Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Prikryl

Konformně plochá řešení Einsteinových rovnic

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2008

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval především vedoucímu své bakalářské práce doc. RNDr. Jiřímu Podolskému, CSc., DSc. za to, že mi umožnil pracovat na tématu, které značně přesáhlo a rozšířilo mé obzory. Prozkoumávání pro mě neprobádaných oblastí mi usnadnil perfektním vedením a celou řadou cenných připomínek.

Rád bych vyjádřil vděk rodičům, kteří mi umožňili a stále umožňují věnovat se studiu a poskytují tolik potřebnou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 27. května 2008 Ondřej Prikryl

Obsah

Název práce: *Konformně plochá řešení Einsteinových rovnic*
Autor: *Ondřej Prikryl*
Katedra (ústav): *Ústav teoretické fyziky*
Vedoucí bakalářské práce: *Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.*
e-mail vedoucího: *Jiri.Podolsky@mff.cuni.cz*

Abstrakt: *Cílem práce je vyjasnit souvislost mezi některými třídami přesných řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole, zejména konformně plochými prostoročasy s čistým zářením (případně analogickými řešeními algebraického typu N) a s kosmologickou konstantou. Konkrétním úkolem je najít explicitní transformace mezi řešeními, které nedávno nalezli Edgar s Ramosovou, a již od 80. let známými řešeními tohoto typu, která nalezli Ozsváth, Robinson a Rózga.*

Klíčová slova: *Einsteinovy rovnice, konformní plochost, Kundtova řešení*

Title: *Conformally flat solutions of Einstein's equations*
Author: *Ondřej Prikryl*
Department: *Institute of Theoretical Physics*
Supervisor: *Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.*
Supervisor's e-mail address: *Jiri.Podolsky@mff.cuni.cz*

Abstract: *The aim of this work is to study relations between some families of exact solutions of Einstein's gravitational field equations, in particular the conformally flat spacetimes with pure radiation (or analogous solutions of the algebraic type N) and a cosmological constant. Specifically, we present explicit transformations between the metric forms which have been recently found by Edgar and Ramos and solutions of this type found by Ozsváth, Robinson and Rózga that are known since 1980's.*

Keywords: *Einstein's equations, conformal flatness, Kundt solutions*

Úvod

Krása obecné teorie relativity spočívá mimo jiné i ve svobodné volbě souřadnicového systému. Tato skutečnost má bohužel i svou odvrácenou stranu, neboť mnohé výsledky mohou být uvedeny v libovolné souřadnicové formě a tedy i ve formě znesnadňující (či dokonce přímo neumožňující) fyzikální interpretaci.

V nedávných článcích [1]-[4] Edgar, Vickers a Machado Ramosová systematickým postupem odvodili úplnou třídu řešení s čistým zářením (a případně s kosmologickou konstantou) algebraického typu N a O. Užili při tom pokročilé tzv. GIF metody (generalized invariant formalism), která kombinuje vlastnosti standardního Gerochova-Heldova-Penroseova formalismu (GHP) a formalismu invariantních nulových rotací. Výsledky však byly publikovány v podobě kontravariantních metrických tenzorů g^{ij} pomocí složitě interpretovatelných souřadnic.

Tato práce si klade za cíl tyto matematické výsledky uchopit, nalézt transformace převádějící je do přehlednější podoby a zejména identifikující je s již známými prostoročasy. Tím současně provedeme ověření správnosti postupu užitého při odvození výsledků ve výše zmíněných pracech a prokážeme praktickou možnost získávání přesných řešení tímto způsobem.

V úvodu práce nejprve krátce nastíníme metodu algebraické klasifikace prostoročasů. Později ji využijeme při popisu již známé třídy Kundtových řešení, která se ukáže matematicky ekvivalentní řešením odvozeným v pracech [1]-[4]. Již bylo zmíněno, že zajímat nás bude algebraický typ N a především typ O, tj. konformně plochá řešení.

Konkrétní analýza je obsahem kapitol 3–6, z nichž každá je věnována jednomu z uvedených čtyř článků. Závěrečná kapitola 7 obsahuje alternativní transformace a metriky týkající se prostoročasů studovaných v kapitole 6.

Kapitola 1

Algebraická klasifikace prostoročasů

Obecná teorie relativity dává velkou volnost při volbě souřadnic. K analýze vlastností prostoročasů je proto užitečné pracovat s průměty veličin do vhodné báze (čtveřice vektorů)

$$\mathbf{e}_a \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4), \tag{1.1}$$

a zavést tetrádové složky tenzorů

$$T_{ab\ldots} \equiv e_a^\alpha e_b^\beta T_{\alpha\beta\ldots}. \tag{1.2}$$

Ty jsou invariantní vůči záměně souřadnic a určují tedy přímo „měřitelné fyzikální“ hodnoty.

Existují dvě nejpřirozenější volby takové tetrády: ortonormální a nulová. *Ortonormální* tetráda $\mathbf{e}_a = (\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ zavádí $\mathbf{t}$ jakožto časový normalizovaný vektor, $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ je kartézská báze v nadploše kolmé na $\mathbf{t}$ (jedná se tedy o trojici prostorových normalizovaných vektorů). Toto zavedení shrnují vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{t}\cdot\mathbf{t} &= -1, & \mathbf{t}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{s} &= 0,\\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{s} &= 1, & \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{s} &= 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

které vystihují zřejmou ortonormalitu. Složky metriky jsou

$$g_{ab} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{ab}, \tag{1.4}$$

tedy $g_{ab} = \eta_{ab} = g^{ab}$.

Nulovou tetrádu $\mathbf{e}_a = (\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ lze pak definovat vztahy k tetrádě ortonormální

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}+\mathbf{q}), & \mathbf{m} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}-\mathrm{i}\mathbf{s}), \\ \mathbf{l} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}-\mathbf{q}), & \bar{\mathbf{m}} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}+\mathrm{i}\mathbf{s}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Z vlastností ortonormální tetrády pak máme zjevně

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}\cdot\bar{\mathbf{m}} = 0, \tag{1.6}$$

což dokazuje oprávněnost označení: jedná se o nulové vektory. Jediné netriviální složky skalárního součinu jsou

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{l} = -1, \qquad \mathbf{m}\cdot\bar{\mathbf{m}} = +1, \tag{1.7}$$

přičemž ostatní jsou rovny nule. Nulová tetráda tedy sestává ze čtyř nulových vektorů - dvou reálných a komplexně sdruženého páru. Metrickému tenzoru

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = g^{ab} \tag{1.8}$$

odpovídá metrika

$$\mathbf{g} = \mathrm{d}s^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b = -2\omega^1\omega^2 + 2\omega^3\omega^4, \tag{1.9}$$

kde ω^a je báze duální k $\mathbf{e}_a$.

Algebraická klasifikace prostoročasů je založena na lokální analýze příslušného Weylova tenzoru. Vhodnou parametrizací Weylova tenzoru C_{abcd} v nulové tetrádě je pět komplexních koeficientů

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_{abcd}\, k^a m^b k^c m^d, \\ \Psi_1 &= C_{abcd}\, k^a l^b k^c m^d, \\ \Psi_2 &= C_{abcd}\, k^a m^b \bar{m}^c l^d, \\ \Psi_3 &= C_{abcd}\, l^a k^b l^c \bar{m}^d, \\ \Psi_4 &= C_{abcd}\, l^a \bar{m}^b l^c \bar{m}^d. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tyto skalární *Newmanovy-Penroseovy koeficienty* popisují gravitační pole. Jelikož je možné tetrádu libovolně natočit pomocí lokální Lorentzovy transformace, je výhodné zvolit takovou, která projekci Weylova tenzoru zjednoduší – co nejlépe „vystihne“ jeho algebraickou strukturu. Konkrétně hledáme speciální nulový směr $\mathbf{k}$ takový, aby v příslušné tetrádě $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$

bylo $\Psi_0 = 0$. Nulový vektor $\mathbf{k}$ s touto speciální vlastností označujeme jako *hlavní nulový směr*, anglicky *principal null direction* (PND). Volba zbylých tetrádových členů $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ je při takovéto volbě $\mathbf{k}$ irelevantní.

Technicky vzato uvažujeme nejprve libovolnou „referenční" nulovou tetrádu $(\mathbf{k_0}, \mathbf{l_0}, \mathbf{m_0}, \bar{\mathbf{m}}_\mathbf{0})$, v níž má Weylův tenzor dle výše uvedené projekce (1.10) složky $\Psi^0_0, \Psi^0_1, \Psi^0_2, \Psi^0_3, \Psi^0_4$. Podmínka $\Psi_0 = 0$ je pak díky vlastnostem Lorentzovy transformace (nulové rotace kolem pevného $\mathbf{l}_0$) dána

$$k^4 \Psi^0_4 + 4k^3 \Psi^0_3 + 6k^2 \Psi^0_2 + 4k \Psi^0_1 + \Psi^0_0 = \Psi_0 = 0, \tag{1.11}$$

viz například kniha [5]. To je algebraická rovnice 4.řádu pro k, obecně tedy má čtyří komplexní řešení $k_i \in \mathbb{C}$ (uvažujeme i případnou možnost $k_i = \infty$). Důsledkem je, že v každém prostoročase existují *právě čtyři* (obecně různé) PND, které lze explicitně vyjádřit pomocí nulové rotace referenční báze

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k_0} + \bar{k}_i \mathbf{m_0} + k_i \bar{\mathbf{m}}_\mathbf{0} + k_i \bar{k}_i \mathbf{l_0}. \tag{1.12}$$

Na základě násobnosti kořenů k_i, tedy koincidence PND, lze rozlišit algebraické typy řešení dle *Petrovova-Penroseova* rozdělení:

- Typ I : čtyři různé kořeny,
- Typ II : jeden dvojnásobný a dva odlišné jednonásobné kořeny,
- Typ D : dva různé dvojnásobné kořeny,
- Typ III: jeden trojnásobný a jeden odlišný jednonásobný kořen,
- Typ N : čtyřnásobný kořen,
- Typ O : případ, kdy Weylův tenzor vymizí (tj. je identicky nulový); takové prostoročasy jsou *konformně ploché*.

Kapitola 2

Kundtova třída prostoročasů

V této části krátce popíšeme Kundtova řešení, především algebraického typu N a O. Již bylo zmíněno, že všechna řešení, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách, jsou členy právě takové Kundtovy třídy.

Kundtovu třídu tvoří řešení, která připouštějí kongruenci nulových geodetik generovanou vektorovým polem **k**, které je nezkreslené (shear-free), nerotující (twist-free) a neexpandující (expansion-free). Obecně lze tuto metriku vyjádřit ve formě

$$\mathrm{d}s^2 = 2p^{-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} - 2\mathrm{d}u(\mathrm{d}r + H\mathrm{d}u + W\mathrm{d}\xi + \bar{W}\mathrm{d}\bar{\xi}), \tag{2.1}$$

kde $p(\xi, \bar{\xi}, u)$ a $H(\xi, \bar{\xi}, u, r)$ jsou reálné funkce, zatímco $W(\xi, \bar{\xi}, u, r)$ je funkcí komplexní. Tyto funkce jsou určeny splněním příslušných Einsteinových polních rovnic. Souřadnice u označuje nulové plochy (reprezentuje „retardovaný čas“, pro který platí $k_\mu = u_{,\mu}$), r je afinní parametr podél hlavní nulové kongruence takové, že $\mathbf{k} = \partial_r$, a ξ je komplexní souřadnice příčného 2-prostoru.

2.1 Prostoročasy s čistým zářením typu III, N a O

Nejjednodušší řešení rozsáhlé Kundtovy třídy jsou vakuová a s polem čistého záření ve směru **k**. V původních Kundtových pracích byly explicitně uvedeny všechny takové prostoročasy algebraického typu N a III. Speciálně bylo ukázáno, že podtřída řešení typu N obsahuje kromě známých *pp*-vln (rovinných vln s rovnoběžnými paprsky) i specifické Kundtovy vlny, pro které není hlavní nulové vektorové pole **k** kovariantně konstantní. Všechna vakuová řešení typu D později nalezli Kinnersley a Plebański s Demiańskim. Bohužel je známo jen nemnoho explicitních vakuových řešení typu II (viz např. [5]).

Je také možné zobecněnit tato řešení pro případ nenulové kosmologické konstanty Λ. S ohledem na hodnotu Λ jsou konformně ploché *vakuové* prostoročasy buď Minkowského, de Sitterův nebo anti-de Sitterův vesmír. Speciální podtřídu Kundtových vakuových prostoročasů typu N s $\Lambda \neq 0$ objevili García Díaz a Plebański [6], geometricky odlišné řešení s $\Lambda < 0$ pak Siklos [7] a zcela kompletní třída byla popsána a klasifikována Ozsváthem, Robinsonem a Rózgou v roce 1985 [8].

Kompletní třídu Kundtových prostoročasů typu N, III a O, s případnou kosmologickou konstantou Λ a čistým zářením, lze napsat ve tvaru metriky (2.1), přičemž

$$W = \frac{2\bar{\tau}}{p} r + W^\circ, \qquad H = -\left(\tau\bar{\tau} + \tfrac{1}{6}\Lambda\right) r^2 + 2G^\circ r + H^\circ, \tag{2.2}$$

podrobněji viz [9]. Zde W°, G°, H°, p a τ jsou funkce nezávislé na r, tedy W je nanejvýše lineární a H kvadratické v r. Je možné využít volnosti souřadnicové volby k převedení p do kanonického tvaru

$$p = 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}. \tag{2.3}$$

Funkce τ v (2.2) je spinovým koeficientem $\tau \equiv -k_{a;b}m^a l^b$ při volbě přirozené nulové tetrády $\mathbf{k} = \partial_r$, $\mathbf{l} = \partial_u - H\partial_r$, $\mathbf{m} = p\partial_{\bar{\xi}} - p\bar{W}\partial_r$. Je tedy možné τ interpretovat jako míru rotace nulové kongruence kolem prostorupodobného směru. S volbou (2.3) vedou polní rovnice k obecnému předpisu

$$\tau = \frac{-\beta + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi + \frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2}{(1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})\alpha + \bar{\beta}\xi + \beta\bar{\xi}}, \tag{2.4}$$

kde $\alpha(u)$ a $\beta(u)$ je libovolná reálná resp. komplexní funkce u. Dále je vhodné zavést výraz

$$\kappa \equiv \tfrac{1}{3}\Lambda\alpha^2 + 2\beta\bar{\beta}, \tag{2.5}$$

což prvně provedli Ozsváth, Robinson a Rózga [8] jakožto veličinu, jejíž znaménko je neměnné. Je tedy možné jej užít jako pomůcku při invariantní klasifikaci Kundtovy třídy řešení.

Případ $\Lambda = 0$:
V tomto případě $\tau = -\beta/(\alpha + \bar{\beta}\xi + \beta\bar{\xi})$ a $\kappa = 2\beta\bar{\beta}$. Evidentně je možné odlišit dva geometricky odlišné typy řešení, totiž $\kappa = 0$ a $\kappa > 0$, což odpovídá nulovému a nenulovému τ. Zbývající souřadnicová volnost umožňuje převést je do kanonických tvarů s $\alpha = 1$, $\beta = 0$ a $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Tento krok odliší dva typy řešení:

$$\kappa = 0: \qquad \text{zobecněné } pp\text{-vlny} \qquad \tau = 0,$$

$$\kappa > 0: \qquad \text{zobecněné Kundtovy vlny} \qquad \tau = -\frac{1}{\xi + \bar{\xi}}.$$

Případ $\Lambda > 0$:
Jelikož $\kappa = \frac{1}{3}\Lambda\alpha^2 + 2\beta\bar{\beta}$ je nyní kladné, existuje pouze jediný kanonický případ. Zajímavé je, že je možné využít vhodné transformace na převedení do kanonického tvaru $\alpha = 1$, $\beta = 0$ nebo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, tedy

$$\kappa > 0: \qquad \text{zobecněné } pp\text{-vlny nebo Kundtovy vlny} \qquad \tau = \frac{\frac{1}{3}\Lambda\xi}{1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}},$$

$$\text{nebo} \qquad \tau = -\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi^2}{\xi + \bar{\xi}}.$$

Na první pohled je patrné, že při $\Lambda = 0$ se uvedené případy redukují na příslušné varianty pro nulovou kosmologickou konstantu.

Případ $\Lambda < 0$:
Tento případ připouští tři odlišné možnosti charakterizované znaménkem κ.

$$\kappa < 0: \qquad \text{zobecněné } pp\text{-vlny} \qquad \tau = \frac{\frac{1}{3}\Lambda\xi}{1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}},$$

$$\kappa > 0: \qquad \text{zobecněné Kundtovy vlny} \qquad \tau = -\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi^2}{\xi + \bar{\xi}},$$

$$\kappa = 0: \qquad \text{zobecněné Siklosovy vlny} \qquad \tau = -\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\frac{1 + \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\xi}{1 + \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\bar{\xi}}.$$

Při $\Lambda = 0$ se uvedené případy opět redukují na příslušné varianty pro nulovou kosmologickou konstantu.

2.2 Řešení typu N

V tomto případě je možné provést transformaci $r = (q^2/p^2)v$, kde

$$p = 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}, \qquad q = (1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})\ \alpha + \bar{\beta}\ \xi + \beta\ \bar{\xi}, \tag{2.6}$$

$\alpha(u)$, $\beta(u)$ jsou funkcemi u. Tento krok převádí metriku (2.1) do explicitní podoby

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\bar{\xi}}{p^2} - 2\frac{q^2}{p^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \left(\kappa\frac{q^2}{p^2}v^2 - \frac{(q^2)_{,u}}{p^2}v - \frac{q}{p}H\right)\mathrm{d}u^2 \tag{2.7}$$

s libovolnou funkcí $H(\xi, \bar{\xi}, u)$. Tato metrika byla prvně představena Ozsváthem, Robinsonem a Rózgou [8]. Reprezentuje všechny Kundtovy prostoročasy (vakuové či obsahující čisté záření) typu N s kosmologickou konstantou. S nulovou tetrádou $\mathbf{k} = \partial_v$, $\mathbf{l} = (p^2/q^2)\partial_u + (p^4/2q^4)F\partial_r$, $\mathbf{m} = p\partial_{\bar{\xi}}$ (přičemž $F = g_{uu}$) jsou jediné nenulové komponenty tenzoru křivosti dány

$$\Psi_4 = \frac{1}{2}(pH)_{,\xi\bar{\xi}}\frac{p^4}{q^3}, \tag{2.8}$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2}(p^2 H_{,\xi\bar{\xi}} + \tfrac{1}{3}\Lambda H)\frac{p^3}{q^3}. \tag{2.9}$$

Již výše bylo zmíněno, že existují různé geometricky odlišné podtřídy gravitačních vln, které jsou definovány znaménky funkce κ definované v (2.5). Každou podtřídu lze reprezentovat odpovídající kanonickou formou funkce τ, nejpřirozeněji volbou parametrů α a β, které jsou přímo obsaženy ve funkci q uvedené v (2.6).

Ve speciálním případě $\Lambda = 0$ (tj. $p = 1$) existují dvě odlišné podtřídy Kundtových gravitačních vln typu N šířících se v plochém prostoru. Jsou jimi *pp*-vlny (pro $\kappa = 0$) a Kundtovy vlny (pro $\kappa > 0$). V prvním případě je kanonickou volbou $\alpha = 1$, $\beta = 0$, takže $q = 1$. Pro Kundtovy vlny máme $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a tedy $q = \xi + \bar{\xi}$.

V případě kladné kosmologické konstanty $\Lambda > 0$ existuje pouze podtřída možných řešení pro $\kappa > 0$, která zobecňuje *pp*-vlny i Kundtovy vlny. Vezmeme-li kanonickou reprezentaci $\alpha = 0$, $\beta = 1$, metriku těchto prostoročasů lze zapsat

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}\left[\ 2\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} - 2(\xi + \bar{\xi})^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \left(2(\xi + \bar{\xi})^2 v^2 - \tilde{H}\right)\mathrm{d}u^2\right] \tag{2.10}$$

s $\tilde{H}(\xi,\bar{\xi},u) = (\xi+\bar{\xi})(1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})H$. Identifikaci této třídy prvně provedli García Díaz a Plebański [6]. Vymizení kosmologické konstanty ihned dává metriku Kundtových vln v Minkowského prostoru. Navíc je (2.10) pro $\Lambda \neq 0$ s ní konformní. Dá se ukázat, že řešení dané metrikou (2.10) reprezentují jedinou netriviální třídu vakuových prostoročasů konformních těmto Kundtovým vlnám s $\Lambda = 0$.

Zajímavé je, že pro zápornou kosmologickou konstantu je struktura prostoročasů bohatší. Možné je řešení (2.10) s $\kappa > 0$, pro $\kappa < 0$ najdeme podtřídu paramatetrizovatelnou kanonickou volbou $\alpha = 1$, $\beta = 0$ s příslušnými hodnotami $p = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}$, $q = 1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}$ a metrikou ve tvaru (2.7). V tomto případě je $\kappa = \frac{1}{3}\Lambda$, v případě nulové kosmologické konstanty se případ redukuje na standardní *pp*-vlny v plochém prostoru. Možná je i speciální podtřída řešení s $\Lambda < 0$ a $\kappa = 0$. V tomto případě je kanonická volba α a β v q dána $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}e^{\mathrm{i}\theta}$ s libovolnou funkcí $\theta(u)$. Ve speciální situaci, kdy θ je nezávislá na u, je PND $\mathbf{k} = \partial_v$ Killingovým vektorem a s užitím zbývající souřadnicové volnosti je možné q vyjádřit faktorizovaným tvarem $q = (1+\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\xi)(1+\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\bar{\xi})$. Takováto řešení jsou po změně souřadnic identická s třídou prostoročasů typu N, která byla objevena a zkoumána Siklosem [7]. Siklosovu metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{3}{\Lambda}\cdot\frac{1}{x^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + \tilde{H}\mathrm{d}u^2\right) \qquad (2.11)$$

s funkcí $\tilde{H}(x,y,u) = -\frac{1}{6}\Lambda x H$ získáme užitím souřadnicové transformace $\xi = -\sqrt{-\frac{6}{\Lambda}}(x+\frac{1}{2}+\mathrm{i}y)/(x-\frac{1}{2}+\mathrm{i}y)$, $v = \frac{12}{\Lambda}r$. Metrika (2.11) je zřejmě konformní *pp*-vlnám, přičemž Siklos navíc ukázal, že se jedná o jedinou netriviální třídu vakuových prostoročasů s touto vlastností. O Siklosově řešení a jeho fyzikální interpretaci podrobněji v [10].

2.3 Konformně plochá řešení

Kompletní třídu *konformně plochých* Kundtových řešení s čistým zářením získáme položením $\Psi_4 = 0$ ve výrazu (2.8). V tomto případě má funkce H speciální tvar

$$H = \frac{A_0(u) + \bar{A}_1(u)\xi + A_1(u)\bar{\xi} + A_2(u)\xi\bar{\xi}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}, \qquad (2.12)$$

kde $A_0(u)$, $A_1(u)$ a $A_2(u)$ jsou libovolnými funkcemi u, přičemž A_0 a A_2 jsou reálné. Složka čistého záření je pak dle (2.9)

$$\Phi_{22} = \tfrac{1}{2}(A_2 + \tfrac{1}{6}\Lambda A_0)\frac{p^3}{q^3}. \tag{2.13}$$

Prostoročasy jsou *vakuové* tehdy, když $\Phi_{22} = 0$, tj. $p^2 H_{\xi\bar{\xi}} + \frac{1}{3}\Lambda H = 0$. Tato rovnice má obecné řešení

$$H(\xi, \bar{\xi}, u) = (f_{,\xi} + \bar{f}_{,\bar{\xi}}) - \frac{\Lambda}{3p}(\bar{\xi} f + \xi \bar{f}), \tag{2.14}$$

kde $f(\xi, u)$ je libovolnou funkcí ξ a u, holomorfní v ξ. Konformně ploché prostoročasy jsou zároveň vakuové, právě když $A_2 = -\frac{1}{6}\Lambda A_0$, což je zřejmé z (2.13). Pokud je H ve tvaru odpovídajícím (2.14) s f kvadratickým v ξ, výše uvedená vakuová řešení s $f = c_0(u) + c_1(u)\xi + c_2(u)\xi^2$ (kde $c_i(u)$ jsou komplexní funkce u související s A_0 a A_1) jsou isometrická s Minkowského (pokud $\Lambda = 0$), de Sitterovým ($\Lambda > 0$) a anti-de Siterovým prostoročasem ($\Lambda < 0$). Pro všechny ostatní volby funkce $f(\xi, u)$ popisují vakuové Kundtovy prostoročasy typu N neexpandující přesné gravitační vlny šířící se těmito maximálně symetrickými pozadími, tj. prostory o konstantní křivosti.

Další informace lze nalézt například v [5]–[16].

Kapitola 3

Řešení typu N s čistým zářením bez kosmologické konstanty

V článku [2] bylo odvozeno řešení Einsteinových rovnic s nulovou kosmologickou konstantou ($\Lambda = 0$) algebraického typu N připouštějící pole čistého záření. Kontravariantní metrický tenzor je v souřadnicích t, n, a, b ve výrazu (66) v [2] vyjádřen[1]

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1/a & -L/a & n/a & 0 \\ 0 & n/a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

kde $L(t, \xi, \bar{\xi})$ je libovolnou funkcí tří souřadnic t, a, b skrze komplexní proměnnou $\xi = a + \mathrm{i}b$.

Odpovídající komponenty kovariantního metrického tenzoru získáme inverzí matice (3.1)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} n^2 + aL & a & -n & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

explicitní tvar metriky je tedy

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a + 2a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}n + (n^2 + aL)\,\mathrm{d}t^2. \tag{3.3}$$

[1] Oproti článku zde i ve všech dalších případech používáme signaturu $(- + ++)$

Provedeme-li transformaci

$$v = -\frac{n}{2a} \tag{3.4}$$

a navíc užijeme přeznačení souřadnic

$$a \to x, \qquad b \to y, \qquad t \to u, \tag{3.5}$$

dostaneme metriku ve známé podobě

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 4x^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (4x^2v^2 + x\,L)\,\mathrm{d}u^2. \tag{3.6}$$

Tato metrika odpovídá standardnímu tvaru metrik Kundtova typu N (např. výraz (8) v [16]).

Dalším krokem je zavedení komplexního prostorového parametru

$$\xi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathrm{i}y), \tag{3.7}$$

který převádí metriku do alternativní podoby

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} - 2(\xi+\bar{\xi})^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + [2(\xi+\bar{\xi})^2v^2 - (\xi+\bar{\xi})H]\mathrm{d}u^2, \tag{3.8}$$

přičemž jsme provedli označení

$$H(\xi,\bar{\xi},u) = -\frac{L}{\sqrt{2}}. \tag{3.9}$$

Jedná se přesně o tvar řešení typu N ve tvaru (2.7), jehož obecný předpis lze uvést ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\frac{1}{p^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} - 2\frac{q^2}{p^2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + F\,\mathrm{d}u^2, \tag{3.10}$$

Přímočarým porovnáním platí zřejmě

$$\begin{aligned} p &= 1, \\ q &= \xi + \bar{\xi}, \\ F &= 2(\xi+\bar{\xi})^2v^2 - (\xi+\bar{\xi})H, \end{aligned} \tag{3.11}$$

s následujícími hodnotami parametrů

$$\Lambda = 0, \qquad \alpha(u) = 0, \qquad \beta(u) = 1, \qquad \kappa = 2. \tag{3.12}$$

Samotní autoři článku [2] zmiňují tuto třídu Kundtových řešení jako příslušný výsledek, což jsme explicitně prokázali přechodem na tvar (3.8), neboť pro speciální Kundtovo řešení platí $\kappa > 0$ a $\Lambda = 0$.

Kapitola 4

Konformně plochá řešení bez kosmologické konstanty

Dále prozkoumáme řešení získané v článku [1]. Opět v souřadnicích t, n, a, b je kontravariantní metrický tenzor konformně plochých prostoročasů

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1/a & (2S - 2Ma - a^2 - b^2)/a & n/a & E/a \\ 0 & n/a & 1 & 0 \\ 0 & E/a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

kde E, M, S jsou libovolné funkce souřadnice t (viz výraz (68) v [1]).

Inverzí (4.1) získáme komponenty kovariantního metrického tenzoru

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} n^2 + E^2 + a^3 + ab^2 + 2Ma^2 - 2Sa & a & -n & -E \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 1 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

s explicitní metrikou

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a - 2E\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}b + 2a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}n \\ +(n^2 + E^2 + a^3 + ab^2 + 2Ma^2 - 2Sa)\,\mathrm{d}t^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Zavedeme-li následující označení

$$L \equiv a^2 + b^2 + 2Ma - 2S, \tag{4.4}$$

dostáváme metriku v trochu jednodušším tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a - 2E\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}b + 2a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}n + (n^2 + E^2 + La)\,\mathrm{d}t^2. \quad (4.5)$$

Prozkoumáním tvaru metriky (4.5) lze snadno zjistit souvislost s předchozím případem (3.3). Na naprosto shodný tvar metriky přejdeme transformací

$$y = b - \int E\,\mathrm{d}t, \quad (4.6)$$

metrika je tedy dle předpokladu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}y^2 - 2n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a + 2a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}n + (n^2 + aL)\,\mathrm{d}t^2. \quad (4.7)$$

Nyní již lze provést analogický sled transformací do standardního tvaru (3.6).

Rozdíl oproti předchozí kapitole spočívá v explicitním vyjádření funkce L, která je po provedení všech souřadnicových změn ve speciálním tvaru

$$L = x^2 + y^2 + 2Mx + \left(2\int E\,\mathrm{d}u\right) y - 2S + \left(\int E\,\mathrm{d}u\right)^2. \quad (4.8)$$

Nyní je zajímavé probrat předpis funkce L potřebný pro konformně plochý prostoročas. Weylův tenzor vymizí právě za podmínky

$$H_{,\xi\xi} = 0, \qquad \text{resp.} \quad H_{,\bar{\xi}\bar{\xi}} = 0, \quad (4.9)$$

viz (2.8), neboť s přihlédnutím k výsledkům předchozí kapitoly, které zůstávají v platnosti, máme

$$H = -\frac{L}{\sqrt{2}}. \quad (4.10)$$

Tato funkce tedy může být nanejvýše kvadratická v prostorových souřadnicích x a y, přičemž koeficienty jsou libovolné funkce u. Možností samozřejmě je i analogické užití komplexní proměnné $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathrm{i}y)$, čímž se metrika převádí na (3.8) a funkce L je

$$\begin{aligned} L(\xi, \bar{\xi}, u) &= 2\xi\bar{\xi} + \sqrt{2}\left(M - \mathrm{i}\int E\,\mathrm{d}u\right)\xi \\ &+ \sqrt{2}\left(M + \mathrm{i}\int E\,\mathrm{d}u\right)\bar{\xi} - 2S + \left(\int E\,\mathrm{d}u\right)^2. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Je možné přímo identifikovat tento tvar s výrazem (2.12), kde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= 2, \\ \mathcal{A}_1 &= \sqrt{2}\left(M + \mathrm{i}\int E\,\mathrm{d}u\right), \\ \mathcal{A}_0 &= -2S + \left(\int E\,\mathrm{d}u\right)^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Povšimněme si však restrikce na pouhou konstantu při volbě funkce $\mathcal{A}_2$. Provedeme-li však transformaci metriky ve tvaru (3.6) změnou

$$u = \int \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{f(\tilde{u})}, \qquad v = \tilde{v}\, f(\tilde{u}) + \frac{\dot{f}(\tilde{u})}{\kappa}, \tag{4.13}$$

kde $f(\tilde{u})$ je libovolnou funkcí $\tilde{u}$, tvar metriky (3.6) se nezmění. Jediným důsledkem je škálování funkce L (resp. H). Tímto postupem můžeme měnit konstantní hodnoty v L a případ, kterým se zabýváme v této kapitole a který je odvozený v článku [1], je tedy zcela obecným případem podtřídy konformně plochých Kundtových řešení. Restrikce na konstantu se ukázala být jen souřadnicovou volností.

Kapitola 5

Speciální konformně plochá řešení se zápornou kosmologickou konstantou

Analogickým postupem jako v předchozích kapitolách se v této kapitole budeme zabývat řešením (103) uvedeným v článku [3]. Dle autorů se jedná o obecné vyjádření třídy konformně plochých řešení s čistým zářením a se zápornou kosmologickou konstantou ($\Lambda < 0$) za předpokladu $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda = 0$. Kovariantní metrický tenzor uvedený v souřadnicích r, n, m, b je

$$g^{ij} = m^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -V & -m\nu_4(r) & -b\nu_4(r) \\ 0 & -m\nu_4(r) & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & -b\nu_4(r) & 0 & 2\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

kde V je dáno výrazem (102) z [3], tedy

$$V = 3n\nu_4(r) - \nu_5(r)(b^2 + m^2) - \nu_6(r)b - \frac{m}{\lambda^2} + \nu_3(r), \tag{5.2}$$

přičemž $\nu_3(r)$, $\nu_4(r)$, $\nu_5(r)$, $\nu_6(r)$ jsou libovolné funkce proměnné r.

Kovariantní metrický tenzor je k (5.1) inverzní,

$$g_{ij} = \frac{1}{2\lambda^2 m^2} \begin{pmatrix} -\tilde{V} & -2\lambda^2 & -m\nu_4(r) & -b\nu_4(r) \\ -2\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ -m\nu_4(r) & 0 & 1 & 0 \\ -b\nu_4(r) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

kde funkce $\tilde{V}$ představuje

$$\tilde{V} \equiv -2\lambda^2 V - \nu_4^2(r)(m^2 + b^2). \tag{5.4}$$

Metrika je tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 m^2} (&\mathrm{d}m^2 + \mathrm{d}b^2 - 2m\nu_4(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}m - 2b\nu_4(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}b \\ &-4\lambda^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}n - \tilde{V}\,\mathrm{d}r^2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

V dalším postupu je užitečné označení

$$R(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \nu_4(r)\,\mathrm{d}r\right), \tag{5.6}$$

neboť užitím transformačních vztahů

$$x = mR^2(r), \qquad y = bR^2(r), \qquad v = nR^3(r), \tag{5.7}$$

dostáváme metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 x^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 4\lambda^2 R(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v + 2\lambda^2 \tilde{H}\,\mathrm{d}r^2\right), \tag{5.8}$$

kde $\tilde{H}$ je dáno

$$\tilde{H} \equiv -\nu_5(r)(x^2 + y^2) - \nu_6(r)R^2(r)y - \frac{R^2(r)}{\lambda^2}\,x + \nu_3(r)R^4(r), \tag{5.9}$$

Posledním krokem je provedení záměny souřadnice

$$u = -2\lambda^2 \int R(r)\,\mathrm{d}r, \tag{5.10}$$

což převádí metriku na tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 x^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + H\,\mathrm{d}u^2\right), \tag{5.11}$$

kde funkci H získáme dosazením za r do $\tilde{H}$

$$H(x, y, u) \equiv a(u)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2\lambda^4}\,x + c(u)y + d(u), \tag{5.12}$$

kde a, c, d jsou libovolné funkce u.

Vhodnou identifikací konstanty λ lze metriku převést na Siklosovo řešení (2.11) (místo souřadnice r máme nyní v), přičemž nutnou volbou pro splnění Einsteinových rovnic je

$$\lambda^2 = -\frac{\Lambda}{6}, \tag{5.13}$$

což je v naprosté shodě s označením použitým v článku [3].

Nastává však analogická situace, která byla rozebrána již v předchozí kapitole. Funkce H ve tvaru (5.12) není na první pohled nejobecnějším možným tvarem pro splnění Einsteinových rovnic s čistým zářením. Podmínky pro nulovost Weylova tenzoru (explicitní Weylův tenzor je uveden v [10], vzorec (7)) jsou

$$H_{,xy} = 0, \qquad H_{,xx} - H_{,yy} = 0. \tag{5.14}$$

Jejich řešením vychází nejobecnější možná funkce H tvaru

$$H(x, y, u) \equiv a(u)(x^2 + y^2) + b(u)x + c(u)y + d(u), \tag{5.15}$$

kde a, b, c, d jsou libovolné funkce. Porovnáním (5.12) s nově získaným předpisem (5.15) je zřejmé, že je opět redukována volnost při volbě $b(u)$ na konstantu. Je však možné užít transformace

$$\tilde{u} = \int \mathrm{e}^{-2\Phi} \mathrm{d}u, \quad \tilde{x} = x\mathrm{e}^{-\Phi}, \quad \tilde{y} = y\mathrm{e}^{-\Phi}, \quad \tilde{v} = v + \tfrac{1}{2}\Phi_{,u}(x^2 + y^2), \tag{5.16}$$

kde $\Phi(u)$ je libovolnou funkcí u. Takováto transformace nemění tvar metriky (5.11), pozmění však funkci H způsobem

$$\tilde{H} = \mathrm{e}^{-2\Phi}\Big[H - (\Phi_{,uu} + {\Phi_{,u}}^2)(x^2 + y^2)\Big]. \tag{5.17}$$

Umožňuje nám tedy nejen škálovat fuknci H, ale i přímo transformovat člen $x^2 + y^2$. Pro nás je důležité, že se před členem x v (5.12) objeví libovolná funkce a jedná se tedy opět o obecné řešení, restrikce byla tedy jen důsledkem souřadnicové volnosti.

Kapitola 6

Další konformně plochá řešení s kosmologickou konstantou

Posledním typem řešením, kterým se budeme zabývat, je výsledek (86) uvedený v [4]. Toto řešení je dle autorů nejobecnějším možným konformně plochým s nenulovou kosmologickou konstantou, pro které platí $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda \neq 0$. V souřadnicích $\tilde{t}, c, a, \tilde{x}$ je kovariantní metrický tenzor dán

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k^{1/4}}{a(\frac{3}{2}-k)} & 0 & 0 \\ -\frac{k^{1/4}}{a(\frac{3}{2}-k)} & \frac{8}{ak^{1/2}(\frac{3}{2}-k)^2}Z & \frac{2k(5\Lambda^2a^4+1)c}{a(\frac{3}{2}-k)} & -\frac{k^{1/4}\gamma_3(\tilde{t})}{a(\frac{3}{2}-k)} \\ 0 & \frac{2k(5\Lambda^2a^4+1)c}{a(\frac{3}{2}-k)} & 4k^2 & 0 \\ 0 & -\frac{k^{1/4}\gamma_3(\tilde{t})}{a(\frac{3}{2}-k)} & 0 & 4k \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

kde $\gamma_3(\tilde{t})$ je libovolná funkce $\tilde{t}$ a k je dáno výrazem[1]

$$k = \tfrac{1}{6}\Lambda a^2 + \tfrac{1}{2}. \tag{6.2}$$

Pro funkci Z existují následující možnosti - pro kladnou kosmologickou konstantu Λ varianta

$$\text{(i) } Z = \gamma_1(\tilde{t})\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\tilde{x}\right) + 2\sqrt{2}a\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c), \tag{6.3}$$

[1] V celém dalším postupu jsme užili přeznačení kosmologického parametru Λ z [4] na $\frac{1}{6}\Lambda$, přičemž Λ je nyní již standardní kosmologickou konstantou.

a pro zápornou kosmologickou konstantu následující dvě možnosti

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } Z &= \gamma_1(\tilde{t})\cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda\tilde{x}}\right) + 2\sqrt{2}a\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c), && (6.4)\\
\text{(iii) } Z &= \pm\left(\tfrac{-1}{24}\Lambda\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{x}\right) + 2\sqrt{2}a\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c), && (6.5)
\end{aligned}$$

přičemž $\gamma_1(\tilde{t})$ a $\gamma_2(\tilde{t})$ jsou libovolné funkce a

$$z(a,c) \equiv -\frac{12k^{1/2}}{\Lambda} + \tfrac{1}{288}\Lambda^2 k^{1/2}a^3c^2\left(\tfrac{25}{36}\Lambda^2a^4 - \tfrac{1}{3}\Lambda a^2 + 13\right). \tag{6.6}$$

Kovariantní metrický tenzor je pak

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{8a}{k}Z + \frac{\gamma_3^2(\tilde{t})}{4k} + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2a^4+1)^2c^2}{k^{1/2}} & \frac{a(k-\frac{3}{2})}{k^{1/4}} & \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2a^4+1)c}{2k^{5/4}} & -\frac{\gamma_3(\tilde{t})}{4k} \\ \frac{a(k-\frac{3}{2})}{k^{1/4}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2a^4+1)c}{2k^{5/4}} & 0 & \frac{1}{4k^2} & 0 \\ -\frac{\gamma_3(\tilde{t})}{4k} & 0 & 0 & \frac{1}{4k} \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

a metrika má tudíž tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = {} & \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{4k}\mathrm{d}\tilde{x}^2 - \frac{\gamma_3(\tilde{t})}{2k}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{x} + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2a^4+1)c}{k^{5/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}a \\
& + \frac{a(2k-3)}{k^{1/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}c + \left(-\frac{8a}{k}Z + \frac{\gamma_3^2(\tilde{t})}{4k} + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2a^4+1)^2c^2}{k^{1/2}}\right)\mathrm{d}\tilde{t}^2.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Jelikož se jedná o celkem složitou metriku, ve které navíc vystupují různé netriviální výrazy (např. k a různé varianty Z), bude přínosné nejprve obecně prodiskutovat tvar a jednotlivé členy této metriky. Již na první pohled je zřejmé, že metrický tenzor odpovídá svým obsazením tenzorům g_{ij} z předchozích kapitol. Jedná se tedy o první náznak potvrzení předpokladu, že řešení spadá do stejné třídy jako řešení předchozí - tj. do třídy Kundtových řešení.

Z jednotlivých členů metriky je dále zřejmé, že výraz k je problematický. Autoři na tento parametr kladou podmínky $k \neq 0$ (neboť varianta $k = 0$ byla prodiskutována již dříve v kapitole 5) a $k \neq 3/2$. Přirozeně však může být hodnota k větší či menší než 0, a to v závislosti na kladné či záporné kosmologické konstantě Λ. Problém tedy nastává ve výrazech s k pod odmocninou - odmocnina z případné záporné hodnoty dává komplexní výsledky. V dalším postupu proto bude třeba postupovat velmi pečlivě a jednotlivé možnosti důkladně zvážit.

6.1 Vhodné transformace

Nejprve provedeme substituci

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tilde{x} - \int \gamma_3(\tilde{t})\mathrm{d}\tilde{t}\Big), \tag{6.9}$$

získáme tím jednodušší tvar metriky

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4 + 1)c}{k^{5/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}a + \frac{a(2k-3)}{k^{1/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}c \\ + \left(-\frac{8a}{k}Z + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4 + 1)^2 c^2}{k^{1/2}}\right)\,\mathrm{d}\tilde{t}^2.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Do dalšího substitučního vztahu

$$v = \frac{-2C}{\kappa}(2k)^{3/4}\frac{(\frac{1}{6}\Lambda a^2 - 1)}{a}\,c \tag{6.11}$$

jsme uměle zavedli vhodné konstanty κ a C, přičemž smysl tohoto kroku záhy ozřejmíme. V tomto výrazu vystupuje $k^{3/4}$, což v případě $k < 0$ působí nesrovnalosti. My však tuto transformaci provedeme pro libovolné k, což z čistě matematického hlediska můžeme, a následně se podíváme na případné interpretační potíže. Tímto tedy transformujeme metriku na tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 - (2)^{1/4}\frac{\kappa a^2}{2Ck}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}v + \left(-\frac{8a}{k}\tilde{H} + \frac{\kappa^2 a^2 v^2}{4\sqrt{2}C^2\,k}\right)\,\mathrm{d}\tilde{t}^2. \tag{6.12}$$

Je zřejmé, že nyní jsme dosáhli metriky ve které vystupují explicitně pouze k lineární či kvadratické. Případ pro k kladné i záporné se sjednocuje. Dopad však budeme moci vysledovat v charakteru některých použitých souřadnic, záporné k bude generovat imaginárnost souřadnice x.

Poslední drobná úprava (bez vlivu na člen k)

$$u = \frac{1}{C}\,2^{-3/4}\,\tilde{t} \tag{6.13}$$

způsobí

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 - 2\frac{\kappa a^2}{2k}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(\kappa\frac{\kappa a^2}{2k}\,v^2 - 16\sqrt{2}C^2\frac{a}{k}\tilde{H}\right)\,\mathrm{d}u^2, \tag{6.14}$$

přičemž funkce $\tilde{H}(a, x, \tilde{u})$ je nyní po provedení všech výše uvedených kroků

$$\text{(i)}\ \tilde{H} \equiv \tilde{\gamma_1}(u) \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big(\sqrt{2}x + \int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\Big)\right) + \tilde{h}(a, u), \tag{6.15}$$

$$\text{(ii)}\ \tilde{H} \equiv \tilde{\gamma_1}(u) \cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big(\sqrt{2}x + \int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\Big)\right) + \tilde{h}(a, u), \tag{6.16}$$

$$\text{(iii)}\ \tilde{H} \equiv \pm\left(\tfrac{-1}{24}\Lambda\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big(\sqrt{2}x + \int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\Big)\right) + \tilde{h}(a, u), \tag{6.17}$$

kde jsme provedli označení

$$\tilde{h}(a, u) \equiv 2\sqrt{2}a\tilde{\gamma_2}(u) - \frac{12k^{1/2}}{\Lambda}. \tag{6.18}$$

Na tyto výrazy můžeme použít vzorce pro úpravy goniometrických a hyperbolických funkcí s konečným výsledkem

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ \tilde{H} \equiv \tilde{\gamma_1}(u)\Bigg[&\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda x}\right)\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\right) \\ &- \sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda x}\right)\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\right)\Bigg] + \tilde{h}(a, u), \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)}\ \tilde{H} \equiv \tilde{\gamma_1}(u)\Bigg[&\cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{3}\Lambda x}\right)\cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\right) \\ &+ \sinh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{3}\Lambda x}\right)\sinh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\right)\Bigg] + \tilde{h}(a, u), \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\text{(iii)}\ \tilde{H} \equiv \pm\left(\tfrac{-1}{24}\Lambda\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big(\sqrt{2}x + \int \tilde{\gamma_3}(u)\mathrm{d}u\Big)\right) + \tilde{h}(a, u), \tag{6.21}$$

Nyní se dostáváme ke zdůvodnění zavedení parametrů C a κ.

6.2 Srovnání se standardním Kundtovým řešením

Již bylo zmíněno, že metriky Kundtovy třídy řešení mohou nabývat tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = 2\frac{1}{p^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} - 2\frac{q^2}{p^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + F\,\mathrm{d}u^2, \tag{6.22}$$

kde jednotlivé funkce jsou

$$
\begin{aligned}
p &= 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}, \\
q &= (1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})\alpha + \bar{\beta}\xi + \beta\bar{\xi}, \\
F &= \kappa\frac{q^2}{p^2} - \frac{(q^2)_{,u}}{p^2}v - \frac{q}{p}H, \\
\kappa &= \tfrac{1}{3}\Lambda\alpha^2 + 2\beta\bar{\beta},
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

přičemž $\alpha(u)$ a $\beta(u)$ jsou libovolnými funkcemi u, viz tvar (2.7).

Nyní je již zřejmý důvod zavedení κ, neboť metriku (6.14) lze snadno identifikovat s řešením (6.22). Zřejmě musí platit následující vztahy

$$
\frac{\kappa a^2}{2k} = \frac{q^2}{p^2}, \qquad \text{resp.} \qquad a = \frac{q}{\sqrt{\kappa p^2 - \frac{1}{3}\Lambda q^2}}, \tag{6.24}
$$

$$
\frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 = 2\frac{1}{p^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi}. \tag{6.25}
$$

$$
-16\sqrt{2}C^2\frac{a}{k}\tilde{H} = \frac{q}{p}H. \tag{6.26}
$$

Zavedení C je motivováno pouze volností ve škálování funkce $\tilde{H}$ resp. F.

Jedná se o poměrně složitou soustavu rovnic – je třeba pamatovat na závislosti $p(\xi, \bar{\xi}), q(\xi, \bar{\xi}, u), \kappa(u)$. Jelikož ale v metrice (6.14) není $\tilde{H}$ žádným členem lineární ve v, z výše uvedených předpisů je zřejmé, že q nezávisí na u, neboť jedině tak může být jeho derivace nulová. Funkce $\alpha(u)$ a $\beta(u)$ jsou tedy pouze libovolnými *konstantami*, což přináší do diskuse možných řešení soustavy další zjednodušení. Bez újmy na obecnosti lze dokonce předpokládat kladnost α.

6.3 Transformační vztahy dle volby α a β

Dosazením (6.23) do soustavy rovnic (6.24), (6.25) a následným delším výpočtem získáme kompletní transformaci

$$
a = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})\alpha + \bar{\beta}\xi + \beta\bar{\xi}}{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}}, \tag{6.27}
$$

$$
x = \mathrm{i}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta} - \int\frac{\mathrm{d}\bar{\xi}}{\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta}}\right), \tag{6.28}
$$

Nyní provedeme explicitní integrace na základě diskuse pro jednotlivé parametry. Nejprve zvážíme případ $\beta = 0$, v tomto případě má κ shodné znaménko s Λ a odpovídající varianty tedy jsou

$$x = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\dfrac{3}{\Lambda}}\ln\left(\dfrac{\xi}{\bar{\xi}}\right), & \text{pro} \quad \Lambda > 0, \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{3}{\Lambda}}\ln\left(\dfrac{\xi}{\bar{\xi}}\right), & \text{pro} \quad \Lambda < 0. \end{cases} \tag{6.29}$$

Ve variantách $\beta \neq 0$ je výrazem majícím výrazný vliv na výsledek integrace součin $\Lambda\kappa$. Uvažujeme-li $\Lambda\kappa < 0$, musí nutně platit $\Lambda < 0$ a $\kappa > 0$, načež

$$\begin{aligned} x &= -\mathrm{i}\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}\left[\arctan\left(\sqrt{-\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\bar{\beta}\xi+\alpha)\right) - \arctan\left(\sqrt{-\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\beta\bar{\xi}+\alpha)\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}\ln\left|\frac{\left(\frac{\Lambda}{3}(\bar{\beta}\xi+\alpha)-\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{\Lambda}{3}(\bar{\beta}\xi+\alpha)+\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\frac{\left(\frac{\Lambda}{3}(\beta\bar{\xi}+\alpha)+\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{\Lambda}{3}(\beta\bar{\xi}+\alpha)-\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\right|. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Další možností je $\Lambda\kappa > 0$, což lze dosáhnout dvěmi kombinacemi. První možností je $\Lambda > 0$ a $\kappa > 0$, což dává

$$\begin{aligned} x &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left[\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\bar{\beta}\xi+\alpha)\right) - \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\beta\bar{\xi}+\alpha)\right)\right] = \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\ln\left|\frac{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\bar{\beta}\xi+\alpha)-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\bar{\beta}\xi+\alpha)+\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\frac{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\beta\bar{\xi}+\alpha)+\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\beta\bar{\xi}+\alpha)-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\right|. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Druhá možnost je pak $\Lambda < 0$ a $\kappa < 0$, což vede na

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}\left[\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\bar{\beta}\xi+\alpha)\right) - \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3\kappa}}(\beta\bar{\xi}+\alpha)\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}\ln\left|\frac{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\bar{\beta}\xi+\alpha)-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\bar{\beta}\xi+\alpha)+\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\frac{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\beta\bar{\xi}+\alpha)+\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}{\left(\frac{1}{3}\Lambda(\beta\bar{\xi}+\alpha)-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda\kappa}\right)}\right|. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Získali jsme tedy kompletní předpisy transformací od souřadnic a, x k souřadnicím $\xi, \bar{\xi}$. Je zřejmé, že pro Λ kladné je vše bezproblémové. Pro kosmologickou konstantu zápornou (spíše však pro $\kappa < 0$) máme výrazy pro x čistě imaginární. Vše je ale v pořádku: jedná se právě o dříve zmiňovaný důsledek záporného k, což je formálně kompenzováno zápornou druhou mocninou dx.

Nyní ještě zbývá vyjádřit výrazy pro $\tilde{H}$, nejprve si vyjádříme vztah mezi H a $\tilde{H}$ pomocí (6.26)

$$
\begin{aligned}
H &= 64C^2 \frac{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}}{(1 + \frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi})(\frac{1}{3}\Lambda\alpha^2 + 2\beta\bar{\beta})} \tilde{H} = \\
&= 64C^2 \frac{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}}{p\kappa} \tilde{H} = \\
&= \frac{1}{p}\left(64C^2 \frac{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}}{\frac{1}{3}\Lambda\alpha^2 + 2\beta\bar{\beta}} \tilde{H}\right). \qquad (6.33)
\end{aligned}
$$

Postupně dosadíme; $\tilde{h}$ dané výrazem (6.18) je

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(\xi,\bar{\xi},u) = 2 &\frac{q}{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}} \tilde{\gamma}_2(u) \\
&- \frac{6\ p\ \sqrt{\kappa}}{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\xi^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\xi - \beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\xi}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\xi} - \bar{\beta})}}, \qquad (6.34)
\end{aligned}
$$

což správně odpovídá vztahu mezi H a $\tilde{H}$, neboť odmocninové výrazy se vyruší.

Nakonec zbývá určit jednotlivé varianty H dosazením za příslušný transformační vztah pro x, tj. vztahy (6.29)-(6.32). Toto dosazení je dosti složité, což je zřejmé již z náhledu na množství variant x dle jednotlivých parametrů. Je však možné prodiskutovat transformaci alespoň kvalitativně a určit tvar výsledné funkce. Jde nám především o identifikaci s konformně plochým předpisem (2.12).

Ve variantě (i) dle výrazu (6.19), resp. (ii) výraz (6.20) se vyskytují goniometrické, resp. hyperbolické funkce, je tedy třeba rozmyslet jejich chování v souvislosti s transformačními vztahy. V argumentu je vždy $\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}x$, což velice dobře koresponduje s transformačními vztahy pro x, neboť dojde ke kompenzaci s výrazem $\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}$. Nyní zbývá působení funkce exp (resp. goniometrických a hyperbolických funkcí) na ln (resp. arctan[h], který je s ln svázán známým „převodním“ vztahem). Uveďme přehled možných výsledků

$$
\begin{aligned}
\cos(\mathrm{i}\ \mathrm{arctanh}(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \sin(\mathrm{i}\ \mathrm{arctanh}(x)) &= \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\
\cosh(\mathrm{i}\ \arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \sinh(\mathrm{i}\ \arctan(x)) &= \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\\
\cosh(\mathrm{arctanh}(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \sinh(\mathrm{arctanh}(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\
\cos(\mathrm{i}\ \ln(\sqrt{x})) &= \frac{x+1}{2\sqrt{x}}, & \sin(\mathrm{i}\ \ln(\sqrt{x})) &= \mathrm{i}\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}},\\
\cosh(\ln(\sqrt{x})) &= \frac{x+1}{2\sqrt{x}}, & \sinh(\ln(\sqrt{x})) &= \frac{x-1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

Nyní je dle úvahy zřejmé, že odmocninové výrazy zmizí, obdobně jako v případě $\tilde{h}$, vlivem vztahu mezi H a $\tilde{H}$ a zbydou jen výrazy typu sin[h]sin[h], cos[h]cos[h] a kombinace sin[h]cos[h] daná součtem dvou výrazů v x. Tyto součinové výrazy dávají dle výše uvedených vztahů buď konstantu, člen lineární v ξ, popř. $\bar{\xi}$ nebo $\xi\bar{\xi}$. Konformně plochý tvar (2.12) je tedy ověřen v plné odbecnosti, neboť výrazy jiného typu se ve funkci H nevyskytují.

6.4 Speciální případy určující kanonické podtřídy

Nyní prozkoumáme výše uvedené vztahy v konkrétních případech. Naprosto obecnou transformaci jsme nalezli, nyní nám jde o to ukázat, že touto transformací získáme všechny Kundtovy kanonické podtřídy, které lze klasifikovat parametry α a β.

Nejprve je tu volba $\alpha = 1$ a $\beta = 0$, ze které vyplývají předpisy

$$
\begin{aligned}
p &= 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}, & q &= 1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi},\\
F &= \kappa\frac{q^2}{p^2} - \frac{q}{p}H, & \kappa &= \frac{\Lambda}{3},
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

z nichž je zřejmé, že při této volbě nám záporná kosmologická konstanta Λ zaručuje zápornou hodnotu κ, pro kladnou Λ pak kladnou κ. Dosadíme-li do předpisu (6.27), (6.28) a zohledníme $\beta = 0$, obdržíme transformaci ve tvaru

$$
a = \frac{3}{\sqrt{2}\Lambda}\frac{1-\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}{\sqrt{\xi\bar{\xi}}}, \tag{6.36}
$$

$$x = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\ln\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right), & \text{pro} \quad \Lambda > 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}\ln\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right), & \text{pro} \quad \Lambda < 0. \end{cases} \tag{6.37}$$

Funkci H rozepíšeme dle předpisu pro konformně ploché řešení (2.12), tedy pro varianty (i) a (ii) shodně

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{384C^2}{\Lambda}\left(\tilde{\gamma}_2(u) - \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\right), \\ A_1 &= -32C^2\tilde{\gamma}_1(u)\Bigg(\cos[\mathrm{h}]\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}|\Lambda|}\int\tilde{\gamma}_3(u)\mathrm{d}u\Big) \\ &\qquad -\mathrm{i}\sin[\mathrm{h}]\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}|\Lambda|}\int\tilde{\gamma}_3(u)\mathrm{d}u\Big)\Bigg), \qquad (6.38) \\ A_2 &= -64C^2\left(\tilde{\gamma}_2(u) + \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\right). \end{aligned}$$

varianta (iii) dopadne analogicky.

Druhou kanonickou volbou je $\alpha = 0, \beta = 1$. Obdobně máme podmínky

$$\begin{aligned} p &= 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}, \qquad q = \xi + \bar{\xi}, \\ F &= \kappa\frac{q^2}{p^2} - \frac{q}{p}H, \qquad \kappa = 2. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Hodnota κ je nyní pevná, na kosmologické konstantě nezávislá. Tato situace připouští kladnou i zápornou kosmologickou konstantu, nikoli však $\kappa < 0$. V tomto případě máme transformaci

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\xi + \bar{\xi}}{\sqrt{(1 - \frac{1}{6}\Lambda\xi^2)(1 - \frac{1}{6}\Lambda\bar{\xi}^2)}}, \tag{6.40}$$

$$x = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(\operatorname{arctanh}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\xi\Big) - \operatorname{arctanh}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\bar{\xi}\Big)\right), \tag{6.41}$$

Opět se jedná o transformační vztah mezi (6.14) a (6.22). Funkci H lze nyní vyjádřit pomocí $\tilde{H}$ dle vztahu (6.33) jako

$$H = \frac{1}{p}\Big[32C^2\sqrt{(1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\xi^2)(1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\bar{\xi}^2)}\tilde{H}\Big], \tag{6.42}$$

opět dostaneme funkci ve tvaru (2.12), kde pro případ (i) máme

$$
\begin{aligned}
A_0(u) &= 32C^2 \left(\tilde{\gamma}_1(u) \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda} \int \tilde{\gamma}_3(u) \mathrm{d}u \right) - \sqrt{2}\frac{6}{\Lambda} \right), \\
A_1(u) &= 32C^2 \left(2\tilde{\gamma}_2(u) - \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\tilde{\gamma}_1(u) \sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda} \int \tilde{\gamma}_3(u) \mathrm{d}u \right) \right), \\
A_2(u) &= -\tfrac{1}{6}\Lambda A_0(u) - 2.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

V případě $\Lambda < 0$ stačí v transformaci (6.40), (6.41) nahradit $\Lambda \to -\Lambda$ a $\operatorname{arctanh} \to \arctan$ v (6.41). Tomuto odpovídá nahrazení goniometrických funkcí v sadě (6.43) odpovídajícími hyperbolickými funkcemi, což vede na příslušnou variantu (ii). Varianta (iii) daná (6.21) je po transformaci též ve vhodném tvaru (2.12), kde

$$
\begin{aligned}
A_0(u) &= 32C^2 \left(\frac{2}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}} \exp\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda} \int \tilde{\gamma}_3(u) \mathrm{d}u \right) - \sqrt{2}\frac{6}{\Lambda} \right), \\
A_1(u) &= 32C^2 \left(2\tilde{\gamma}_2(u) - 2\,\mathrm{i} \exp\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda} \int \tilde{\gamma}_3(u) \mathrm{d}u \right) \right), \\
A_2(u) &= -\tfrac{1}{6}\Lambda A_0(u) - 2.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Ukázali jsme tedy, že výše uvedené transformace převádějí metriku (6.8) na příslušné Kundtovy podtřídy dle hodnot Λ a κ. Funkce H přesně odpovídají tvarům potřebným v případě konformně plochého řešení. Potvrdili jsme tedy, že výsledek nalezený v článku [4] odpovídá již známé třídě řešení, kterou pro $\Lambda \neq 0$ nalezli Ozsváth, Robinson a Rózga [8].

Kapitola 7

Alternativní přístup k analýze konformně plochých řešení s kosmologickou konstantou

V této závěrečné kapitole přistoupíme ke zpracování metriky (86) z článku [4] trochu odlišným způsobem. Vyjdeme z metriky (6.14), přičemž stále budeme uvažovat funkce $\tilde{H}$ tomuto tvaru metriky odpovídající, viz (6.15)-(6.17). Diskuse postupu je nyní odvislá od hodnoty Λ.

7.1 Kladná kosmologická konstanta

Transformace

$$y = \frac{\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, a\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}}, \qquad \text{neboli} \qquad a = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}}, \tag{7.1}$$

dává nový tvar metrice (6.14),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)} \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) + 12\frac{\tanh^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)}{\Lambda}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ & + \left(-\frac{32}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)}\,\tilde{H} + 12\frac{\tanh^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}\, y\right)}{\Lambda}\, v^2\right)\mathrm{d}u^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dalším krokem je drobná úprava

$$\tilde{y} = \sqrt{2}\, y, \qquad \tilde{u} = \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}, \tag{7.3}$$

která má na metriku vliv

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\tilde{y}^2\right) + 2\,\frac{\tanh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}v \\ & + \left(-32\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}\,\tilde{H} + 2\,\tanh^2\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)\,v^2\right)\,\mathrm{d}\tilde{u}^2, \end{aligned} \tag{7.4}$$

a následně provedeme substituci

$$\xi = \frac{1}{2}\,\tilde{y} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,x, \qquad \bar{\xi} = \frac{1}{2}\,\tilde{y} - \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,x, \tag{7.5}$$

s výsledkem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\,\frac{\tanh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}v \\ & + \left(-32\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}\,\tilde{H} + 2\,\tanh^2\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)\,v^2\right)\,\mathrm{d}\tilde{u}^2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nahrazením

$$X = \sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi}), \qquad \tilde{v} = v\,\sinh\,X \tag{7.7}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cosh^2 X}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\left(-\frac{\tilde{v}}{\cosh\,X}\,(\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\bar{\xi}) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sinh\,X}{\cosh^2 X}\,\mathrm{d}\tilde{v}\right) \\ & + 2\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\left(-16\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sinh\,X}{\cosh^2 X}\,\tilde{H}\,\mathrm{d}\tilde{u} + \frac{\tilde{v}^2}{\cosh^2 X}\,\mathrm{d}\tilde{u}\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Drobná úprava hyperbolických funkcí dává

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{\cosh^2 X}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\mathrm{d}\tilde{u}\Bigg\{ &- \frac{\tilde{v}}{\cosh X}\,(\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\bar{\xi}) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sinh X}{\cosh^2 X}\,\mathrm{d}\tilde{v} \\
&+ \left(\tilde{v}^2 - \left(\tilde{v}^2 \tanh^2 X + 16\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sinh X}{\cosh^2 X}\,\tilde{H}\right)\right)\mathrm{d}\tilde{u}\Bigg\}, \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

přičemž funkce $\tilde{H}(\xi, \bar{\xi}, \tilde{u})$ je nyní po provedení všech výše uvedených kroků ve variantě $\Lambda > 0$, tedy (i), dána

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} \equiv \gamma_1(\tilde{u})\Bigg[&\cosh\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}(\bar{\xi} - \xi)\right)\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\int\gamma_3(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}\right) \\
&- \mathrm{i}\sinh\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}(\bar{\xi} - \xi)\right)\sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\int\gamma_3(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}\right)\Bigg] \qquad (7.10) \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\,\gamma_2(\tilde{u})\sinh X - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\cosh X.
\end{aligned}
$$

Výsledek (7.9) je přesně ve tvaru metriky řešení, které nalezli v roce 1981 García Díaz a Plebański [6].

7.2 Záporná kosmologická konstanta

Analogicky jako v předchozí sekci, pouze s příhlédnutím k $\Lambda < 0$, uvažujeme transformaci

$$
y = \frac{\arcsin\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,a\right)}{\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}}, \qquad \text{neboli} \qquad a = \frac{\sin\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}{\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}}, \qquad (7.11)
$$

která dává nový tvar metrice,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) - 12\frac{\tan^2\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}{\Lambda}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (7.12) \\
&+ \left(-\frac{32}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sin\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}\,\tilde{H} - 12\frac{\tan^2\left(\sqrt{-\frac{1}{3}\Lambda}\,y\right)}{\Lambda}\,v^2\right)\mathrm{d}u^2.
\end{aligned}
$$

Dalším krokem je opět drobná úprava

$$\tilde{y} = \sqrt{2}\, y, \qquad \tilde{u} = -\frac{u}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}, \tag{7.13}$$

takže

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\tilde{y}^2\right) + 2\,\frac{\tan^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}v \\ & + \left(32\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sin\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)}\,\tilde{H} - 2\,\tan^2\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{y}\right)\,v^2\right)\mathrm{d}\tilde{u}^2. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Následně provedeme substituci

$$\xi = \frac{1}{2}\,\tilde{y} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,x, \qquad \bar{\xi} = \frac{1}{2}\,\tilde{y} - \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,x, \tag{7.15}$$

s výsledkem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\,\frac{\tan^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}v \\ & + \left(32\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sin\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}{\cos^2\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}\tilde{H} - 2\tan^2\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)v^2\right)\mathrm{d}\tilde{u}^2 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Nahrazením

$$\tilde{X} = \sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi}), \qquad \tilde{v} = v\,\sin\,\tilde{X} \tag{7.17}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{2}{\cos^2\tilde{X}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\mathrm{d}\tilde{u}\,\left(-\frac{\tilde{v}}{\cos\,\tilde{X}}\,(\mathrm{d}\xi+\mathrm{d}\bar{\xi}) + \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sin\,\tilde{X}}{\cos^2\tilde{X}}\,\mathrm{d}\tilde{v}\right) \\ & + 2\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\left(16\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sin\,\tilde{X}}{\cos^2 x}\,\tilde{H}\,\mathrm{d}\tilde{u} + \frac{\tilde{v}^2}{\cos^2\tilde{X}}\,\mathrm{d}\tilde{u}\right). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Úprava goniometrických funkcí dává

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{\cos^2 \tilde{X}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi} + 2\,\mathrm{d}\tilde{u}\Bigg\{ -\frac{\tilde{v}}{\cos\tilde{X}}\,(\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\bar{\xi}) + \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\frac{\sin\tilde{X}}{\cos^2\tilde{X}}\,\mathrm{d}\tilde{v}$$

$$+ \left(\tilde{v}^2 + \left(\tilde{v}^2\tan^2\tilde{X} + 16\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\frac{\sin\tilde{X}}{\cos^2\tilde{X}}\,\tilde{H}\right)\right)\mathrm{d}\tilde{u}\Bigg\}, \quad (7.19)$$

přičemž funkce $\tilde{H}(\xi,\bar{\xi},\tilde{u})$ je nyní po provedení všech výše uvedených kroků ve zbývajících dvou variantách

$$\text{(ii)}\ \tilde{H} \equiv \gamma_1(\tilde{u})\Bigg[\cos\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}(\bar{\xi}-\xi)\right)\cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\int\gamma_3(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}\right)$$

$$+\,\mathrm{i}\,\sin\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}(\bar{\xi}-\xi)\right)\sinh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\int\gamma_3(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}\right)\Bigg] \quad (7.20)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\,\gamma_2(\tilde{u})\sin\tilde{X} - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\cos\tilde{X},$$

$$\text{(iii)}\ \tilde{H} \equiv \pm\frac{2}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\exp\left(\mp\,\mathrm{i}\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}(\xi-\bar{\xi})\right)\exp\left(\pm\int\gamma_3(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}\right)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\,\gamma_2(\tilde{u})\sin\tilde{X} - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\cos\tilde{X}. \quad (7.21)$$

I v tomto případě $\Lambda < 0$ jsme tedy dostali přesně tvar řešení uvedený v článku [6].

7.3 Sjednocení případů $\Lambda > 0$ a $\Lambda < 0$

Provedeme-li následující sérii úprav v případě kladné kosmologické konstanty

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}}\tanh\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\xi\right), \qquad v = \frac{\tilde{v}}{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}, \qquad u = -\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{u} \quad (7.22)$$

a následující v případě záporné kosmologické konstanty

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}}\tan\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\xi\right), \quad v = \frac{\tilde{v}}{\sin\left(\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}(\xi+\bar{\xi})\right)}, \quad u = -\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{u}, \quad (7.23)$$

dostaneme metriku ve tvaru shodném pro oba případy ($\Lambda > 0$ i $\Lambda < 0$), totiž

$$\mathrm{d}s^2 = 2\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}\mathrm{d}\bar{\tilde{\xi}}}{\left(1+\frac{1}{6}\Lambda\tilde{\xi}\bar{\tilde{\xi}}\right)^2} - 2\left(\frac{\tilde{\xi}+\bar{\tilde{\xi}}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\tilde{\xi}\bar{\tilde{\xi}}}\right)^2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left[2\left(\frac{\tilde{\xi}+\bar{\tilde{\xi}}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\tilde{\xi}\bar{\tilde{\xi}}}\right)^2 v^2 - \frac{\tilde{\xi}+\bar{\tilde{\xi}}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\tilde{\xi}\bar{\tilde{\xi}}}H\right]\mathrm{d}u^2 \qquad (7.24)$$

Metriku jsme tímto převedli na kanonickou Kundtovu podtřídu (6.22), (6.23) s hodnotami $\alpha = 0$ a $\beta = 1$. Jelikož zde $\kappa = 2$ nezávisí na kosmologické konstantě a je kladné, tvar metriky je dle očekávání shodný pro Λ kladné i záporné. Funkce H je ve vztahu k $\tilde{H}$ dána

$$H = 32\frac{\sqrt{(1-\frac{1}{6}\Lambda\xi^2)(1-\frac{1}{6}\Lambda\bar{\xi}^2)}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}\tilde{H}. \qquad (7.25)$$

V jednotlivých variantách $\tilde{H}$ daných výrazy (7.10), (7.20), (7.21) užitím výše uvedených transformací dostáváme

$$\text{(i)}\ H \equiv \frac{32}{1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}\Big\{\left(1-\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right)\tilde{\Gamma}_1(u) + \Big(2\gamma_2(u)+\mathrm{i}\tilde{\Gamma}_2(u)\Big)\xi + \Big(2\gamma_2(u)-\mathrm{i}\tilde{\Gamma}_2(u)\Big)\bar{\xi} - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\left(1+\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right)\Big\}, \qquad (7.26)$$

$$\text{(ii)}\ H \equiv \frac{32}{1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}}\Big\{\left(1-\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right)\tilde{\Gamma}_1(u) + \Big(2\gamma_2(u)+\mathrm{i}\tilde{\Gamma}_2(u)\Big)\xi + \Big(2\gamma_2(u)-\mathrm{i}\tilde{\Gamma}_2(u)\Big)\bar{\xi} - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\left(1+\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right)\Big\}, \qquad (7.27)$$

$$\text{(iii)}\ H \equiv \frac{\pm 64\,\exp\Big(\pm\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\int\tilde{\gamma}_3(u)\mathrm{d}u\Big)}{\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\left(1+\frac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right)}\Big\{\left(1-\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\right) + \Big(2\gamma_2(u)+\mathrm{i}\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big)\xi + \Big(2\gamma_2(u)-\mathrm{i}\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\Big)\bar{\xi} - \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\Big(1+\tfrac{1}{6}\Lambda\xi\bar{\xi}\Big)\Big\}. \qquad (7.28)$$

Výsledný tvar zcela evidentně odpovídá obecnému konformnímu předpisu (2.12).

7.4 Převedení na alternativní kanonickou podtřídu pro $\Lambda > 0$

Zbývá ještě identifikovat kanonickou podtřídu s volbou $\alpha = 1$ a $\beta = 0$. Provedeme-li následující sérii úprav v případě kladné kosmologické konstanty $\Lambda > 0$

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}}\,\frac{1+\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\zeta}{1-\sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\zeta}, \qquad u = \frac{\Lambda}{6}\,t \tag{7.29}$$

z (7.24) dostaneme metriku ve tvaru (místo ξ máme ζ, místo u pak t)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & 2\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\left(1+\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}\right)^2} - 2\left(\frac{1-\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}\right)^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}v \\ & + \left[\frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{1-\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}\right)^2 v^2 - \frac{1-\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}{1+\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}\,H\right]\mathrm{d}t^2. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Zcela zřejmě jsme získali tvar metriky (6.22), (6.23) pro příslušnou kanonickou podtřídu. Funkce H je nyní dána v jednotlivých variantách užitím transformací (7.29) na výrazy (7.26)-(7.28), přičemž opět dostáváme shodu s předpisem konformně plochého řešení (2.12).

Ukázali jsme tedy, že výchozí metriku (6.8) Edgara a Ramosové lze převést i na kanonickou podtřídu $\alpha = 1$, $\beta = 0$ konformně plochých řešení v Ozsváthově–Robinsonově–Rózgově tvaru (2.6), (2.7).

7.5 Shrnutí

Tvary metrik odvozených v prvních dvou sekcích 8.1 a 8.2 odpovídají těm, které byly nalezeny v článku Garcíi Díaze a Plebańského [6]. Tento tvar platí pro $\Lambda > 0$ i $\Lambda < 0$. ale přímo nepřipouští $\kappa < 0$. Jak jsme se však přesvědčili v poslední kapitole, je možné i tento tvar získat převedením do příslušné kanonické podtřídy v případě $\Lambda > 0$. Použitý postup při transformacích mezi podtřídami vychází z poznámek uvedených v [11], kde je také provedena podrobnější diskuse vztahů mezi jednotlivými tvary.

V této kapitole jsme tedy nezávisle potvrdili existenci všech kanonických podtříd Kundtových řešení s $\Lambda \neq 0$, $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda \neq 0$ a našli tak alternativní postup vedoucí k výsledným tvarům metrik. Potvrdili jsme též, že v kanonických třídách mají funkce H požadovaný tvar a jedná se tedy opravdu o řešení konformně plochá.

Závěr

Cílem této práce bylo studovat všechny konformně ploché prostoročasy s polem čistého záření a libovolnou hodnotou kosmologické konstanty Λ.

V první kapitole jsme připomenuli obecnou algebraickou klasifikaci prostoročasů, ve druhé jsme pak stručně popsali Kundtovu třídu řešení Einsteinových rovnic. Zaměřili jsme se především na řešení typu N a O.

Hlavní náplní práce bylo prostudovat nedávné výsledky Edgara, Vickerse a Machado Ramosové uvedené v článcích [1]-[4], a nalézt explicitní transformace vedoucí k jejich indentifikaci s již známými tvary těchto metrik, především s obecným vyjádřením, které našli Ozsváth, Robinson a Rózga v článku [8]. Jde o konformně plochá řešení (případně typu N) s čistým zářením a kosmologickou konstantou. Systematický postup odvození a prezentace transformačních vztahů je obsažen v kapitolách 3-7 (přičemž kapitoly 6 a 7 představují ekvivalentní přístupy ke konformně plochým řešením s $\Lambda \neq 0$). Takto se podařilo identifikovat všechny invariantní podtřídy těchto Kundtových prostoročasů.

Ukázali jsme, že řešení nalezená v [1]-[4] jsou skutečně správná, plně odpovídají již známým metrikám a metoda GIF použitá k jejich odvození je tedy funkční. Poněkud problematická se ukázala být jen zdánlivá restrikce volby funkcí ve výsledných metrikách (A_2 v (4.12), $b(u)$ v (5.12) dle (5.15), A_0 s A_2 v (6.38), (6.44)). Ukázali jsme však, že ve všech těchto případech jde pouze o využití specifické souřadnicové volnosti příslušných metrik. V článku [4] je ovšem problém se zápornou hodnotou funkce k. Jak je vidět z výrazu (6.24), znaménko k je identické se znaménkem parametru κ, který pro některé případy s $\Lambda < 0$ může být záporný (např. pro podtřídu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, pro kterou $\kappa = \frac{1}{3}\Lambda < 0$). Tento problém vymizí až při užití transformace (6.27), (6.28).

Hlavní výsledky této práce již byly sepsány do podoby odborného článku (jehož rukopis uvádíme v Příloze), který bude v následujících dnech zaslán do časopisu *General Relativity and Gravitation*.

Literatura

[1] Edgar, S. B., Vickers, J. A.: *Integration using invariant operators: conformally flat radiaton metrics*, Class. Quantum Grav. **16** (1999) 589–604.

[2] Edgar, S. B., Machado Ramos, M. P.: *Obtaining a class of type N pure radiation metrics using invariant operators*, Class. Quantum Grav. **22** (2005) 791–802.

[3] Edgar, S. B., Machado Ramos, M. P.: *Obtaining a class of type O pure radiation metrics with a negative cosmological constant, using invariant operators*, Gen. Relativ. Grav. **39** (2007) 539–566.

[4] Edgar, S. B., Machado Ramos, M. P.: *Type O pure radiation metrics with a cosmological constant*, Gen. Relativ. Grav. **39** (2007) 1749–1772.

[5] Stephani, H. a kol.: *Exact solutions of Einstein's field equations, 2nd edition*. Cambridge University Press, Cambridge 2003.

[6] García Díaz, A., Plebański, J. F.: *All nontwisting N's with cosmological constant*, J. Math. Phys. **22** (1981) 2655–2658.

[7] Siklos, S.T.C.: *Lobatchevski Plane Gravitational Waves in Galaxies, Axisymmetric Systems and Relativity*, M.A.H. MacCallum (ed.) Cambridge University Press, Cambridge (1985) pp 247.

[8] Ozsváth, I., Robinson, I., Rózga, K.: *Plane-fronted gravitational and electromagnetic waves in spaces with cosmological constant*, J. Math. Phys. **26** (1985) 1755–1761.

[9] Griffiths, J. B., Docherty, J., Podolský, J.: *Generalized Kundt waves and their physical interpretation*, Class. Quantum Grav. **21** (2004) 207–222.

[10] Podolský, J.: *Interpretation of the Siklos solutions as exact gravitational waves in the anti-de Sitter universe*, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 719–733.

[11] Bičák, J., Podolský, J.: *Gravitational waves in vacuum spacetimes with cosmological constant. I. Classification and geometrical properties of nontwisting type N solutions*, J. Math. Phys. **40** (1999) 4495–4505.

[12] Milson, R., Pelavas, N.: *The type N Karlhede bound is sharp*, Class. Quantum Grav. **25** (2008) 012001 (7pp).

[13] Koutras, A., McIntosh, C.: *A metric with no symmetries or invariants*, Class. Quantum Grav. **13** (1996) L47–L49.

[14] Bičák, J., Pravda, V.: *Curvature invariants in type-N spacetimes*, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 1539–1555.

[15] Pravda, V. a kol.: *All spacetimes with vanishing curvature invariants*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) 6213–6236.

[16] Podolský, J., Belán̆, M.: *Geodesic motion in the Kundt spacetimes and the character of envelope singularity*, Class. Quantum. Grav. **21** (2004) 2811–2829.

Příloha A

Rukopis odborného článku

Dále je přiložen rukopis odborného článku, který bude v následujících dnech zaslán do časopisu *General Relativity and Gravitation*.

Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Jiří Podolský · Ondřej Prikryl

On conformally flat and type N pure radiation metrics

Received: 22 May 2008 / Accepted: date

Abstract We study pure radiation spacetimes of algebraic types O and N with a possible cosmological constant. In particular, we present explicit transformations which put these metrics, that were recently re-derived by Edgar, Vickers and Machado Ramos, into a general Ozsváth–Robinson–Rózga form. By putting all such metrics into the unified coordinate system we confirm that their derivation based on the GIF formalism is correct. We identify only few obvious differences.

Keywords Kundt spacetimes · conformally flat solutions · pure radiation

PACS 04.20.Jb · 04.30.Nk

1 Introduction

In recent papers [1–4], Edgar, Vickers and Machado Ramos systematically re-derived a general family of pure radiation spacetimes which are of algebraic types N and O. Using the advantages of the generalized invariant formalism (GIF) [5], which combines the features of standard Geroch–Held–Penrose (GHP) and null rotations invariant formalisms, they obtained a complete class of conformally flat and type N solutions of the field equations, possibly admitting a cosmological constant Λ.

These metrics were presented in [1–4] in the contravariant forms of g^{ij} using various different coordinates. Our main aim here is to compare these (apparently distinct) metrics by putting all of them into a common coordinate system which is more suitable for physical and geometrical interpretation. This will also elucidate relations of these solutions to previous works, in

Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics,
Charles University in Prague, V Holešovičkách 2, 180 00 Prague 8, Czech Republic
Tel.: +420-221912505, E-mail: podolsky‘AT’mbox.troja.mff.cuni.cz

particular those presented in [6–10]. We will explicitly demonstrate that all such metrics can be conveniently written in the form

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar\zeta - 2\,\frac{Q^2}{P^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(\kappa\,\frac{Q^2}{P^2}\,v^2 - \frac{(Q^2)_{,u}}{P^2}\,v - \frac{Q}{P}\,H\right)\mathrm{d}u^2\,, \tag{1}$$

where

$$P = 1 + \tfrac{1}{6}\Lambda\zeta\bar\zeta\,, \tag{2}$$

$$Q = (1 - \tfrac{1}{6}\Lambda\zeta\bar\zeta)\,\alpha + \bar\beta\,\zeta + \beta\,\bar\zeta\,, \tag{3}$$

and

$$\kappa = \tfrac{1}{3}\Lambda\,\alpha^2 + 2\,\beta\bar\beta\,, \tag{4}$$

where $\alpha(u)$, $\beta(u)$ are functions of u, and $H(\zeta,\bar\zeta,u)$ is a function of $\zeta,\bar\zeta,u$. The general metric (1)–(4) was first presented by Ozsváth, Robinson and Rózga in [6]. It represents all type N or conformally flat Kundt spacetimes with a cosmological constant which are either vacuum or contain pure radiation. Indeed, with the null tetrad $\boldsymbol{k} = \partial_v$, $\boldsymbol{l} = (P^2/Q^2)\,\partial_u + (P^4/2Q^4)F\,\partial_r$, $\boldsymbol{m} = P\partial_{\bar\zeta}$ where $F = g_{uu}$, the only non-zero curvature tensor components are given by

$$\Psi_4 = \tfrac{1}{2}(P\,H)_{,\zeta\zeta}\,\frac{P^4}{Q^3}\,, \tag{5}$$

$$\Phi_{22} = \tfrac{1}{2}(P^2H_{,\zeta\bar\zeta} + \tfrac{1}{3}\Lambda\,H)\frac{P^3}{Q^3}\,. \tag{6}$$

The complete family of *conformally flat* Kundt spacetimes with pure radiation are obtained by setting $\Psi_4 = 0$, in which case the function H takes the particular form

$$H = \frac{\mathcal{A}(u) + \bar{\mathcal{B}}(u)\zeta + \mathcal{B}(u)\bar\zeta + \mathcal{C}(u)\zeta\bar\zeta}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar\zeta}\,, \tag{7}$$

where $\mathcal{A}(u)$, $\mathcal{B}(u)$ and $\mathcal{C}(u)$ are arbitrary functions of u, with $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ real. The pure radiation component is then

$$\Phi_{22} = \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{C} + \tfrac{1}{6}\Lambda\,\mathcal{A}\right)\frac{P^3}{Q^3}\,. \tag{8}$$

The spacetimes are *vacuum* when $\Phi_{22} = 0$, i.e. $P^2H_{,\zeta\bar\zeta} + \frac{1}{3}\Lambda\,H = 0$. This equation has a general solution $H = (f_{,\zeta} + \bar f_{,\bar\zeta}) - \frac{1}{3}\Lambda P^{-1}(\bar\zeta f + \zeta\bar f)$, where $f(\zeta,u)$ is an arbitrary function of ζ and u, holomorphic in ζ. In all other cases, the spacetimes contain pure radiation and are of type N or O.

In particular, for conformally flat *and* vacuum spacetimes, $\mathcal{C} = -\frac{1}{6}\Lambda\,\mathcal{A}$. Such functions H of the form (7) correspond to $f = c_0(u) + c_1(u)\zeta + c_2(u)\zeta^2$, where $c_i(u)$ are complex functions of u related to $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. These solutions, with f quadratic in ζ, are isometric to Minkowski (if $\Lambda = 0$), de Sitter (if $\Lambda > 0$) and anti-de Sitter spacetime (if $\Lambda < 0$), see [9]. For all other choices of H, the Kundt spacetimes (1)–(4) describe exact non-expanding pure radiation and/or gravitational waves.

2 Type N spacetimes with pure radiation

In [2] the class of type N pure radiation solutions of Einstein's field equations with $\Lambda = 0$ within the Kundt family was obtained. In the coordinates (t, n, a, b) of equation (66) therein, the contravariant metric tensor reads[1]

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1/a & -L/a & n/a & 0 \\ 0 & n/a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

where the arbitrary function $L(t, \xi, \bar{\xi})$ depends of three real coordinates t, a, b via the complex variable $\xi = a + \mathrm{i}\, b$. The inverse matrix to (9) is

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (n^2 + aL) & a & -n & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

so that the metric can be written as

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2n\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}a + 2a\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}n + (n^2 + aL)\, \mathrm{d}t^2. \tag{11}$$

Now, performing the transformation and re-labelling

$$x = a, \qquad y = b, \qquad v = -\frac{n}{2a}, \qquad u = t, \tag{12}$$

the metric becomes

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 4x^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + (4x^2 v^2 + x\, L)\, \mathrm{d}u^2, \tag{13}$$

which is the standard explicit form of the Kundt type N metrics, see e.g. [11]. Introducing the complex spatial parameter $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathrm{i}\, y)$, we obtain

$$\mathrm{d}s^2 = 2\, \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\bar{\zeta} - 2(\zeta + \bar{\zeta})^2 \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \left[2(\zeta + \bar{\zeta})^2 v^2 - (\zeta + \bar{\zeta})\, H\right]\, \mathrm{d}u^2. \tag{14}$$

This is the particular case $P = 1$, $Q = \zeta + \bar{\zeta}$, $H = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, L$ of the general metric (1) of Kundt type N spacetimes given in [6,9], which corresponds to the choice of parameters $\Lambda = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, i.e. $\kappa = 2$.

[1] Here and in the following we are changing the signature to $(- + ++)$.

3 Type O spacetimes with pure radiation

Next, we will examine the family of solutions obtained in [1]. In the coordinates (t, n, a, b), these conformally flat spacetimes are given by

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 1/a & (2S - 2Ma - a^2 - b^2)/a & n/a & E/a \\ 0 & n/a & 1 & 0 \\ 0 & E/a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

where E, M, S are arbitrary functions of t (see equation (68) in [1]). The corresponding covariant metric tensor components are obtained by inverting this matrix, i.e.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (n^2 + E^2 + aL) & a & -n & -E \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 1 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

where

$$L \equiv a^2 + b^2 + 2Ma - 2S. \tag{17}$$

The metric thus takes the explicit form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}a - 2E\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}b + 2a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}n + (n^2 + E^2 + aL)\,\mathrm{d}t^2, \tag{18}$$

which for $E = 0$ obviously reduces to (11). With the transformation and relabelling

$$x = a, \qquad y = b - \int E\,\mathrm{d}t, \qquad v = -\frac{n}{2a}, \qquad u = t, \tag{19}$$

the metric becomes

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 4x^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (4x^2v^2 + x\,L)\,\mathrm{d}u^2, \tag{20}$$

where the function L is

$$L = x^2 + y^2 + 2M\,x + \big(2\textstyle\int E\,\mathrm{d}u\big)\,y - 2S + \big(\textstyle\int E\,\mathrm{d}u\big)^2. \tag{21}$$

This is again the standard Kundt metric (13), but the function L now has a special form (21). The conformal flatness requires it to be at most quadratic in the spatial coordinates x and y, with the coefficients being arbitrary functions of u. Of course, by introducing the complex coordinate $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathrm{i}\,y)$, we obtain the metric (14) in which the function L is

$$L(\xi, \bar{\xi}, u) = 2\,\xi\bar{\xi} + f(u)\,\xi + g(u)\,\bar{\xi} + h(u), \tag{22}$$

where f, g, h are any functions of u. This exactly corresponds to the function H given by expression (7) in the case when $\Lambda = 0$ and $\mathcal{C}(u)$ is constant.

4 Type O pure radiation spacetimes with a negative cosmological constant

Now, we will analyse the solutions described by equation (103) in [3] which represent a class of conformally flat pure radiation metrics with $\Lambda < 0$ such that $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda = 0$, where τ is the corresponding spin coefficient. The contravariant metric tensor components in coordinates (r, n, m, b) are

$$g^{ij} = m^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -V & -m\,\nu_4(r) & -b\,\nu_4(r) \\ 0 & -m\,\nu_4(r) & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & -b\,\nu_4(r) & 0 & 2\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

where

$$V = 3n\,\nu_4(r) - \nu_5(r)(b^2 + m^2) - \nu_6(r)\,b - \frac{m}{\lambda^2} + \nu_3(r)\,, \tag{24}$$

in which $\nu_3(r)$, $\nu_4(r)$, $\nu_5(r)$, $\nu_6(r)$ are arbitrary functions of r. The inverse matrix is

$$g_{ij} = \frac{1}{2\lambda^2 m^2} \begin{pmatrix} -\tilde{V} & -2\lambda^2 & -m\,\nu_4(r) & -b\,\nu_4(r) \\ -2\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ -m\,\nu_4(r) & 0 & 1 & 0 \\ -b\,\nu_4(r) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

with

$$\tilde{V} \equiv -2\lambda^2 V - \nu_4^2(r)(m^2 + b^2)\,, \tag{26}$$

so that the metric reads

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 m^2}\Big(\mathrm{d}m^2 + \mathrm{d}b^2 - 2m\nu_4(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}m - 2b\,\nu_4(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}b \\ -4\lambda^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}n - \tilde{V}\,\mathrm{d}r^2\Big). \tag{27}$$

Applying the transformation

$$x = m\,R^2(r)\,, \qquad y = b\,R^2(r)\,, \qquad v = n\,R^3(r)\,, \tag{28}$$

where

$$R(r) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int \nu_4(r)\,\mathrm{d}r\Big), \tag{29}$$

we obtain

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 x^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 4\lambda^2 R(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}v + 2\lambda^2\tilde{H}\,\mathrm{d}r^2\right), \tag{30}$$

in which $\tilde{H}$ has the form

$$\tilde{H} \equiv -\nu_5(r)(x^2 + y^2) - \nu_6(r)R^2(r)\,y - \frac{R^2(r)}{\lambda^2}\,x + \nu_3(r)R^4(r)\,. \tag{31}$$

Finally, the transformation from r to the new coordinate u,

$$u = 2\lambda^2 \int R(r)\,\mathrm{d}r\,, \tag{32}$$

puts the above metric to

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2\lambda^2 x^2}\,\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + H\,\mathrm{d}u^2\right), \tag{33}$$

where the function H is obtained from $\tilde{H}$ by substitution for r,

$$H(x,y,u) = A(u)(x^2+y^2) + B(u)\,x + C(u)\,y + D(u)\,, \tag{34}$$

in which A, B, C, D are arbitrary[2] functions of u. With the identification

$$\lambda^2 \equiv -\frac{\Lambda}{6}, \tag{35}$$

where $\Lambda < 0$ is a negative cosmological constant, this is exactly the conformally flat subfamily of the Siklos solutions presented for the first time in [7]. Using the transformation $\zeta = -\sqrt{-\frac{6}{\Lambda}}\,(x+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,y)/(x-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,y)$, $v = \frac{12}{\Lambda}\,r$, see [8], the metric (33) is put into the Ozsváth–Robinson–Rózga form (1)–(7) with $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}$, i.e. $Q = \left(1+\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\xi\right)\left(1+\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\,\bar{\xi}\right)$ and $\kappa = 0$.

5 Other type O pure radiation spacetimes with a cosmological constant

In recent work [4], Edgar and Machado Ramos extended their investigations to a complete family of conformally flat pure radiation metrics with $\Lambda \neq 0$ for which $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda \neq 0$. The corresponding contravariant metric tensor components given by equation (86) therein, using the coordinates $(\tilde{t}, c, a, \tilde{x})$, are

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k^{1/4}}{a(\frac{3}{2}-k)} & 0 & 0 \\ -\frac{k^{1/4}}{a(\frac{3}{2}-k)} & \frac{8}{ak^{1/2}(\frac{3}{2}-k)^2}Z & \frac{2k(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)c}{a(\frac{3}{2}-k)} & -\frac{k^{1/4}\gamma_3(\tilde{t})}{a(\frac{3}{2}-k)} \\ 0 & \frac{2k(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)c}{a(\frac{3}{2}-k)} & 4k^2 & 0 \\ 0 & -\frac{k^{1/4}\gamma_3(\tilde{t})}{a(\frac{3}{2}-k)} & 0 & 4k \end{pmatrix}, \tag{36}$$

where $\gamma_3(\tilde{t})$ is an arbitrary function $\tilde{t}$, and k is given by[3]

$$k = \tfrac{1}{6}\Lambda\,a^2 + \tfrac{1}{2}\,. \tag{37}$$

[2] Notice that during the derivation we have obtained $B(u) = -1/(2\lambda^4)$. However, an arbitrary function $B(u)$ can be set to any constant value by the coordinate transformation $x = e^f x'$, $y = e^f y'$, $u = \int e^{2f}\,\mathrm{d}u'$, $v = v' + \frac{1}{2}\dot{f}(x'^2 + y'^2)$, using a suitable function $f(u')$, see [7].

[3] We have re-labeled the cosmological parameter Λ used in [4] to $\frac{1}{6}\Lambda$, where Λ is now the standard cosmological constant. See also relation (35).

The function Z may have three distinct forms, namely

$$\text{(i) for } \Lambda > 0: \quad Z = \gamma_1(\tilde{t}) \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{x}\right) + 2\sqrt{2}\,a\,\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c)\,, \tag{38}$$

$$\text{(ii) for } \Lambda < 0: \quad Z = \gamma_1(\tilde{t}) \cosh\left(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{x}\right) + 2\sqrt{2}\,a\,\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c)\,, \tag{39}$$

$$\text{(iii) for } \Lambda < 0: \quad Z = \pm\big(\tfrac{-1}{24}\Lambda\big)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\tilde{x}\right) + 2\sqrt{2}\,a\,\gamma_2(\tilde{t}) + z(a,c)\,. \tag{40}$$

Here $\gamma_1(\tilde{t})$ and $\gamma_2(\tilde{t})$ are arbitrary functions, and

$$z(a,c) \equiv -\frac{12\,k^{1/2}}{\Lambda} + \tfrac{1}{288}\Lambda^2 k^{1/2} a^3 c^2 \big(\tfrac{25}{36}\Lambda^2 a^4 - \tfrac{1}{3}\Lambda a^2 + 13\big)\,. \tag{41}$$

The corresponding inverse matrix to (36) is

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{8a}{k}Z + \frac{\gamma_3^2(\tilde{t})}{4k} + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)^2 c^2}{k^{1/2}} & \frac{a(k-\frac{3}{2})}{k^{1/4}} & \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)c}{2k^{5/4}} & -\frac{\gamma_3(\tilde{t})}{4k} \\ \frac{a(k-\frac{3}{2})}{k^{1/4}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)c}{2k^{5/4}} & 0 & \frac{1}{4k^2} & 0 \\ -\frac{\gamma_3(\tilde{t})}{4k} & 0 & 0 & \frac{1}{4k} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

so that the metric can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{4k}\mathrm{d}\tilde{x}^2 + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)c}{k^{5/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}a - \frac{\gamma_3(\tilde{t})}{2k}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ + \frac{a(2k-3)}{k^{1/4}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}c + \left(-\frac{8a}{k}\,Z + \frac{\gamma_3^2(\tilde{t})}{4k} + \frac{(\frac{5}{36}\Lambda^2 a^4+1)^2 c^2}{k^{1/2}}\right)\mathrm{d}\tilde{t}^2\,. \end{aligned} \tag{43}$$

It is possible to apply the transformation

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} - \int \gamma_3(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}\right), \tag{44}$$

$$v = -\frac{1}{2\kappa}\,k^{3/4}\,\frac{\frac{1}{6}\Lambda\,a^2 - 1}{a}\,c\,, \tag{45}$$

$$u = 4\,\tilde{t}\,, \tag{46}$$

where κ is a suitable non-vanishing constant. This puts the metric (43) to a more compact form

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 - 2\,\frac{\kappa a^2}{2k}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(\kappa\,\frac{\kappa a^2}{2k}\,v^2 - \frac{a}{2k}\tilde{H}\right)\mathrm{d}\tilde{u}^2, \tag{47}$$

in which the function $\tilde{H}(a,x,u)$ reads

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad \tilde{H}=\gamma_1(u)\cos\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,(\sqrt{2}\,x+\textstyle\int\gamma_3(u)\mathrm{d}u)\Big)+2\sqrt{2}\,a\,\gamma_2(u)-\dfrac{12k^{1/2}}{\Lambda}\,,\\
&\text{(ii)}\quad \tilde{H}=\gamma_1(u)\cosh\Big(\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\,(\sqrt{2}\,x+\textstyle\int\gamma_3(u)\mathrm{d}u)\Big)+2\sqrt{2}\,a\,\gamma_2(u)-\dfrac{12k^{1/2}}{\Lambda}\,,\\
&\text{(iii)}\quad \tilde{H}=\pm\big(\tfrac{-1}{24}\Lambda\big)^{-\frac{1}{2}}\exp\Big(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{3}\Lambda}\;x\Big)\exp\Big(\mp\sqrt{-\tfrac{1}{6}\Lambda}\textstyle\int\gamma_3(u)\mathrm{d}u\Big)\\
&\qquad\qquad +2\sqrt{2}a\gamma_2(u)-\dfrac{12k^{1/2}}{\Lambda}\,.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Now, by comparing (47) with (1) we immediately conclude that the two metrics are identical provided

$$\frac{\kappa a^2}{2k}=\frac{Q^2}{P^2}\,, \tag{49}$$

$$\frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2+\frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2=\frac{2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\,, \tag{50}$$

$$\frac{a}{2k}\tilde{H}=\frac{Q}{P}\,H\,, \tag{51}$$

with constant α, β. In view of (37), the condition (49) leads to the relation

$$a=\frac{Q}{\sqrt{\kappa P^2-\frac{1}{3}\Lambda Q^2}}\,, \tag{52}$$

where P and Q are given by (2), (3). The condition (50) can then be used to find relation between the real coordinate x and the complex coordinate ζ. In fact, it can thus be shown that both relations (49) and (50) are satisfied if

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(1-\frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta})\,\alpha+\bar{\beta}\,\zeta+\beta\,\bar{\zeta}}{\sqrt{(\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\zeta^2+\frac{1}{3}\Lambda\alpha\zeta-\beta)(\frac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\zeta}^2+\frac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\zeta}-\bar{\beta})}}\,, \tag{53}$$

$$x=\mathrm{i}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\left(F(\zeta)-\bar{F}(\bar{\zeta})\right),\quad \text{where}\ \ F(\zeta)=\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{\frac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\zeta^2+\frac{1}{3}\Lambda\alpha\zeta-\beta}\,, \tag{54}$$

with $\kappa=\frac{1}{3}\Lambda\,\alpha^2+2\,\beta\bar{\beta}\neq 0$, cf. (4). Of course, the function F can be integrated as

$$F(\zeta)=\frac{3}{\Lambda\,\alpha}\,\ln\zeta \qquad \text{for}\quad \beta=0\,, \tag{55}$$

$$F(\zeta)=-2\sqrt{\frac{3}{\Lambda\kappa}}\,\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3\kappa}}\,(\bar{\beta}\,\zeta+\alpha)\right) \qquad \text{for}\quad \beta\neq 0\,. \tag{56}$$

The transformation (53), (54) puts the line element (47) explicitly to the Ozsváth–Robinson–Rózga metric form (1), namely

$$\mathrm{d}s^2=\frac{2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}-2\,\frac{Q^2}{P^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\left(\kappa\,\frac{Q^2}{P^2}\,v^2-\frac{Q}{P}\,H\right)\mathrm{d}u^2\,, \tag{57}$$

where $P = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}$ and $Q = (1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta})\,\alpha + \bar{\beta}\,\zeta + \beta\,\bar{\zeta}$, with constant α, β.

Moreover, using (51), the function H can be expressed as

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\kappa\, P}\,\sqrt{(\tfrac{1}{6}\Lambda\bar{\beta}\zeta^2 + \tfrac{1}{3}\Lambda\alpha\zeta - \beta)(\tfrac{1}{6}\Lambda\beta\bar{\zeta}^2 + \tfrac{1}{3}\Lambda\alpha\bar{\zeta} - \bar{\beta})}\,\tilde{H}\,, \tag{58}$$

In view of the above three possible forms (i)–(iii) of $\tilde{H}$, and considering relations (52)–(56), it can be argued that the function H takes the form (7) for the most general conformally flat solution of the Ozsváth–Robinson–Rózga family of spacetimes.

As shown in [6,9], there are various geometrically distinct subclasses of solutions represented by the metric (57). These subclasses can be distinguished by the cosmological constant Λ and sign of the function κ defined in (4). Each is represented by the corresponding canonical choice of the parameters α and β. The case $\kappa = 0$, which corresponds to the Siklos spacetimes with $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda = 0$ and $\Lambda < 0$, was described in previous section 4. The solutions in the present section 5 are characterised by $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda \neq 0$, and correspond to the cases $\kappa \neq 0$, $\Lambda \neq 0$.

For $\Lambda > 0$, there is only the subclass $\kappa > 0$ of possible solutions, see (4). Its canonical representation is given by $\alpha = 0$, $\beta = 1$, so that $P = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}$, $Q = \zeta + \bar{\zeta}$, and $\kappa = 2$. In this case the transformation (53), (54) simplifies to

$$a = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})}{\sqrt{(1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta^2)(1 - \frac{1}{6}\Lambda\bar{\zeta}^2)}}\,, \tag{59}$$

$$\begin{aligned} x &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(\operatorname{arctanh}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\zeta\Big) - \operatorname{arctanh}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\bar{\zeta}\Big)\right), \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\;\ln\frac{\Big(1 + \sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\zeta\Big)\Big(1 - \sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\bar{\zeta}\Big)}{\Big(1 + \sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\bar{\zeta}\Big)\Big(1 - \sqrt{\frac{1}{6}\Lambda}\,\zeta\Big)}\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Straightforward calculation now shows that the function H given by (58) takes exactly the form (7) where

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_1(u)\,\cos\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\textstyle\int\gamma_3(u)\,\mathrm{d}u\Big) - \sqrt{2}\,\dfrac{6}{\Lambda}\right), \tag{61}$$

$$\mathcal{B}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\gamma_2(u) - \mathrm{i}\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\,\gamma_1(u)\,\sin\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}\Lambda}\textstyle\int\gamma_3(u)\,\mathrm{d}u\Big)\right), \tag{62}$$

$$\mathcal{C}(u) = -\tfrac{1}{6}\Lambda\,\mathcal{A}(u) - 2\,, \tag{63}$$

which follows from the case (i) of $\tilde{H}$.

If $\Lambda < 0$, there are two subclasses of possible solutions for $\kappa \neq 0$. When $\kappa > 0$, the canonical representation is again given by $\alpha = 0$, $\beta = 1$, and the transformation has the from (59), (60), with the replacement $\Lambda \to -\Lambda$ and $\operatorname{arctanh} \to \arctan$ in (60). Similarly, the goniometric functions in (61)–(63) are replaced by the corresponding hyperbolic functions, which correspond to the case (ii) of $\tilde{H}$ in (48). Similar results can be obtained for the case (iii).

When $\kappa < 0$, the canonical representation of these spacetimes is $\alpha = 1$, $\beta = 0$, so that $P = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}$, $Q = 1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}$ and $\kappa = \frac{1}{3}\Lambda < 0$. In this case the transformation (53), (54) is simply

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{3}{|\Lambda|}\,\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}{\sqrt{\zeta\bar{\zeta}}}\,, \tag{64}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\;\ln\left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\right). \tag{65}$$

Notice that x is purely imaginary in this case. Indeed, introducing the polar parametrisation $\zeta = \rho\,\exp(\mathrm{i}\varphi)$, the transformation becomes

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{3}{|\Lambda|}\,\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\rho^2}{\rho}\,, \qquad x = \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\;\varphi. \tag{66}$$

However, this is consistent with the form of the metric (47). It follows from the relation (49) that the sign of the parameter κ is the same as the sign of the function k, so that $k < 0$ in this case, and the coordinate x must (formally) be purely imaginary. In fact, $2k = \frac{1}{3}\Lambda\, a^2 + 1 = \frac{1}{2}(3/\Lambda)((1 + \frac{1}{6}\Lambda\rho^2)^2\rho^{-2} < 0$, and the expression (50) gives

$$\frac{1}{4k^2}\,\mathrm{d}a^2 + \frac{1}{2k}\mathrm{d}x^2 = \frac{2}{(1 + \frac{1}{6}\Lambda\rho^2)^2}\,(\,\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{67}$$

Again, the function H for the case (ii) takes the form (7) in which

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u) &= \frac{6\sqrt{2}}{\Lambda}\Big(\gamma_2(u) - \sqrt{3/|\Lambda|}\,\Big),\\
\mathcal{B}(u) &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\,\gamma_1(u)\,\Big(\cosh\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}|\Lambda|}\,{\textstyle\int}\gamma_3(u)\,\mathrm{d}u\Big) - \mathrm{i}\,\sinh\Big(\sqrt{\tfrac{1}{6}|\Lambda|}\,{\textstyle\int}\gamma_3(u)\,\mathrm{d}u\Big)\Big),\\
\mathcal{C}(u) &= -\tfrac{1}{6}\Lambda\,\mathcal{A}(u) - 2\sqrt{6/|\Lambda|}\,.
\end{aligned} \tag{68}$$

Analogous results are also obtained for the case (iii) of (48), provided a linear combination of the terms with different signs (that is with their upper and lower choices) is considered.

6 Summary and conclusions

In this contribution we have analyzed pure radiation spacetimes which are of algebraic types N and O. In particular, we have concentrated on the metrics presented in recent works [1–4]. We have found explicit transformations which put all these solutions to the Ozsváth–Robinson–Rózga form (1)–(4), first given in [6]. This conveniently represents an entire family of type N or conformally flat Kundt spacetimes with an arbitrary cosmological constant Λ, which are either vacuum or contain pure radiation.

By putting the above metrics into the unified coordinate system of (1) we have confirmed that their derivation based on the GIF formalism, as presented in [1–4], is mathematically correct. We have identified only few simple (trivial) differences, when compared with the general function (7) characterizing the complete family of conformally flat solutions. In particular, in the solutions with $\Lambda = 0$ given by (22), there is a constant $\mathcal{C}(u)$. Similarly, in the case $\Lambda < 0$ such that $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda = 0$, the function $B(u)$ in (34) is constant, namely $B(u) = -1/(2\lambda^4)$, but this can always be achieved by a coordinate transformation (see the footnote in section 4). In the cases $\Lambda \neq 0$ for which $\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda \neq 0$, the functions $\mathcal{A}(u)$ and $\mathcal{C}(u)$ in equations (63) and (68) differ only by constants. Compared to a generic expression (7), this again does not represent any loss of generality. Indeed, coordinate freedom of the metric (57), namely

$$v = v' f(u') + \frac{\dot{f}(u')}{\kappa}\,, \qquad u = \int \frac{\mathrm{d}u'}{f(u')}\,, \tag{69}$$

implies

$$\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}}{f^2} - \alpha\, F\,, \quad \mathcal{B}' = \frac{\mathcal{B}}{f^2} - \beta\, F\,, \quad \mathcal{C}' = \frac{\mathcal{C}}{f^2} + \tfrac{1}{6}\Lambda\alpha\, F\,, \tag{70}$$

where $F(u') = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\dot{f}^2}{f^2} - 2\frac{\ddot{f}}{f}\right)$ and $f(u')$ is an arbitrary function. Consequently, $\mathcal{C}' + \frac{1}{6}\mathcal{A}' = f^{-2}(\mathcal{C} + \frac{1}{6}\Lambda\mathcal{A})$ in which f can be prescribed arbitrarily. In addition, it follows from expression (8) that the u-dependece of the pure radiation component Φ_{22} is modified by such coordinate transformation and can be set, e.g., to a constant.

It should also be pointed out that the function k, introduced in equation (37), may have *negative* values when the cosmological constant is negative. In such a case, the metrics (43) or (47) do not have a correct signature, and roots of negative k also occur in the original metric (43). This problem disappears when the transformation (53), (54) to the Ozsváth–Robinson–Rózga form (57) is performed, see also relations (66).

Let us finally note that the classes of spacetimes studied in this contribution have very interesting geometrical properties. For example, they provide an exceptional cases for the invariant classification of exact solutions, see e.g. [12,13]. It has also been demonstrated [14–16] that for conformally flat pure radiation (and some other type N, III and O) Kundt spacetimes, all scalar curvature invariants constructed from the Riemann tensor and its covariant derivatives of all orders identically vanish.

Acknowledgements This work was supported by the grant GAČR 202/06/0041 and by the Czech Ministry of Education under the projects MSM0021610860 and LC06014. We are grateful to Jerry Griffiths for his comments.

References

1. S. B. Edgar and J. A. G. Vickers, Integration using invariant oprators: conformally flat radiation metrics, Class. Quantum Grav. **16**, 589–604 (1999).

2. S. B. Edgar and M. P. Machado Ramos, Obtaining a class of type N pure radiation metrics using invariant operators, Class. Quantum Grav. **22**, 791–802 (2005).
3. S. B. Edgar and M. P. Machado Ramos, Obtaining a class of type O pure radiation metrics with a negative cosmological constant, using invariant operators, Gen. Relativ. Grav. **39**, 539–566 (2007).
4. S. B. Edgar and M. P. Machado Ramos, Type O pure radiation metrics with a cosmological constant, Gen. Relativ. Grav. **39**, 1749–1772 (2007).
5. M. P. Machado Ramos and J. A. G. Vickers, A spacetime calculus based on a single null direction, Class. Quantum Grav. **13**, 1579–1587 (1996).
6. I. Ozsváth, I. Robinson and K. Rózga, Plane-fronted gravitational and electromagnetic waves in spaces with cosmological constant, J. Math. Phys. **26**, 1755–1761 (1985).
7. S. T. C. Siklos, Lobatchevski plane gravitational waves, in *Galaxies, axisymmetric systems and relativity*, ed. M. A. H. MacCallum, Cambridge University Press, 247–274 (1985).
8. J. Podolský, Interpretation of the Siklos solutions as exact gravitational waves in the anti-de Sitter universe, Class. Quantum Grav. **15**, 719–733 (1998).
9. J. Bičák and J. Podolský, Gravitational waves in vacuum spacetimes with cosmological constant. I. Classification and geometrical properties of nontwisting type N solutions, J. Math. Phys. **40**, 4495–4505 (1999).
10. S. B. Edgar and G. Ludwig, Integration in the GHP formalism III: finding conformally flat radiation metrics as an example of an 'optimal situation', Gen. Relativ. Grav. **29**, 1309–1328 (1997)
11. J. Podolský and M. Beláň, Geodesic motion in the Kundt spacetimes and the character of envelope singularity, Class. Quantum Grav. **21**, 2811–2829 (2004).
12. J. E. F. Skea, The invariant classification of conformally flat pure radiation spacetimes, Class. Quantum Grav. **14**, 2393–2404 (1997).
13. R. Milson and N. Pelavas, The type N Karlhede bound is sharp, Class. Quantum Grav. **25**, 012001 (7pp) (2008).
14. A. Koutras and C. McIntosh, A metric with no symmetries or invariants, Class. Quantum Grav. **13**, L47–L49 (1996).
15. J. Bičák and V. Pravda, Curvature invariants in type-N spacetimes, Class. Quantum Grav. **15**, 1539–1555 (1998).
16. V. Pravda, A. Pravdová, A. Coley and R. Milson, All spacetimes with vanishing curvature invariants, Class. Quantum Grav. **19**, 6213–6236 (2002).