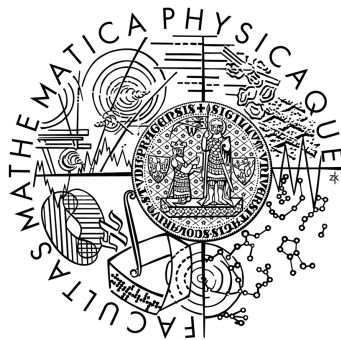


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Balek

### Simulace jetů na LHC

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dolejší, CSc.

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2008

Rád bych poděkoval především RNDr. Jiřímu Dolejšimu, Csc. za mnoho inspirujících připomínek k mé práci a za čas, který mi věnoval. Nemalý dík patří také Mgr. Martinu Spoustovi za pomoc při řešení řady nejen softwarových problémů a za poskytnutí několika užitečných algoritmů.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. května 2008

Petr Balek

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvodní slovo</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Teoretický úvod</b>	<b>6</b>
2.1	Používané souřadnice . . . . .	6
2.2	Jetý . . . . .	8
2.3	LHC . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Simulace</b>	<b>11</b>
3.1	Pythia, Hijing a další software . . . . .	11
3.2	Hledání jetů . . . . .	12
3.3	Alternativní metoda zpracování údajů z kalorimetru . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Výsledky simulace</b>	<b>25</b>
4.1	Pythia . . . . .	25
4.2	Hijing . . . . .	29
4.3	Analýza eventů pomocí transformace (3.16) . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>42</b>
	<b>Literatura</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Rapidita</b>	<b>45</b>
<b>B</b>	<b>Diskrétní Fourierova transformace</b>	<b>46</b>
<b>C</b>	<b>Nastavení Pythie a Hijingu</b>	<b>49</b>

Název práce: Simulace jetů na LHC  
Autor: Petr Balek  
Katedra (ústav): Ústav částicové a jaderné fyziky  
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dolejší, CSc.  
e-mail vedoucího: dolejsi@ipnp.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce ukazuje, jak se autor seznámil s pojmem jetu v p+p a Pb+Pb srážkách při vysokých energiích, které mohou být dosaženy na LHC, a s Monte Carlo simulacemi srážek. Pozornost je také věnována problematice hledání jetů, a to dvěma standardním algoritmy ( $k_T$  algoritmu a  $D\emptyset$  algoritmu) a souvisejícím problémům. V práci je též rozpracována a částečně prozkoumána nová metoda fourierovské analýzy kalorimetrické informace. Na příkladech jsou ukázány p+p a Pb+Pb eventy, stejně jako použití navrhované metody zpracování dat.

Klíčová slova: jet, Pythia, Hijing, proton, těžký ion

Title: The simulation of jets at LHC  
Author: Petr Balek  
Department: Institute of particle and nuclear physics  
Supervisor: RNDr. Jiří Dolejší, CSc.  
Supervisor's e-mail address: dolejsi@ipnp.troja.mff.cuni.cz

Abstract: Present work show how author get acquainted with jets in p+p and Pb+Pb collisions at high energy that can be reached at LHC and with Monte Carlo event generator. Attention is paid to the questions of searching jets, namely searching jets with help of two standard algorithm ( $k_T$  algorithm and  $D\emptyset$  algorithm) and related questions. In work is also introduced new method of Fourier analysis of calorimetric information. The examples of p+p and Pb+Pb events are shown. The applications of our new method of event analyze are shown too.

Keywords: jet, Pythia, Hijing, proton, heavy ion

# Kapitola 1

## Úvodní slovo

Tato práce je členěna do 5 kapitol. V kapitole 2 nalezneme krátký úvod do problematiky jetů. V kapitole 3 jsou popsány způsoby hledání jetů a s tím související problémy. Také představíme možný způsob analýzy kalorimetrických dat. Kapitola 4 obsahuje konkrétní nasimulované procesy, které budeme moci pozorovat i na LHC. Po kapitole 5, kde je dán stručný souhrn práce, následují dodatky, které však nejsou nezbytné pro pochopení fyzikální podstaty věci.

Při psaní práce jsme se snažili vyhnout násilnému překladu výrazů z angličtiny. Jednalo se o výrazy, které jsou těžko přeložitelné do češtiny, popřípadě výrazy, které by se sice přeložit daly, avšak mnohemu čtenáři by mohlo trvat značnou dobu, než by přišel na to, co vlastně znamenají.

V celé práci používáme konvenci  $c = 1$ . Hmotnost, hybnost i energie tak mají stejný rozměr a udáváme je v GeV, respektive TeV.

# Kapitola 2

## Teoretický úvod

### 2.1 Používané souřadnice

Při studiu srážek částic nepoužíváme běžné kartézské či válcové souřadnice, nýbrž udáváme vektory pomocí trojice čísel  $(r, \varphi, \eta)$ , jak je obvyklé ve fyzice vysokých energií.  $r$  značí vzdálenost od kartézské osy  $z$ .  $\varphi$  je azimutální úhel, tj. odklon složky vektoru kolmé na kartézskou osu  $z$  od kartézské osy  $x$ .  $\eta$  je tzv. pseudorapidita a definujeme ji jako:

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.1)$$

kde  $\theta$  je úhel mezi příslušným vektorem a kartézskou osou  $z$ . Problematiku více ozřejmuje obrázek 2.1. Na obrázku 2.2 vidíme porovnání pseudorapidity  $\eta$  a úhlu  $\theta$ . Jestliže se úhel  $\theta$  pohybuje v rozmezí  $0^\circ$ – $180^\circ$ , bude pseudorapidita nabývat hodnot všech reálných čísel.

Pseudorapidita je blízká rapiditě  $y'$ :

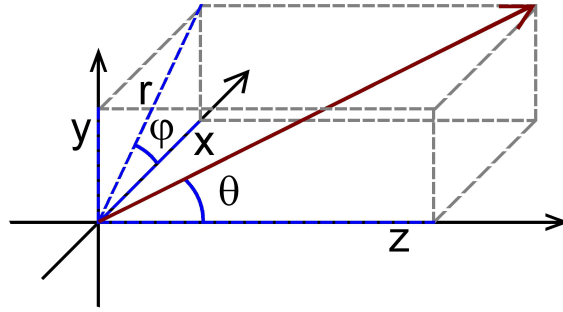
$$y' = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right) \quad (2.2)$$

Je-li hmotnost částice mnohem menší než její hybnost ( $m \ll p$ ) a  $\theta$  je mnohem větší než převrácená hodnota faktoru  $\gamma$  ( $\theta \gg 1/\gamma$ ), potom rapidita  $y'$  přechází na pseudorapiditu  $\eta$  [13].

Transverzální složkou energie  $E_T$  chápeme:

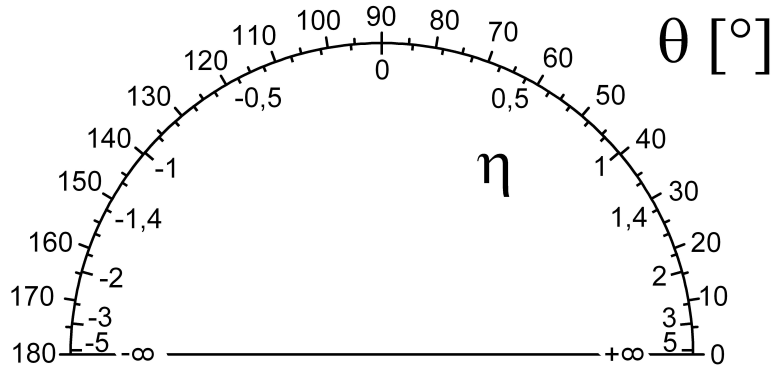
$$E_T = E \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{p} = E \sin\theta \quad (2.3)$$

Veličiny  $E_T$  a  $\varphi$  jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci. Rapidita není lorentzovsky invariantní, avšak rozdíl rapidit ano, jak je ukázáno



Obrázek 2.1: Souřadnice

Namísto kartézských souřadnic  $(x,y,z)$  či válcových souřadnic  $(r,\varphi,z)$  používáme souřadnice  $(r, \varphi, \eta)$



Obrázek 2.2:  $\eta$  vs.  $\theta$

Na vnitřní straně je stupnice v  $\eta$ , na vnější v  $\theta$ .

v dodatku A. V našem případě budou splněny obě podmínky uvedené výše, takže rozdíl pseudorapidit můžeme též považovat za lorentzovsky invariantní. Směr letu částice udáváme pomocí trojice čísel  $(E_T, \varphi, \eta)$ .

$R_{ij}$  udávající lorentzovsky invariantní (za splnění výše uvedených podmínek) úhlovou vzdálenost mezi dvěma směry spočteme jako:

$$R_{ij} = \sqrt{(\eta_i - \eta_j)^2 + (\varphi_i - \varphi_j)^2} \quad (2.4)$$

Při výpočtu je třeba brát v úvahu skutečnost, že souřadnice  $\varphi$  je  $2\pi$ -periodická. Pokud je  $|\varphi_i - \varphi_j|$  větší než  $\pi$ , musíme vzdálenost částic ve  $\varphi$  vzít jako doplněk úhlu  $|\varphi_i - \varphi_j|$  do úhlu  $2\pi$ .

Může se zdát zvláštní kombinovat v jedné veličině pseudorapiditu a azimutální úhel, když se přitom jedná o rozdílné veličiny. Skutečnost je

taková, že velikost jednotkového vektoru je stejná pro  $\eta$  i  $\varphi$ , jak je ukázáno v [10].

Za směr jetu (viz 2.2) považujeme vážený průměr  $\eta_i$  a  $\varphi_i$  jednotlivých částic v jetu obsažených.  $E_T$  jetu je součet  $E_{T,i}$  jednotlivých částic [6]:

$$E_{T,jet} = \sum_{i=1}^{N_{jet}} E_{T,i} \quad (2.5)$$

$$\varphi_{jet} = \sum_{i=1}^{N_{jet}} \frac{E_{T,i}\varphi_i}{E_{T,jet}} \quad (2.6)$$

$$\eta_{jet} = \sum_{i=1}^{N_{jet}} \frac{E_{T,i}\eta_i}{E_{T,jet}} \quad (2.7)$$

kde  $N_{jet}$  je počet částic v jetu. Tyto rovnice nejsou jediný způsob, jak spočítat vlastnosti jetu z vlastností jeho částic. Např. v [4] se též dává možnost sčítat čtyřhybnosti jednotlivých částic a až ze sumy čtyřhybností počítat vlastnosti jetu.

## 2.2 Jety

Vznik jetů vysvětlíme pomocí představy barevně nabitých partonů (kvarků či gluonů), které jsou k sobě přitahovány barevným gluonovým polem. Můžeme si představit mezi partony malou strunu. Díky asymptotické volnosti se partony na krátké vzdálenosti jeví jako volné. Na delších vzdálenostech roste energie mezi dvěma partony kvůli jejich barevnému náboji lineárně se vzdáleností. Pokud se partony od sebe vzdalují, může energie barevného pole dosáhnout takové výše, že dá vzniknout novému kvark-antikvarkovému páru – struna praskne a na nově vzniklých koncích se objeví kvark a antikvark. Vůně vzniklého kvarku a antikvarku je náhodná (ovšem pro oba stejná), přičemž podíl jednotlivých vůní je asi:

$$u : d : s : c \approx 1 : 1 : 0,3 : 10^{-11} \quad (2.8)$$

Těžší kvarky a vlastně ani kvark  $c$  nejsou prakticky zastoupeny [9]. Ne všechny takto produkované částice musí být nutně stabilní. Některé se mohou dále rozpadat. V kalorimetru zaznamenáme pochopitelně až produkty rozpadu.

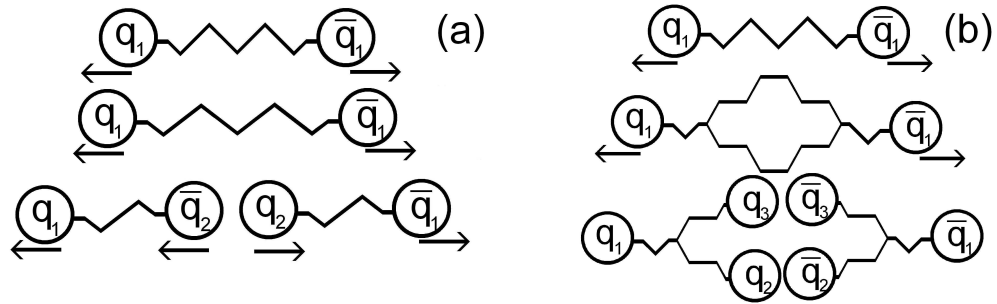
Proces vzniku nových kvark-antikvarkových párů se může mnohokrát opakovat, dokud stačí energie kvarků, resp. energie barevného pole. Hybnosti vzniklého kvarku a antikvarku jsou v těžištové soustavě náhodně



orientovány, mají však opačný směr a stejnou velikost. V laboratorní soustavě můžeme složením hybnosti nově vzniklého kvarku s hybností původního partonu dostat hybnost, jejíž směr je odlišný od směru letu původního partonu.

Kvark spolu s antikvarkem tvoří mezon, což je částice, která je v jetech zastoupená ve velké míře. Nicméně ani vznik baryonů není nemožný.

Z makroskopického hlediska se hadrony rozdělí do dvou skupin – podle směru pohybu. Trajektorie hadronů pohybujících se ve stejném směru svírají mezi sebou jisté úhly, čímž se vytvoří charakteristický kužel – jet.



Obrázek 2.3: Vznik jetu

(a) Energie pole vzdalujících se částic dá vzniknout novému kvark-antikvarkovému páru; (b) Jeden ze způsobů, jakým mohou vzniknout baryony.

Na obrázku 2.3 nalezneme schematické znázornění vzniku nových částic. Bližší pohled na kvarky a struny včetně jejich dynamiky je například v [1].

## 2.3 LHC

LHC, neboli Large Hadron Collider, je velký urychlovač v CERNu (z francouzského "Conseil Européen pour le Recherche Nucléaire", v současnosti se používá název "European Organization for Nuclear Research"), jenž bude spuštěn v brzké době. Je instalován v necelých 27 km dlouhém tunelu, dříve používaném pro LEP (Large Elektron-Positron Collider). Bude urychlovat protony na energii 7 TeV a ionty olova na energii asi 574 TeV (2,76 TeV na jeden nukleon) [13].

Na LHC bude probíhat řada experimentů. Jedním z nich bude ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS), který je uzpůsoben ke zkoumání p+p srážek, nicméně by měl být i užitečný ke studiu Pb+Pb srážek. Mezi hlavní cíle experimentu ATLAS patří hledání Higgsova bosonu, měření

hmoty W bosonu a t kvarku, hledání supersymetrických partnerů známých částic a další [3].

Detektor ATLAS se skládá z mnoha částí. Dráha částice je nejprve zaznamenána vnitřním detektorem. Ze zakřivení dráhy (vlivem magnetického pole asi 2 T) lze určit hybnost částice. Poté částice projde do elektromagnetického kalorimetru, kde se pohltí elektrony, pozitrony a fotony. Ostatní částice projdou do hadronového kalorimetru, kde jsou zaznamenány protony, neutrony a piony. Miony procházejí až do mionového detektoru. Neutrino projdou celým ATLASem bez interakce.

Elektromagnetický kalorimetr pokrývá celé  $2\pi$  ve  $\varphi$ , v  $\eta$  pokrývá oblast do  $\pm 3,2$ . Hadronový kalorimetr pokrývá ve  $\varphi$  také celé  $2\pi$ , v  $\eta$  pak oblast do  $\pm 4,9$ .

Rozlišení elektromagnetického kalorimetru  $\varphi_0 \times \eta_0$  se pohybuje od  $0,003 \times 0,1$  do  $0,1 \times 0,1$ . Rozlišení hadronového kalorimetru se pohybuje od  $0,1 \times 0,1$  do  $0,2 \times 0,2$  [2].

# Kapitola 3

## Simulace

### 3.1 Pythia, Hijing a další software

K simulacím  $p+p$  a  $Pb+Pb$  srážek jsme použili Monte Carlo simulátory – Pythii a Hijing. Monte Carlo simulátory vyvíjí daný systém dle implementovaného fyzikálního modelu. V okamžiku, kdy je více možností, které se mohou udát (ne nutně se stejnou pravděpodobností), simulátor použije náhodné (resp. pseudonáhodné) číslo k vybrání možnosti, která se nakonec uskuteční. Po mnohonásobném zopakování a statistickém zpracování dostáváme výsledky, které můžeme porovnat se skutečně naměřenými hodnotami. Pokud se při psaní simulátoru použil dobrý model, měly by výsledky korespondovat s fyzikální realitou.

Jedním z Monte Carlo simulátorů je Hijing, který jsme využili ke generování  $Pb+Pb$  srážek. Kompletní popis nalezneme v [5].

Generátor pseudonáhodných čísel využívaný Hijingem nebyl provozuschopný na použitém počítači, proto jsme ho nahradili funkcí `ranmar()`, která je s periodou asi  $10^{30}$  zcela dostačující [7].

Pythia je simulátor vytvořený zejména Torbjörnem Sjöstrandem. Tento Monte Carlo simulátor jsme použili ke zkoumání  $p+p$  srážek. Proces vzniku jetů je v něm implementován podobným způsobem, jako je popsáno v sekci 2.2. Dokumentace Pythie je v [9].

Ke zpracování výsledků simulací jsme využili ROOT – program vyvinutý v CERNu jako standardní nástroj pro zpracování dat. ROOT je vystavěn na jazyce C/C++, což umožňuje psát makra v tomto relativně jednoduchém a zároveň dostatečně bohatém jazyce. Nesporným plusem je též velké množství knihoven.

## 3.2 Hledání jetů

Nutným předpokladem ke studiu jetů je jejich nalezení. K hledání jetů existuje řada algoritmů, pomocí kterých lze určit množinu částic, které tvoří dohromady jet. Popíšeme zde dva algoritmy –  $k_T$  algoritmus a DØ algoritmus, jenž je založen na kuželovém algoritmu (cone algorithm).

### $k_T$ algoritmus:

1. Nejdříve vytvoříme dva seznamy. Seznam 1 bude na začátku obsahovat všechny částice v eventuu. Seznam 2 bude na začátku prázdný, později do něj budeme zapisovat kompletní jety.
2. Pro každou dvojici prvků  $i$  a  $j$  ze seznamu 1 ( $i \neq j$ ) určíme jejich vzájemnou vzdálenost:

$$d_{ij} = R_{ij}^2 \cdot (\min\{E_{T,i}, E_{T,j}\})^2, \quad (3.1)$$

kde  $R_{ij}$  určíme podle rovnice (2.4).

3. Pro každý prvek  $k$  ze seznamu 1 spočteme:

$$d_{k,z} = E_{T,k}^2 R^2, \quad (3.2)$$

přičemž  $R$  je předem stanovený fixní parametr.

4. Najdeme minimum pro  $d_{ij}$  a poté minimum pro  $d_{k,z}$ . Jestliže platí  $\min\{d_{ij}\} < \min\{d_{k,z}\}$ , sloučíme prvky  $i$  a  $j$  podle rovnic (2.5)-(2.7) do nového jetu, který zapíšeme do seznamu 1. Původní prvky ze seznamu 1 vyškrtneme.
5. Jestliže je  $\min\{d_{ij}\} > \min\{d_{k,z}\}$ , je jet  $k$  kompletní. Zapišeme ho do seznamu 2 a vyškrtneme ho ze seznamu 1.
6. Jestliže v seznamu 1 zbývají ještě nějaké položky, jdeme zpět k bodu 2. Jestliže žádné položky nezbývají a tedy všechny jety jsou kompletní, je algoritmus u konce. V seznamu 2 jsou zapsány všechny jety vyskytující se v daném eventuu.

Na výstupu dostaneme seznam nalezených jetů, z nichž některé nejsou příliš zajímavé – jedná se o máločásticové "jety", o kterých by se dalo polemizovat, zda to jsou skutečné jety či částice náhodou se vyskytující ve stejné oblasti. Proto je vhodné se zabírat pouze těmi jety, které přesáhnou jistou hodnotu prahové energie  $E_{prah}$  [4, 8].

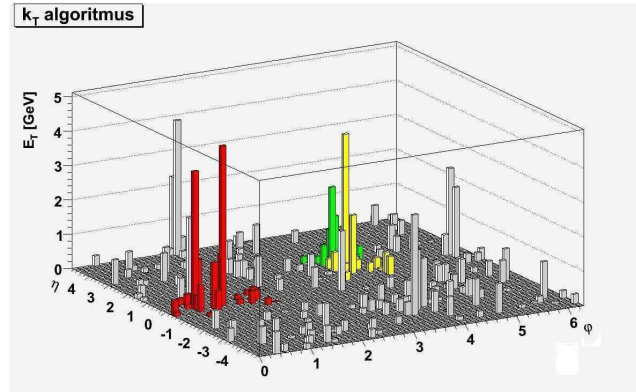
### DØ algoritmus:

1. Předpokládáme, že částice prošly kalorimetrem s buňkou o rozměrech  $\varphi_0 \times \eta_0$ . Každou částici umístíme do patřičné buňky.
2. Každá buňka kalorimetru s energií vyšší než je (předem stanovená) prahová energie  $E_0$ , je považována za tzv. "seed cell".
3. Za jet považujeme množinu všech buněk, které jsou k dané seed cell blíže než (předem stanovený) poloměr  $R$ . Vlastnosti jetu spočteme dle rovnic (2.5)-(2.7).
4. Jestliže se osa jetu ( $\varphi_{jet}, \eta_{jet}$ ) neshoduje s polohou původní seed cell, přepočítáváme krok 3 s tím, že polohu původní seed cell nahrazujeme nyní osou jetu. Toto provádíme tak dlouho, dokud není dosaženo stabilního směru.
5. Nyní máme dlouhý seznam jetů, každý jet odpovídá jedné seed cell. Chceme, aby se každý jet vyskytoval v seznamu pouze jednou – pokud se tak neděje, odstraníme přebytečné jety.
6. Některé jety se mohou překrývat. Najdeme nejvíce energetický jet, který sdílí některé své buňky s jinými jety – nazvěme ho jet 1. Z jetů, se kterými jet 1 sdílí nějakou energii, vezmeme také ten s nejvyšší energií – nazvěme ho jet 2. Pokud má jet 2 více než 50% své energie společné s jetem 1, je s ním sloučen. Všechny buňky jetu 2 se stanou buňkami jetu 1. Pokud má jet 2 méně než 50% své energie společné s jetem 1, je od něj oddělen. Každá buňka, jež byla společná pro oba jety, se přiřadí bližšímu jetu. V obou případech se vlastnosti jetů přepočtou podle (2.5)-(2.7). Toto opakujeme tak dlouho, dokud není každá buňka přiřazena nejvýše jednomu jetu.

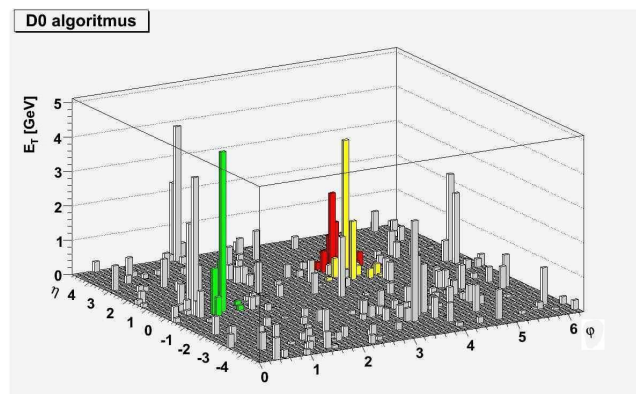
Mez 50% není nikterak pevně daná. Např. v experimentu CDF (Fermilab) či ZEUS (DESY) byla tato hodnota 75%. Idea algoritmu však zůstává stejná [4, 8].

Na obrázcích 3.1, 3.2 a 3.3 můžeme srovnat účinnost obou algoritmů. Ve všech případech jsme volili  $R = 0,7$ . Prahovou hodnotu pro seed cell jsme pro obrázek 3.2 zvolili 1 GeV, pro obrázek 3.3 to je 0 GeV. Jet s nejvyšší energií je zobrazen červeně, zelený jet má druhou nejvyšší energii a žlutě zbarvený jet má třetí nejvyšší energii. Vidíme, že nejen různé algoritmy, ale dokonce i stejný algoritmus s jinými parametry může dávat

rozdílné výsledky. Uvedený event je pro p+p srážku za vzniku kvarku b. Tento event není typickým zástupcem eventů za vzniku b kvarku a slouží pouze k ilustraci algoritmů.



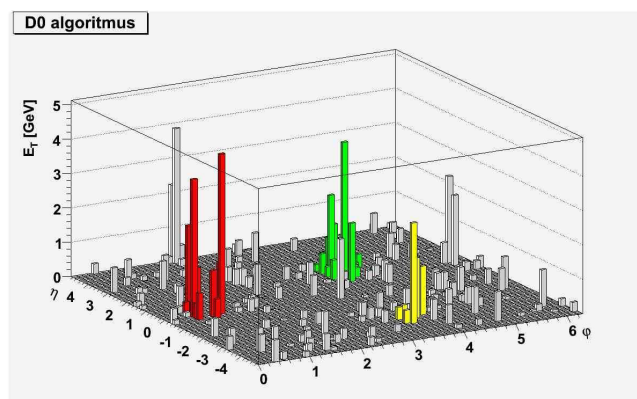
Obrázek 3.1: Demonstrace  $k_T$  algoritmu  
Barevně označené jety jsou ty s nejvyšší energií.



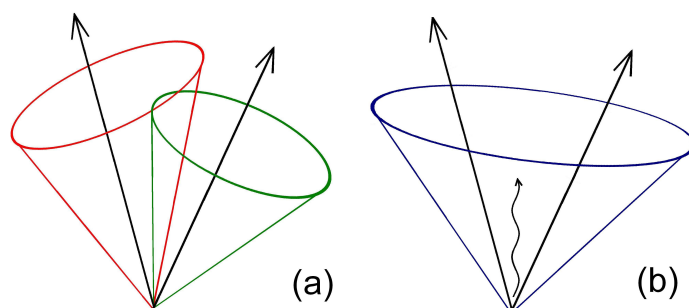
Obrázek 3.2: Demonstrace  $D\emptyset$  algoritmu,  $E_0 = 1$  GeV  
Barevně označené jety jsou ty s nejvyšší energií.

Očekáváme, že algoritmus na hledání jetů bude mít při podobném vstupu také podobný výstup. Celý výsledek hledání by neměl být závislý na několika málo částicích. Zvláště bychom měli dbát na to, aby každý algoritmus splňoval tzv. "infrared safety" a "collinear safety".

Infrared safety, což by se dalo přeložit jako "infračervená spolehlivost", znamená, že se výstup nezmění, přidáme-li do naměřeného spektra nízkoenergetickou částici. Tuto problematiku ilustruje obrázek 3.4. Vlevo oblast překryvu neskrývá žádnou seed cell.  $D\emptyset$  algoritmus tento případ klasifikuje jako 2 jety, přičemž částice spadající pod oba jety budou přiděleny



Obrázek 3.3: Demonstrace  $D\emptyset$  algoritmu,  $E_0 = 0$  GeV  
Barevně označené jety jsou ty s nejvyšší energií.



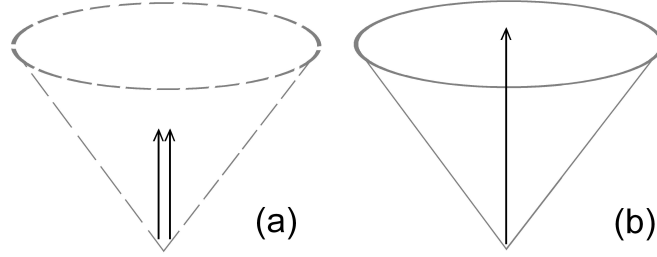
Obrázek 3.4: Infrared safety

Jak (a) tak (b) představují stejný event. Pouze (b) má navíc přidanou částici s nízkou energií.

k jednomu z jetů dle definované rozdělovací procedury. Oproti tomu vpravo máme ve společném prostoru obou jetů ještě jednu částici navíc, díky čemuž jedna buňka kalorimetru překročí hodnotu  $E_0$  a je tedy prohlášena za seed cell. Díky tomu může např. pravý jet sloučit s prostředním a poté se tento jet sloučí s levým. Nakonec je tento případ klasifikován jako jeden jet.  $D\emptyset$  algoritmus tedy nesplňuje infrared safety. Oproti tomu  $k_T$  ano, protože v něm nejsou žádné privilegované částice či buňky kalorimetru.

Collinear safety, což lze přeložit jako "kolineární spolehlivost", nám zaručuje, že výsledek algoritmu bude stejný, i když místo jedné částice vložíme do spektra dvě částice letící ve stejném směru a o celkové energii, jako měla částice původní. Ilustrace k tomu problému je na obrázku 3.5. Vpravo máme pouze jednu částici, která se svou energií překročila  $E_0$  a

tedy je považována za seed cell. Máme tak možnost, že bude nalezen jet. Naopak vlevo máme dvě částice, které však dopadly do dvou sousedních buněk kalorimetru. Ani jedna buňka ovšem nepřekročila  $E_0$ , takže DØ algoritmus je nebude brát v potaz (jakožto seed cell, samozřejmě mohou vystupovat v jiných jetech). Oproti tomu  $k_T$  algoritmus bude oba případy považovat téměř za totožné – obě částice sloučí v jeden jet.



Obrázek 3.5: Collinear safety

Částice v (a) mají stejný směr i celkovou energii jako částice v (b). Mohou však dopadnout do různých buněk kalorimetru.

DØ algoritmus nespĺňuje ani infrared safety ani collinear safety. Nicméně existuje množství vylepšení, jak tyto nedostatky odstranit. Jedna z možností je neuvažovat  $E_0$  a hledat stabilní jety v celém detektoru, tedy za seed cell považovat všechny buňky kalorimetru. Nalezneme tak i ty jety, které by neměly seed cell ve svém středu a jejichž nalezení by bylo obtížné. Další možností je se v daném DØ algoritmu po kroku 4 vrátit ke kroku 2, kde definujeme dodatečné seed cell jako středy spojnic os dvou jetů, jsou-li tyto středy blíže než  $2R$ . K těmto dodatečným seed cell nalezneme jety se stabilním směrem (ve smyslu kroku 4), které poté přidáme k původním jetům a pokračujeme krokem 5 (odstranění duplicitních jetů). V neposlední řadě lze použít  $k_T$  algoritmus, který je jak infrared safe, tak collinear safe.

### 3.3 Alternativní metoda zpracování údajů z kalorimetru

Při analýze výsledků p+p a Pb+Pb srážek jsme se inspirovali u experimentu WMAP [12]. Podobně jako v experimentu WMAP bychom chtěli zpracovat výsledky následovně:



- Rozložit získaná 2D data do systému dvourozměrných ortogonálních funkcí.
- Vhodnou transformací převést toto 2D spektrum na 1D spektrum, které by vystihovalo charakter vstupních dat.

V případě WMAP se jednalo o přirozené rozložení změřených dat do báze kulových funkcí  $Y_{lm}$  a následné přesčítání přes index  $m$ . Avšak jevištěm našeho experimentu není koule, nýbrž válec o délce  $2\eta_{max}$ , kde  $\eta_{max}$  značí maximální dosažitelnou pseudorapiditu. Kulové funkce  $Y_{lm}$  jsou součinem funkcí  $e^{i\phi m}$  (probíhající po "rovnoběžkách") a přidružených Legendrových polynomů  $P_l^m(\cos \vartheta)$  (probíhající po "polednicích"). Náš systém funkcí bychom možná mohli vytvořit také součinem dvou na sobě nezávislých funkcí. Pro azimutální úhel  $\varphi$  bychom mohli též použít funkci  $e^{i\varphi\omega_1}$  (parametr označen  $\omega_1$ ).

Pro pseudorapiditu  $\eta$  bychom potřebovali systém ortogonálních funkcí na  $(-\eta_{max}, \eta_{max})$ . Nabízí se rozklad do sinů a cosinů, které jsou na sebe ortogonální dokonce v celém  $\mathbb{R}$ . Zkráceně tyto funkce můžeme zapsat jako  $e^{i\eta\omega_2}$  (parametr označen  $\omega_2$ ).

Celkově tedy budeme uvažovat rozklad původních dat  $f(\varphi, \eta)$ , podle systému funkcí  $e^{i(\varphi\omega_1 + \eta\omega_2)}$ . Funkce  $f(\varphi, \eta)$  je diskretní funkce, která hraje roli údajů z kalorimetru. Jak lze snadno nahlédnout, tento rozklad není nic jiného, než Fourierova transformace. Uvažujme diskretní Fourierovu transformaci:

$$\mathcal{F}(f(\varphi, \eta)) = \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j \cdot \varphi_0, k \cdot \eta_0) e^{-2\pi i \left( \frac{j}{N_\varphi} \omega_1 + \frac{k}{N_\eta} \omega_2 \right)} = F(\omega_1, \omega_2), \quad (3.3)$$

kde  $N_\varphi$  je počet bodů ve směru osy  $\varphi$  a  $\varphi_0$  je vzdálenost sousedních bodů. Úhel  $\varphi$  je kladný celočíselný násobek  $\varphi_0$ . Pro  $\eta$  platí analogické značení.

Inverzní Fourierova transformace je:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega_1, \omega_2)) = \frac{1}{N_\varphi N_\eta} \sum_{\omega_1=0}^{N_\varphi-1} \sum_{\omega_2=0}^{N_\eta-1} F(\omega_1, \omega_2) e^{+2\pi i \left( \frac{\omega_1}{N_\varphi} j + \frac{\omega_2}{N_\eta} k \right)} = F(j\varphi_0, k\eta_0) \quad (3.4)$$

Přesný význam  $F(\omega_1, \omega_2)$  a souvislost mezi touto diskretní Fourierovou transformací a spojitou Fourierovou transformací nalezneme v dodatku B.

Pseudorapidita nabývá hodnot  $(-\eta_{max}, \eta_{max})$ , avšak uvedené Fourierovy transformace uvažují pouze kladné hodnoty obou proměnných. Také tento problém je řešen v dodatku B. Jak se ukazuje, můžeme hodnoty

$f(\varphi, \eta)$  pro pseudorapiditu na intervalu  $(-\eta_{max}, 0)$  převést na interval  $(\eta_{max}, 2\eta_{max})$ , aniž bychom ovlivnili výsledek Fourierovy transformace, pokud dodefinujeme funkci  $f(\varphi, \eta)$ :

$$f(\varphi, \eta) := f(\varphi, \eta - 2\eta_{max}) \quad \text{pro } \eta_{max} < \eta < 2\eta_{max} \quad (3.5)$$

Vztah mezi  $\eta_{max}$  a  $N_\eta$  je:

$$2\eta_{max} = N_\eta \cdot \eta_0 \quad (3.6)$$

Frekvence  $\omega_1$  popř.  $\omega_2$  udává, kolik period sinu či cosinu (schované v exponenciále) se vejde do intervalu  $\varphi$  popř.  $\eta$ .  $\omega_1 = 1$  odpovídá situaci, kdy na celý interval případně pouze jedna perioda sinu či cosinu, pro  $\omega_1 = 2$  na něj případnou dvě periody atd. Pro  $\omega_1 = N_\varphi/2$  je frekvence tak velká, že polovina periody odpovídá vzdálenosti mezi dvěma sousedními body. Vyšší frekvence už nebudeme při dalším zpracování uvažovat, ze vstupních dat víme, než se tam nemohou vyskytovat. To, že Fourierova transformace pro vyšší frekvence nebude nulová, je projev diskrétnosti problému. Při spojitě Fourierově transformaci bychom žádné vyšší frekvence nepozorovali.

Zatímco u WMAP bylo přesčítání přes indexy  $m$  kulových funkcí přirozené, v našem případě nemáme žádný index, přes který by se nabízelo přesčítat. Ani jeden z indexů  $\omega_1$  a  $\omega_2$  není nijak privilegován, proto bude nalezení transformace  $F(\omega_1, \omega_2) \rightarrow F_1(\omega)$  obtížnější.

Na užitečnou transformaci z 2D spektra  $F(\omega_1, \omega_2)$  na 1D spektrum  $F_1(\omega)$  klademe několik požadavků:

- Invariance  $F_1(\omega)$  při translaci  $f(\varphi, \eta)$  podél  $\varphi$ . Odpovídá to pootočení okolo osy  $z$ . Vzhledem k tomu, že jsme původně volili osy  $x$  a  $y$  libovolně, je i poloha  $\varphi = 0$  libovolná. Spektrum  $F_1$  by však nemělo být závislé na orientaci os.
- Invariance  $F_1(\omega)$  při translaci  $f(\varphi, \eta)$  podél  $\eta$ . Jak již bylo řečeno, změna pseudorapidity o konstantu je ekvivalentní Lorentzově transformaci. Požadujeme tedy, aby  $F_1(\omega)$  byla lorentzovsky invariantní.
- Invariance  $F_1(\omega)$  při rotaci  $f(\varphi, \eta)$  kolem libovolného bodu. Tento požadavek plyne z možnosti kombinovat  $\varphi$  a  $\eta$ , jak je zmíněno v sekci 2.1.

Spočítejme Fourierovu transformaci funkce  $f(\tilde{\varphi}, \eta) = f(\varphi + \delta \cdot \varphi_0, \eta)$ , kde  $\delta$  je libovolné reálné číslo.  $\delta$  rozložíme na:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad (3.7)$$

kde  $\delta_1$  je celé číslo a  $\delta_2 \in (-0, 5; 0, 5)$ . Ukážeme, že se změna argumentu projeví v posunu fáze Fourierova obrazu. Pro celé číslo (v našem případě  $\delta_1$ ) to ukážeme analyticky. Fourierova transformace je:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\varphi + \delta \cdot \varphi_0, \eta)) &= \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j \cdot \varphi_0 + \delta \cdot \varphi_0, \eta) e^{-2\pi i \left( \frac{j+\delta_1-\delta_1}{N_\varphi} \omega_1 + \frac{k}{N_\eta} \omega_2 \right)} = \\ &= e^{2\pi i \frac{\delta_1 \omega_1}{N_\varphi}} \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j \cdot \varphi_0 + (\delta_1 + \delta_2) \cdot \varphi_0, \eta) e^{-2\pi i \left( \frac{j+\delta_1}{N_\varphi} \omega_1 + \frac{k}{N_\eta} \omega_2 \right)} = \\ &= e^{2\pi i \frac{\delta_1 \omega_1}{N_\varphi}} \sum_{j'=\delta_1}^{N_\varphi-1+\delta_1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j' \cdot \varphi_0 + \delta_2 \cdot \varphi_0, \eta) e^{-2\pi i \left( \frac{j'}{N_\varphi} \omega_1 + \frac{k}{N_\eta} \omega_2 \right)},\end{aligned}$$

kde jsme označili  $j' = j + \delta_1$ . Tímto přeznačením přijdeme o  $f(\varphi, \eta)$  pro  $\varphi < \delta_1 \varphi_0$  a naopak nám přibudou  $f(\varphi, \eta)$  pro  $\varphi > N_\varphi \varphi_0 - \varphi_0$ . Pokud je  $f(\varphi, \eta)$   $N_\varphi$ -periodická, výsledek bude po přeznačení stejný jako před přeznačením. To je případ proměnné  $\varphi$ . Pro  $\eta$  bychom požadovali  $N_\eta$ -periodičnost a ta splněna není. Museli bychom tedy dodat předpoklad, že  $f(\varphi, \eta)$  je malé jak pro  $\eta < \delta_1 \eta_0$ , tak pro  $\eta \geq N_\eta \eta_0$ .

Nyní bychom chtěli odstranit  $\delta_2$ . Další přeznačení indexů není možné, protože  $\delta_2$  není celé číslo. Myšlenka je taková, že bychom měli dostat další posun ve fázi, stejně jako bychom dostali pro spojitý případ:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi + \delta_2 \varphi_0, \eta) e^{-2\pi i (\varphi \omega_1 + \eta \omega_2)} d\varphi d\eta &= \left| \begin{array}{l} \hat{\varphi} = \varphi + \delta_2 \varphi_0 \\ \hat{\eta} = \eta \\ |J| = 1 \end{array} \right| = \\ &= e^{2\pi i \delta_2 \varphi_0 \omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\hat{\varphi}, \hat{\eta}) e^{-2\pi i (\hat{\varphi} \omega_1 + \hat{\eta} \omega_2)} d\hat{\varphi} d\hat{\eta} = e^{2\pi i \delta_2 \varphi_0 \omega_1} F(\omega_1, \omega_2)\end{aligned}$$

Pro diskrétní případ bychom zřejmě museli rozvinout  $f(\varphi + \delta_2 \varphi_0, \eta)$  do Taylorovy řady, v každém členu se vypořádat s  $\delta_2$ , spočítat Fourierovu transformaci pro každý člen zvlášť a tyto členy sečíst. Při výpočtu však narážíme na matematické obtíže, proto se pouze odvoláme na analogii se spojitou Fourierovou transformací a budeme předpokládat, že totéž platí v jisté aproximaci i pro diskrétní případ. Diskrétní Fourierova transformace bude:

$$\mathcal{F}(f(\varphi + \delta \varphi_0, \eta)) \approx e^{2\pi i \frac{\delta \omega_1}{N_\varphi}} F(\omega_1, \omega_2) \quad (3.8)$$

Požadované invariance můžeme dosáhnout přibližně tehdy, pokud na výslednou funkci aplikujeme absolutní hodnotu:

$$|\mathcal{F}(f(\varphi + \delta \cdot \varphi_0, \eta))| \approx |\mathcal{F}(f(\varphi, \eta))| \quad (3.9)$$

Stejným postupem pro pseudorapiditu bychom dosáhli díky absolutní hodnotě invariance pro translaci podél osy  $\eta$ . Pro splnění prvních dvou bodů jsme se museli vzdát komplexních hodnot, ovšem nikoli dimenze.

S výhodou využijeme právě získanou translační invarianci a budeme uvažovat jen rotaci kolem počátku; rotaci kolem libovolného bodu lze realizovat složením posunutí a rotací kolem počátku. Uvažujme rotaci o úhel  $\psi$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Pamatujme, že úhel  $\varphi$  je dán  $j$ -násobkem  $\varphi_0$ , pseudorapidita  $\eta$  zase  $k$ -násobkem  $\eta_0$ . Proto i nový úhel  $\tilde{\varphi}$  v sobě skrývá indexy  $j$  a  $k$ , stejně tak nová pseudorapidita  $\tilde{\eta}$ .

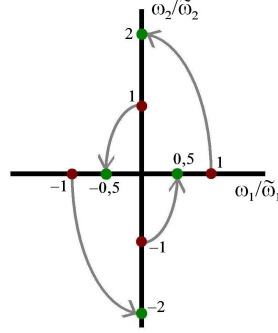
Spočtěme Fourierovu transformaci  $f(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta})) &= \mathcal{F}(f(\varphi \cos \psi + \eta \sin \psi, -\varphi \sin \psi + \eta \cos \psi)) = \\ &= \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j\varphi_0 \cos \psi + k\eta_0 \sin \psi, -j\varphi_0 \sin \psi + k\eta_0 \cos \psi) e^{-2\pi i \left( \frac{j\varphi_0}{N_\varphi\varphi_0} \omega_1 + \frac{k\eta_0}{N_\eta\eta_0} \omega_2 \right)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}) e^{-2\pi i \left( \frac{\tilde{\varphi} \cos \psi - \tilde{\eta} \sin \psi}{N_\varphi\varphi_0} \omega_1 + \frac{\tilde{\varphi} \sin \psi + \tilde{\eta} \cos \psi}{N_\eta\eta_0} \omega_2 \right)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}) e^{-2\pi i \left( \frac{\tilde{\varphi}}{N_\varphi\varphi_0} \left( \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \frac{N_\varphi\varphi_0}{N_\eta\eta_0} \sin \psi \right) + \frac{\tilde{\eta}}{N_\eta\eta_0} \left( -\omega_1 \frac{N_\eta\eta_0}{N_\varphi\varphi_0} \sin \psi + \omega_2 \cos \psi \right) \right)} \approx \\ &\approx F \left( \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \frac{N_\varphi\varphi_0}{N_\eta\eta_0} \sin \psi, -\omega_1 \frac{N_\eta\eta_0}{N_\varphi\varphi_0} \sin \psi + \omega_2 \cos \psi \right) \end{aligned}$$

Opět při výpočtu narážíme na problém neceločíselného argumentu ve funkci  $f(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta})$ . Výpočet by byl v tomto případě ještě složitější než v případě translace, neboť ve  $\tilde{\varphi}$  kombinujeme  $\varphi$  i  $\eta$ , v  $\tilde{\eta}$  stejně tak. Proto se opět odvoláme na podobnost se spojitou Fourierovou transformací a budeme předpokládat, že výsledek je pro diskrétní Fourierovu transformaci analogický.

Pootočení o úhel  $\psi$  v původním spektru odpovídá (opět v jisté aproximaci) transformaci souřadnic v novém spektru:

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0} \sin \psi \\ -\frac{N_\eta \eta_0}{N_\varphi \varphi_0} \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$



Obrázek 3.6: Transformace (3.11)

Pro vybrané body  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\psi = 90^\circ$  a  $N_\varphi \varphi_0 / N_\eta \eta_0 = 0,5$  jsou zobrazeny body  $(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2)$ .

Vyvstává otázka, tak tuto transformaci interpretovat. Na obr. 3.6 je zobrazena transformace 3.11 pro vybrané body. Uvažme tuto transformaci pro  $(\omega_1, \omega_2) = (0, \omega_{2,0})$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0} \sin \psi \\ -\frac{N_\eta \eta_0}{N_\varphi \varphi_0} \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2,0} \frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0} \sin \psi \\ \omega_{2,0} \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Tyto body splňují pro libovolné  $\psi$  rovnici elipsy s poloosami  $\omega_{2,0} \frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0}$  a  $\omega_{2,0}$  a :

$$\frac{\widetilde{\omega}_1^2}{\left(\omega_{2,0} \frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0}\right)^2} + \frac{\widetilde{\omega}_2^2}{\omega_{2,0}^2} = 1 \quad (3.13)$$

Transformaci (3.11) lze považovat za deformovanou rotaci – místo po kružnici se pohybujeme po elipsách, jejichž poloosy mají poměr:

$$\frac{N_\varphi \varphi_0}{N_\eta \eta_0} : 1. \quad (3.14)$$

Speciálně pro  $N_\eta \eta_0 = N_\varphi \varphi_0$  dostáváme běžnou rotaci. Při vyscítání funkce  $F(\omega_1, \omega_2)$  podél elips (či spíše "čtvrtelips") dostáváme funkci invariantní vůči rotaci původního spektra  $f(\varphi, \eta)$ .

Celkově transformace:

$$F_1'(\omega) = \sum |\mathcal{F}(f(\varphi, \eta))|, \quad (3.15)$$

v němž se sčítá vždy přes všechny body, které jsou blíže k elipse o druhé poloose  $\omega$  než k jakékoli jiné, splňuje (v jisté aproximaci) všechny naše požadavky.

Díky diskretním datům není počet bodů náležící elipse o druhé poloose  $\omega$  rostoucí funkcí  $\omega$ . Je proto vhodné zobrazení (3.15) přeškálovat. Zobrazení (3.15) vydělíme pro každé  $\omega$  počtem bodů skutečně náležící příslušné elipse (označíme  $n(\omega)$ ). Tím částečně potlačíme projevy diskretnosti dat. Použitá transformace tedy bude:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{n(\omega)} \sum |\mathcal{F}(f(\varphi, \eta))|, \quad (3.16)$$

Pamatujme, že  $\omega \in (0; N_\eta/2)$ .

Pokud počítáme Fourierovu transformaci pro  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , vzorec (3.3) se zjednoduší na:

$$\mathcal{F}(f(\varphi, \eta)) = \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} \sum_{k=0}^{N_\eta-1} f(j \cdot \varphi_0, k \cdot \eta_0), \quad (3.17)$$

což je celková energie eventů (v části prostoru  $(0; 2\pi) \times (-\eta_{max}; \eta_{max})$ ). Protože  $n(\omega = 0) = 1$ , bude mít  $F_1(0)$  také smysl celkové energie deponované v kalorimetru.

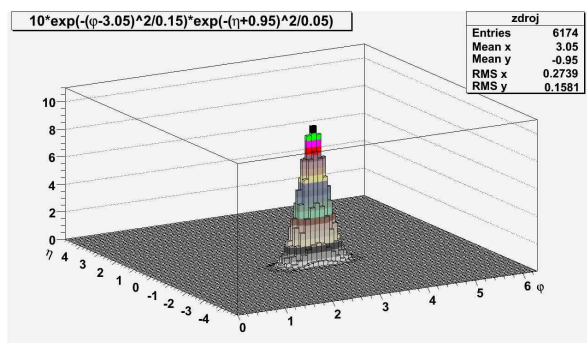
Jaká bude transformace součtu dvou funkcí? Mějme funkce  $f_A$  a  $f_B$ . Transformace jejich součtu bude:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(\omega)} \sum |\mathcal{F}(f_A + f_B)| &= \frac{1}{n(\omega)} \sum |F_A + F_B| = \\ &= \frac{1}{n(\omega)} \sum (|F_A|^2 + |F_B|^2 + 2\Re\{F_A \cdot \bar{F}_B\})^{1/2} \neq \\ &\neq \frac{1}{n(\omega)} \sum (|F_A| + |F_B|) \end{aligned}$$

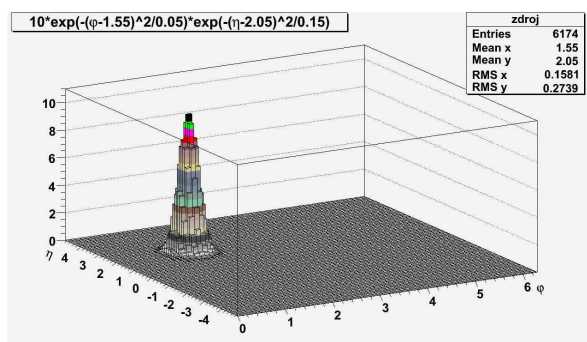
Pruh zde značí komplexní sdružení. Při transformaci součtu dvou funkcí se nám ve výsledku objevuje interferenční člen. Díky němu bude výsledek odlišný od součtu dvou transformací.

Na následujících obrázcích vidíme jednoduché použití transformace (3.16). Na obrázcích 3.7 a 3.8 jsou zdrojová data – gausiány, které nejsou symetrické ve  $\varphi$  a  $\eta$  a jsou navzájem posunuté a pootočené. Na

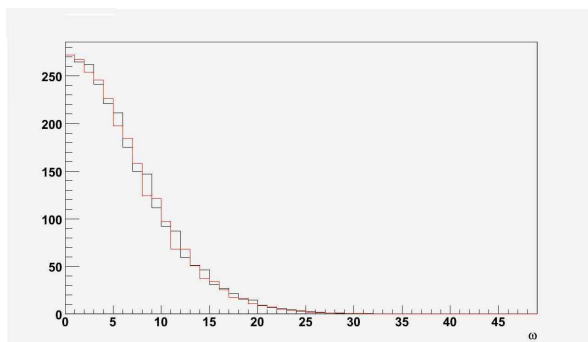
obrázku 3.9 můžeme porovnat jejich transformace. Obě jsou téměř stejné. Na obrázku 3.10 je součet transformací z obrázku 3.9 a na obrázku 3.11 je transformace součtu gausiánů. Jak vidíme, obrázky 3.10 a 3.11 se znatelně liší.



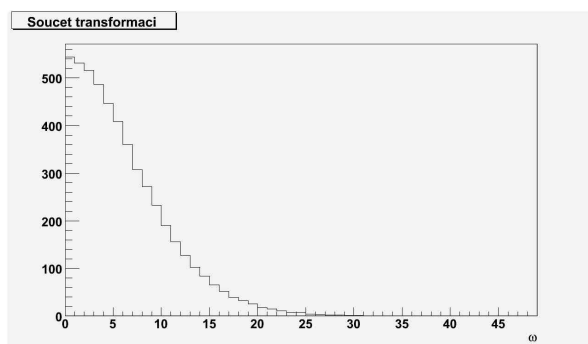
Obrázek 3.7: Transformace (3.16)  
Gausián se středem v bodě (3,05;-0,95).



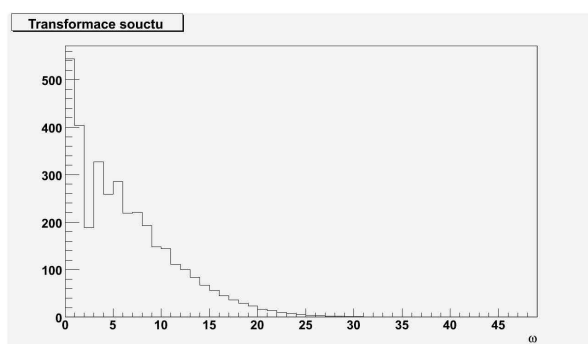
Obrázek 3.8: Transformace (3.16)  
Stejný gausián jako na obrázku 3.7, avšak pootočený o 90° a posunutý na (1,55;2,05).



Obrázek 3.9: Transformace (3.16)  
 Odpovídající transformace gausiánů z obrázků 3.7 (černě) a 3.8 (červeně).



Obrázek 3.10: Transformace (3.16)  
 Součet transformací z obrázku 3.9.



Obrázek 3.11: Transformace (3.16)  
 Transformace součtu gausiánů z obrázků 3.7 a 3.8.



# Kapitola 4

## Výsledky simulace

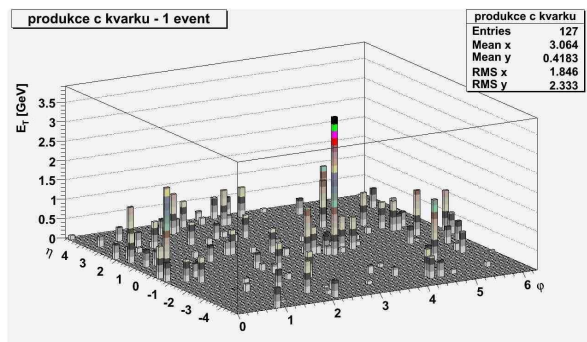
Pro zjednodušení budeme předpokládat, že rozlišení celého kalorimetru je  $\eta_0 \times \varphi_0 = 0,1 \times 0,1$  a že má účinnost 100%, tj. zaznamená vše, včetně mionů a neutrin. Záznam z kalorimetru budeme reprezentovat 2D histogramem o rozměrech  $N_\varphi = 63$  a  $N_\eta = 98$ , což odpovídá dělení intervalu  $(0; 2\pi)$  po 0,1 radiánech, resp. intervalu  $(-4,9; 4,9)$  po 0,1. Použité nastavení Pythie a Hijingu nalezneme v dodatku C.

### 4.1 Pythia

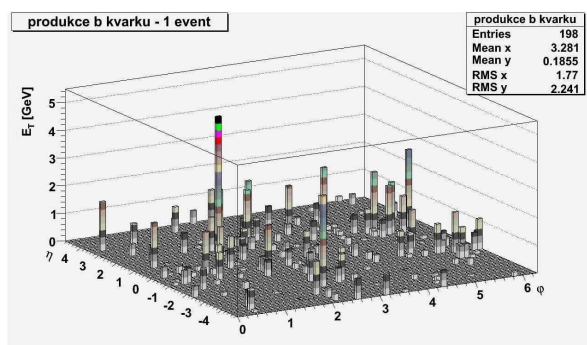
Pythia dovoluje zkoumat mnohé procesy, které se ve srážkách p+p mohou udát. V následujících simulacích budeme volit těžišťovou energii protonů 14 TeV.

Pythia umožňuje změnit různé parametry (rozdílně od "přírody") a snáze tak studovat požadované procesy. Můžeme například změnit poměr produkce jednotlivých kvarků (2.8) ve prospěch kvarků c, b popř. t. Na obrázcích 4.1 – 4.3 jsme se snažili vybrat typické zástupce těchto procesů. S rostoucí hmotnou kvarku ( $m_c < m_b < m_t$ ) roste jak počet produkováných částic, tak jejich transverzální energie. Na obrázcích 4.4 – 4.6 vidíme průměr ze 100 eventů s produkcí kvarků c, b a t. Pro kvark t vidíme, že je velká část energie koncentrována v oblasti přibližně  $|\eta| < 2$ . Pro kvarky c a b nic takového nepozorujeme.

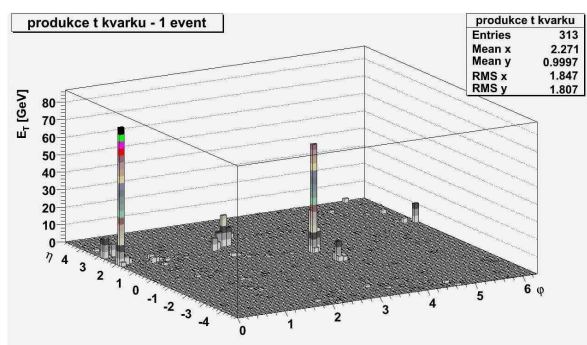
Jak již bylo zmíněno, jedním z cílů experimentu ATLAS je hledání Higgsova bosonu. Pro hmotu Higgsova bosonu menší než 135 GeV by měl dominovat rozpad na  $b\bar{b}$  [13]. Na obrázku 4.7 vidíme rozpad  $h^0$  (v Pythii je jeho hmotnost stanovena na 115 GeV) na  $b\bar{b}$ . Energie jetu 1 je asi 54 GeV, energie jetu 2 je asi 50 GeV. Jet 1 má přibližně směr jako  $\bar{b}$ , jet 2 odpovídá směru b.  $\bar{b}$  měl  $E_T$  57,2 GeV, b kvark měl  $E_T$  asi 51,9 GeV.



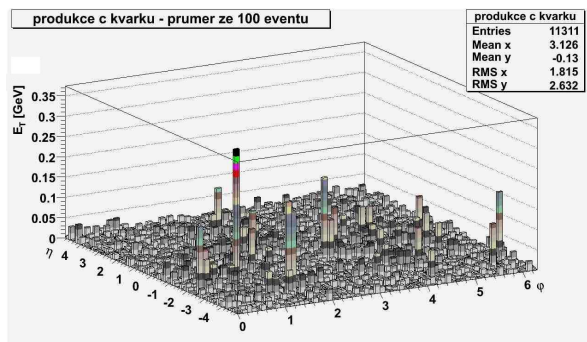
Obrázek 4.1: Event s produkcí c kvarku



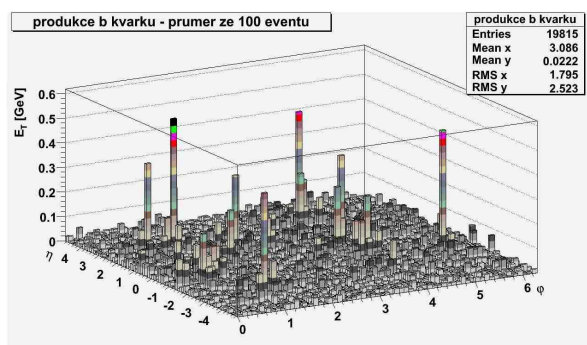
Obrázek 4.2: Event s produkcí b kvarku



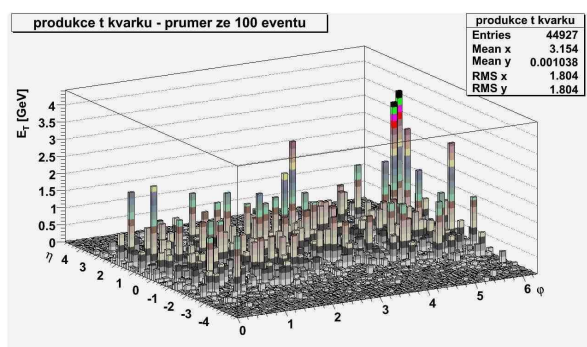
Obrázek 4.3: Event s produkcí t kvarku



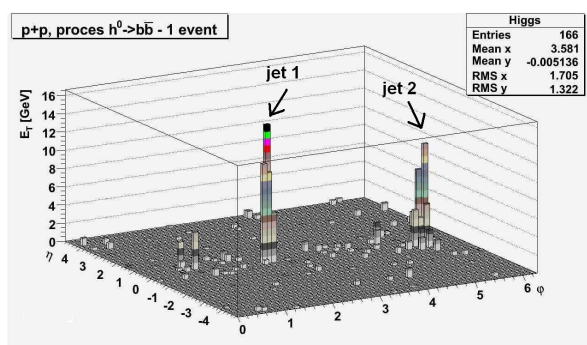
Obrázek 4.4: Průměr ze 100 eventů s produkcí c kvarku



Obrázek 4.5: Průměr ze 100 eventů s produkcí b kvarku



Obrázek 4.6: Průměr ze 100 eventů s produkcí t kvarku

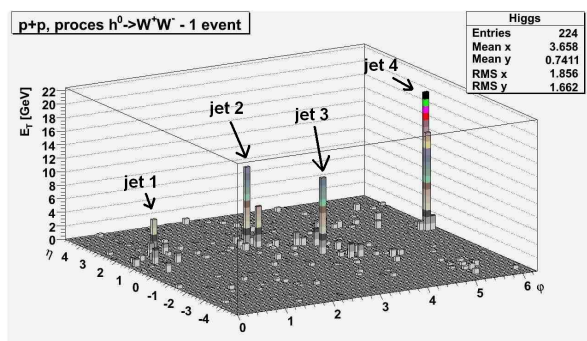


Obrázek 4.7:  $h^0 \rightarrow b\bar{b}$

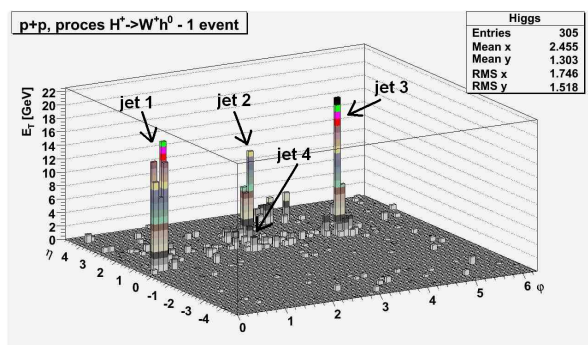
Na obrázku 4.8 je rozpad  $h^0$  na bosony  $W^+$  a  $W^-$ . Protože je hmotnost Higgsova bosonu menší než 135 GeV, jeden z  $W$  bosonů musí být virtuální [13]. V našem případě to je  $W^-$ , který má hmotnost asi 35 GeV.  $W$  bosony se dále rozpadají jako:

$$\begin{aligned} \text{virtual } W^- &\rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau \\ W^+ &\rightarrow \bar{s} c \end{aligned}$$

Na obrázku našly algoritmy čtyři výrazné jety. Jenom dva jsou jety v pravém slova smyslu, protože  $\tau$  ani  $\bar{\nu}_\tau$  neinteragují silně, takže nemohou vytvořit jety. Jet 1 má směr přibližně stejný jako  $\tau$ . Nejedná se tedy o opravdový jet, nýbrž o spršku vyvolanou  $\tau$ . Jet 2 zleva má směr  $\bar{s}$  kvarku.  $E_T$  jetu (asi 31,0 GeV) odpovídá transverzální energii  $\bar{s}$  kvarku (tj. asi 32,6 GeV). Jet 3 odpovídá  $\bar{\nu}_\tau$ . Opět se nejedná o jet v pravém slova smyslu. V detektoru bychom dokonce žádný signál od antineutrína nedostali. Jet 4 s  $E_T$  asi 40,4 GeV má stejný směr jako  $c$  kvark, který měl  $E_T$  asi 42,2 GeV.



Obrázek 4.8:  $h^0 \rightarrow W^+W^-$



Obrázek 4.9:  $H^+ \rightarrow W^+h^0$

Na obrázku 4.9 je rozpad nabitého Higgsova bosonu  $H^+$  (o hmotnosti asi 300 GeV) na  $h^0$  a  $W^+$ . Tyto produkty se dále rozpadají jako:

$$h^0 \rightarrow b\bar{b}$$

$$W^+ \rightarrow \bar{s}c$$

Opět v tomto eventu můžeme identifikovat jednotlivé jety. Jsou patrné tři výrazné jety. Jet 1 odpovídá směrem  $\bar{b}$ , jet 2 odpovídá  $\bar{s}$  a jet 3 odpovídá  $c$ . Před prostředním jetem je ještě jeden méně patrný – jet 4. Je širší než ostatní a s menšími transverzálními energiemi zúčastněných částic. Polohou i energií odpovídá kvarku  $b$ .

## 4.2 Hijing

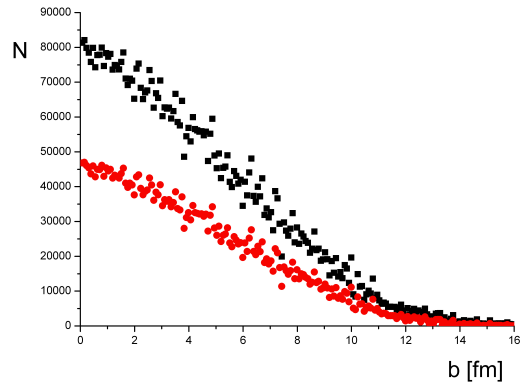
Ve všech následujících simulacích jsme volili těžišťovou energii Pb+Pb srážek 5,5 TeV na nukleonový pár.

Při Pb+Pb srážkách se dostává ke slovu impaktní parametr  $b$ . Udává, jak jsou vzdáleny trajektorie středů nalétávajících částic. Na  $b$  zdatelně závisí počet produkovaných částic – viz obrázek 4.10.

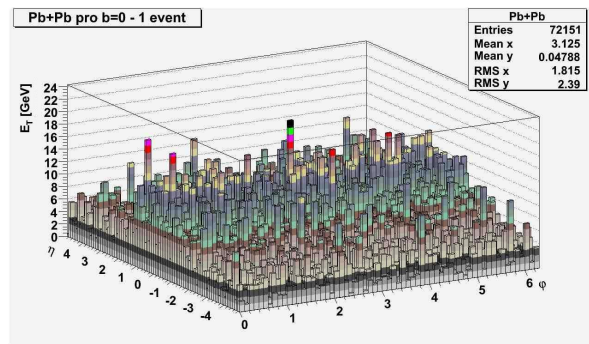
Na obrázku 4.11 je centrální srážka (tj.  $b = 0$  fm), na obrázku 4.12 je srážka při  $b = 8$  fm. Na obrázcích 4.13 a 4.14 vidíme průměry ze 100 srážek Pb+Pb pro impaktní parametr 0 až 1 fm a 8 až 9 fm.

S klesajícím  $b$  roste počet částic i transverzální energie. Z obrázků 4.13 a 4.14 je vidět, že produkce částic nezávisí na  $\varphi$ .

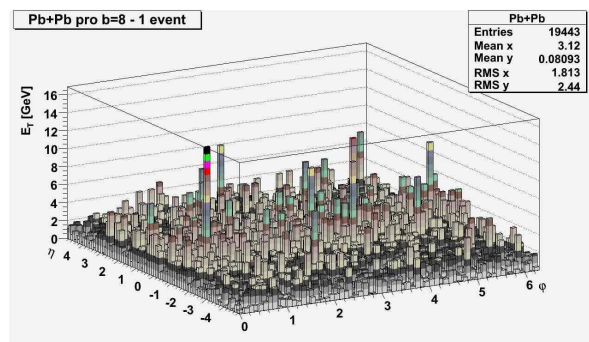
Parton při průchodu jadernou hmotou (či spíše kvark-gluonovým plazmatem) ztrácí energii. Tento jev je znám jako "quenching" (v překladu "zhašení" či "kalení"). Díky těmto ztrátám bychom mohli očekávat, že budeme pozorovat jety s menší energií. Situace je však složitější, protože v pozorovaném jetu mohou být i částice vyzářené partonem v důsledku



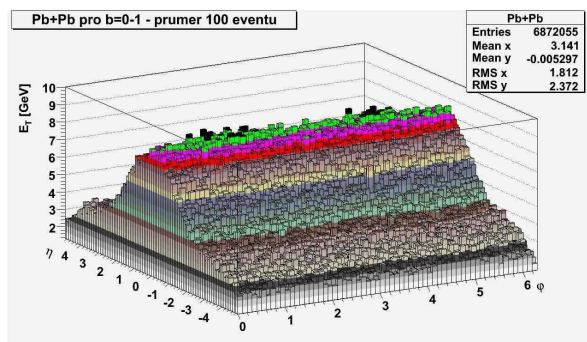
Obrázek 4.10: Závislost počtu částic  $N$  na impaktním parametru  $b$ . Černě jsou zobrazeny počty všech částic, červeně počty nabitých částic.



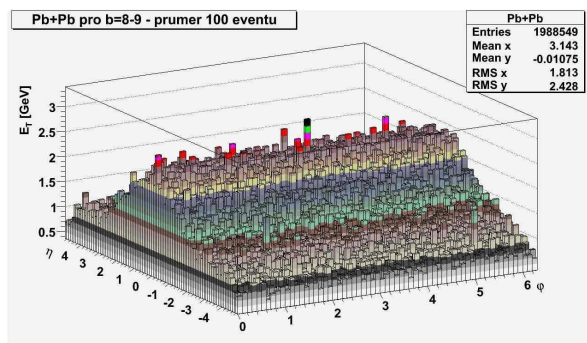
Obrázek 4.11: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event



Obrázek 4.12: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, 1 event



Obrázek 4.13: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr ze 100 eventů



Obrázek 4.14: Pb+Pb srážka pro  $b=8-9$  fm, průměr ze 100 eventů

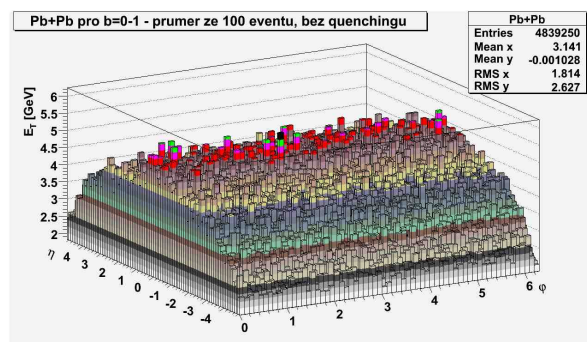
ztrát. Energie jetů by se měnit neměla, ovšem měl by se měnit profil jetu a rozdělení částic v jetu. Energetické ztráty tak můžeme pozorovat pouze nepřímo [11].

V Hijingu bohužel nemůžeme obdržet event, ve kterém by byly výrazné jety z p+p srážky. Z tohoto důvodu nemůžeme pozorovat změny ve vlastnostech výrazných jetů. Quenching je tedy v Hijingu pouze jedním z faktorů, které určují tvar výsledného spektra.

Hijing umožňuje měnit energetické ztráty partonu při průchodu plazmatem či je vůbec neuvažovat. Standardně jsou v Hijingu tyto ztráty nastaveny pro gluony 2,0 GeV/fm, pro kvark jsou ztráty poloviční.

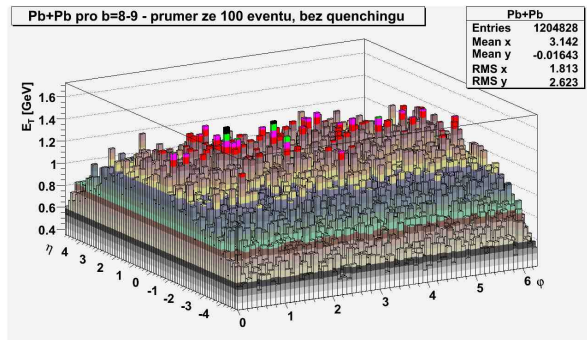
Na obrázcích 4.15 a 4.16 vidíme průměr ze 100 eventů pro impaktní parametr 0 až 1 fm a 8 až 9 fm při "vypnutém" quenchingu. Na obrázcích 4.17 a 4.18 vidíme průměr ze 100 eventů pro impaktní parametr 0 až 1 fm a 8 až 9 fm při dvojnásobných energetických ztrátách. Na obrázcích 4.19 a 4.20 vidíme závislost počtu částic na  $\varphi$  a  $\eta$  při impaktním parametru 0 až 1 fm, v prvním případě s quenchingem, v druhém případě bez quenchingu. Opět se jedná o průměr ze sta eventů.

S rostoucími ztrátami roste počet částic produkovaných v eventu. Při nulových ztrátách (tj. vypnutém quenchingu) se profil spektra znatelně liší od spekter, které dostáváme pro standardní ztráty. Zajímavé je srovnat energetické spektrum a závislost počtu částic letících v příslušném směru. V našem případě se jedná o obrázky 4.13 vs. 4.19 (to jsou eventy s quenchingem, tedy standardní nastavení) a 4.15 vs. 4.20 (to jsou eventy bez quenchingu). Pro eventy s quenchingem se obě závislosti podobají a můžeme říct, že všechny částice mají přibližně stejnou energii, pro eventy bez quenchingu však mají částice s pseudorapiditou blízkou nule vyšší energii, než částice s vyšší pseudorapiditou (v absolutní hodnotě).

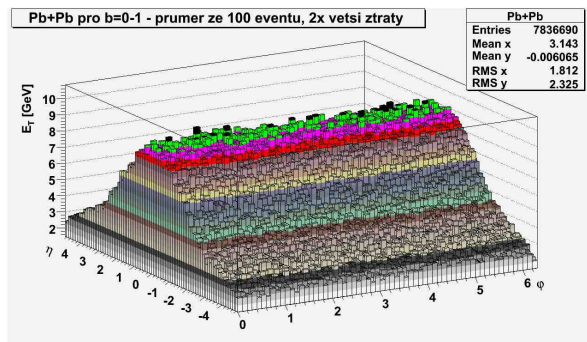


Obrázek 4.15: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr ze 100 eventů, bez quenchingu

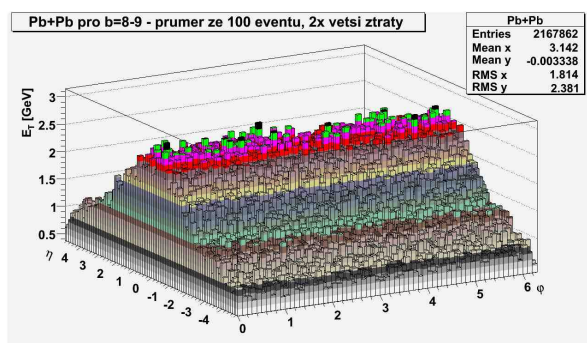




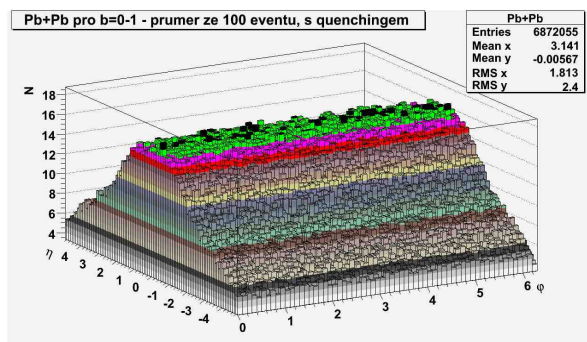
Obrázek 4.16: Pb+Pb srážka pro  $b=8-9$  fm, průměr ze 100 eventů, bez quenchingu



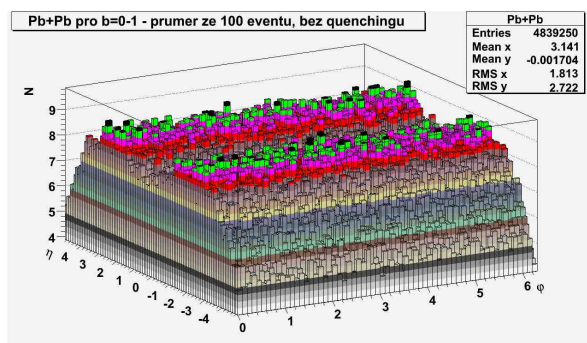
Obrázek 4.17: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr ze 100 eventů, 2x větší energetické ztráty než obvykle



Obrázek 4.18: Pb+Pb srážka pro  $b=8-9$  fm, průměr ze 100 eventů, 2x větší energetické ztráty než obvykle



Obrázek 4.19: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr ze 100 eventů, s quenchingem

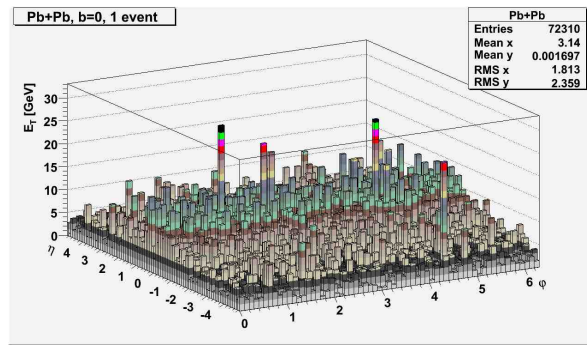


Obrázek 4.20: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr ze 100 eventů, bez quenchingu

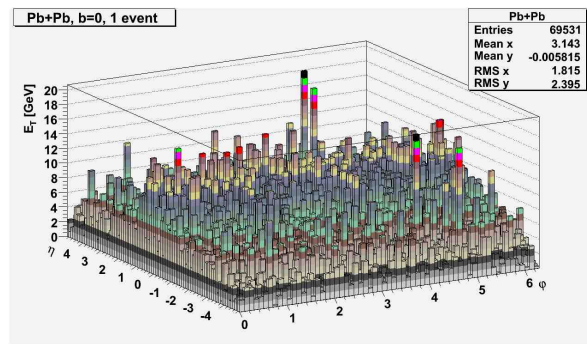
### 4.3 Analýza eventů pomocí transformace (3.16)

Pomocí transformace (3.16) bychom chtěli zkoumat charakter složitého pozadí ve spektru Pb+Pb srážek. Rádi bychom zjistili, na čem závisí tato drobná struktura.

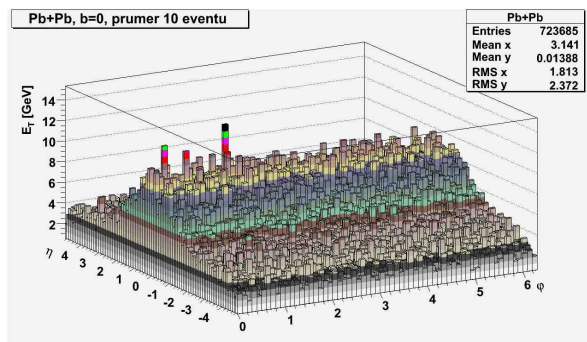
Na obrázcích 4.21 a 4.22 jsou vybrané Pb+Pb srážky pro impaktní parametr  $b = 0$  fm. Na obrázku 4.23 je průměr z 10 srážek. Na obrázcích 4.24 a 4.25 jsou potom odpovídající transformace obrázků 4.21 a 4.22. Na obrázku 4.26 je průměr ze stejných 10 transformací, jako jsou použity k tvorbě obrázku 4.23. U transformací jsme odřízli prvních 5 hodnot, abychom se zbavili vysokých hodnot  $F_1(\omega) - F_1(0)$  má význam celkové energie eventu v dané části prostoru, což může být pro Pb+Pb dosti vysoké číslo. Pro 4.26 pozorujeme menší fluktuace hodnot, což by mohla být známka toho, že je ve funkci  $F_1(\omega)$  část hodnot, která jsou náhodná.



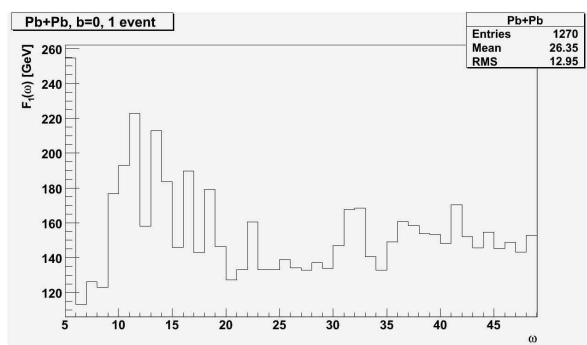
Obrázek 4.21: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event



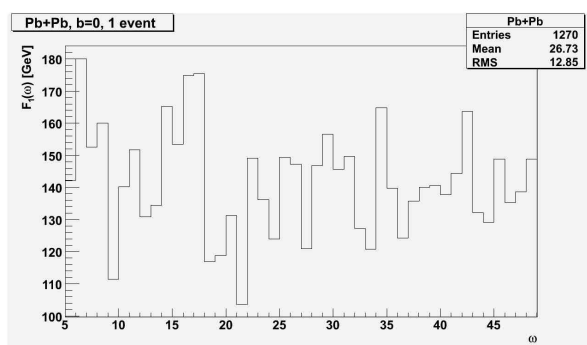
Obrázek 4.22: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event



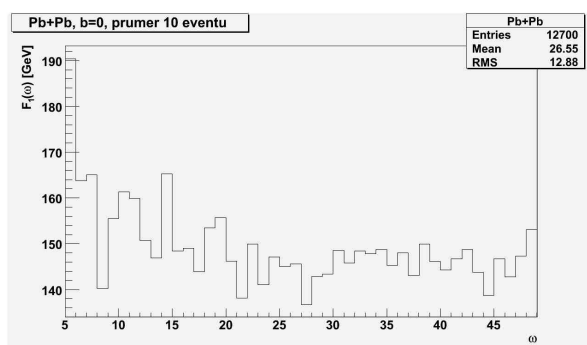
Obrázek 4.23: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, průměr z 10 eventů



Obrázek 4.24: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event

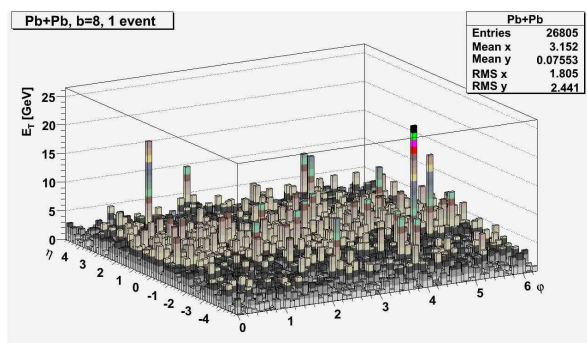


Obrázek 4.25: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event



Obrázek 4.26: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, průměr z transformací 10 eventů

Na obrázcích 4.27 a 4.28 vidíme vybrané eventy pro impaktní parametr  $b = 8$  fm. Na obrázku 4.29 je průměr z 10 eventů. Na obrázcích 4.30 a 4.31 jsou transformace eventů z obrázků 4.27 a 4.28. Na obrázku 4.32 je potom průměr z transformací těch samých 10 eventů, jako jsou obsaženy v obrázku 4.29. Opět v průměru 10 transformací pozorujeme menší fluktuace. Navíc pro impaktní parametr  $b = 8$  fm jsou fluktuace o trochu menší než pro  $b = 0$  fm.

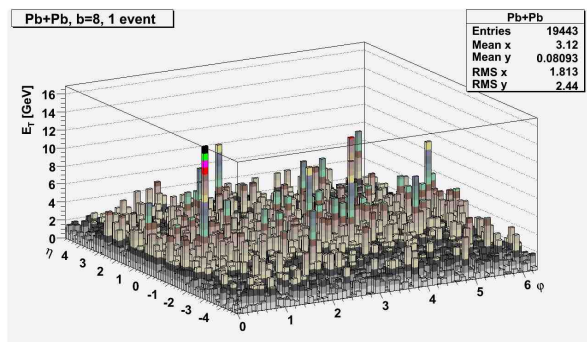


Obrázek 4.27: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, 1 event

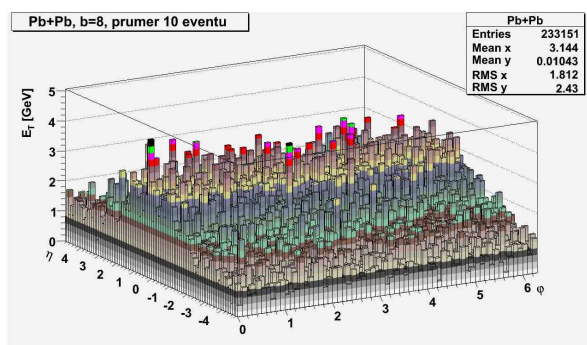
Na obrázku 4.33 je průměr ze 100 transformací pro impaktní parametr 0 až 1 fm. Pozorujeme ještě menší odchylky než v předchozích případech, avšak stále přetrvávají.

Na obrázku 4.34 nalezneme event pro dvojnásobné ztráty partonu v kvark-gluonovém plazmatu. Na obrázku 4.35 je potom jeho transformace. Míra fluktuace je podobná, jako pro transformace 4.24 a 4.25.

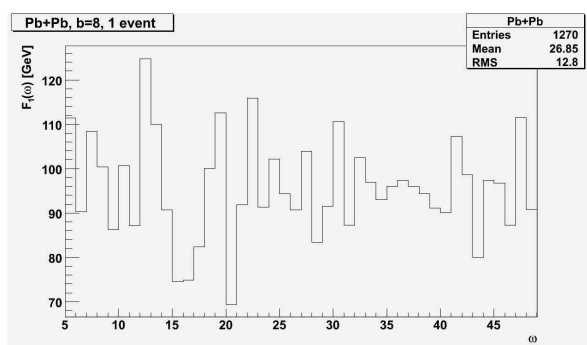
Prozatím nejsme schopni uspokojivě popsat "rozdílnost" jednotlivých transformací. Dělení "fluktuuje hodně"/"fluktuuje málo" je zcela ne-



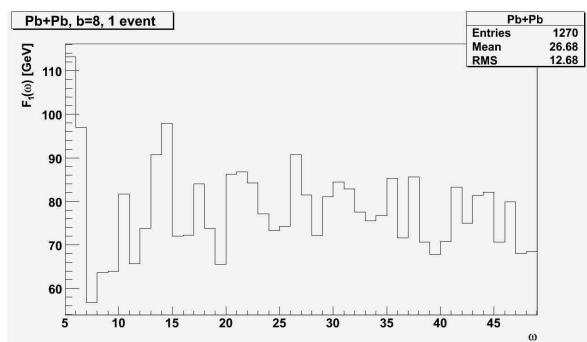
Obrázek 4.28: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, 1 event



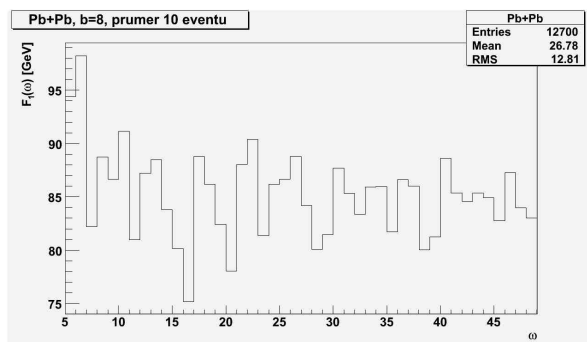
Obrázek 4.29: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, průměr z 10 eventů



Obrázek 4.30: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, 1 event

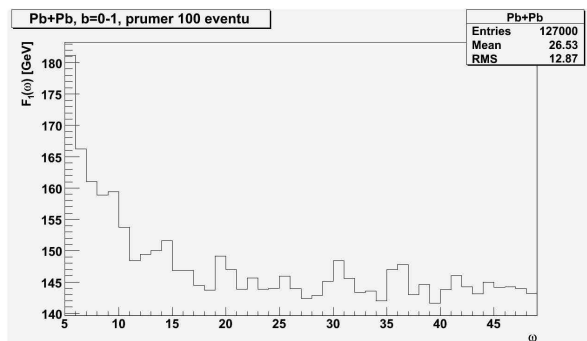


Obrázek 4.31: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, 1 event

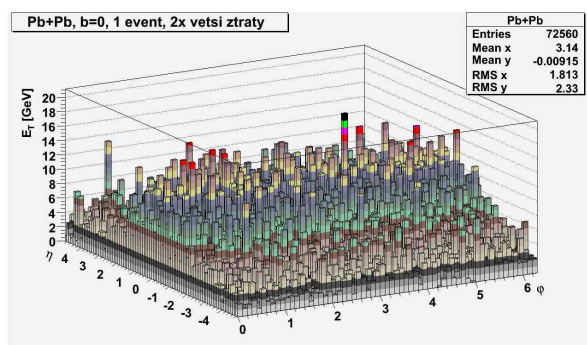


Obrázek 4.32: Pb+Pb srážka pro  $b=8$  fm, průměr z transformací 10 eventů

dostatečné. Otázka popisu získaných transformovaných spekter se zdá být dosti náročná a zůstává otevřeným problémem do budoucna.

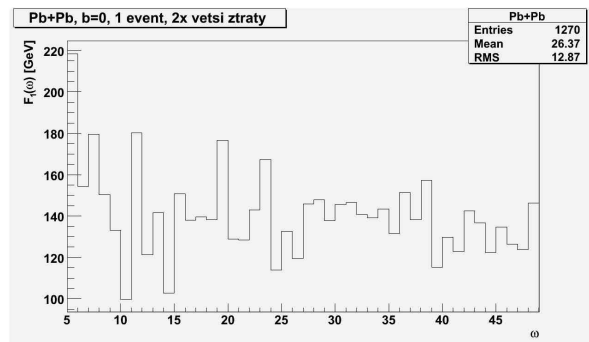


Obrázek 4.33: Pb+Pb srážka pro  $b=0-1$  fm, průměr z transformací 100 eventů



Obrázek 4.34: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event, 2x větší ztráty než obvykle





Obrázek 4.35: Pb+Pb srážka pro  $b=0$  fm, 1 event, 2x větší ztráty než obvykle

# Kapitola 5

## Závěr

V této práci jsme se seznámili simulačními programy Hijing a Pythia. Oba tyto programy se využívají simulacím mnohých problémů současné fyziky, jejich znalost nebude v budoucnu bez užitku. Na několika případech jsme ilustrovali některé z funkcí, které poskytují. Tento výčet nebyl zdaleka úplný, naučit se kompletně i jeden z těchto programů by byla otázka na řadu let.

Také jsme se naučili pracovat v prostředí ROOT. V ROOTu jsme kompletně zpracovávali data – od načtení z výstupních dat simulátorů, přes zpracování až po případné vykreslení histogramu. Nebylo pochopitelně možné využít celý potenciál, který ROOT nabízí. ROOT poskytuje obrovské množství možností a jistě ho čeká ještě dlouhá budoucnost.

Nakonec jsme rozpracovali metodu analýzy Pb+Pb spekter. Výzvou do budoucna je popis ztransformovaných spekter. Bylo by zajímavé tu samou metodu použít pro eventy generované jinými simulátory, ať už založené na stejném modelu jako Hijing nebo na jiném (popisující jádro jako kapalinu apod.), a sledovat, jak se (a zda vůbec) liší charakter fluktuací.

# Literatura

- [1] Xavier Artru: *Classical String Phenomenology. How String Work*, Phys. Rep. **97**, 147 (1983)
- [2] ATLAS Collaboration: *ATLAS Detector and Physics Performance, Technical Design Report, Volume I*, (1999), CERN/LHCC 99-14
- [3] ATLAS Collaboration: *ATLAS Detector and Physics Performance, Technical Design Report, Volume II*, (1999), CERN/LHCC 99-15
- [4] Gerald C. Blazey et al.: *Run II Jet Physics*, (2000), arXiv:hep-ex/0005012 v2
- [5] Miklos Gyulassy, Xin-Nian Wang: *HIJING 1.0: A Monte Carlo Program for Parton and Particle Production in High Energy Hadronic and Nuclear Collisions*,  
<ftp://nta0.lbl.gov/pub/xnwang/hijing/documentation.ps>
- [6] John E. Huth et al.: *Toward a Standardization of Jet Definitions*, (1990),  
<http://lss.fnal.gov/archive/1990/conf/Conf-90-249-E.pdf>
- [7] F. James: *A Review of Pseudorandom Number Generators*, (1988),  
<http://doc.cern.ch//archive/electronic/other/generic/public/cer-000104530.pdf>
- [8] Michael H. Seymour: *Jet Phenomenology*, (1997), arXiv:hep-ph/9707349 v3
- [9] Torbjörn Sjöstrand, Stephen Mrenna, Peter Skands: *PYTHIA 6.4 – Physics and Manual*,  
<http://www.thep.lu.se/~torbjorn/pythia/lutp0613man2.pdf>
- [10] Martin Spousta: *Jet Profiles – diploma thesis*, (2005),  
<http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/~spousta/thesis.pdf>

- [11] Xin-Nian Wang: *Effects of Jet Quenching on High  $p_T$  Hadron Spectra in High-energy Nuclear Collisions*, (1998),  
arXiv:hep-ph/9804357 v3
- [12] <http://map.gsfc.nasa.gov>
- [13] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), *Journal of Physics G* **33**, 1  
(2007),  
<http://pdg.lbl.gov/>

# Dodatek A

## Rapidita

Mějme částici popsanou čtyřhybností  $(E, p_x, p_y, p_z)$  v soustavě S, kterou chceme převést do soustavy S\*, která se pohybuje podél osy  $z$ . V soustavě S\* bude částice popsána čtyřhybností  $(E^*, p_x^*, p_y^*, p_z^*)$ .  $p_x$  i  $p_y$  budou v soustavě S\* stejné, tedy:

$$p_x^* = p_x \quad (\text{A.1})$$

$$p_y^* = p_y \quad (\text{A.2})$$

V následujícím výpočtu je vynecháme. Spočtěme  $E^*$  a  $p_z^*$ :

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\gamma - p_z\gamma\beta \\ -E\gamma\beta + p_z\gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Rapidita  $y'^*$  spočítaná podle (2.2) je:

$$\begin{aligned} y'^* &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E\gamma - p_z\gamma\beta - E\gamma\beta + p_z\gamma}{E\gamma - p_z\gamma\beta + E\gamma\beta - p_z\gamma} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E(1-\beta) + p_z(1-\beta)}{E(1+\beta) - p_z(1+\beta)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z \frac{1-\beta}{1+\beta}}{E - p_z \frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) = y' + \hat{y}' \end{aligned}$$

$\hat{y}'$  závisí pouze na  $\beta$ , tedy na vzájemné rychlosti soustav. Pro dvě částice o různých čtyřhybnostech bude  $\hat{y}'$  stejné. Rozdíl rapidit bude lorentzovsky invariantní:

$$y'_1 - y'_2 = y_1'^* + \hat{y}' - y_2'^* - \hat{y}' = y_1'^* - y_2'^* \quad (\text{A.4})$$

# Dodatek B

## Diskrétní Fourierova transformace

Mějme spojitou dvojdimensionální funkci  $g(x_1, x_2)$ . Její (spojitá) Fourierova transformace je:

$$\mathcal{F}(g(x_1, x_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dx_1 dx_2 = G(y_1, y_2) \quad (\text{B.1})$$

Inverzní Fourierova transformace je:

$$\mathcal{F}^{-1}(G(y_1, y_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y_1, y_2) e^{+2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dy_1 dy_2 = g(x_1, x_2) \quad (\text{B.2})$$

Fourierovu transformaci B.1 lze přibližně zapsat jako:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dx_1 dx_2 \approx \quad (\text{B.3})$$

$$\approx \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g(j\Delta_1, k\Delta_2) e^{-2\pi i(y_1 j\Delta_1 + y_2 k\Delta_2)} \Delta_1 \Delta_2, \quad (\text{B.4})$$

kde jsme spojitou proměnnou  $x_1$  nahradili diskrétní veličinou  $k\Delta_1$ , přičemž  $\Delta_1$  je pevně zvolené číslo, pro  $x_2$  analogicky. Také jsme zanedbali vyšší frekvence v exponenciále.  $N_1$  a  $N_2$  jsou kladná celá čísla natolik velká, aby přibližná rovnost platila uspokojivě. Nyní položíme:

$$y_1 = \frac{n_1}{N_1 \Delta_1}, \quad y_2 = \frac{n_2}{N_2 \Delta_2} \quad (\text{B.5})$$

Fourierovu transformaci pro  $y_1, y_2$  dané (B.5) lze přibližně napsat jako:

$$G\left(\frac{n_1}{N_1\Delta_1}, \frac{n_2}{N_2\Delta_2}\right) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g(j\Delta_1, k\Delta_2) e^{-2\pi i\left(\frac{n_1j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} \Delta_1\Delta_2 \quad (\text{B.6})$$

Nyní označíme:

$$g(j\Delta_1, k\Delta_2) = g_{j,k} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{\Delta_1\Delta_2} G\left(\frac{n_1}{N_1\Delta_1}, \frac{n_2}{N_2\Delta_2}\right) = G_{n_1, n_2} \quad (\text{B.8})$$

Mezi veličinami (B.7) a (B.8) platí vztahy:

$$G_{n_1, n_2} = \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i\left(\frac{n_1j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} \quad (\text{B.9})$$

$$g_{j,k} = \frac{1}{N_1N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G_{n_1, n_2} e^{+2\pi i\left(\frac{n_1j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} \quad (\text{B.10})$$

Pokud bychom pro inverzní Fourierovu transformaci napsali přibližný vztah analogický k (B.4) a vhodně substituovali  $x_1$  a  $x_2$ , dostali bychom rovnici (B.10).

Vidíme, že  $G_{n_1, n_2}$  je  $N_1$ -periodická v první proměnné a  $N_2$ -periodická v druhé proměnné,  $g_{j,k}$  stejně tak. Tato periodičnost plyne z  $2\pi i$ -periodičnosti exponenciály. Například pro  $G_{n_1, n_2}$  v první proměnné platí:

$$G_{n_1+N_1, n_2} = \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i\left(\frac{(n_1+N_1)j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} = \quad (\text{B.11})$$

$$= \underbrace{e^{-2\pi i\frac{N_1j}{N_1}}}_{=1} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i\left(\frac{n_1j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} = G_{n_1, n_2} \quad (\text{B.12})$$

Pokud ve funkci  $g_{j,k}$  místo jednoho konkrétního  $j_0$  vezmeme  $j_0 + N_1$ , výsledek transformace se nezmění za předpokladu, že  $g_{j_0, k} = g_{j_0+N_1, k}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0, j \neq j_0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i\left(\frac{n_1j}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} + \\ & + \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j_0+N_1, k} e^{-2\pi i\left(\frac{n_1(j_0+N_1)}{N_1} + \frac{n_2k}{N_2}\right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0, j \neq j_0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i \left( \frac{n_1 j}{N_1} + \frac{n_2 k}{N_2} \right)} + \\
& + \underbrace{e^{-2\pi i \frac{n_1 N_1}{N_1}}}_{=1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j_0, k} e^{-2\pi i \left( \frac{n_1 j_0}{N_1} + \frac{n_2 k}{N_2} \right)} = \\
& = \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} g_{j,k} e^{-2\pi i \left( \frac{n_1 j}{N_1} + \frac{n_2 k}{N_2} \right)} = G_{n_1, n_2}
\end{aligned}$$

V našem konkrétním problému platí:

$$x_1 \equiv \varphi, \quad x_2 \equiv \eta, \quad n_1 \equiv \omega_1, \quad n_2 \equiv \omega_2 \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta_1 \equiv \varphi_0, \quad \Delta_2 = \eta_0, \quad N_1 \equiv N_\varphi, \quad N_2 \equiv N_\eta \quad (\text{B.14})$$

Funkce  $F(\omega_1, \omega_2)$  je s funkcí  $G(y_1, y_2)$  svázána vztahem:

$$F(\omega_1, \omega_2) \longleftrightarrow G_{n_1, n_2} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} G \left( \frac{n_1}{N_1 \Delta_1}, \frac{n_2}{N_2 \Delta_2} \right) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} G(y_1, y_2), \quad (\text{B.15})$$

kde jsme využili vyjádření pro  $y_1, y_2$  (B.5) a vztahu (B.8).

Funkce  $g(x_1, x_2)$  je analogií funkce  $f(\varphi, \eta)$ . Problém s  $\eta < 0$  vyřešíme dodefinováním funkce  $f(\varphi, \eta)$ :

$$f(\varphi, \eta) := f(\varphi, \eta - 2\eta_{max}) \quad \text{pro } \eta_{max} < \eta < 2\eta_{max} \quad (\text{B.16})$$

Fourierova transformace se nezmění, jak jsme ukázali výše.



# Dodatek C

## Nastavení Pythie a Hijingu

### Pythia:

Pythii lze spouštět přímo z ROOTu jako běžnou knihovnu. Nejdříve bylo třeba deklarovat Pythia simulátor:

```
TPythia6 * gen = new TPythia6;
```

Nastavení částic (dva protony) a jejich těžišťové energie (14000 GeV) jsme provedli pomocí příkazu:

```
gen->Initialize("cms","p","p",14000);
```

Pro produkci  $c\bar{c}$  kvarků bylo třeba provést nastavení:

```
gen->SetMSEL(4);
```

Pro produkci  $b\bar{b}$  kvarků:

```
gen->SetMSEL(5);
```

Pro produkci  $t\bar{t}$  kvarků:

```
gen->SetMSEL(5);
```

Pro produkci  $h^0$  bosonu:

```
gen->SetMSEL(16);
```

Pro produkci  $H^\pm$  bosonu:

```
gen->SetMSEL(23);
```

### Hijing:

Hijing bylo třeba spouštět zvlášť a následně výstup načítat do ROOTu. Pro počáteční inicializaci (těžišťová energie 5500 GeV/pár nuklenů, dvě jádra olova) bylo třeba provést:

```
CALL HIJSET (5500.0, 'CMS', 'A', 'A', 208, 82, 208, 92)
```

Následně jsme nastavili maximální a minimální impaktní parametr  $b$  (ve fm):

BMAX=9.0

BMIN=8.0

Bylo ještě třeba zadat počáteční hodnoty do generátoru pseudonáhodných čísel:

CALL RMARIN(24961,13049)

Pro vypnutí quenchingu:

IHPR2(4)=0

Pro nastavení energetických ztrát v kvark-gluonovém plazmatu (nastavovala se hodnota pro gluony v GeV/fm, pro kvarky byla vždy poloviční):

HIPR1(14)=4.0