nazývá ekvivalentní martingalová míra vzhledem k finančnímu trhu  $S$ , pokud platí:*

- (i)  $Q$  je ekvivalentní s  $P$
- (ii)  $S$  je martingal vzhledem ke  $Q$ .

Prostor všech ekvivalentních martingalových měr budeme značit  $\mathcal{M}^e(S)$ .

### Poznámka

Ekvivalenci měr  $Q$  a  $P$  lze v našem případě (pro konečnou  $\Omega$ ) jednoduše popsat tak, že  $P(\omega) > 0$  právě tehdy, když  $Q(\omega) > 0$  pro všechna  $\omega \in \Omega$ . Definice by byla korektnější, kdybychom zároveň s pravděpodobnostní mírou  $Q$  definovali i její Radon-Nikodýmovu derivaci  $\frac{dQ}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Jelikož uvažujeme množinu  $\Omega$  konečnou, platí, že

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \text{ pro } \omega \in \Omega.$$

**Věta 2.2.1 (Základní věta teorie oceňování)** *Nechť  $S$  je finanční trh uvažovaný na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  s filtrací  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $S$  splňuje (NA)
- (ii)  $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$ .

**Věta 2.2.2 (Úplný finanční trh)** *Nechť  $S$  je finanční trh, který splňuje podmínku neexistence arbitráže (NA). Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\mathcal{M}^e(S) = \{Q\}$
- (ii) Každé  $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  lze reprezentovat jako  $f = a + (H \cdot S)_T$ , kde  $a \in \mathbb{R}$  a  $H \in \mathcal{H}$ . V tomto případě platí, že  $a = E_Q[f]$ , stochastický integrál  $H \cdot S$  je určen jednoznačně a  $E_Q[f|\mathcal{F}_t] = E_Q[f] + (H \cdot S)_t$  pro  $t = 0, \dots, T$ .

### Poznámka

Tyto dvě věty jsou zásadního významu, neboť utvářejí spravedlivé tržní prostředí propojením teorie neexistence arbitráže a martingalových měr. Jejich znění i s důkazem je možno nalézt v Delbaen, Schachermayer [4]. Shrňme si tedy, k jakému závěru jsme došli.

- Na finančním trhu neexistuje arbitráž tehdy a jen tehdy, když existuje ekvivalentní martingalová míra.
- Finanční trh je úplný právě tehdy, když je ekvivalentní martingalová míra určena jednoznačně.

## Kapitola 3

# Oceňování úrokových derivátů pomocí Hull-Whiteova modelu

Modelování časové struktury úrokových měr je zajímavým problémem v oblasti finančního modelování. Modely úrokových měr vycházejí buď to z jednoho zdroje nejistoty, tedy z nejistého vývoje okamžité úrokové míry  $r_t$ , což jsou tzv. jednofaktorové modely, nebo berou v úvahu více zdrojů nejistoty a ty nazýváme vícefaktorovými modely. Dalším zdrojem nejistoty může být např. dlouhodobá úroková míra jako v Brennan-Schwartzově modelu publikovaném v Brennan, Schwartz [1]. Tyto modely slouží k oceňování úrokových derivátů, tedy finančních derivátů, kde podkladovým aktivem je úroková míra (např. tříměsíční LIBOR, swapové sazby nebo swapové kontrakty).

Bezesporu nejznámějšími jednofaktorovými modely jsou Vašíčkův model publikovaný v článku Vasicek [11] a Cox-Ingersoll-Rossův (CIR) model publikovaný v článku Cox, Ingersoll, Ross [3]. Jejich rozšíření, které poskytuje dokonalou shodu s počáteční časovou strukturou úrokových měr, se označuje jako Hull-Whiteův model, který byl publikován v roce 1990 v článku Hull, White [6]. Tento model se řídí stochastickou diferenciální rovnicí Ornstein-Uhlenbeckova procesu.

V této kapitole se nejprve zaměříme na Ornstein-Uhlenbeckův proces obecně a poté se budeme zabývat řešením stochastické diferenciální rovnice tohoto procesu. Následně přejdeme k popsání Hull-Whiteova modelu a vysvětlíme souvislost modelu s časovou strukturou úrokových měr.

### 3.1 Ornstein-Uhlenbeckův proces

Jak jsme již uvedli v sekci 1.3, uvažujeme lineární stochastickou diferenciální rovnici ve tvaru  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$  s počáteční podmínkou  $X_0 = x_0$ . V této rovnici  $\mu(t, X_t)$  chápeme jako krátkodobý trend a  $\sigma(t, X_t)$  jako krátkodobou variabilitu vývoje procesu  $\{X_t\}$ . Tímto typem diferenciální rovnice lze modelovat řadu náhodných procesů.

Uvažujme nyní rovnici

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \text{ s počáteční podmínkou } X_0 = x_0,$$

kde  $\alpha$  a  $\sigma$  jsou nezáporné konstanty. Potom driftová část  $-\alpha X_t dt$  je záporná pro  $X_t > 0$  a kladná pro  $X_t < 0$ , a tedy proces má vlastnost tzv. návratu ke středu neboli mean reverze. Tento

proces, i když je náhodný, se pohybuje okolo jakési střední úrovně (pro nás nyní okolo nuly). Pokud se proces odchýlí od nulové hodnoty, ať už do záporných či kladných hodnot, bude mít tendenci se navracet k původní hodnotě, tedy k nule, a to s rychlostí mean reverze, která je dána parametrem  $\alpha$ . Ten tedy vyjadřuje, s jakou rychlostí bude proces tlačěn zpět do rovnovážného stavu, pokud se od střední úrovně příliš odchýlí. Navíc protože uvažujeme variabilitu procesu konstantní, lze očekávat, že kolísání kolem nuly bude dosti silné.

Ornstein-Uhlenbeckův proces popsaný tímto typem stochastické rovnice získal své jméno po fyzicích L. S. Ornsteinovi a G. E. Uhlenbeckovi, kteří v roce 1931 použili tento model při studiu chování molekul plynů s vlivem tření. Pokud bychom chtěli jinou úroveň mean reverze než nulu, jednoduše použijeme jinou stochastickou diferenciální rovnici typu

$$dX_t = -\alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t \text{ s počáteční podmínkou } X_0 = x_0,$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\sigma$  jsou konstantní nezáporné parametry. Nyní tedy máme model procesu, který odpovídá chování krátkodobé úrokové míry tak, jak bychom to přirozeně očekávali, t.j. že úroková míra fluktuuje kolem jakési fixní úrokové sazby  $\beta$ .

## 3.2 Řešení stochastické diferenciální rovnice Ornstein - Uhlenbeckova procesu

Nyní se zabýváme řešením stochastické diferenciální rovnice Ornstein-Uhlenbeckova procesu a uvažujeme tedy proces  $\{X_t\}$  reprezentovaný např. stochastickou diferenciální rovnicí tvaru

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \text{ s počáteční podmínkou } X_0 = x_0, \quad (3.1)$$

kde  $\alpha$  a  $\sigma$  jsou nezáporné konstanty. Řešení budeme hledat tak, že se pokusíme uhodnout tvar tohoto řešení. Zkusme uvažovat procesy tvaru

$$X_t = a(t) \left( x_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right), \quad (3.2)$$

kde  $a(\cdot)$  a  $b(\cdot)$  jsou diferencovatelné funkce. Díky box-kalkulu zavedenému v sekci 1.4 víme, že

$$dX_t = a'(t) \left( x_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right) dt + a(t)b(t)dW_t. \quad (3.3)$$

Předpokládejme, že  $a(0) = 1$  a  $a(t) > 0$  pro všechna  $t \geq 0$ , a tím pádem můžeme rovnici (3.2) vydělit  $a(t)$ . Proces definovaný rovnicí (3.2) je řešením stochastické diferenciální rovnice tvaru

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dW_t \text{ s počáteční podmínkou } X_0 = x_0. \quad (3.4)$$

Nyní porovnáme koeficienty u  $dt$  a  $dW_t$  v rovnici (3.1) s příslušnými koeficienty v rovnici (3.4). Požadujeme tedy, aby platily následující rovnosti

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha \quad (3.5)$$

$$a(t)b(t) = \sigma. \quad (3.6)$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že  $a(0) = 1$ , rovnice (3.5) má jednoznačné řešení a to  $a(t) = e^{-\alpha t}$ . Dosazením tohoto do rovnice (3.6) určíme, že  $b(t) = \sigma e^{\alpha t}$ . Řešení stochastické diferenciální rovnice (3.1) Ornstein-Uhlenbeckova procesu bude tedy vypadat jako

$$X_t = e^{-\alpha t} \left( x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s. \quad (3.7)$$

Toto řešení o Ornstein-Uhlenbeckově procesu leccos vypovídá. Všimněme si, že pro  $t \rightarrow \infty$  relevantnost zvolení počáteční hodnoty procesu právě  $x_0$  exponenciálně klesá. Stejně jako Wienerův proces je i Ornstein-Uhlenbeckův proces gaussovský. Zbývá ještě určit jeho střední hodnotu a rozptyl. K tomu nám napomůže Itôova izometrie uvedená v sekci 1.3 a fakt, že střední hodnota integrálu podle  $dW_t$  je nulová.

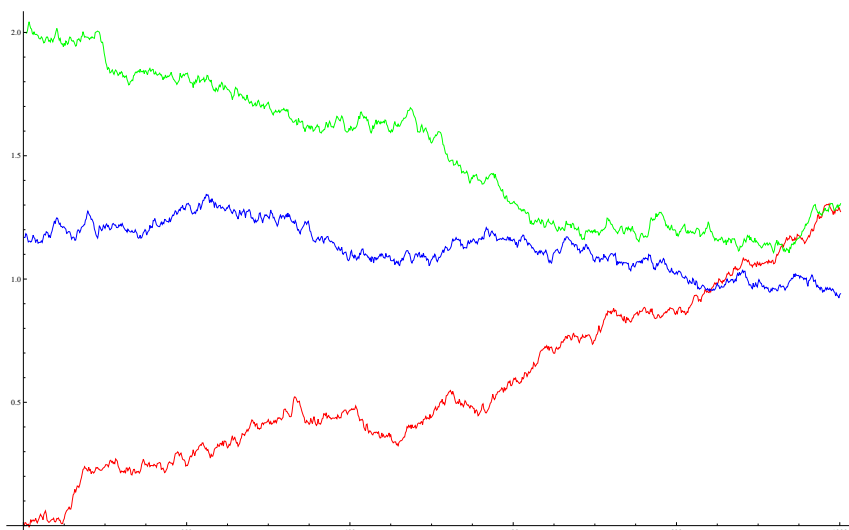
$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t &= \mathbb{E} \left[ x_0 e^{-\alpha t} \right] + \mathbb{E} \left[ \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right] = x_0 e^{-\alpha t} \\ \text{var } X_t &= \mathbb{E} [X_t - \mathbb{E}X_t]^2 = \mathbb{E} \left[ x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s - x_0 e^{-\alpha t} \right]^2 = \\ &= \mathbb{E} \left[ \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right]^2 = \mathbb{E} \left[ \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds \right] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \end{aligned}$$

Jak můžeme vidět, limitní rozdělení procesu pro  $t \rightarrow \infty$  je  $N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$  a je zároveň jakýmsi rovnovážným rozdělením. Stačí vzít jako počáteční hodnotu náhodnou veličinu  $X_0 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$ , a tím pádem  $X_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$  pro všechna  $t \geq 0$ .

Obrázek 3.1 znázorňuje průběh Ornstein-Uhlenbeckova procesu daného obecnější SDE tvaru

$$dX_t = -\alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.8)$$

při různých počátečních hodnotách. Zelený graf znázorňuje průběh procesu s počáteční hodnotou  $X_0 = 2$ , červený graf je pro  $X_0 = 0$  a modrý graf uprostřed vyjadřuje průběh Ornstein-Uhlenbeckova procesu, pokud uvažujeme náhodnou veličinu  $X_0 \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$ .



Obrázek 3.1: Ornstein-Uhlenbeckův proces s parametry  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1.2$  a  $\sigma = 0.3$

### 3.3 Hull-Whiteův model

Uvažujme nyní krátkodobou úrokovou míru jakožto stochastický proces  $\{r_t\}$ , jehož vývoj se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (3.9)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  a  $\beta$  jsou kladné konstanty a  $W_t$  značí Wienerův proces. Pro  $\beta = 0$  jde o rovnici pro Vašíčkův model, jehož nevýhodou je, že se krátkodobá úroková míra může stát zápornou. Alternativou je rovnice CIR modelu uvažující  $\beta = 0,5$ , kdy za jistých okolností může být úroková míra nulová, nikdy však není záporná.

V sekci 3.2 jsme se dozvěděli, že model definovaný rovnicí (3.9) má vlastnost mean reverze a koeficient  $b$  můžeme vysvětlit jako rovnovážný stav (equilibrium), do kterého má neustále fluktující proces tendenci se navracet. Parametr  $a$  opět značí rychlost mean reverze. Vlastnost mean reverze je typická pro chování úrokových měr, čímž se odlišuje od chování akciových kurzů. Logicky se toto chování jeví i z ekonomického hlediska, neboť pokud jsou úrokové sazby vysoké, ekonomika má tendenci se zpomalovat a lidé si půjčují méně peněz. Tím pádem úrokové sazby poklesnou. Naopak pokud jsou úrokové sazby příliš nízké, vede to k zvýšení zájmu o půjčky a tedy k vzrůstu úrokových sazeb.

Výše zmíněný model však pracuje s konstantními hodnotami vyjadřujícími trend a volatilitu krátkodobé úrokové míry a tím pádem nezohledňuje v realitě zřejmou závislost na čase. Tato časová závislost může být způsobena cyklickou povahou ekonomiky, očekáváním v souvislosti se změnami v měnové politice a dalšími makroekonomickými faktory. Pokud budeme uvažovat  $a(t)$  a  $\sigma(t)$  závislé na čase a přidáme časově závislý drift  $\theta(t)$ , proces krátkodobé úrokové míry  $\{r_t\}$  se pak bude řídit rovnicí

$$dr_t = (\theta(t) + a(t)(b - r_t)) dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t, \quad (3.10)$$

kde  $\theta(t)$  je funkce času, která se zvolí tak, aby byla zajištěna shoda s počáteční časovou strukturou úrokových měr. Rovnici (3.10) můžeme ekvivalentně zapsat také ve tvaru

$$dr_t = a(t) \left( \frac{\theta(t)}{a(t)} + b - r_t \right) dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t \quad (3.11)$$

kde  $\frac{\theta(t)}{a(t)} + b$  je úroveň mean reverze jakožto funkce času.

### 3.3.1 Rozšíření Vašíčkova modelu

Uvažujme nyní rovnici (3.10) s parametrem  $\beta = 0$ , tedy rovnici

$$dr_t = (\theta(t) + a(t)(b - r_t)) dt + \sigma(t)dW_t, \quad (3.12)$$

a odvod' me vztah, který musí splňovat cena jakéhokoli finančního derivátu závisejícího na vývoji úrokové míry  $r_t$ . Nejprve si však shrňme, co víme, a zaved' me dodatečné předpoklady.

- Rovnice (3.12) modeluje vývoj okamžité spotové úrokové míry, kterou jsme v první kapitole definovali jako limitu úrokových měr při zbývající době do splatnosti  $T - t$  jdoucí k 0. Vývoj spotové úrokové míry v intervalu  $[t, T]$  je určen jejími hodnotami do času  $t$ . Jde o úrokovou míru, která vyjadřuje okamžitou sazbu, za kterou je možno si půjčit či při které je možno vložit peněžní prostředky. Předpokládáme tedy, že  $\Pi$  značí bezrizikové portfólio, které se při spotové úrokové míře  $r(t)$  zhodnocuje tak, že

$$d\Pi = \Pi r(t) dt. \quad (3.13)$$

- Cenu diskontovaného dluhopisu s nulovým kupónem v čase  $t$  s dobou splatnosti  $T$  značíme  $P(t, T)$ . Logicky předpokládáme, že tato cena je zároveň funkcí okamžité spotové míry, neboli že

$$P(t, T) = P(t, T, r(t)). \quad (3.14)$$

Okamžitá míra výnosnosti dluhopisu v čase  $t$  s dobou splatnosti  $T$  je dána hodnotou  $r(t) = r$ .

- Finanční trh je spravedlivý a neexistuje tedy možnost arbitráže.

Aplikací Itôova lemmatu dostáváme, že pro cenu diskontovaného dluhopisu platí

$$dP = P\mu(t, T)dt - P\rho(t, T)dW_t, \quad (3.15)$$

kde  $\mu(t, T) = \mu(t, T, r)$  vyjadřuje střední hodnotu a  $\rho(t, T) = \rho(t, T, r)$  volatilitu okamžité míry výnosnosti v čase  $t$  dluhopisu se splatností v čase  $T$  při současné spotové úrokové míře  $r(t) = r$  a jsou dány jako

$$\mu(t, T, r) = \frac{1}{P(t, T, r)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(b - r)) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t, T, r) \quad (3.16)$$

$$\rho(t, T, r) = -\frac{1}{P(t, T, r)}\sigma(t)\frac{\partial}{\partial r}P(t, T, r) \quad (3.17)$$

Představme si nyní, že v čase  $t$  emitujeme množství  $\Pi_1$  dluhopisu se splatností  $T_1$  a koupíme množství  $\Pi_2$  s dobou splatnosti  $T_2$ . Hodnota našeho portfolia tedy bude  $\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$ . Použitím Itôova lemmatu na rovnici (3.15) pro  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$  dostaneme, že

$$d\Pi = (\Pi_2\mu(t, T_1) - \Pi_1\mu(t, T_2)) dt - (\Pi_2\rho(t, T_1) - \Pi_1\rho(t, T_2)) dW_t. \quad (3.18)$$

Abychom získali bezrizikové portfolio, tedy odstranili z rovnice (3.18) závislost na  $dW_t$ , určíme si množství jednotlivých dluhopisů  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$  tak, že

$$\Pi_1 = \frac{\Pi\rho(t, T_2)}{\rho(t, T_1) - \rho(t, T_2)} \text{ a } \Pi_2 = \frac{\Pi\rho(t, T_1)}{\rho(t, T_1) - \rho(t, T_2)}. \quad (3.19)$$

Do rovnice (3.18) dosadíme za  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$  výrazy z (3.19) a rovnice pro změnu hodnoty portfolia je následující

$$d\Pi = \frac{\Pi}{\rho(t, T_1) - \rho(t, T_2)} (\mu(t, T_2)\rho(t, T_1) - \mu(t, T_1)\rho(t, T_2)) dt. \quad (3.20)$$

Porovnáním rovnic (3.13) a (3.20) zjistíme, že musí platit rovnost

$$\frac{1}{\rho(t, T_1) - \rho(t, T_2)} (\mu(t, T_2)\rho(t, T_1) - \mu(t, T_1)\rho(t, T_2)) = r(t) \quad (3.21)$$

neboli

$$\frac{\mu(t, T_1) - r(t)}{\rho(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r(t)}{\rho(t, T_2)}. \quad (3.22)$$

Vidíme tedy, že poměr

$$\frac{\mu(t, T) - r(t)}{\rho(t, T)}$$

nezávisí na době splatnosti  $T$ . Vezměme znovu v úvahu, že pro nás  $r(t) = r$  a označme si společnou hodnotu pro tento poměr jako

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, T, r) - r}{\rho(t, T, r)} \text{ pro všechna } T \geq t. \quad (3.23)$$

Takto definovaný poměr  $\lambda(t, r)$  bývá označován jako tržní cena rizika a vyjadřuje změnu očekávané okamžité míry výnosnosti dluhopisu při změně výše rizika. Předpokládejme, že  $\lambda$  je pouze funkcí času omezená na jakémkoli intervalu  $(0, \tau)$ , tedy budeme značit  $\lambda(t, r) = \lambda(t)$ . Jak se dozvíme např. v Hull, White [6], tento předpoklad zajišťuje, že platí podmínka neexistence arbitráže. Dosazením vztahů pro  $\mu(t, T, r)$  z rovnice (3.16) a  $\rho(t, T, r)$  z rovnice (3.17) do rovnice (3.23) získáme po úpravách rovnici

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(b - r) - \lambda(t)\sigma(t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP. \quad (3.24)$$



Pokud tedy označíme  $f$  cenu jakéhokoli finančního derivátu, který závisí na úrokové míře dané rovnicí (3.12), víme, že  $f$  musí splňovat

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(b - r) - \lambda(t)\sigma(t)) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = rf. \quad (3.25)$$

Přepíšeme si nyní rovnici (3.25) do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\Phi(t) - a(t)r) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = rf, \quad (3.26)$$

kde

$$\Phi(t) = \theta(t) + a(t)b - \lambda(t)\sigma(t)$$

Řešením této rovnice je diskontovaný dluhopis, který v čase  $T$  vyplácí jednu jednotku měny. Uvažujme tedy funkci tvaru

$$f = A(t, T)e^{-B(t, T)r}, \quad (3.27)$$

a zjistíme, co musí splňovat funkce  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$ . Pro zjednodušení budeme psát místo  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$  pouze  $A$  a  $B$ . Vyjádření funkce  $f$  ve tvaru (3.27) dosadíme do (3.26) a po výpočtu příslušných parciálních derivací dostáváme rovnici

$$\frac{\partial A}{\partial t} e^{-Br} - Ae^{-Br} r \frac{\partial B}{\partial t} - (\Phi(t) - a(t)r) AB e^{-Br} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) AB^2 e^{-Br} = Ae^{-Br} r. \quad (3.28)$$

Rovnici (2.31) můžeme vydělit  $e^{-Br}$ , neboť  $e^{-Br} > 0$ . Porovnáním koeficientů u  $r$  zjistíme, že

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \Phi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2(t)^2 AB^2 = 0, \quad (3.29)$$

a porovnáním koeficientů u ostatních členů musí platit, že

$$\frac{\partial B}{\partial t} - a(t)B + 1 = 0, \quad (3.30)$$

Navíc, aby byla splněna okrajová podmínka pro  $f$ , tedy, že v čase  $T$  je její hodnota 1, musí také platit, že

$$A(T, T) = 1; B(T, T) = 0. \quad (3.31)$$

V uvažovaném rozšíření Vašíčkova modelu je zapotřebí vybrat funkci  $\sigma(t)$  tak, aby odrážela okamžitou i budoucí volatilitu krátkodobé úrokové míry  $r$ . Chceme také, aby model poskytoval shodu s počáteční časovou strukturou úrokových měr, což zajistíme prostřednictvím  $A(0, T)$  a  $B(0, T)$ . Dalším krokem tedy bude vyjádření  $a(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$  pomocí  $\sigma(t)$ ,  $A(0, T)$  a  $B(0, T)$ . Zderivováním rovnic (3.29) a (3.30) podle  $T$  dostaneme rovnice

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial T} - \Phi(t) \left( \frac{\partial A}{\partial T} B + A \frac{\partial B}{\partial T} \right) + \frac{\sigma^2(t)}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial T} B^2 + 2AB \frac{\partial A}{\partial T} \right) = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} - a(t) \frac{\partial B}{\partial T} = 0. \quad (3.33)$$

Vyjádřením  $a(t)$  z rovnice (3.30) a dosazením do (3.33) získáme rovnici

$$\frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial T} - B \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} + \frac{\partial B}{\partial T} = 0 \quad (3.34)$$

a analogicky vyjádřením  $\Phi(t)$  z rovnice (3.29) a dosazením do (3.32) dostáváme rovnici

$$AB \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial T} - B \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial T} - A \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\sigma^2(t)}{2} A^2 B^2 \frac{\partial B}{\partial T} = 0. \quad (3.35)$$

Nyní hledáme řešení rovnic (3.34) a (3.35) při počátečních podmínkách daných podmínkou (3.31) a známými hodnotami  $A(0, T)$  a  $B(0, T)$ . Řešením vzhledem k těmto počátečním podmínkám jsou podle Hull, White [6] funkce  $\hat{A}(t, T) = \log A(t, T)$  a  $B(t, T)$  dané rovnicemi

$$\hat{A}(t, T) = \hat{A}(0, T) - \hat{A}(0, t) - B(t, T) \frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} - \quad (3.36)$$

$$-\frac{1}{2} \left( B(t, T) \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left( \frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right)^2 d\tau,$$

$$B(t, T) = \frac{B(0, T) - B(0, t)}{\partial B(0, t) / \partial t}. \quad (3.37)$$

Dosazením do rovnic (3.29) a (3.30) získáme vyjádření  $a(t)$  a  $\Phi(t)$  pomocí  $\sigma(t)$ ,  $B(0, t)$  a  $A(0, t)$  resp.  $\hat{A}(0, t)$

$$a(t) = - \frac{\partial^2 B(0, t) / \partial t}{\partial B(0, t) / \partial t} \quad (3.38)$$

$$\Phi(t) = -a(t) \frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{A}(0, t)}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left( \frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right)^2 d\tau. \quad (3.39)$$

### 3.3.2 Oceňování opcí rozšířeným Vašíčkovým modelem

Předpokládejme, že cena diskontovaného dluhopisu v čase  $t$  se splatností v čase  $s$  je opět funkcí úrokové míry a je tvaru

$$P(t, s, r) = A(t, s) e^{-B(t, s)r}. \quad (3.40)$$

Užitím Itôova lemmatu zjistíme, že volatilita ceny  $P(t, s, r)$  v tomto tvaru je  $\sigma(t)B(t, s)$ , neboť volatilita  $\rho(t, s)$  z rovnice (3.15) je v tomto případě rovna

$$\rho(t, s) = - \frac{1}{A(t, s) e^{-B(t, s)r}} \sigma(t) A(t, s) e^{-B(t, s)r} (-B(t, s)) = \sigma(t) B(t, s) \quad (3.41)$$

Díky nezávislosti volatilita na úrokové míře  $r$  je rozdělení ceny dluhopisu v čase  $t_1 < t_2$  za podmínky  $\mathcal{F}_{t_1}$  logaritmičsky normální.

Výše popsaný model nyní aplikujeme na oceňování CALL opce s realizační cenou  $K$ . Uvažujme opci v čase  $t$ , dobu splatnosti opce v čase  $T$  a dobu splatnosti dluhopisu s nulovým kupónem v čase  $s$ , přičemž  $t \leq T \leq s$ . Tuto opci si můžeme představit jako možnost vyměnit  $K$  jednotek diskontovaného dluhopisu se splatností  $T$  za jednu jednotku diskontovaného dluhopisu se splatností v čase  $s$ . Dále budeme uvažovat volatilitu  $\alpha_1(\tau)$ ,  $\alpha_2(\tau)$  ceny dluhopisu v čase  $\tau$  se splatnostmi v časech  $T$  a  $s$  a okamžitou korelaci cen těchto dluhopisů  $\rho(\tau)$  v čase  $\tau$ . Cenu opce  $C$  pak podle Hull, White [6] určíme jako

$$C = P(t, s, r)\mathcal{N}(h) - KP(t, T, r)\mathcal{N}(h - \sigma_P) \quad (3.42)$$

kde

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \log \frac{P(s, t, r)}{KP(t, T, r)} + \frac{\sigma_P}{2}$$

$$\sigma_P^2 = \int_t^T (\alpha_1^2(\tau) - 2\rho(\tau)\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau) + \alpha_2^2(\tau)) d\tau \quad (3.43)$$

a  $\mathcal{N}(\cdot)$  je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Protože uvažujeme jednofaktorový model, platí, že  $\rho = 1$ . Navíc

$$\alpha_1(\tau) = \sigma(\tau)B(\tau, s)$$

$$\alpha_2(\tau) = \sigma(\tau)B(\tau, T).$$

Tedy

$$\sigma_P^2 = \int_t^T \sigma(\tau)^2 (B(\tau, s) - B(\tau, T))^2 d\tau.$$

Užitím rovnice (3.38) pak dostáváme

$$\sigma_P^2 = (B(0, s) - B(0, T))^2 \int_t^T \left( \frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right)^2 d\tau. \quad (3.44)$$

Z rovnic (3.42) a (3.44) pak můžeme analyticky určit řešení, tedy cenu evropské CALL opce. Pro ocenění evropských PUT opcí bychom užili PUT-CALL parity.

### Příklad

Uvažujme evropskou CALL opci s realizační cenou  $K$  a dobou splatnosti  $T$  na diskontovaný dluhopis s kupónovými platbami  $c_i$  v časech  $s_i > T$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Za těchto předpokladů bude opce realizována, pokud  $r(T) < \tilde{r}$ , kde  $\tilde{r}$  je řešení rovnice

$$\sum_{i=1}^n c_i P(T, s_i, \tilde{r}) = K.$$

Opce tedy vyplácí

$$\max \left[ 0, \sum_{i=1}^n c_i P(T, s_i, r) - K \right],$$

což můžeme zapsat také jako

$$\sum_{i=1}^n c_i \max [0, P(T, s_i, r) - K_i],$$

kde

$$K_i = P(T, s_i, \tilde{r}).$$

Vidíme tedy, že opce na kupónový dluhopis s  $n$  kupónovými platbami je portfoliem  $n$  opcí na diskontované dluhopisy, přičemž realizační cena  $i$ -té opce je  $K_i$ .

### 3.3.3 Rozšíření CIR modelu

Jestliže budeme uvažovat v základní rovnici (3.11)  $\beta = 0, 5$ , dostaneme pro rozšířený CIR model rovnici

$$dr_t = (\theta(t) + a(t)(b - r_t)) dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t. \quad (3.45)$$

Odvození rovnice pro cenu úrokového derivátu probíhá analogicky jako u rozšíření Vašíčkova modelu. Pouze  $\sigma(t)$  nahradíme  $\sigma(t)\sqrt{r}$  a předpokládáme, že tržní cena úrokového rizika je  $\lambda(t, r) = \lambda(t)\sqrt{r}$ , kde  $\lambda(t)$  je omezená funkce na jakémkoli intervalu  $(0, \tau)$ , tedy opět je splněna podmínka neexistence arbitráže. Cena jakéhokoli úrokového derivátu  $f$  pak musí splňovat

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\Phi(t) - \Psi(t)r) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = rf, \quad (3.46)$$

kde

$$\Phi(t) = a(t)b + \theta(t)$$

$$\Psi(t) = a(t) + \lambda(t)\sigma(t).$$

Opět uvažujme řešení rovnice (3.46) jako funkci tvaru

$$f = A(t, T)e^{-B(t, T)r}. \quad (3.47)$$

Ta bude cenou diskontovaného dluhopisu v čase  $t$  se splatností v čase  $T$ , pokud

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \Phi(t)AB = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \Psi(t)B - \frac{1}{2}\sigma^2(t)B^2 + 1 = 0, \quad (3.49)$$

$$A(T, T) = 1 \text{ a } B(T, T) = 0. \quad (3.50)$$

Toto lze odvodit stejným způsobem jako u rozšířeného Vašíčkova modelu. Zderivováním rovnice (3.49) podle  $T$  a eliminací  $\Psi(t)$  získáme

$$\frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial T} - B \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} + \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)B^2 \frac{\partial B}{\partial T} = 0. \quad (3.51)$$

Řešení této rovnice se dá určit použitím konečných diferencních metod. Řešením rovnice (3.48) je

$$A(t, T) = A(0, T) \exp \left[ \int_0^t \Phi(s) B(s, T) ds \right]. \quad (3.52)$$

Poté dopočteme  $\Psi(t)$  z rovnice (3.49) a iterační metodou s počáteční podmínkou  $A(T, T) = 1$  dostaneme  $\Phi(t)$  z rovnice

$$\int_0^T \Phi(s) B(s, T) ds = -\log A(0, T).$$

Abychom mohli určit řešení analyticky, musely by být  $\sigma$ ,  $\Phi$  a  $\Psi$  konstantní, a tedy oceňování jakýchkoli úrokových derivátů touto metodou vyžaduje postupy numerické matematiky.

### 3.3.4 Časová struktura úrokových měr v Hull-Whiteově modelu

To, co bývá označováno jako Hull-Whiteův model, je výše popsané rozšíření Vašíčkova a CIR modelu, které zajišťuje konzistenci jednak se současnou časovou strukturou spotových či forwardových úrokových měr a jednak se současnou časovou strukturou volatilit úrokových měr. Jak jsme již naznačili v části 3.3.1, shoda s počáteční časovou strukturou úrokových měr a také s počáteční časovou strukturou volatilit úrokových měr je zajištěna pomocí  $A(0, T)$  a  $B(0, T)$ . Dále jsme uvedli, že  $\sigma(t)$  vybereme tak, aby odpovídala očekávané budoucí okamžité volatilitě krátkodobé úrokové míry.

Nejprve si ukážeme, jak souvisí  $B(0, T)$  s časovou strukturou spotových a forwardových úrokových měr. Cena diskontovaného dluhopisu s dobou splatnosti  $T$  závislou na úrokové míře  $r$  je pro nás funkce tvaru

$$P(t, T, r) = A(t, T) e^{-B(t, T)r}. \quad (3.53)$$

Potom spotovou úrokovou míru při spojitém úročení v čase  $t$  platnou mezi časem  $t$  a dobou splatnosti dluhopisu  $T$  a konvencí, že  $\tau(t, T) = T - t$ , lze zapsat jako

$$R(t, T, r) = -\frac{\log P(t, T, r)}{T - t} = -\frac{\log A(t, T) - rB(t, T)}{T - t}$$

a tedy

$$\frac{\partial R(t, T, r)}{\partial r} = \frac{B(t, T)}{T - t}.$$

Označme si nyní  $\sigma_r(t, r)$  volatilitu  $r$  v čase  $t$  a  $\sigma_R(t, T, r)$  volatilitu  $R(t, T, r)$ . Z Itôova lemmatu plyne, že

$$R(t, T, r) \sigma_R(t, T, r) = r \sigma_r(t, r) \frac{\partial R(t, T, r)}{\partial r}.$$

Odtud plyne, že

$$B(t, T) = \frac{R(t, T, r) \sigma_R(t, T, r) (T - t)}{r \sigma_r(t, r)}. \quad (3.54)$$

Nyní si označme  $F(t, T_1, T_2, r)$  forwardovou úrokovou mírou v čase  $t$  platnou mezi časy  $T_1$  a  $T_2$ , kterou lze pomocí spotových úrokových měř vyjádřit jako

$$F(t, T_1, T_2, r) = \frac{R(t, T_2, r)(T_2 - t) - R(t, T_1, r)(T_1 - t)}{T_2 - T_1}$$

Za předpokladu, že  $R(t, T_1, r)$  a  $R(t, T_2, r)$  jsou v každém okamžiku plně korelované a  $\sigma_F(t, T_1, T_2, r)$  značí volatilitu  $F(t, T_1, T_2, r)$ , z rovnice (3.54) plyne, že

$$B(t, T_2) - B(t, T_1) = \frac{F(t, T_1, T_2, r)\sigma_F(t, T_1, T_2, r)(T_2 - T_1)}{r\sigma_r(t, r)}. \quad (3.55)$$

Rovnice (3.54) resp. (3.55) definují  $B(0, T)$  pro všechna  $T$  pomocí současné časové struktury volatilit spotových resp. forwardových měř.  $A(0, T)$  je určeno pomocí  $B(0, T)$  a současné časové struktury úrokových měř z rovnice pro cenu dluhopisu

$$P(0, T, r_0) = A(0, T)e^{-B(0, T)r_0}, \quad (3.56)$$

kde  $r_0$  je krátkodobá úroková míra v čase 0. Ukázali jsme tedy, že  $A(0, T)$  a  $B(0, T)$  lze definovat pro všechna  $T$  současnou časovou strukturou úrokových měř a současnou časovou strukturou volatilit úrokových měř.

### 3.3.5 Konstrukce trinomických stromů úrokových měř

Trinomické Hull-Whiteovy stromy úrokových měř představují diskétní reprezentaci stochastického procesu vývoje krátkodobé úrokové míry. O této problematice pojednává John Hull ve své knize Hull [5], ale podrobnější užití tohoto principu lze nalézt také v článku Hull, White [7]. Konstrukce Hull-Whiteova stromu spočívá ve dvou fázích.

#### První fáze

Uvažujme pro zjednodušení rovnici pro rozšířený Vašíčkův proces (3.12), kde parametry  $a$  a  $\sigma$  jsou konstantní a parametr  $b = 0$ , tedy rovnici

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t. \quad (3.57)$$

Označme si  $\delta t$  časový krok stromu. Úrokové míry v trinomickém stromě budou spojitě určované přes periodu  $\delta t$  a proto je zapotřebí předpokládat, že se úroková míra  $R$  s periodou  $\delta t$  řídí stejným procesem jako okamžitá úroková míra  $r_t = r(t)$ , tedy

$$dR(t) = (\theta(t) - aR(t))dt + \sigma dW_t. \quad (3.58)$$

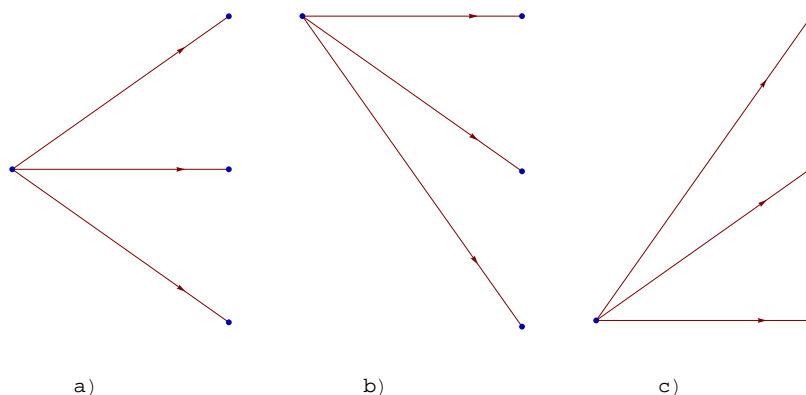
V první fázi vytvoříme strom pro úrokovou mírou  $R^*$ , kterou získáme, když budou  $\theta(t)$  i počáteční hodnota  $R$  nulové. Proces pro  $R^*$  je tedy dán rovnicí

$$dR^*(t) = -aR^*(t)dt + \sigma dW_t. \quad (3.59)$$

Proces pro  $R^*$  je symetrický kolem nuly. Přírůstky  $R^*(t+\delta t) - R^*(t)$  jsou normálně rozdělené se střední hodnotou  $-aR^*\delta t$  a rozptylem  $\sigma^2\delta t$ . Krok mezi úrokovými měřami stromu označíme  $\delta R$  a definujeme podle Hull [5] jako

$$\delta R = \sigma\sqrt{3\delta t}. \quad (3.60)$$

Předpokládáme, že ve stromě jsou možné tři typy větvení procesu a), b) a c), které jsou znázorněny na obrázku 3.2. Je třeba určit, které větvení kdy použijeme a určit pro každý typ větvení pravděpodobnosti jednotlivých možností.



Obrázek 3.2: Možnosti větvení v trinomickém stromě

Uzly stromu označíme souřadnicemi  $(i, j)$  tak, že  $t = i\delta t$  a  $R^* = j\delta R$  pro  $i = 0, \dots, n$  a  $j = j_{min}, \dots, j_{max}$ , kde  $n$  si zvolíme podle toho, jak dlouhý vývoj úrokové míry chceme modelovat, a  $j_{min} = -j_{max}$  zvolíme podle Hull [5] jako horní celou část  $\frac{0.184}{a\delta t}$ . Tato volba souvisí s pravděpodobnostmi, že úroková míra  $R^*$  v dalším kroku vzroste ( $p_u$  jako up), zůstane stejná ( $p_m$  jako middle) nebo klesne ( $p_d$  jako down). Tyto pravděpodobnosti budou závislé na  $j$  a správnou volbou  $j_{min}$  a  $j_{max}$  zajistíme, že pravděpodobnosti budou ve vhodném typu větvení vždy nezáporné. Pravděpodobnosti  $p_u$ ,  $p_m$  a  $p_d$  v každém uzlu  $(i, j)$  vypočteme tak, aby nastala shoda se střední hodnotou a rozptylem změny  $R^*$  za časový krok  $\delta t$ . V konečném důsledku budou pravděpodobnosti pro jednotlivé typy větvení vypadat následovně.

a)

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2\delta t^2 j^2 - a\delta t j}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2\delta t^2 j^2 \quad (3.61)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2\delta t^2 j^2 + a\delta t j}{2}$$

b)

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2\delta t^2 j^2 + a\delta t j}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2\delta t^2 j^2 - 2a\delta t j \quad (3.62)$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2\delta t^2 j^2 + 3a\delta t j}{2}$$

c)

$$\begin{aligned}
 p_u &= \frac{7}{6} + \frac{a^2 \delta t^2 j^2 - 3a \delta t j}{2} \\
 p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 \delta t^2 j^2 + 2a \delta t j \\
 p_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 \delta t^2 j^2 - a \delta t j}{2}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

### Příklad

Ukažme si, jak bude vypadat trinomický strom pro úrokovou míru  $R^*$  s parametry  $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$  a  $\delta t = 1$  rok. Potom  $\delta R$  je podle rovnice (3.60)  $\delta R = 0.0173$  a  $R^* = 0.0173j$ . Dopočteme ještě, že  $j_{min} = -2$  a  $j_{max} = 2$ . Za těchto předpokladů bude trinomický strom pro  $n = 2$  vypadat jako na obrázku 3.3. Příslušné hodnoty úrokové míry  $R^*$  a pravděpodobnosti  $p_u$ ,  $p_m$  a  $p_d$  pro uzly A až I jsou znázorněny v následující tabulce.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R^*$	0	0.01732	0	-0.01732	0.03464	0.01732	0	-0.01732	-0.03464
$p_u$	$\frac{1}{6}$	0.12167	$\frac{1}{6}$	0.22167	0.88667	0.12167	$\frac{1}{6}$	0.22167	0.08667
$p_m$	$\frac{2}{3}$	0.65667	$\frac{2}{3}$	0.65667	0.02667	0.65667	$\frac{2}{3}$	0.65667	0.02667
$p_d$	$\frac{1}{6}$	0.22167	$\frac{1}{6}$	0.12167	0.08667	0.22167	$\frac{1}{6}$	0.12167	0.08667

Výpočet hodnot v tabulce je možno provést v programu Mathematica 6 pomocí procedury uvedené v dodatku A.1.

### Druhá fáze

V druhé fázi tvorby stromu přeměníme strom pro  $R^*$  na strom pro  $R$  tak, aby nastala shoda s počáteční strukturou úrokových měr. Definujme si rozdíl

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t). \tag{3.64}$$

Potom z rovnic (3.58) a (3.59) snadno určíme, že

$$d\alpha(t) = dR(t) - dR^*(t) = (\theta(t) - aR(t) + aR^*(t))dt = (\theta(t) - a\alpha(t))dt. \tag{3.65}$$

Podle Hull [5] lze  $\theta(t)$  v tomto případě vyjádřit pomocí počáteční struktury forwardových měr jako

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \tag{3.66}$$

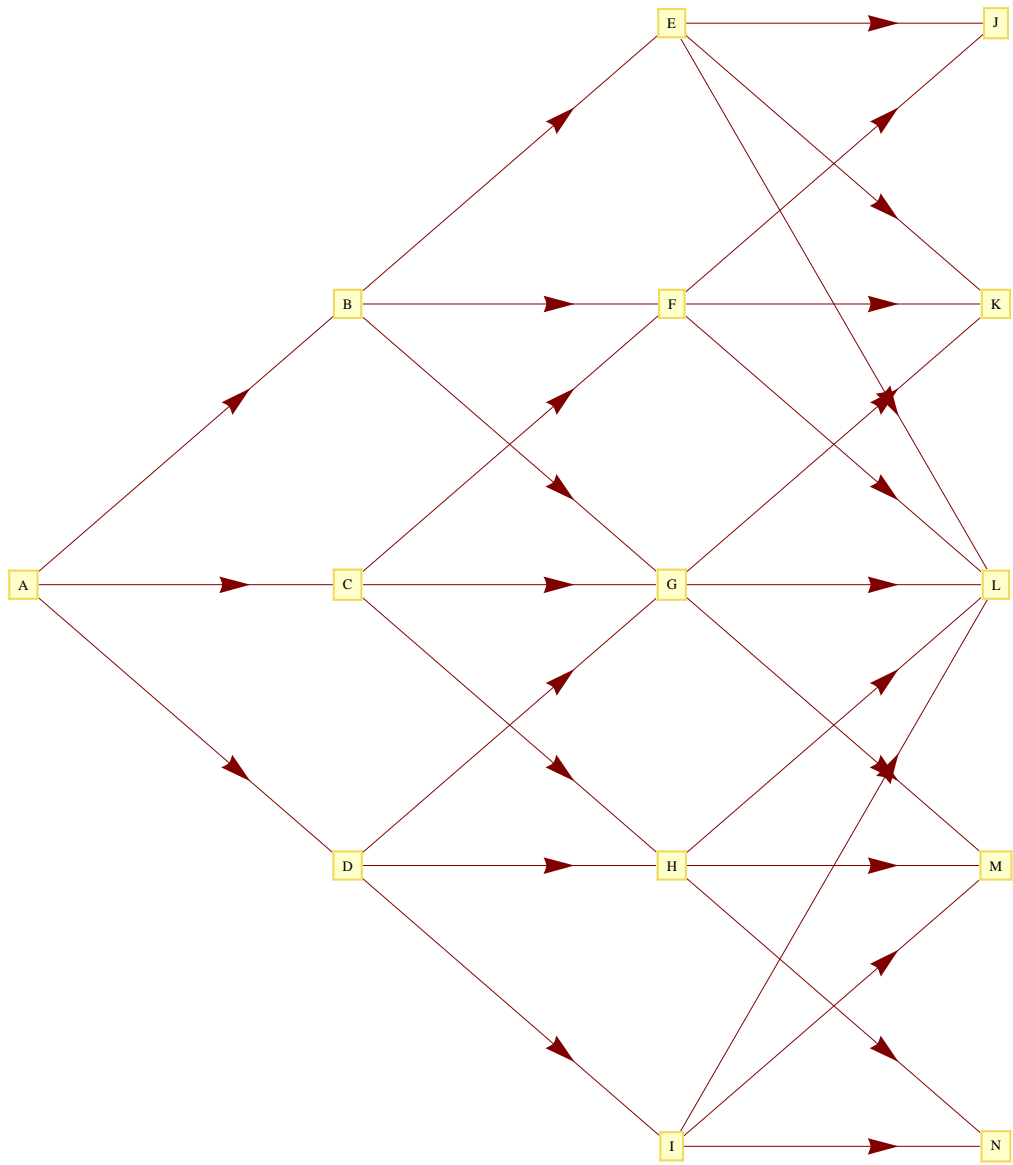
kde  $F(0, t)$  značí okamžitou forwardovou úrokovou míru pro dobu splatnosti  $t$  vztaženou k času 0. Potom  $\alpha(t)$  vypočteme z rovnice (3.65) a dostaneme tak, že

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2. \tag{3.67}$$

Naším cílem bude tedy určit  $\alpha(t)$  a z rovnice (3.64) dopočítat následně  $R(t)$ .

Nejprve si označíme  $\alpha_i = \alpha(i\delta t)$  a  $Q_{i,j}$  současnou hodnotu cenného papíru, který vyplácí jednu jednotku měny, pokud se nacházíme v uzlu  $(i, j)$ , a 0 jinak.



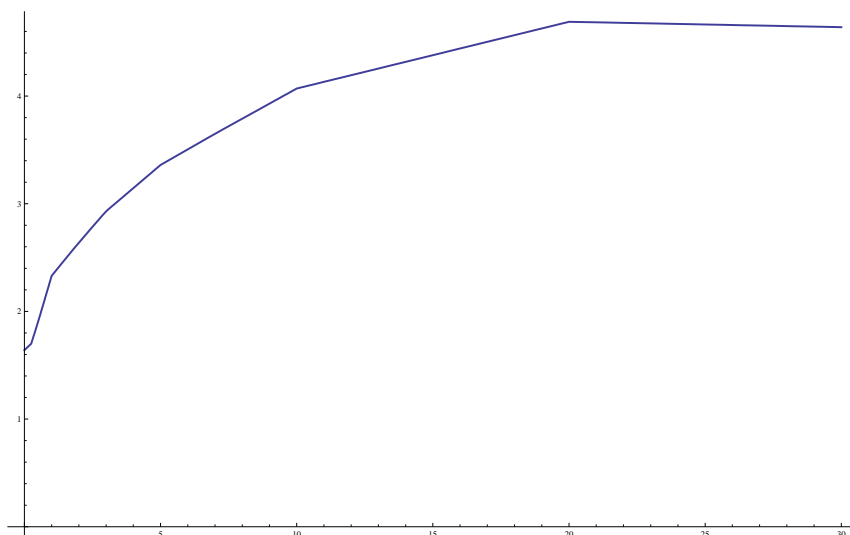


Obrázek 3.3: Trinomický strom pro úrokovou míru  $R^*$

Následující tabulka popisuje výnosovou křivku amerických Treasury Bonds k 30.7.2008. Tato data je možno nalézt na internetové stránce [12].

Doba splatnosti	1M	3M	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y	10Y	20Y	30Y
Úroková míra v %	1.66	1.70	1.90	2.33	2.64	2.93	3.36	3.65	4.07	4.69	4.64

Pokud neznáme všechny potřebné hodnoty pro zvolené  $\delta t$  (pro nás tedy data pro všechny roční doby splatnosti), je možné např. lineární interpolací získat zbývající data. Obrázek 3.4 znázorňuje průběh interpolované výnosové křivky z tabulky.



Obrázek 3.4: Výnosová křivka

Nyní naznačíme výpočet  $\alpha_i$  pomocí  $Q_{i,j}$  pro několik prvních hodnot.

#### Příklad (pokračování)

Hodnota  $Q_{0,0}$  je rovna 1 a  $\alpha_0$  určíme tak, aby dluhopis s nulovým kupónem vyplatil jednu jednotku měny v čase  $\delta t$ . Z výnosové křivky tedy vybereme hodnotu pro  $\delta t$ . V našem příkladě tedy  $\alpha_0 = 0.0233$  a známe již potřebné hodnoty pro první uzel.

Dalším krokem je zjistit  $Q_{1,1}$ ,  $Q_{1,0}$  a  $Q_{1,-1}$ . Tyto hodnoty získáme pronásobením pravděpodobností v uzlu s příslušnými diskontními faktory a tedy

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1} &= p_u(0)e^{-0.0233} = \frac{1}{6}e^{-0.0233} = 0.1628 \\
 Q_{1,0} &= p_m(0)e^{-0.0233} = \frac{2}{3}e^{-0.0233} = 0.6513 \\
 Q_{1,-1} &= p_d(0)e^{-0.0233} = \frac{1}{6}e^{-0.0233} = 0.1628,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

kde  $p_u(0)$ ,  $p_m(0)$  a  $p_d(0)$  jsou pravděpodobnosti (3.61) pro větvení a) při  $j = 0$ .

Nyní určíme  $\alpha_1$  tak, abychom dostali správnou cenu pro dluhopis se splatností  $2\delta t$ , tedy odpovídající hodnota výnosové křivky bude 0.0264. Musí pak platit, že

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+\delta R)} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-\delta R)} = e^{-2\delta t \cdot 0.0264}. \tag{3.69}$$

Dosazením známých hodnot do rovnice (3.69) zjistíme, že  $\alpha_1$  musí splňovat

$$e^{-\alpha_1}(0.1628e^{-0.0173} + 0.6513 + 0.1628e^{0.0173}) = 0.94857$$

neboli

$$\alpha_1 = \log\left(\frac{0.1628e^{-0.0173} + 0.6513 + 0.1628e^{0.0173}}{0.94857}\right) = 0.02955. \quad (3.70)$$

Přičtením  $\alpha_1$  k hodnotám stromu pro  $R^*$  v uzlech B, C a D získáme nové hodnoty úrokové míry  $R$  v těchto uzlech (v B 0.04687, v C 0.02955 a v D 0.01223).

Výpočet  $Q_{2,2}$ ,  $Q_{2,1}$ ,  $Q_{2,0}$ ,  $Q_{2,-1}$  a  $Q_{2,-2}$  je o trochu složitější. Ukažme si princip výpočtu např. pro  $Q_{2,1}$ , tedy pro uzel F. Do tohoto uzlu je možno se dostat z uzlu B (s pravděpodobností 0.65667) a uzlu C (s pravděpodobností  $\frac{1}{6}$ ). Hodnota cenného papíru, který vyplácí jednu jednotku měny v uzlu F, je tedy rovna v uzlu B  $0.65667e^{-0.04687}$  a v uzlu C  $\frac{1}{6}e^{-0.02955}$ .  $Q_{2,1}$  vypočteme jako součet těchto hodnot pronásobených  $Q_{1,1}$  pro B a  $Q_{1,0}$  pro C z rovnic (3.68) neboli

$$Q_{2,1} = 0.1628 \cdot 0.65667e^{-0.04687} + 0.6513 \frac{1}{6}e^{-0.02955} = 0.2074.$$

Obdobně spočteme i zbývající hodnoty  $Q_{2,2}$ ,  $Q_{2,0}$ ,  $Q_{2,-1}$  a  $Q_{2,-2}$  a z nich následně určíme  $\alpha_2$ . Z výnosové křivky si vezmeme hodnotu pro  $3\delta t$ , tedy tříletou dobu splatnosti, a dopočteme  $\alpha_2$  analogicky jako u  $\alpha_1$ .

V našem příkladě jsme tedy dopočetli, že  $\alpha_2 = 0.0677053$ . V následující tabulce jsou obsaženy napočetné hodnoty  $Q_{i,j}$  a hodnota úrokové míry  $R$  v uzlech A až I.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R$	0.0233	0.04687	0.02955	0.01223	0.10234	0.08503	0.06771	0.05038	0.03306
$Q_{i,j}$	1	0.1628	0.6513	0.1628	0.0189	0.2074	0.4693	0.2474	0.03565

Hodnoty v tabulce a hodnoty  $\alpha_i$  pro  $i = 0, 1, 2$  byly vypočteny v programu Mathematica 6. Zdrojový kód k výpočtům je uveden v dodatku A.2.

Následující tabulka udává hodnoty stromu pro  $R$  při různě zvolených parametrech  $a$  a  $\sigma$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R_a$	0.0233	0.04687	0.02955	0.01223	0.10234	0.08503	0.06771	0.05038	0.03306
$R_b$	0.0233	0.06434	0.0297	-0.00494	0.13881	0.10417	0.06953	0.03489	0.00025
$R_c$	0.0233	0.04687	0.02955	0.01223	0.11706	0.09974	0.08241	0.06509	0.04777
$R_d$	0.0233	0.06434	0.0297	-0.00494	0.1542	0.11956	0.08492	0.05027	0.01563

$R_a$  značí hodnoty stromu pro  $a = 0.1$  a  $\sigma = 0.01$ ,  $R_b$  pro  $a = 0.1$  a  $\sigma = 0.02$ ,  $R_c$  pro  $a = 0.15$  a  $\sigma = 0.01$  a  $R_d$  pro  $a = 0.15$  a  $\sigma = 0.02$ . Z této tabulky vidíme, že při zvýšení  $\sigma$  se zvětší rozsah hodnot ve stromě. Při zvýšení parametru  $a$  se hodnoty ve stromě posunou směrem nahoru. Strom se tedy deformuje v závislosti na zvolených parametrech rychlosti mean reverze  $a$  a volatility  $\sigma$  přesně tak, jak bychom intuitivně očekávali.

# Literatura

- [1] Brennan, M. J., Schwartz, E.S.: *An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17, 3, str. 301-329, 1982.
- [2] Brigo, D.,Mercurio, F.: *Interest rate models : theory and practice*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [3] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, 53, str. 385-407, 1985.
- [4] Delbaen F., Schachermayer W.: *The Mathematics of Arbitrage*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [5] Hull, J.: *Option, Futures and Other Derivative Securities, Fifth Edition*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 2002.
- [6] Hull J., White A.: *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*, The Review of Financial Studies, Vol. 3, No. 4, str. 573-592, 1990.
- [7] Hull J., White A.: *Using Hull-White Interest-Rate Trees*, Journal of Derivatives, Vol. 3, No. 3, str. 26-36, 1996.
- [8] Málek, J.: *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, Ekopress, 2005.
- [9] Steele, J. M.: *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [10] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.
- [11] Vasicek, O. A.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, 5, str. 177-188, 1977.
- [12] <http://ustreas.gov/offices/domestic-finance/debt-management/interest-rate/yield.shtml>

# Dodatek A

## Zdrojové kódy k trinomickým stromům

### A.1 Výpočet první fáze

```
 $\sigma = 0.01;$   
 $a = 0.1;$   
 $n = 2;$   
 $\text{deltat} = 1;$   
 $\text{jmax} = \text{Ceiling} \left[ \frac{0.184}{a \text{deltat}} \right];$   
 $\text{jmin} = -\text{jmax};$   
 $\text{deltaR} = \sigma \sqrt{3 \text{deltat}};$   
 $\text{pa}[a\_ , j\_ , \text{deltat}\_] := \text{Module}[\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\},$   
 $\text{pu} = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 - a j \text{deltat}}{2};$   
 $\text{pm} = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \text{deltat}^2;$   
 $\text{pd} = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 + a j \text{deltat}}{2};$   
 $\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\};$   
 $\text{pb}[a\_ , j\_ , \text{deltat}\_] := \text{Module}[\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\},$   
 $\text{pu} = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 + a j \text{deltat}}{2};$   
 $\text{pm} = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \text{deltat}^2 - 2 a j \text{deltat};$   
 $\text{pd} = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 + 3 a j \text{deltat}}{2};$   
 $\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\};$   
 $\text{pc}[a\_ , j\_ , \text{deltat}\_] := \text{Module}[\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\},$   
 $\text{pu} = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 - 3 a j \text{deltat}}{2};$   
 $\text{pm} = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \text{deltat}^2 + 2 a j \text{deltat};$   
 $\text{pd} = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \text{deltat}^2 - a j \text{deltat}}{2};$   
 $\{\text{pu}, \text{pm}, \text{pd}\};$   
 $\text{strategie}[i\_ , j\_ , \text{jmin}\_ , \text{jmax}\_] := \text{Which}[j == \text{jmax}, \{\text{pc}[a, j, \text{deltat}]\}, j == \text{jmin}, \{\text{pb}[a, j, \text{deltat}]\},$   
 $\text{jmin} < j < \text{jmax}, \text{Select}[\{\text{pa}[a, j, \text{deltat}], \text{pb}[a, j, \text{deltat}], \text{pc}[a, j, \text{deltat}]\},$   
 $\text{And}[\#[[1]] > 0, \#[[2]] > 0, \#[[3]] > 0] \&];$   
 $\text{prvnifaze} = \text{Map}[\text{Reverse}, \text{Table}[\text{If}[i \geq \text{Abs}[j], \{i, j, \text{Flatten}[\text{strategie}[i, j, \text{jmin}, \text{jmax}]\}], j \text{deltaR}],$   
 $\{i, j, 0\}], \{i, 0, n\}, \{j, \text{jmin}, \text{jmax}\}]] // \text{Transpose} // \text{TableForm}$ 
```

## A.2 Výpočet druhé fáze

```

vynosovakrivka = {{1/12, 1.66}, {0.25, 1.70}, {0.5, 1.90}, {1, 2.33}, {2, 2.64},
{3, 2.93}, {5, 3.36}, {7, 3.65}, {10, 4.07}, {20, 4.69}, {30, 4.64}};
int = Interpolation[vynosovakrivka, InterpolationOrder → 1];
Plot[int[x], {x, 0, 30}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → Thick]
prvnifaze2 = Map[Reverse, Table[If[i ≥ Abs[j], {i, j, Flatten[strategie[i, j, jmin, jmax]], jdeltaR},
{i, j, 0}], {i, 0, n}, {j, jmin, jmax}]]
q0 = 1;
alpha0 = int[1]/100;
q1 = pa[a, 0, deltat]Exp[-int[deltat]/100]
alpha1 = (α1/.Solve[q1.{Exp[-α1 - deltaR], Exp[-α1], Exp[-α1 + deltaR]} ==
Exp[-2deltat(int[2]/100)], α1, InverseFunctions → True]//First
rbcd = {prvnifaze2[[2]][[2]][[4]], prvnifaze2[[2]][[3]][[4]], prvnifaze2[[2]][[4]][[4]]} + alpha1
q2 = Table[Which[j == 2, q1[[1]]Exp[-rbcd[[1]]]pa[a, 1, deltat][[1]],
j == 1, q1[[1]]Exp[-rbcd[[1]]]pa[a, 1, deltat][[2]] + q1[[2]]Exp[-rbcd[[2]]]pa[a, 0, deltat][[1]],
j == 0, q1[[1]]Exp[-rbcd[[1]]]pa[a, 1, deltat][[3]] + q1[[2]]Exp[-rbcd[[2]]]pa[a, 1, deltat][[2]] +
q1[[3]]Exp[-rbcd[[3]]]pa[a, 1, deltat][[1]],
j == -1, q1[[2]]Exp[-rbcd[[2]]]pa[a, 1, deltat][[3]] + q1[[3]]Exp[-rbcd[[3]]]pa[a, 0, deltat][[2]],
j == -2, q1[[3]]Exp[-rbcd[[3]]]pa[a, 1, deltat][[3]],
{j, jmin, jmax}]/Reverse
alpha2 = (α2/.Solve[q2.{Exp[-α2 - 2deltaR], Exp[-α2 - deltaR], Exp[-α2], Exp[-α2 + deltaR],
Exp[-α2 + 2deltaR]} == Exp[-3deltat(int[3]/100)], α2, InverseFunctions → True]//First
refghi = {prvnifaze2[[3]][[1]][[4]], prvnifaze2[[3]][[2]][[4]], prvnifaze2[[3]][[3]][[4]],
prvnifaze2[[3]][[4]][[4]], prvnifaze2[[3]][[5]][[4]]} + alpha2
druhafaze = Prepend[Append[rbcd, refghi], {alpha0}]/Flatten

```