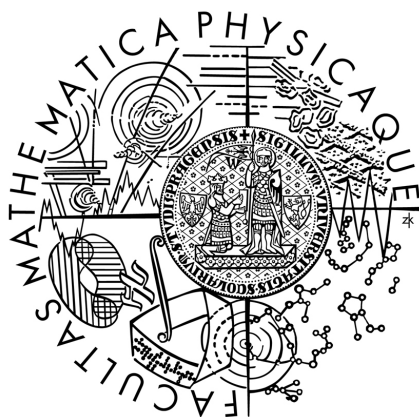


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Matěj Kudrna

Černoděrová řešení Einsteinových rovnic ve vyšších dimenzích

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Vojtěch Pravda, Ph.D.,
Matematický ústav Akademie věd České republiky

Studijní program: Obecná fyzika

2008

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu Vojtěchu Pravdovi za odpovědi na mé všetečné otázky a za cenné rady a připomínky k bakalářské práci. Dále bych chtěl poděkovat Oldřichu Semerákovi za skvělé přednášky, které mě přitáhly k obecné relativitě.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. 5. 2008

Matěj Kudrna

Obsah

1	Úvod	6
2	Konvence a základní rovnice	8
2.1	Einsteinovy rovnice	8
2.2	Linearizované Einsteinovy rovnice, hmotnost a moment hybnosti	9
2.3	Elektromagnetické pole	11
2.4	První zákon termodynamiky černých děr	11
3	Statická řešení	13
3.1	Schwarzschild-Tangherliniho řešení	13
3.2	Reissner-Nordströmovo řešení	14
3.3	Řešení s kosmologickou konstantou	15
4	Struny a brány	16
5	Myers-Perryho černá díra	17
5.1	Metrika v Kerr-Schildově tvaru	17
5.2	Transformace do Boyer-Lindquistových souřadnic	18
5.3	Fyzikální parametry	20
5.4	Singularity a horizonty	21
5.5	Ultrarotující módy a stabilita	23
5.6	Nabitá Myers-Perryho černá díra	25
6	Kerr-de Sitterova černá díra	27
6.1	Metrika v Kerr-Schildově tvaru	27
6.2	Metrika v Boyer-Lindquistových souřadnicích	29
6.3	Fyzikální parametry	30
6.4	Kerr-NUT-AdS	31
7	Jeden prsten vládne všem	33
7.1	Metrika black ringu	34
7.2	Fyzikální vlastnosti	35
7.3	Stabilita	36

7.4	Jednoznačnost a topologická omezení	38
7.5	Rozšíření black ringu	38
8	Superponovaná řešení	40
8.1	Black saturn	40
8.2	Black diring a bicycling black rings	41

Název práce: Černoděrová řešení Einsteinových rovnic ve vyšších dimenzích
Autor: Matěj Kudrna
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Vojtěch Pravda, Ph.D., Matematický ústav Akademie věd České republiky
e-mail vedoucího: pravda@math.cas.cz

Abstrakt: Tato práce obsahuje přehled doposud nalezených černoděrových řešení ve více-rozměrné obecné relativitě. Hlavní odlišností od čtyř dimenzí je neplatnost teorémů o jednoznačnosti černých děr a o omezení topologie horizontu na sférickou, v důsledku čehož jsou možná nová řešení, jejichž obdoba ve čtyřech dimenzích neexistuje. Nejprve uvádím přehled základních rovnic vícerozměrné obecné relativity. Dále se zaměřuji na zobecnění klasických řešení - na zobecnění Schwarzschildovy a Reissner-Nordströmovy černé díry, na Myers-Perryho řešení, které popisuje rotující černou díru, a na jeho rozšíření o kosmologickou konstantu. Nakonec popisuji pětirozměrná řešení nových typů, z nichž se zaměřuji na black ring, který je nejjednodušším řešením s jinou než sférickou topologií horizontu.

Klíčová slova: vícerozměrná obecná relativita, Myers-Perryho černá díra, black ring

Title: Black-hole solutions of Einstein equations in higher dimensions
Author: Matěj Kudrna
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Mgr. Vojtěch Pravda, Ph.D., Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic
Supervisor's e-mail address: pravda@math.cas.cz

Abstract: This work contains a summary of recently obtained higher dimensional black hole solutions. The main difference from four dimensions is the invalidity of the theorems about the uniqueness of black holes and restriction of horizon topology to spherical. It follows that new solutions that have no analogy in four dimensions are possible. At first I present a summary of basic equations of higher dimensional general relativity. Then I concentrate on the generalizations of classic solutions - the generalizations of the Schwarzschild and the Reissner-Nordström black holes, the Myers-Perry solution, which represents spinning black hole, and its generalization with a cosmological term. Finally I describe new classes of five dimensional solutions and among them I concentrate on the black ring, which is the simplest solution with non-spherical topology.

Keywords: higher dimensional general relativity, Myers-Perry black hole, black ring

Kapitola 1

Úvod

V posledních letech prudce vzrůstá zájem o obecnou relativitu ve vyšších dimenzích, která byla do nedávna zcela neprobádaným územím. Hlavním předmětem zájmu jsou zde, stejně jako ve čtyřech dimenzích, černé díry, protože jsou nejjednoduššími a zároveň i nejzajímavějšími objekty.

Hlavní důvod zájmu o vyšší dimenze je zřejmě rozvoj strunových teorií a M-teorie, které se snaží sjednotit obecnou relativitu a kvantovou teorii a které vyžadují větší množství dimenzí než klasické čtyři. Obecná relativita musí tvořit nízkoenergetickou limitu těchto teorií, a je tedy potřeba pochopit relativistické vícedimenzionální objekty, aby bylo možné provést srovnání s výsledky teorie superstrun. Dalším důvodem je tzv. AdS/CFT korespondence mezi strunovou teorií na prostoru se zápornou kosmologickou konstantou a kvantovou teorií pole na jeho konformní hranici. Navíc jsou vícedimenzionální černé díry zajímavé i jako matematické objekty a posledním, i když určitě nejméně důležitým, důvodem pro jejich studium je lidská zvědavost, jak to vypadá ve vesmíru s jiným počtem dimenzí.

Nikoho zřejmě nepřekvapí, že obecná relativita ve větším množství dimenzí je složitější, než jen ve čtyřech. Základní příčinou je samozřejmě to, že metrika má více nezávislých složek a je tedy nutné řešit více rovnic pro více neznámých funkcí. Zároveň mají černé díry větší množství parametrů, hlavně v důsledku možnosti nezávislé rotace v několika rovinách. Nicméně tím, co tvoří hledání nových řešení ve vyšších dimenzích nejproblematičtější, je fakt, že nefungují mnohé metody ke generování řešení. Jejich zobecnění se zatím podařilo úspěšně využít většinou jen v pěti rozměrech, což je také důvod, proč je většina známých řešení právě pětidimenzionálních.

Obecná relativita ve vyšších dimenzích má navíc mnohem větší variabilitu řešení. Klasické teorémy o jednoznačnosti černých děr zde totiž většinou neplatí, a tak kromě zobecnění klasických řešení (např. Schwarzschildova nebo Kerrova), která se většinou chovají podobně jako jejich čtyřdimenzionální příbuzní, existují i řešení s jinou než sférickou topologií horizontu (zatím byl nalezen tzv. black ring) a také je možné tyto řešení superponovat díky tomu, že lze vyvážit gravitační a odstředivou sílu při zachování axiální symetrie.

V důsledku těchto okolností jsou zatím naše znalosti jen velmi neúplné. Ve více jak pěti rozměrech bylo nalezeno prakticky jen Myers-Perryho řešení a ani v pěti dimenzích ještě zdaleka neznáme explicitně všechna řešení, o nichž víme, že existují. U známých řešení není většinou došetřena stabilita a není prozkoumána fyzika v jejich okolí. Kromě již zmíněných rozdílů určitě existují i další odlišnosti od čtyř dimenzí, a proto je pravděpodobné, že nás zde čekají ještě další překvapení.

Tato práce má čistě přehledový charakter a neobsahuje původní výsledky. Svým charakterem se podobá článku [1], který mi posloužil jako základní přehled informací. Práci jsem rozčlenil následujícím způsobem:

V kapitole 2 jsou uvedeny základní rovnice vícerozměrné obecné relativity a zdefinovány hmotnost, momenty hybnosti, náboj a další veličiny popisující černé díry. V kapitole 3 jsou prezentována nejjednodušší (tj. statická a sféricky symetrická) řešení - Schwarzschild-Tangheliniho, Reissner-Nordsrömovo a de Sitterova. Kapitola 4 podává krátký přehled o černých strunách a branách.

Kapitoly 5 a 6 se zabývají Myers-Perryho černou dírou a jejími rozšířeními. Myers-Perryho řešení popisuje rotující černou díru, je tedy zobecněním Kerrova řešení, a proto je nejdůležitějším nalezeným řešením. Toto řešení se podařilo rozšířit ještě o kosmologickou konstantu a o NUT parametry, obdobu Kerr-Newmanova řešení se však zatím nalézt nepodařilo, a tak zde uvádím dosažené přibližné výsledky.

Kapitoly 7 a 8 popisují nová, čistě vícedimenzionální řešení. Kapitola 7 se zaměřuje na black ring, což je pětidimenzionální řešení s topologií horizontu $S^2 \times S^1$. Kapitola 8 uvádí třídu superponovaných řešení, která vzniknou spojením black ringu a Myers-Perryho řešení nebo dvou black ringů.

Kapitola 2

Konvence a základní rovnice

Prostor, ve kterém se budu v textu nadále pohybovat, má N prostorových a jednu časovou dimenzi, jeho celková dimenze je tedy $N + 1$. Gravitační konstantu G a rychlost světla c pro jednoduchost pokládám rovny jedné, stejně tak uvažuji $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ v případě elektromagnetického pole.

V textu používám Einsteinovu sčítací konvenci, sčítá se tedy přes každý index, který se opakuje současně jako dolní i horní. Jiné sumy vypisuji explicitně.

Znaménko metriky je určeno tak, že Minkowskiho metrika má tvar:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, 1 \dots, 1). \quad (2.1)$$

Parciální derivace je značena čárkou. Kovariantní derivace je značena středníkem a vždy je použita metrická. Riemannův tenzor je definován vztahem:

$$A^\mu{}_{;\nu\rho} - A^\mu{}_{;\rho\nu} = R^\mu{}_{\sigma\rho\nu} A^\sigma, \quad (2.2)$$

kde A^μ je libovolný vektor. Z Riemannova tenzoru jsou definované Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ a skalární křivost R vztahy:

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}, \quad (2.3)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

2.1 Einsteinovy rovnice

Einsteinovy rovnice mají stejný tvar ve všech dimenzích:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

a jejich duální tvar se jen mírně odlišuje přítomností členu $\frac{1}{N-1}$:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{N-1} T g_{\mu\nu} \right) + \frac{2}{N-1} \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Kosmologická konstanta je obvykle volena tak, aby rovnice měly tvar:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{N-1} T g_{\mu\nu} \right) + N\lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Pohybové rovnice pro tenzor energie a hybnosti, které vyplývají z toho, že $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, jsou:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.8)$$

2.2 Linearizované Einsteinovy rovnice, hmotnost a moment hybnosti

Při linearizaci Einsteinových rovnic se předpokládá, že metrický tenzor má tvar:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

kde složky $h_{\mu\nu}$ jsou malé (tj. $h_{\mu\nu} \ll 1$) a navíc jsou malé i derivace tohoto tenzoru $h_{\mu\nu,\rho}$. Při vhodné volbě soustavy souřadnic lze linearizované Einsteinovy rovnice (bez kosmologické konstanty) lze zapsat ve tvaru:

$$\Delta h_{\mu\nu} = -16\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{N-1} \eta_{\mu\nu} T \right) = -16\pi \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

kde Δ je Laplaceův operátor v plochem prostoru. Jejich řešení je dáno funkcemi [2]:

$$h_{\mu\nu}(x^i) = \frac{16\pi}{(N-2)S_{N-1}} \int \frac{\bar{T}_{\mu\nu}(y^i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}} d^N y, \quad (2.11)$$

kde $S_{N-1} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ je povrch $(N-1)$ -dimenzionální sféry a integrál je brán přes nadplochu konstantního času.

Souřadný systém lze zvolit tak, že platí:

$$\int T_{0i} d^N x = 0, \quad (2.12)$$

což znamená, že celková hybnost systému je nulová, a že:

$$\int x^k T_{00} d^N x = 0, \quad (2.13)$$

díky čemuž je těžiště v počátku soustavy souřadnic. Potom lze definovat hmotnost systému a tenzor momentu hybnosti vztahy:

$$M = \int T_{00} d^N x, \quad (2.14)$$

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) d^N x. \quad (2.15)$$

Pro složky momentu hybnosti konkrétně platí:

$$J^{0i} = 0, \quad (2.16)$$

$$J^{ij} = 2 \int x^i T^{j0} d^N x. \quad (2.17)$$

Navíc lze zvolit souřadnice tak, že matice momentu hybnosti bude blokově diagonální ve tvaru:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_1 & & & \\ -J_1 & 0 & & & \\ & & 0 & J_2 & \\ & & -J_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

V případě lichého N je na místě odpovídajícímu poslední souřadnici 0. Bloků v matici (a tedy i nezávislých momentů hybnosti) je celkově $[N/2] \stackrel{def}{=} n$ (kde $[]$ značí celou část čísla). Velikosti momentů hybnosti J_i jsou v těchto souřadnicích tedy definovány:

$$J_i = J^{2i-1 \ 2i}. \quad (2.19)$$

Asymptotický tvar metriky daleko od zdroje lze získat Taylorovým rozvojem (2.11), s využitím výše uvedených vztahů vyjde:

$$h_{00} = \frac{16\pi}{(N-1)S_{N-1}} \frac{M}{r^{N-2}}, \quad (2.20)$$

$$h_{0i} = -\frac{8\pi}{S_{N-1}} \frac{x^k}{r^N} J^{ki}, \quad (2.21)$$

$$h_{ij} = \frac{16\pi}{(N-1)(N-2)S_{N-1}} \frac{M}{r^{N-2}} \delta_{ij}, \quad (2.22)$$

kde $r = |\mathbf{x}|$. V článku [1] je stejný výsledek získán řešením rovnic (2.10) s tenzorem energie a hybnosti ve tvaru delta funkce v počátku soustavy souřadnic.

Tyto vztahy jsou jednou z možností jak definovat celkovou hmotnost a moment hybnosti systému v asymptoticky plochem prostoru. Jinou možností, jak tyto veličiny vypočítat, jsou Komarovy integrály:

$$M = -\frac{N-1}{16\pi(N-2)} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \xi_t^\nu dS_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

$$J_i = -\frac{1}{16\pi} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \xi_{\varphi_i}^\nu dS_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

kde ξ_t^μ a $\xi_{\varphi_i}^\mu$ jsou časový Killingův vektor a rotační Killingovy vektory, integrál je veden přes okraj prostorupodobné nadplochy Σ obsahující daný systém. Tyto integrály mají tu výhodu, že je lze použít k výpočtu hmotností a momentů hybnosti jednotlivých částí černých děr u superponovaných řešení.

2.3 Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole lze popsat potenciálem A^μ , z něhož je definován tenzor elektromagnetického pole vztahem:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (2.25)$$

Tenzor energie a hybnosti pro elektromagnetické pole má tvar:

$$T_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (2.26)$$

Na rozdíl od čtyřdimenzionálního prostoru je však jeho stopa ve vyšší dimenzi obecně nenulová a je rovna:

$$T^{EM} = T^\mu{}_\mu = \frac{3-N}{16\pi} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (2.27)$$

Vakuové Maxwellovy rovnice mají tvar:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.28)$$

$$F_{[\mu\nu;\rho]c\gamma kl} = 0. \quad (2.29)$$

Rovnice (2.29) vyplývá přímo z definice $F_{\mu\nu}$ pomocí elektromagnetického potenciálu (2.25), rovnicí (2.28) lze odvodit variaci akce pro elektromagnetické pole, která je:

$$S_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^{N+1}. \quad (2.30)$$

Pro izolovaný systém je celkový náboj Q dán vztahem:

$$Q = \int_{\partial\Sigma} F^{\mu\nu} dS_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

kde integrál je veden okraj prostorupodobné nadplochy Σ obsahující náboje.

2.4 První zákon termodynamiky černých děr

Kromě hmotnosti, momentu hybnosti a náboje lze u černé díry definovat i další charakteristiky. Předpokládám, že černá díra je stacionární a axiálně symetrická v rovinách rotace, má tedy časový Killingův vektor ξ_t a rotační Killingovy vektory ξ_{φ_i} , a že má Killingův

horizont na poloměru r_+ . Tento horizont je nulovou nadplochou, která je generovaná Killingovým vektorem $\xi = \xi_t + \sum_{j=1}^n \Omega_j \xi_{\varphi_j}$, který je také na horizontu nulový. Konstanty Ω_i se nazývají úhlové rychlosti horizontu a platí pro ně:

$$\Omega_i = \frac{g_{t\varphi_i}}{g_{\varphi_i\varphi_i}} \Big|_{r=r_+}. \quad (2.32)$$

Dále se definuje povrchová gravitace κ vztahem:

$$\xi^\mu{}_{;\nu} \xi^\nu = \kappa \xi^\mu \Big|_{r=r_+} \quad (2.33)$$

a elektrostatický potenciál horizontu Φ :

$$\Phi = \xi^\mu A_\mu \Big|_{r=r_+}. \quad (2.34)$$

Nakonec se ještě používá plocha horizontu A_H , která je dána triviálním vztahem:

$$A_H = \int_{\text{horizont}} dS. \quad (2.35)$$

Jednotlivé veličiny popisující černou díru nejsou zcela nezávislé. Ve čtyřech dimenzích pro černé díry platí vztah svazující přírůstek hmotnosti, plochy horizontu, momentu hybnosti a náboje, který je velice podobný klasickému prvnímu zákonu termodynamiky:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA_H + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (2.36)$$

Aby bylo dosaženo úplné analogie s klasickou mechanikou, tak se plocha horizontu A_H pokládá úměrná entropii vztahem $A_H = 4S$ a povrchová gravitace úměrná teplotě vztahem $\kappa = 2\pi T$.

Zobecnění do libovolné dimenze je poměrně přímočaré, protože platí [1]:

$$dM = \sum_i \left(\frac{\kappa^{(i)}}{8\pi} dA_H^{(i)} + \sum_{j=1}^n \Omega_j^{(i)} dJ_j^{(i)} + \Phi^{(i)} dQ^{(i)} \right), \quad (2.37)$$

kde suma přes i označuje sčítání přes jednotlivé části černé díry a většinou má jen jeden člen, výjimkou jsou řešení v kapitole 8. Integrovaná verze tohoto zákona, která se nazývá Smarova formule, je:

$$\frac{N-2}{N-1} M = \sum_i \left(\frac{\kappa^{(i)}}{8\pi} A_H^{(i)} + \sum_{j=1}^n \Omega_j^{(i)} J_j^{(i)} + \frac{N-2}{N-1} \Phi^{(i)} Q^{(i)} \right). \quad (2.38)$$

Dále se uvažuje druhý zákon termodynamiky, který je analogický klasickému, a to že plocha horizontu s časem vzrůstá, tj. $\delta A_H \geq 0$.

Kapitola 3

Statická řešení

Všechna statická řešení, která budu v této kapitole uvažovat, mají topologii $U^2 \times S^{N-1}$, kde S^{N-1} je $N - 1$ rozměrná sféra a U^2 je nějaká dvourozměrná varieta. Jejich metrika se dá vždy zapsat ve tvaru:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{N-1}^2, \quad (3.1)$$

kde $d\Omega_{N-1}^2$ je metrika $(N - 1)$ -rozměrné jednotkové sféry.

3.1 Schwarzschild-Tangherliniho řešení

Nejjednodušším řešením, které lze v $N + 1$ dimenzionálním prostoru zkonstruovat, je sféricky symetrické řešení vakuových rovnic, tedy zobecnění Schwarzschildovy černé díry, které bylo odvozeno Tangherlinim v roce 1963 [3]. Funkce f v metrice je rovna:

$$f = \left(1 - \frac{\mu}{r^{N-2}}\right). \quad (3.2)$$

Řešení závisí na jediné konstantě μ , která souvisí s hmotností černé díry vztahem:

$$M = \frac{\mu(N - 1)S_{N-1}}{16\pi}. \quad (3.3)$$

Vlastnosti tohoto řešení jsou podobné jako u 4-rozměrného Schwarzschildova řešení. Řešení má prostorupodobnou singularitu v bodě $r = 0$. Horizont se za předpokladu pozitivní hmotnosti nachází na poloměru, kde je funkce f rovna nule, tedy na $r = \mu^{\frac{1}{N-2}}$. Pokud je hmotnost menší než nula, tak řešení obsahuje nahou singularitu.

Vyšetřování stability Schwarzschildova řešení ve vyšší dimenzi se liší od čtyřdimenzionálního případu, protože poruchy lze rozložit na skalární, vektorové a tenzorové, z nichž tenzorové ve čtyřech dimenzích neexistují. Stabilita je vyšetřována v člancích [4], [5] a [6] a je zde prokázáno, že řešení je stabilní vůči fyzikálně přijatelným (nedivergentním a kvadraticky integrabilním) poruchám všech tří typů.

Ve čtyřech rozměrech platí teorém, podle něhož je řešení vakuových rovnic, které je stacionární, asymptoticky ploché a neobsahuje nahé singularity, jednoznačně určeno zadáním hmotnosti a momentu hybnosti, a tedy Schwarzschildovo řešení je jediné řešení s nulovým momentem hybnosti. Toto tvrzení se překvapivě nedá přímo rozšířit do vyšších dimenzí, protože zde existují superponovaná řešení (viz kapitola 8), jejichž celkový moment hybnosti je nulový a které tvoří protipříklad k tomuto tvrzení. Nicméně platí slabší verze tohoto teorému, že Schwarzschild-Tangherliniho řešení je jediné statické, asymptoticky ploché a vně horizontu regulární řešení vakových rovnic, jak bylo ukázáno v [7]. Na rozdíl od čtyřrozměrného případu je tedy pro jednoznačnost řešení nutné předpokládat jeho statičnost.

3.2 Reissner-Nordströmovo řešení

Zobecnění Reissner-Nordströmova řešení pro nabitou černou díru je popsáno funkcí:

$$f = \left(1 - \frac{\mu}{r^{N-2}} + \frac{q^2}{r^{2N-4}} \right), \quad (3.4)$$

kde konstanta μ je úměrná hmotnosti vztahem (3.3) a konstanta q souvisí s nábojem Q vztahem:

$$Q = \pm S_{N-1} \sqrt{\frac{(N-1)(N-2)}{8\pi}} q. \quad (3.5)$$

Elektromagnetický potenciál a Maxwellův tenzor mají po jedné nezávislé složce, pro které platí:

$$A_t = \varphi(r) = \frac{Q}{(N-2)S_{N-1}r^{N-1}}, \quad (3.6)$$

$$F_{tr} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{S_{N-1}r^{N-1}}, \quad (3.7)$$

a jsou tedy stejné jako u bodového náboje. Vlastnostmi se řešení opět podobá své čtyřrozměrné variantě. Řešení má časupodobnou singularitu v bodě $r = 0$. Pokud platí $\mu \geq 2q$, pak existují dva horizonty na poloměrech:

$$r_{\pm} = \left(\frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{\frac{1}{4}\mu^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{N-2}}, \quad (3.8)$$

pokud $\mu = 2q$, potom řešení popisuje extrémní černou díru s degenerovaným horizontem na poloměru:

$$r_{\pm} = \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\frac{1}{N-2}} \quad (3.9)$$

a pokud $\mu \leq 2q$, pak má řešení nahou singularitu.

Zobecnění teoremu o jednoznačnosti řešení je podobné jako u Schwarzschild-Tangherliniho. Žádná superpozice rotujících nabitých řešení s nulovým celkovým momentem hybnosti zatím ještě nalezena nebyla, ale dá se předpokládat, že taková řešení existují. Jak je ukázáno v [8], řešení Maxwell-Einsteinových rovnic je jednoznačné za předpokladu statičnosti, asymptotické plochosti, regularity vně horizontu a nenulové povrchové gravitace.

3.3 Řešení s kosmologickou konstantou

Za předpokladu nenulové kosmologické konstanty s Einsteinovými rovnicemi ve tvaru (2.7) je prázdný prostor popsán metrikou s funkcí f ve tvaru:

$$f = (1 - \lambda r^2). \quad (3.10)$$

Tato metrika je využita jako základ pro rotující černou díru v kapitole 6. V tomto prostoru lze při znalosti (3.1) a (3.4) jednoduše zkonstruovat obdobu Schwarzschildova a Reissner-Nordströmova řešení, ve kterých má funkce f tvar:

$$f = \left(1 - \frac{\mu}{r^{N-2}} - \lambda r^2\right), \quad (3.11)$$

respektive

$$f = \left(1 - \frac{\mu}{r^{N-2}} - \lambda r^2 + \frac{q^2}{r^{2N-4}}\right). \quad (3.12)$$

Kapitola 4

Struny a brány

Obecná relativita ve vyšších dimenzích umožňuje existenci černých strun a černých bran. Tyto objekty vzniknou z libovolného řešení nižší dimenze přidáním jednoho (pak vznikne struna) nebo obecně p (pak dostaneme p -bránu) nových nezávislých rozměrů. Metrika těchto řešení má tvar:

$$ds_{N+1}^2 = ds_{N-p+1}^2 + \sum_{i=1}^p (dx^i)^2 \quad (4.1)$$

kde ds_{N-p+1}^2 je metrika původní černé díry. Ve čtyřech rozměrech řešení tohoto typu neexistují, protože ve třech rozměrech nejsou možná žádná řešení popisující černou díru.

Tato řešení nejsou asymptoticky plochá a mají horizont s topologií $U \times \mathbb{R}^p$, kde U odpovídá původní topologii horizontu. Článek [9] ukazuje, že tato řešení nejsou stabilní, protože trpí Gregory-Laflamovou nestabilitou u poruch tenzorového typu. Zatím nevyřešenou otázkou je, jaký je konečný stav strun a bran, protože vyšetřování poruch je pouze lineární a není tedy možné provést evoluci černých strun až do konce. Mnoho autorů předpokládá, že dojde k rozštěpení na klasické vícedimenzionální černé díry. V článku [10] je však dokázáno, že pokud platí slabá energetická podmínka, tak není možné, aby došlo k roztržení horizontu v konečném čase. Dále je zde navrženo, že černá struna se ustálí v jiném stavu, který už není translačně invariantní, ale není jasné, jak by tento stav měl vypadat. Nicméně je možné, že pokud se horizont dostatečně zúží, začnou hrát roli kvantové efekty a k roztržení horizontu přece jenom dojde.

Struny a brány sice nelze považovat za fyzikální objekty, nicméně má smysl se jimi zabývat, protože některá z nalených řešení se k nim za určitých podmínek blíží (Myers-Perry v ultrarotujících módech, black ring s dostatečně velikým poloměrem, viz kapitoly 5 a 7) a vyšetřování černých strun a bran je méně obtížné, protože jsou podstatně jednodušší.

Existence černé struny v pěti rozměrech navíc už sama o sobě naznačuje možnost existence black ringu, který má topologii $S^2 \times S^1$ a je poposán v kapitole 7. Intuitivně lze toto řešení zkonstruovat tak, že se černá struna ohne do kruhu a potom se jí udělí rotace přesně takové velikosti, aby odstředivá síla vyvážila sílu gravitační. Dá se očekávat, že pro $N + 1 \geq 6$ bude možné zkonstruovat podobným způsobem i řešení se složitější topologií, ale zatím žádné z nich nebylo nalezeno.

Kapitola 5

Myers-Perryho černá díra

V roce 1963 objevil Kerr řešení Einsteinových rovnic popisující rotující černou díru [11]. Na zobecnění tohoto řešení do vyšších dimenzí bylo nutné si počkat téměř čtvrt století do roku 1986, kdy Myers a Perry dokázali nalézt řešení [2], které je po nich pojmenované, a to dokonce v libovolné dimenzi a se všemi rotačními parametry. Na rozdíl od čtyřdimenzionálního prostoru je ve vyšší dimenzi možné, aby libovolné těleso rotovalo celkem v $[N/2]$ nezávislých rovinách (jak bylo řečeno výše $[N/2]$ značím n). Myers-Perryho černá díra je tedy popsána celkem $n + 1$ parametry – hmotností M a n parametry a_i , které odpovídají jednotlivým momentům hybnosti.

5.1 Metrika v Kerr-Schildově tvaru

Metrický tenzor může být zapsán stejně jako původní Kerrovo řešení v Kerr-Schildově formě ve tvaru:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h k_\mu k_\nu, \quad (5.1)$$

kde $\eta_{\mu\nu}$ je Minkowskiho metrika (2.1) a k_μ je nulový vektor vůči $\eta_{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu}$. Díky nulovosti k_μ má inverzní metrika podobný tvar:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h k^\mu k^\nu. \quad (5.2)$$

Řešení je tedy zapsáno v souřadnicích, které při položení $M = 0$ přejdou v kartézské. Souřadnice T představuje čas, souřadnice x_i a y_i ($i = 1$ až n) parametrizují jednotlivé roviny kolmé k osám rotace a v liché dimenzi je přidána ještě poslední souřadnice z .

Postup, kterým Myers a Perry řešení našli, vychází z postupu, který byl použit v [12]. Od té doby byl navíc nalezen postup, jak zkonstruovat toto řešení v pěti dimenzích pomocí Belinskyho a Zakharovovy metody ke generování řešení.

Řešení se liší pro sudé a liché dimenze.

Pro sudé N je vektor k_μ dán výrazem:

$$k_\mu dx^\mu = dT + \sum_{i=1}^N \frac{r(x_i dx_i + y_i dy_i) + a_i(x_i dy_i - y_i dx_i)}{r^2 + a_i^2}, \quad (5.3)$$

přičemž souřadnice r je implicitně definována tak, aby platila nulovost k_μ , tedy rovnicí:

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + y_i^2}{r^2 + a_i^2} - 1 = 0. \quad (5.4)$$

Funkce h je dána výrazem:

$$h = \frac{\mu r^2}{\Pi F}, \quad (5.5)$$

kde μ je integrační konstanta úměrná hmotnosti a funkce F a Π jsou definovány:

$$F = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2(x_i^2 + y_i^2)}{(r^2 + a_i^2)^2}, \quad (5.6)$$

$$\Pi = \prod_{i=1}^n (r^2 + a_i^2). \quad (5.7)$$

Pro liché N má vektor k_μ tvar:

$$k_\mu dx^\mu = dT + \sum_{i=1}^N \frac{r(x_i dx_i + y_i dy_i) + a_i(x_i dy_i - y_i dx_i)}{r^2 + a_i^2} + \frac{z dz}{r}, \quad (5.8)$$

souřadnice r je definována výrazem:

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 + y_i^2}{r^2 + a_i^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1 = 0 \quad (5.9)$$

a funkce h je dána výrazem:

$$h = \frac{\mu r}{\Pi F}, \quad (5.10)$$

kde funkce F a Π jsou definovány stejně jako pro N sudé výrazy (5.6) a (5.7).

5.2 Transformace do Boyer-Lindquistových souřadnic

Tvar metriky uvedený v předchozí sekci není příliš přehledný, proto je vhodné metriku převést do tvaru, který lépe vyjadřuje její symetrie a usnadňuje její analýzu. Myers a Perry ve svém článku ukazují transformace, které metriku převádějí postupně do Edingtonových a do Boyer-Lindquistových souřadnic.

Pro sudé N jsou x_i a y_i nahrazeny souřadnicemi μ_i a ϕ_i pomocí vztahů:

$$x_i = \mu_i \sqrt{r^2 + a_i^2} \cos\left(\phi_i - \arctg \frac{a_i}{r}\right), \quad (5.11)$$

$$y_i = \mu_i \sqrt{r^2 + a_i^2} \sin \left(\phi_i - \arctg \frac{a_i}{r} \right). \quad (5.12)$$

Tyto souřadnice se nazývají Eddingtonovy. Metrika v nich získává tvar:

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + \sum_{i=1}^n ((r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) + 2\mu_i^2 a_i d\phi_i dr) + \frac{\mu r^2}{\Pi F} \left(dT + dr + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i^2 d\phi_i \right)^2, \quad (5.13)$$

kde

$$F = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (5.14)$$

Souřadnice ϕ_i jsou úhly (s periodou 2π) v jednotlivých rotačních rovinách. Souřadnice μ_i nabývají hodnot mezi 0 a 1 a vyjadřují průmět r do dané roviny, nejsou tedy nezávislé, protože platí:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1. \quad (5.15)$$

Druhá transformace, která převádí metriku do Boyer-Lindquistových souřadnic, je dána výrazy:

$$dt = dT - \frac{\mu r^2}{\Pi - \mu r^2} dr, \quad (5.16)$$

$$d\varphi_i = d\phi_i + \frac{\Pi}{\Pi - \mu r^2} \frac{a_i}{r^2 + a_i^2} dr. \quad (5.17)$$

V těchto souřadnicích metrika vypadá takto:

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^n (r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\varphi_i^2) + \frac{\mu r^2}{\Pi F} \left(dt + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i^2 d\varphi_i \right)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - \mu r^2} dr^2. \quad (5.18)$$

Pro liché N vypadají transformace podobně. Při přechodu do Eddingtonových souřadnic jsou použity vztahy (5.11) a (5.12) a navíc je nutné zavést novou souřadnici α , která nabývá hodnot -1 až 1 a je definovaná vztahem:

$$\alpha = \frac{z}{r}. \quad (5.19)$$

Metrika poté získá tvar:

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2 d\alpha^2 + \sum_{i=1}^n ((r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) + 2\mu_i^2 a_i d\phi_i dr) + \frac{\mu r}{\Pi F} \left(dT + dr + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i^2 d\phi_i \right)^2 \quad (5.20)$$

a normovací podmínka pro μ_i se změjí na:

$$\alpha^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1. \quad (5.21)$$

Transformace do Boyer-Lindquistových souřadnic má tvar:

$$dt = dT - \frac{\mu r}{\Pi - \mu r} dr, \quad (5.22)$$

$$d\varphi_i = d\phi_i + \frac{\Pi}{\Pi - \mu r} \frac{a_i}{r^2 + a_i^2} dr \quad (5.23)$$

a metrika je:

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 d\alpha^2 + \sum_{i=1}^n (r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\varphi_i^2) + \frac{\mu r}{\Pi F} \left(dt + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i^2 d\varphi_i \right)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - \mu r} dr^2. \quad (5.24)$$

5.3 Fyzikální parametry

V těchto souřadnicích se dá jednoduše provést výpočet hmotnosti se s využitím vzorců (2.20), (2.21) a (2.22), z asymptotického chování metriky vyplývá, že hmotnost černé díry souvisí s konstantou μ vztahem:

$$M = \frac{(N-1)S_{N-1}}{16\pi} \mu \quad (5.25)$$

a momenty hybnosti s konstantami a_i :

$$J_i = \frac{S_{N-1}}{8\pi} \mu a_i = \frac{2}{N-1} M a_i. \quad (5.26)$$

Další fyzikální veličiny lze vypočítat pomocí vztahů uvedených v kapitole 2. Úhlové rychlosti horizontu jsou:

$$\Omega_i = \frac{a_i}{r_+^2 + a_i^2}, \quad (5.27)$$

povrchová gravitace je:

$$\kappa = \left. \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial r} - 2\mu r}{2\mu r^2} \right|_{r=r_+} \quad \text{pro sudé } N, \quad (5.28)$$

$$\kappa = \left. \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial r} - \mu}{2\mu r} \right|_{r=r_+} \quad \text{pro liché } N \quad (5.29)$$

a nakonec plocha horizontu je:

$$A_H = \frac{S_{N-1}\mu}{2\kappa} \left(N - 2 - \sum_{i=1}^n \frac{2a_i^2}{r_+^2 + a_i^2} \right). \quad (5.30)$$

Tyto veličiny mají samozřejmě smysl, jen pokud horizont existuje (viz další sekce). Dosažením do (2.38) lze ověřit, že platí první zákon termodynamiky.

5.4 Singularity a horizonty

Dá se očekávat, že metrika má singularitu v místě, kde funkce h v (5.1) diverguje.

Pro liché N je funkce h dána výrazem $h = \frac{\mu r}{\Pi F}$. Pokud je alespoň jeden z parametrů a_i nulový, potom člen Π je okolo počátku úměrný druhé nebo vyšší mocnině r a funkce h diverguje pro $r = 0$. Pokud jsou všechny parametry a_i nenulové, potom Π je nenulová funkce a singularita existuje, pokud funkce F , kterou lze přepsat do tvaru:

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{r^2(x_i^2 + y_i^2)}{(r^2 + a_i^2)^2} + \frac{z^2}{r^2} = \sum_{i=1}^n \frac{r^2\mu_i^2}{r^2 + a_i^2} + \alpha^2, \quad (5.31)$$

je rovna nule. Tato situace nastane jen pokud $z = 0$, a potom h diverguje pro $r = 0$. Z definičního vztahu pro r (5.9) plyne, že $r = 0$ právě když x_i a y_i splňují:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 + y_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (5.32)$$

Tato rovnice popisuje povrch $N - 1$ rozměrného elipsoidu. Uvnitř elipsoidu je funkce h konečná a řešení tedy lze rozšířit do oblasti se záporným r , toto rozšíření odpovídá negativní hmotnosti. Situace je tedy stejná jako u původního Kerrova řešení, kde povrchu elipsoidu odpovídá kružnice.

Existence horizontu se lépe vyšetřuje v Boyer-Lingquistových souřadnicích. Jeho existence je ekvivalentní tomu, že $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = 0$. Protože funkce Π a F jsou konečné, musí

platit $\Pi - \mu r = 0$. Obecně se jedná o polynom vyššího stupně, který není možné analyticky řešit. Nicméně platí, že funkce Π a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = 2r \sum_{i=1}^n \prod_{i \neq j} (r^2 + a_i^2) \quad (5.33)$$

jsou pro $r \geq 0$ nezáporné a rostoucí. Navíc platí

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty. \quad (5.35)$$

Proto má rovnice $\frac{\partial(\Pi - \mu r)}{\partial r}$ právě jedno řešení v bodě $r \stackrel{def}{=} R$. Funkce $\Pi - \mu r$ má tedy v tomto bodě jediný extrém, a to minimum ($\frac{\partial^2(\Pi - \mu r)}{\partial r^2}$ je kladná funkce). Podle znaménka funkce $\Pi - \mu r$ v bodě R je možné rozlišit tři případy:

- $\Pi - \mu r > 0$ - horizont neexistuje,
- $\Pi - \mu r = 0$ - existuje jeden degenerovaný horizont,
- $\Pi - \mu r < 0$ - existují dva horizonty.

Možnosti jsou tedy stejné jako v případě Kerrový černé díry.

Ve speciálním případě, kdy je alespoň jedna z konstant a_i nulová, se analýza problému značně zjednoduší. Platí $\Pi - \mu r|_{r=0} = 0$ a $\left. \frac{\partial(\Pi - \mu r)}{\partial r} \right|_{r=0} = -\mu$. Funkce $\Pi - \mu r$ musí být záporná na nějakém okolí nuly a je jasné, že má právě jeden kořen pro $r > 0$, a tedy existuje jeden horizont vně černé díry a jeden v bodě $r = 0$.

Pro sudé N je h ve tvaru (5.5). Pokud jsou všechny parametry a_i nenulové, potom je funkce Π nenulová a faktor r^2 v čitateli se vykrátí s r^2 , které obsahuje funkce F :

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{r^2(x_i^2 + y_i^2)}{(r^2 + a_i^2)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{r^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (5.36)$$

Funkce h by divergovala jen pokud $x_i = y_i = 0$, ale tento případ nemůže nastat, protože potom by v definičním výrazu pro r muselo platit:

$$\sum_{i=0}^n \frac{0}{a_i^2} = 1 \quad (5.37)$$

což ale není možné.

Zdá se, že funkce h je v tomto případě všude konečná a že metrika nemá singularitu. Myers a Perry pokračují v analýze zavedením souřadnice $l = r^2/2$ a rozšiřují metriku do záporných hodnot této souřadnice. Z jejich analýzy vyplývá, že singularita se nachází na ploše mezi $2l = -a_0^2$, $\mu_0^2 = 0$ a $2l = -a_1^2$, $\mu_1^2 = 0$, kde a_0 a a_1 jsou nejmenší a druhý nejmenší rotační parametr a μ_0 a μ_1 značí jim odpovídající souřadnice.

Pokud je jeden z parametrů a_i nulový (např. a_1), potom Π obsahuje faktor r^2 , který způsobí, že h diverguje pro $r = 0$ a $x_1 = y_1 = 0$. Tato oblast tvoří povrch $N-2$ rozměrného elipsoidu, který je popsán rovnicí:

$$\sum_{i=2}^n \frac{x_i^2 + y_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (5.38)$$

Pokud jsou nulové dva nebo více parametrů a_i , potom Π obsahuje r^4 nebo ještě vyšší mocninu r a h vždy diverguje pro $r = 0$.

Pro sudé N je poloha horizontu určena rovnicí $\Pi - \mu r^2 = 0$. Zavedením výše zmíněné souřadnice l se dá rovnice zapsat ve tvaru:

$$\prod_{i=1}^n (2l + a_i^2) - 2\mu l = 0. \quad (5.39)$$

Funkce $\Pi(l)$ a $\frac{\partial \Pi}{\partial l}$ jsou pro $l > 0$ kladné a rostoucí. Funkce (5.39) má tedy minimum pro $l \geq 0$ právě když

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial l} \right|_{r=0} \leq 2\mu, \quad (5.40)$$

což odpovídá podmínce

$$\mu > \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} a_j^2. \quad (5.41)$$

Znaménko funkce (5.39) v tomto minimu znovu určuje, zda existují dva, jeden nebo žádný horizont. Na rozdíl od lichého N nulovost jednoho z parametrů a_i nezaručuje existenci horizontu, protože funkce $\left. \frac{\partial(\Pi - 2\mu l)}{\partial l} \right|_{l=0}$ nemusí být nutně záporná. Nicméně pokud jsou alespoň dva parametry rovny nule, potom již horizont existovat musí.

Analytické řešení pro existenci a polohu horizontu lze nalézt jen pro $N = 3$ (Kerr), 4, 5, 6 a 8.

5.5 Ultrarotující módy a stabilita

Zvláštní vlastností, která se nově objevuje pro $N + 1 \geq 6$, je existence ultrarotujících režimů. U Kerrova řešení je požadavkem, aby černá díra nebyla tvořena nahou singularitou, moment hybnosti omezen nerovností:

$$J < M^2 \quad (5.42)$$

a v pěti rozměrech platí:

$$\frac{27\pi}{32}(J_1^2 + J_2^2 + 2|J_1 J_2|) \leq M^3. \quad (5.43)$$

Ve vyšších dimenzích je však nulovost jednoho nebo dvou momentů hybnosti postačující podmínkou pro existenci horizontu a zbývající momenty hybnosti mohou nabývat libovolně velké hodnoty. Se zvětšujícím se momentem hybnosti se černá díra zplošťuje a v limitě pro k momentů hybnosti jdoucích do nekonečna pak Myers-Perryho černá díra konverguje k $2k$ -bráně s topologií horizontu $\mathbb{R}^{2k} \times S^{N-1-2k}$. Jak již bylo řečeno v kapitole 4, tak brány trpí Gregory-Laflamovou nestabilitou. Stabilita v ultrarotujících módech je vyšetřována v článku [13], kde je potvrzeno, že tato vlastnost se přenáší i na Myers-Perryho černou díru. Hranice, při které se projeví tyto nestability je přibližně:

$$\left(\frac{a}{r_+}\right)_{crit.} = O(1) \quad (5.44)$$

nebo ekvivalentně

$$\left(\frac{a^{N-2}}{\mu}\right)_{crit.} = O(1). \quad (5.45)$$

Konkrétní hodnoty je pohybují okolo jedné a mírně závisejí na dimenzi a použitém modelu.

Nevyřešenou otázkou je, co se s černou dírou nakonec stane poté, co se objeví nestability. Jedním modelem je rozštěpení na dvě nebo více černých děr. Při tomto procesu je možné, aby se zvětšila celková plocha horizontu (entropie) a je tedy splněn druhý zákon termodynamiky (toto je jedna z podmínek, která byla použita k výpočtu hranice pro nestability (5.44)). Teorém zakazující roztržení horizontu v [10] ale mluví proti tomuto scénáři. Další možností je, že černá díra vyzáří přebytečný moment hybnosti v podobě gravitačních vln a přesune se do stabilního režimu. Vyzařování za těchto podmínek je vysoce nelineární problém, který se zatím nepodařilo namodelovat, ale z jednoduchého modelu, který popisuje emisi nehmotných částic, se zdá, že tento proces by porušil druhý zákon termodynamiky.

Zajímavou možností je důkaz existence vyšších dimenzí, které předpovídá teorie strun, pokud by byla pozorována Kerrova černá díra s momentem hybnosti přesahujícím (5.42). Nicméně díky nestabilitě ultrarotujících černých děr je tato možnost velmi nepravděpodobná.

U pětidimenzionální černé díry žádná ultrarotující řešení neexistují, ale pro černou díru s jediným momentem hybnosti blížícím se maximu (přibližně od $J = 0.9J_{max}$) platí, že plocha horizontu je menší než u dvou černých děr se stejnou celkovou hmotností, a znovu se dá očekávat, že za těchto okolností řešení není stabilní.

Stabilita mimo tyto ultrarotující režimy je zatím nevyřešená. Dá se očekávat, že pokud budou všechny momenty hybnosti dostatečně malé, tak bude Myers-Perryho černá díra stabilní, protože Schwarzschildovo řešení stabilní je. V článku [14] je analyzována stabilita černé díry v prostoru se sudým N a se všemi momenty hybnosti o stejné velikosti. Z numerických výsledků se zdá, že za těchto okolností je černá díra stabilní vůči tenzorovým poruchám.

5.6 Nabitá Myers-Perryho černá díra

Analytické řešení pro nabitou Myers-Perryho černou díru se zatím nikomu nalézt nepodařilo. Postup použitý pro odvození Kerr-Newmanova řešení - tedy metrika v Kerr-Schildově tvaru (5.1) a potenciál ve tvaru $A_\mu = \alpha k_\mu$ - totiž nefunguje. Jsou tedy známy jen asymptotické tvary metriky a numerické výsledky.

Článek [15] se zabývá černou dírou v pěti dimenzích. Metrika zde má tvar:

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{m}{f} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + \frac{p}{f} r^6 \sin^2 \theta (\omega_2 d\varphi - \omega_1 d\psi)^2 + \frac{l}{f} r^2 \sin^2 \theta \left(d\varphi - \frac{\omega_1}{r} dt \right)^2 + \frac{n}{f} \left(d\psi - \frac{\omega_2}{r} dt \right)^2 \quad (5.46)$$

a elektromagnetický potenciál je:

$$A_\mu dx^\mu = A_t dt + A_\varphi d\varphi + A_\psi d\psi. \quad (5.47)$$

Všechny neurčené funkce (f , ω_1 , ω_2 , m , p , l , n , A_t , A_φ a A_ψ) závisejí jen na r a θ .

Asymptotické chování metriky je určeno hmotností, momenty hybnosti, nábojem a gyromagnetickými poměry g_1 , g_2 :

$$f = 1 - \frac{8M}{3\pi r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (5.48)$$

$$\omega_i = \frac{8J_i}{\pi r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right), \quad (5.49)$$

$$A_t = 1 - \frac{Q}{4\pi r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (5.50)$$

$$A_\varphi = -g_1 \frac{QJ_1 \sin^2 \theta}{2M 4\pi^2 r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (5.51)$$

$$A_\psi = -g_2 \frac{QJ_2 \cos^2 \theta}{2M 4\pi^2 r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.52)$$

Numericky je v obecném případě nutno řešit 10 parciálních diferenciálních rovnic. Pokud má černá díra jen jeden moment hybnosti, potom je rovnic jen 7, a pokud má černá díra oba dva momenty hybnosti stejně velké, potom se systém zredukuje jen na 6 obyčejných diferenciálních rovnic od proměnné r .

Z numerických výsledků vyplývá, že hmotnost a další fyzikální veličiny velmi dobře splňují Smarovu formuli (2.38). Perturbativní hodnota pro gyromagnetický poměr je $g = N - 1$. Kerr-Newmanovo řešení splňuje tento vztah přesně, pro pětidimenzionální černou díru však platí jen přibližně. Pokud má černá díra jen jeden moment hybnosti, potom je gyromagnetický poměr o několik procent menší, v případě dvou stejných momentů hybnosti je naopak větší než předpokládaná hodnota.

V článku [16] je numericky konstruována černá díra v liché dimenzi (tedy pro sudé N) se všemi n momenty hybnosti stejnými. V tomto případě musí mít metrika tvar:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -f dt^2 + \frac{m}{f} \left[dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \cos^2 \theta_j \right) d\theta_i^2 \right] + \\
& + \frac{n}{f} r^2 \sum_{k=1}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} \cos^2 \theta_l \right) \sin^2 \theta_k \left(\epsilon_k d\varphi_k - \frac{\omega}{r} dt \right)^2 + \\
& + \frac{m-n}{f} r^2 \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} \cos^2 \theta_l \right) \sin^2 \theta_k d\varphi_k^2 - \left[\sum_{k=1}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} \cos^2 \theta_l \right) \sin^2 \theta_k \epsilon_k d\varphi_k \right]^2 \right\},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

kde $\theta_0 = 0$, $\theta_n = \frac{\pi}{2}$, úhly $\theta_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pro $i = 1, \dots, n-1$ a úhly $\varphi_k \in \langle 0, 2\pi \rangle$ pro $k = 1, \dots, n$. Symbol $\epsilon_k = \pm 1$ vyznačuje směr rotace v jednotlivých rovinách. Elektomagnetický potenciál je ve tvaru:

$$A_\mu dx^\mu = A_0 dt + A_\varphi \sum_{k=1}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} \cos^2 \theta_l \right) \sin^2 \theta_k \epsilon_k d\varphi_k. \tag{5.54}$$

Řešení má šest neurčených funkcí (f , m , n , ω , A_0 a A_φ), které závisejí jen na r . Díky existenci integrálu pohybu je však nakonec nutné řešit jen 4 rovnice druhého řádu a jednu rovnici prvního řádu.

Numerické výsledky jsou podobné jako v případě pěti dimenzí. Smarrova formule je dobře splněna a gyromagnetický poměr je blízko $g = N - 1$, přičemž tentokrát je o něco vyšší. Ukazuje se také, že při stejné hodnotě náboje odlišnost od Myers-Perryho černé díry vzrůstá s dimenzí prostoru.

Kapitola 6

Kerr-de Sitterova černá díra

V roce 1968 našel Carter [17] zobecnění Kerrova řešení o kosmologickou konstantou. Původně bylo toto řešení pokládáno jen za geometrickou zajímavost, nicméně dnes se o kosmologické konstantě předpokládá, že je nenulová, i když velmi malá. Analogické zobecnění je možné provést u Myers-Perryho černé díry, což se podařilo v článku [18], ze kterého vycházím v této kapitole. Některé funkce a souřadnice jsem ovšem přeznačil tak, aby byly kompatibilní s Myers-Perryho řešením v předchozí kapitole.

6.1 Metrika v Kerr-Schildově tvaru

Odvození řešení sleduje původní Carterův postup, ve kterém je metrika podobně jako u Kerrova řešení hledána ve tvaru:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\Lambda} + h k_{\mu} k_{\nu}, \quad (6.1)$$

kde k_{μ} je nulový vektor vzhledem k $g_{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu}^{\Lambda}$. Minkowského metriku ve vzorci (6.1) nahrazuje $g_{\mu\nu}^{\Lambda}$, což je de Sitterova metrika daná (3.1) a (3.10). Tuto metriku lze pro sudé N zapsat v jiných souřadnicích ve tvaru:

$$ds_{\Lambda}^2 = -(1 - \lambda R^2)dT^2 + \frac{dR^2}{1 - \lambda R^2} + R^2 \sum_{i=1}^n (d\xi_i^2 + \xi_i^2 d\phi_i^2), \quad (6.2)$$

kde ξ_i splňují:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1. \quad (6.3)$$

Nyní se použijí nové souřadnice r a μ_i , které jsou závislé na rotačních parametrech a_i a které jsou s předchozími svázány vztahy:

$$\mu_i^2 (r^2 + a_i^2) = (1 + \lambda a_i^2) R^2 \xi_i^2. \quad (6.4)$$

Souřadnice μ_i znovu splňují normalizační podmínku:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1. \quad (6.5)$$

De Sitterova metrika v těchto souřadnicích získá tvar:

$$ds_{\Lambda}^2 = -W(1 - \lambda r^2)dT^2 + \bar{F}dr^2 + \sum_{i=1}^n \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) + \frac{\lambda}{W(1 - \lambda r^2)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(r^2 + a_i^2)\mu_i d\mu_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2, \quad (6.6)$$

kde

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2}, \quad (6.7)$$

$$\bar{F} = \frac{1}{1 - \lambda r^2} F, \quad (6.8)$$

přičemž

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{r^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (6.9)$$

Při řešení Einsteinových rovnic ve tvaru (2.7) (s nulovým tenzorem $T_{\mu\nu}$) se nyní využije předpokládaný tvar metriky (6.1). Nalezená funkce h lze zapsat ve stejném tvaru jako u Myers-Perryho řešení:

$$h = \frac{\mu r^2}{F \Pi}, \quad (6.10)$$

kde

$$\Pi = \prod_{i=1}^n (r^2 + a_i^2) \quad (6.11)$$

a vektorové pole k_{μ} má tvar:

$$k_{\mu} dx^{\mu} = W dT + \bar{F} dr - \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\phi_i. \quad (6.12)$$

Pro liché N je metrika znovu dána výrazem (6.1), kde základová metrika má tvar:

$$ds_{\Lambda}^2 = -W(1 - \lambda r^2)dt^2 + \bar{F}dr^2 + \sum_{i=1}^n \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{W(1 - \lambda r^2)} \left(r^2 \alpha d\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{(r^2 + a_i^2) \mu_i d\mu_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2 + r^2 d\alpha^2, \quad (6.13)$$

funkce h je rovna:

$$h = \frac{\mu r}{\Pi F} \quad (6.14)$$

a vektorové pole k_μ je znovu dáno výrazem (6.12). Souřadnice α je definována stejně jako u Myers-Perryho výrazem $\alpha = \frac{z}{r}$. Funkce \bar{F} a Π zůstaly dány (6.8) a (6.11), ale funkce W a F je nutné mírně předefinovat:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} + \alpha^2, \quad (6.15)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{r^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2} + \alpha^2. \quad (6.16)$$

6.2 Metrika v Boyer-Lindquistových souřadnicích

Stejně jako u Myers-Perryho je výhodné metriku transformovat do Boyer-Lindquistových souřadnic, kde má jednodušší tvar. Transformaci je možné pro sudou i lichou dimenzi zapsat výrazy:

$$dt = dT - \frac{\mu dr}{(1 - \lambda r^2)(V - \mu)}, \quad (6.17)$$

$$d\varphi_i = d\phi_i + \lambda a_i dt - \frac{\mu a_i dr}{(r^2 + a_i^2)(V - \mu)}. \quad (6.18)$$

V prostoru se sudým N je funkce V rovna:

$$V = \frac{(1 - \lambda r^2)\Pi}{r^2} \quad (6.19)$$

a metrika přejde na tvar:

$$ds^2 = -W(1 - \lambda r^2)dt^2 + \frac{Fdr^2}{1 - \lambda r^2 - \frac{\mu r^2}{\Pi}} + h \left(dt - \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu_i^2 d\varphi_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (d\mu_i^2 + \mu_i^2 (d\varphi_i - \lambda a_i dt)^2) + \frac{\lambda}{W(1 - \lambda r^2)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(r^2 + a_i^2) \mu_i d\mu_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2. \quad (6.20)$$

Pro liché N je funkce V definována:

$$V = \frac{(1 - \lambda r^2)\Pi}{r} \quad (6.21)$$

a metrika získá tvar:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -W(1 - \lambda r^2)dt^2 + \frac{Fdr^2}{1 - \lambda r^2 - \frac{\mu r}{\Pi}} + h \left(dt - \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu_i^2 d\varphi_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2 + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} [d\mu_i^2 + \mu_i^2 (d\varphi_i - \lambda a_i dt)^2] + r^2 d\alpha^2 + \\
& + \frac{\lambda}{W(1 - \lambda r^2)} \left(r^2 \alpha d\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{(r^2 + a_i^2) \mu_i d\mu_i}{1 + \lambda a_i^2} \right)^2. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

6.3 Fyzikální parametry

V článku [19] jsou vypočtené hmotnost, momenty hybnosti a další veličiny. Hmotnost se liší pro sudé a liché N :

$$M = \frac{\mu S_{N-1}}{8\pi \prod_{i=1}^n (1 + \lambda a_i^2)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \lambda a_i^2} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{pro sudé } N, \tag{6.23}$$

$$M = \frac{\mu S_{N-1}}{8\pi \prod_{i=1}^n (1 + \lambda a_i^2)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \lambda a_i^2} \quad \text{pro liché } N. \tag{6.24}$$

Momenty hybnosti jsou stejné v sudé i liché dimenzi:

$$J_i = \frac{\mu a_i S_{N-1}}{8\pi (1 + \lambda a_i^2) \prod_{j=1}^n (1 + \lambda a_j^2)}. \tag{6.25}$$

Poloha (existence) horizontu je určena tím, kde (zda vůbec) diverguje složka metriky g_{rr} . Díky přítomnosti členů s kosmologickou konstantou je řešení této rovnice ještě složitější než u Myers-Perryho. Za předpokladu, že horizont existuje, zde uvádím plochu horizontu, úhlovou rychlost horizontu a povrchovou teplotu:

$$A_H = \frac{S_N - 1}{r_+} \prod_{i=1}^n \frac{r_+^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \quad \text{pro sudé } N, \tag{6.26}$$

$$A_H = S_{N-1} \prod_{i=1}^n \frac{r_+^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \quad \text{pro liché } N, \tag{6.27}$$

$$\Omega_i = \frac{a_i (1 + \lambda a_i^2)}{r_+^2 + a_i^2}, \tag{6.28}$$

$$\kappa = r_+ (1 - \lambda r_+^2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_+^2 + a_i^2} - \frac{1}{r_+} \quad \text{pro liché } N, \tag{6.29}$$

$$\kappa = r_+ (1 - \lambda r_+^2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_+^2 + a_i^2} - \frac{1 + \lambda r_+^2}{2r_+} \quad \text{pro liché } N. \tag{6.30}$$

6.4 Kerr-NUT-AdS

Řešení popisované v předchozích sekcích této kapitoly se ještě podařilo zobecnit o tzv. NUT parametry. Toto řešení je prezentováno v článku [20]. Počet nezávislých NUT parametrů, které řešení obsahuje je $\frac{N-1}{2}$ pro liché N a $\frac{N-4}{2}$ pro sudé N , protože v tomto případě je jeden z parametrů triviální a dá se odstranit přeparametrizováním řešení. V pěti dimenzích tedy nezůstává žádný nezávislý parametr a řešení lze předvést na tvar uvedený v předchozích sekcích této kapitoly.

Einsteinovy rovnice jsou vyřešeny ve tvaru (2.7), přičemž [20] značí konstantu λ jako $-g^2$. Metrika je v dimenzi se sudým N rovna:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \frac{U}{X} dr^2 + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{U_a}{X_a} dy_a^2 - \frac{X}{U} \left(W dt - \sum_{i=1}^n a_i^2 \gamma_i d\phi_i \right)^2 + \\
& + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{X_a}{U_a} \left(\frac{(1+g^2 r^2)W}{1-g^2 y_a^2} dt - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 (r^2 + a_i^2) \gamma_i}{a_i^2 - y_a^2} d\phi_i \right)^2 + \\
& + \frac{\prod_{k=1}^n a_k^2}{r^2 \prod_{a=1}^{n-1} y_a^2} \left((1+g^2 r^2)W dt - \sum_{i=1}^n (r^2 + a_i^2) \gamma_i d\phi_i \right)^2, \tag{6.31}
\end{aligned}$$

kde

$$U = \prod_{a=1}^{n-1} (r^2 + y_a^2), \tag{6.32}$$

$$U_a = -(r^2 + y_a^2) \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{n-1} (y_b^2 - y_a^2), \tag{6.33}$$

$$W = \prod_{a=1}^{n-1} (1 - g^2 y_a^2), \tag{6.34}$$

$$\gamma_i = \prod_{a=1}^{n-1} (a_i^2 - y_a^2), \tag{6.35}$$

$$X = \frac{1 + g^2 r^2}{r^2} \prod_{k=1}^n (r^2 + a_k^2) - 2M, \tag{6.36}$$

$$X_a = \frac{1 - g^2 y_a^2}{y_a^2} \prod_{k=1}^n (a_k^2 - y_a^2) + 2L_a. \tag{6.37}$$

V případě lichého N má metrika tvar:

$$ds^2 = \frac{U}{X} dr^2 + \sum_{a=1}^n \frac{U_a}{X_a} dy_a^2 - \frac{X}{U} \left(W dt - \sum_{i=1}^n \gamma_i d\phi_i \right)^2 + \sum_{a=1}^n \frac{X_a}{U_a} \left(\frac{(1 + g^2 r^2) W}{1 - g^2 y_a^2} dt - \sum_{i=1}^n \frac{(r^2 + a_i^2) \gamma_i}{a_i^2 - y_a^2} d\phi_i \right)^2, \quad (6.38)$$

kde funkce U , U_a , W a γ_i jsou definovány výše vzorci (6.32) až (6.35) a funkce X a X_a jsou rovny:

$$X = (1 + g^2 r^2) \prod_{k=1}^n (r^2 + a_k^2) - 2Mr, \quad (6.39)$$

$$X_a = -(1 - g^2 y_a^2) \prod_{k=1}^n (a_k^2 - y_a^2) - 2L_a y_a. \quad (6.40)$$

V článku [20] dále provádějí rotaci radiální souřadnice do komplexních hodnot a převádějí metriku do několika dalších tvarů, které zde již nebudu uvádět, díky čemuž metrika získá diagonální tvar a zjednoduší se. Zajímavé je, že v takto získaných tvarech metriky vystupují hmotnost a NUT parametry rovnocenným způsobem. Další důležitou vlastností metriky je, že je invariantní vůči určitým diskretním symetriím, které spočívají v převrácení rotačních parametrů a_i okolo hodnoty $1/g$. Ultrarotující metrika s např. $|a_1 g| > 1$ je tedy ekvivalentní metrice s $|a_1 g| < 1$.

Kapitola 7

Jeden prsten vládne všem

Black ring ¹ je pětidimenzionální černá díra s topologií horizontu $S^2 \times S^1$, která rotuje okolo S^1 rychlostí danou tak, že odstředivá síla přesně vyváží sílu gravitační, což zabraňuje gravitačnímu zhroucení. Jeho existence je umožněna tím, že v pěti dimenzích je možné řešení popisující černou strunu (viz kapitola 4), jejímž stočením black ring vznikne. Jako první našli řešení popisující black ring Emparan a Reall v roce 2002 [22] na základě odhadu tvaru metriky, který vycházel z jiných známých řešení. Později byl black ring odvozen pomocí technik na generování řešení. Jeho důležitost spočívá hlavně ve dvou následujících skutečnostech.

- První z nich je porušení teoremu o jednoznačnosti černých děr. Ve čtyřdimenzionálním prostoru je černá díra plně charakterizovaná svojí hmotností M , momentem hybnosti J a nábojem Q (předpoklady viz kapitola 3). V pěti dimenzích je black ring protipříkladem k tomuto teoremu, protože lze zkonstruovat black ring, který má hmotnost i moment hybnosti stejné jako Myers-Perryho černá díra.
- Druhým významným aspektem tohoto řešení je to, že se jedná o první nalezené vakuové stacionární asymptoticky ploché řešení, jehož topologie horizontu není sférická. Ve čtyřrozměrném prostoru je možná (za určitých předpokladů, viz sekce 7.4) pouze sférické topologie. Je tedy zřejmé, že ani tento teorem se nevztahuje na vyšší dimenze.

Dá se očekávat, že podobná řešení budou existovat i v šesti- nebo více rozměrném prostoru (kde jsou navíc přípustné i ještě složitější topologie), ale žádné z nich zatím nebylo nalezeno.

V této kapitole vycházím z článku [23], odkud jsem převzal základní informace o black ringu, a z [24], odkud pocházejí informace o tvaru horizontu a o stabilitě.

¹Rozhodl jsem se používat originální název řešení, protože se zdá, že neexistuje žádný oficiální český překlad. Doslovný překlad výrazu black ring je černý prsten, ale pravděpodobně by bylo lepší používat černý prstenec. Ke svému překvapení jsem zjistil, že stejný odkaz na Pána Prstenů, který jsem použil v názvu kapitoly, obsahuje i článek [21].

7.1 Metrika black ringu

Souřadnice řešení vycházejí z toroidálních souřadnic v plochem prostoru. Na dvojici polárních souřadnic

$$x_1 = r_1 \cos \varphi, \quad x_2 = r_1 \sin \varphi, \quad x_3 = r_2 \cos \psi, \quad x_4 = r_2 \sin \psi \quad (7.1)$$

je použita transformace

$$y = -\frac{R^2 + r_1^2 + r_2^2}{\Sigma}, \quad x = \frac{R^2 - r_1^2 - r_2^2}{\Sigma}, \quad (7.2)$$

kde

$$\Sigma = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + R^2)^2 - 4R^2 r_2^2} \quad (7.3)$$

a konstanta R udává poloměr prstence. Souřadnice y nabývá hodnot mezi $-\infty$ a -1 , přičemž $y = -\infty$ odpovídá poloze prstence a $y = -1$ nekonečnu. Souřadnice x se pohybuje v rozmezí $-1 \leq x \leq 1$, $x = 1$ odpovídá bodům v rovině prstence uvnitř prstence, zatímco $x = -1$ bodům vně prstence. Plochá metrika vyjádřená v těchto souřadnicích má tvar:

$$dx_4^2 = \frac{R^2}{(x-y)^2} \left[(y^2 - 1)d\psi^2 + \frac{dy^2}{y^2 - 1} + \frac{dx^2}{1 - x^2} + (1 - x^2)d\varphi^2 \right]. \quad (7.4)$$

Metrika black ringu ve tvaru z [23] je dána vzorcem:

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)} \left(dt - CR \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) \left(-\frac{G(y)}{F(y)} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\varphi^2 \right), \quad (7.5)$$

kde

$$F(z) = 1 + \lambda z, \quad (7.6)$$

$$G(z) = (1 - z^2)(1 + \nu z), \quad (7.7)$$

$$C = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \quad (7.8)$$

Souřadnice x a y mají stejný význam jako v plochem prostoru, ale úhly ψ a φ si už nezachovávají periodu 2π , ale musí být napojeny s periodou:

$$\Delta\psi = \Delta\varphi = 2\pi \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{1 - \nu}. \quad (7.9)$$

Metrika diverguje v bodě $y = -\infty$ a má zde singularitu, neboť současně diverguje i invariant $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Druhý bod, ve kterém metrika diverguje, $y = -\frac{1}{\nu}$ odpovídá pouze souřadnicové singularitě a black ring zde má horizont. Poslední divergence v bodě $y = -\frac{1}{\lambda}$ odpovídá ploše nekonečného frekvenčního posunu.

7.2 Fyzikální vlastnosti

Řešení má samo o sobě tři parametry: ν , λ a R . Parametr R má rozměr délky a přibližně udává poloměr prstence. Parametry λ a ν jsou bezrozměrné a leží v intervalu:

$$0 < \nu \leq \lambda < 1. \quad (7.10)$$

Parametry ale nejsou nezávislé, protože musí splňovat:

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 + \nu^2}. \quad (7.11)$$

Svázání obou parametrů se dá očekávat, protože moment hybnosti musí být nastaven tak, že odstředivá síla vyvažuje gravitační sílu (případně vnitřní napětí, které u black ringu s velkým poloměrem převažuje nad gravitační silou, viz dále). Pokud tato podmínka není splněna, potom má řešení membránovitou singularitu v rovině prstence, která black ring udržuje v rovnováze. Řešení tedy zbývají jen dva volné parametry R a ν , které jsou fixovány zadáním hmotnosti a momentu hybnosti.

Tyto dvě veličiny lze určit z asymptotického chování metriky a jsou rovny:

$$M = \frac{3\pi R^2}{4} \frac{\lambda}{1 - \nu}, \quad (7.12)$$

$$J = \frac{\pi R^3}{2} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda - \nu)(1 + \lambda)}}{(1 - \nu)^2}. \quad (7.13)$$

Místo momentu hybnosti se často používá bezrozměrná veličina j :

$$j = \sqrt{\frac{27\pi}{32}} \frac{J}{M^{3/2}}. \quad (7.14)$$

Zbylé fyzikální veličiny - plocha horizontu, povrchová gravitace a úhlová rychlost horizontu - jsou:

$$A_H = 8\pi^2 R^3 \frac{\nu^{3/2} \sqrt{\lambda(1 - \lambda^2)}}{(1 - \nu)^2(1 + \nu)}, \quad (7.15)$$

$$\kappa = \frac{1 + \nu}{2R} \sqrt{\frac{1 - \lambda}{\lambda\nu(1 + \lambda)}}, \quad (7.16)$$

$$\Omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\lambda - \nu}{\lambda(1 + \lambda)}}. \quad (7.17)$$

Pokud zafixujeme hmotnost, pak pro $j < 1$ existují dvě varianty black ringu se stejným momentem hybnosti, ale s odlišným poloměrem a dalšími fyzikálními veličinami. Tyto dvě

varianty se nazývají fat black ring a thin black ring ². Thin black ring odpovídá $\nu < \frac{1}{2}$ a fat black ring $\nu > \frac{1}{2}$. Mezní řešení s $\nu = \frac{1}{2}$ má minimální moment hybnosti $j = \sqrt{\frac{27}{32}}$. Fat black ring má moment hybnosti v intervalu $\sqrt{\frac{27}{32}} < j < 1$, zatímco pro thin black ring platí $\sqrt{\frac{27}{32}} < j$. Moment hybnosti black ringu tedy může nabývat neomezeně vysoké hodnoty, ale je omezen zdola. Situace je tedy opačná než u Myers-Perryho černé díry, kde platí podmínka (5.43). Black ring tedy v jistém smyslu tvoří pětidimenzionální obdobu ultrarotujících černých děr, které jinak existují až v šesti a více dimenzích.

Horizont má, jak již bylo řečeno, topologii $S^1 \times S^2$. Část S^2 není ovšem přesná dvoudimenzionální sféra, ale je zdeformovaná. U thin black ringu s velkým poloměrem je rozdíl minimální a vnitřní a vnější poloměr prstence jsou podobné, ale u fat black ringu se s parametrem ν blížícím se jedné se horizont zplošťuje, přičemž vnitřní poloměr prstence se blíží nule, zatímco vnější poloměr jde do nekonečna. Pro $\nu = 1$ se řešení stane singulárním a získá stejný tvar jako extrémální Myers-Perry.

7.3 Stabilita

V článku [24] vyšetřují dva typy možných nestabilit: stabilitu vůči perturbacím v radiálním směru a Gregory-Laflammy nestability.

V případě, že black ring není přesně vyvážen podmínkou (7.11), potom na něj singulární membrána působí napětím:

$$\tau = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}} \right). \quad (7.18)$$

Z napětí lze zkonstruovat potenciál v závislosti na vnitřním poloměru prstence R_1 vztahem:

$$V(R_1) = - \int_0^{R_1} \tau(r) dr \quad (7.19)$$

nebo

$$V(R_1) = - \int_0^{R_1} 2\pi r \tau(r) dr. \quad (7.20)$$

Pokud platí, že druhá derivace potenciálu je kladná, tak je řešení stabilní, a naopak, záporná druhá derivace odpovídá nestabilitě. Derivace je nutné provádět při vhodných fyzikálních parametrech (momentu hybnosti a hmotnosti nebo momentu hybnosti a ploše horizontu) držených na konstantní hodnotě. Obě tyto varianty vedou při potenciálu definovaném (7.19) i (7.20) ke stejnému výsledku:

²V překladu tlustý prstenec a hubený prstenec.

- Fat black ring sedí na lokálním maximu potenciálu a je tedy nestabilní vůči radiálním poruchám. V případě perturbace lze předpokládat, že zkolabuje do Myers-Perryho černé díry nebo že se změní na thin black ring; v obou případech se zvětší celková entropie.
- Thin black ring leží v lokálním minimu, a tedy je vůči těmto poruchám stabilní.

Zajímavá je rovnováha u thin black ringu s velkým poloměrem. Pro malé ν a λ platí přibližně:

$$2\pi R_1 \tau = -\frac{M}{R_1} + M\Omega^2 R_1. \quad (7.21)$$

Člen na levé straně lze identifikovat jako vnější sílu působící na prstenec:

$$F = 2\pi R_1 \tau, \quad (7.22)$$

první člen na pravé straně odpovídá vnitřnímu napětí struny, které lze definovat výrazem:

$$T = \frac{M}{2\pi R_1} \quad (7.23)$$

a druhý člen na pravé straně reprezentuje odstředivou sílu. Výsledná rovnice je stejná jako pro rotující strunu v Newtonovské mechanice:

$$F = -2\pi T + M\Omega^2 R_1, \quad (7.24)$$

přičemž podmínka rovnováhy je $\Omega R_1 = 1$.

Poměrně překvapivé je, že v rovnici (7.21) nevystupuje gravitační síla, takže rotace vlastně jen vyvažuje vnitřní napětí. To je způsobeno tím, že v pěti dimenzích gravitační síla klesá jako $\frac{1}{r^3}$. Rovnice (7.21) tedy bude stejná i v šesti a více dimenzích, díky čemuž je možné black ring vyvážit i ve vyšší dimenzi.

U Gregory-Laflammových nestabilit se dá naopak očekávat, že se budou projevovat hlavně u thin black ringu. Nicméně se ukazuje, že black ring má vždy dostatečné rozměry, aby se na něm byla možná existence nestabilních Gregory-Laflammových módů. Metrika black ringu se však od černé struny liší tím více, čím je menší vnitřní poloměr prstence, a je tedy možné, že od určité hranice již bude stabilní, ale přibližné výpočty použité v [24] to nedokážou odhalit.

Jako koncový stav nestabilit se dá stejně jako u Myers-Perryho očekávat buď rozpad na menší černé díry (pokud je možné roztržení horizontu) nebo vyzáření gravitačních vln a přechod do stabilního stavu.

Model rozpadu na Schwarzschildovy černé díry ukazuje, že rozdělení na černé díry je vždy možné tak, že vzroste entropie, a maximální počet černých děr vzniklých rozpadem je přibližně shodný s počtem, který vznikne vývojem Gregory-Laflammových nestabilit. Z hlediska entropie by byl nejvýhodnější rozpad jen na dvě černé díry, ale módy s vysokou frekvencí pravděpodobně způsobí rozpad na větší počet.

Stabilizace vyzářením gravitačních vln se nezdá příliš pravděpodobná, protože přiblížení modelem emise nehmotných částí ukazuje, že tento proces by porušil druhý zákon termodynamiky.

7.4 Jednoznačnost a topologická omezení

V určitém intervalu parametrů mají thin a fat black ring stejnou hmotnost a momenty hybnosti. Navíc existuje také Myers-Perryho černá díra se stejnými parametry. Tím je jasně dokázáno, že ve vyšších dimenzích neplatí teorém o jednoznačnosti černých děr. Ve skutečnosti se však ukazuje, že nejednoznačnost řešení je mnohem větší, neboť existuje celá třída spojitě parametrizovaných řešení se stejnou hodnotou M a J . Mezi ně patří dipólový black ring (viz dále) a superponovaná řešení v kapitole 8. Řešení tedy nejsou určena jen celkovými hodnotami zachovávajících se veličin a k identifikaci řešení je nutné dodat i informace o topologii horizontu a případně i konkrétní hodnotu nějaké další veličiny.

Zároveň ani neplatí Hawkingův teorém, který ve čtyřech dimenzích určuje, že horizont černé díry musí mít sférickou topologii (za předpokladu stacionarity, asymptotické plochosti a platnosti dominantní energetické podmínky). Vzniká tedy otázka, jaká jsou vlastně na černé díry kladena omezení. V článku [25] je ukázáno, že pokud platí výše uvedené předpoklady (a nenastanou určité velmi speciální okolnosti), tak horizont je pozitivního Yamabeho typu (tj. připouští metriku s pozitivní skalární křivostí). Důsledkem je, že ve čtyřech dimenzích je topologie horizontu omezena na sféru a v pěti dimenzích na S^3 , $S^2 \times S^1$ a jejich superpozice.

7.5 Rozšíření black ringu

Nejpřirozenější možností, jak zobecnit toto řešení, je přidat druhý moment hybnosti. To se podařilo v článku [26], podrobnější diskuse tohoto řešení je v [27]. Metriku zde uvádět nebudu, protože je již příliš složitá. Druhá rotace black ringu probíhá okolo sféry S^2 a je tedy výrazně odlišná od rotace okolo S^1 , což vede v některých oblastech k odlišnému chování. Pokud zafixujeme moment hybnosti okolo S^2 , tak moment hybnosti okolo S^1 už nemůže nabývat libovolné hodnoty, ale je shora omezen (stále také platí omezení zespoda). U řešení sice mohou existovat dvě větve, thin a fat black ring, stejně jako u black ringu rotujícího jen v jednom směru, ale jen pokud je moment hybnosti okolo S^2 nižší, než určitá hranice. Další odlišností je, že řešení má dva horizonty. Tyto horizonty mohou splynout v jeden, díky čemuž existuje i extrémální řešení s nulovou povrchovou teplotou.

Black ring může také nést náboj a mít dipólový moment. Narozdíl od Myers-Perryho černé díry se tato řešení podařilo nalézt, první řešení popisující nabitý black ring bylo prezentováno v [28] a dipólový black ring v [29]. Kupodivu se ukazuje, že tyto dvě veličiny jsou na sobě nezávislé, takže black ring s nulovým nábojem může mít nenulový dipólový moment. V tomto případě má řešení při zafixování M a J stále jeden stupeň volnosti a

vzniká tedy spojitá jednoparametrická nejednoznačnost řešení. Zatím nejjobecnější řešení bylo nalezeno v [30]. Toto řešení je sedmiparametrické a má celkem dva momenty hybnosti, tři náboje a tři dipólové náboje. Navíc se očekává, že existuje řešení s devíti parametry, které bude mít tříparametrickou nejednoznačnost danou třemi dipólovými náboji.

Kapitola 8

Superponovaná řešení

8.1 Black saturn

Řešení pojmenované black saturn bylo zkonstruováno v článku [31] pomocí metody inverzního rozptylu. Řešení se sestává z Myers-Perryho černé díry, okolo které rotuje black ring, který znovu může mít dvě varianty - fat a thin. Obě černé díry rotují v jedné rovině, přičemž rychlost rotace musí být stejně jako v případě samotného black ringu nastavena tak, že gravitační síla je vyvážena silou odstředivou. Případná nerovnováha se projeví jako membránovitá singularita v rovině rotace. Konkrétní tvar metriky a další veličiny zde uvádět nebudu, protože jsou příliš složité, ale zmíním se o několika zajímavých fyzikálních vlastnostech. Řešení má celkem pět parametrů (hmotnosti a momenty hybnosti obou černých děr a poloměr black ringu), z nichž po nastavení rovnováhy a zafixování celkové hmotnosti a momentu hybnosti stále zbydou dva volné. Black saturn tedy porušuje teorém o jednoznačnosti černých děr podobně jako dipólový black ring, přičemž tentokrát je nejednoznačnost dvouparametrická a ani nepotřebuje žádné zvláštní vnitřní uspořádání náboje. Dokonce jsou možná i řešení s nulovým momentem hybnosti, která, jak již bylo dříve řečeno, tvoří protipříklad k jednoznačnosti Schwarzschildova řešení.

Obě černé díry mohou rotovat ve stejném i v opačném směru, díky čemuž vzniká mnoho zajímavých efektů spojených s frame-draggingem, protože se sčítají příspěvky od obou černých děr. Pokud je moment hybnosti Myers-Perryho černé díry (daný pomocí Komarova integrálu) nulový, tak úhlová rychlost jejího horizontu je v důsledku gravitačního působení black ringu nenulová a černá díra tak v určitém smyslu rotuje. Naopak, pokud černé díry rotují opačným směrem, tak je možné nastavit momenty hybnosti tak, že úhlová rychlost horizontu Myers-Perryho černé díry je nulová, a tedy efektivně stojí.

U tohoto řešení se nabízí několik dalších možností rozšíření: přidání druhých momentů hybnosti u obou černých děr, přidání nábojů a zvýšení počtu black ringů.

8.2 Black diring a bicycling black rings

Tato dvě řešení se skládají ze dvou superponovaných black ringů. Black diring, který byl nalezen v [32], se skládá ze dvou koncentrických prstenců; zatímco řešení bicycling black rings, zkonstruované v článku [27], se naopak skládá ze dvou prstenců v kolmých rovinách. Obě tato řešení jsou znovu nejednoznačná z hlediska celkové hmotnosti a momentu hybnosti, v prvním případě je tato nejednoznačnost dvouparametrická a v druhém jednoparametrická. Stejně jako u black saturnu u obou řešení vznikají komplikované frame-dragingové efekty. Z tohoto hlediska jsou zajímavější bicycling black rings, kde prstence rotují v kolmých rovinách. Oba mají nenulové obě dvě úhlové rychlosti horizontu, přestože každý z nich má jen jeden moment hybnosti. U obou těchto řešení se nabízejí stejné možnosti rozšíření jako u black saturnu.

Literatura

- [1] R. Emparan and H. S. Reall, “Black Holes in Higher Dimensions,” [arXiv:hep-th/0801.3471](#).
- [2] R. C. Myers and M. J. Perry, “Black holes in higher dimensional space-times,” *Ann. Phys. (N. Y.)* **172** (1986) 304–347.
- [3] F. R. Tangherlini, “Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem,” *Nuovo Cimento* **77** (1963) 636.
- [4] G. Gibbons and S. A. Hartnoll, “A gravitational instability in higher dimensions,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 064024, [arXiv:hep-th/0206202](#).
- [5] H. Kodama and A. Ishibashi, “A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions,” *Prog. Theor. Phys.* **110** (2003) 701–722, [arXiv:hep-th/0305147](#).
- [6] A. Ishibashi and H. Kodama, “Stability of higher-dimensional Schwarzschild black holes,” *Prog. Theor. Phys.* **110** (2003) 901–919, [arXiv:hep-th/0305185](#).
- [7] G. W. Gibbons, D. Ida, and T. Shiromizu, “Uniqueness and non-uniqueness of static vacuum black holes in higher dimensions,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148** (2003) 284–290, [arXiv:gr-qc/0203004](#).
- [8] G. W. Gibbons, D. Ida, and T. Shiromizu, “Uniqueness of (dilaton) charged black holes and black p- branes in higher dimensions,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 044010, [arXiv:hep-th/0206136](#).
- [9] R. Gregory and R. Laflamme, “Black strings and p-branes are unstable,” *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2837–2840, [arXiv:hep-th/9301052](#).
- [10] G. T. Horowitz and K. Maeda, “Fate of the black string instability,” *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 131301, [arXiv:hep-th/0105111](#).
- [11] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.

- [12] G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, “Solutions of Einstein and Einstein-Maxwell equations,” *Math. Phys.* **10** (1969) 1842.
- [13] R. Emparan and R. C. Myers, “Instability of ultra-spinning black holes,” *JHEP* **09** (2003) 025, [arXiv:hep-th/0308056](#).
- [14] H. K. Kunduri, J. Lucietti, and H. S. Reall, “Gravitational perturbations of higher dimensional rotating black holes: Tensor Perturbations,” *Phys. Rev.* **D74** (2006) 084021, [arXiv:hep-th/0606076](#).
- [15] J. Kunz, F. Navarro-Lerida, and A. K. Petersen, “Five-dimensional charged rotating black holes,” *Phys. Lett.* **B614** (2005) 104–112, [arXiv:gr-qc/0503010](#).
- [16] J. Kunz, F. Navarro-Lerida, and J. Viebahn, “Charged rotating black holes in odd dimensions,” *Phys. Lett.* **B639** (2006) 362–367, [arXiv:hep-th/0605075](#).
- [17] B. Carter, “Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein’s equations,” *Commun. Math. Phys.* **10** (1968) 280.
- [18] G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, “The general Kerr-de Sitter metrics in all dimensions,” *J. Geom. Phys.* **53** (2005) 49–73, [arXiv:hep-th/0404008](#).
- [19] G. W. Gibbons, M. J. Perry, and C. N. Pope, “The first law of thermodynamics for Kerr - anti-de Sitter black holes,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 1503–1526, [arXiv:hep-th/0408217](#).
- [20] W. Chen, H. Lu, and C. N. Pope, “General Kerr-NUT-AdS metrics in all dimensions,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 5323–5340, [arXiv:hep-th/0604125](#).
- [21] I. Bena and N. P. Warner, “One ring to rule them all ... and in the darkness bind them?,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **9** (2005) 667–701, [arXiv:hep-th/0408106](#).
- [22] R. Emparan and H. S. Reall, “A rotating black ring in five dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101101, [arXiv:hep-th/0110260](#).
- [23] R. Emparan and H. S. Reall, “Black rings,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) R169, [arXiv:hep-th/0608012](#).
- [24] H. Elvang, R. Emparan, and A. Virmani, “Dynamics and stability of black rings,” *JHEP* **12** (2006) 074, [arXiv:hep-th/0608076](#).
- [25] G. J. Galloway and R. Schoen, “A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions,” *Commun. Math. Phys.* **266** (2006) 571–576, [arXiv:gr-qc/0509107](#).

- [26] A. A. Pomeransky and R. A. Sen'kov, "Black ring with two angular momenta," [arXiv:hep-th/0612005](#).
- [27] H. Elvang and M. J. Rodriguez, "Bicycling Black Rings," *JHEP* **04** (2008) 045, [arXiv:0712.2425](#).
- [28] H. Elvang, "A charged rotating black ring," *Phys. Rev.* **D68** (2003) 124016, [arXiv:hep-th/0305247](#).
- [29] R. Emparan, "Rotating circular strings, and infinite non-uniqueness of black rings," *JHEP* **03** (2004) 064, [arXiv:hep-th/0402149](#).
- [30] H. Elvang, R. Emparan, and P. Figueras, "Non-supersymmetric black rings as thermally excited supertubes," *JHEP* **02** (2005) 031, [arXiv:hep-th/0412130](#).
- [31] H. Elvang and P. Figueras, "Black Saturn," *JHEP* **05** (2007) 050, [arXiv:hep-th/0701035](#).
- [32] H. Iguchi and T. Mishima, "Black di-ring and infinite nonuniqueness," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 064018, [arXiv:hep-th/0701043](#).