Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Hofmanová

Rényiho statistiky pro rozdělení exponenciálního typu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lucie Fajfrová, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd ČR

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

2008

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Lucii Fajfrové, Ph.D. za cenné rady a připomínky a za poskytnutí mnohého materiálu. Dále pak děkuji všem, kteří přispěli ke zkvalitnění celé práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Martina Hofmanová

Obsah

1 Úvod **5**
1.1 Motivace 5
1.2 Cíl práce 5

2 Rényiho divergence pro exponenciální rodiny **6**
2.1 Rényiho divergence 6
2.2 Rozdělení exponenciálního typu 9
2.3 Úloha testování hypotéz 11

3 Rozdělení Rényiho statistik **14**
3.1 Poissonovo rozdělení 14
3.2 Bernoulliho rozdělení 16
3.3 Binomické rozdělení – n známé 18
3.4 Geometrické rozdělení 19
3.5 Negativně-binomické rozdělení – t známé 20
3.6 Exponenciální rozdělení 22
3.7 Gamma rozdělení – p známé 24
3.8 Normální rozdělení – σ^2 známé 25
3.9 Normální rozdělení – μ známé 27

4 Aplikace pro Poissonovo rozdělení **30**

Literatura **34**

Název práce: Rényiho statistiky pro rozdělení exponenciálního typu
Autor: Martina Hofmanová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lucie Fajfrová, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd ČR
E-mail vedoucího: fajfrova@utia.cas.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme Rényiho divergence a jejich použití při testování jednoduché hypotézy při nezávislých pozorováních z daného rozdělení. Pro testování používáme normované Rényiho divergence mezi maximálně věrohodným odhadem a testovanou hodnotou parametru, které se nazývají Rényiho statistiky. V teoretické části shrneme základní definice a věty a představíme exponenciální rodiny rozdělení, se kterými potom budeme dále pracovat v praktické části. Tam v konkrétních případech těchto rozdělení odvodíme explicitní rozdělení Rényiho statistik a nalezneme vzorce vedoucí k výpočtu síly testu. Závěrečná kapitola bude věnována příkladu testování hypotézy o parametru Poissonova rozdělení a srovnání několika různých testů na základě silofunkce spočtené podle vzorců předešlé kapitoly.

Klíčová slova: Rényiho divergence, Rényiho statistiky, exponenciální rodiny, maximálně věrohodný odhad

Title: Rényi statistics for distributions from exponential families
Author: Martina Hofmanová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Lucie Fajfrová, Ph.D., Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic
Supervisor's e-mail address: fajfrova@utia.cas.cz

Abstract: In the present work we study Rényi divergences and their applications in testing simple hypotheses in statistical models with i.i.d. observations. Normed Rényi divergences between maximum likelihood estimate and hypothetical parameter, which are called Rényi statistics, are used for testing. In the theoretic part basic definitions and theorems are summarised and exponential families of distributions introduced. In the practical part explicit distributions of Rényi statistics and analytic formulas for the power of the test in special cases of exponential families are calculated. In the final chapter an example of testing hypothese about parameter of Poisson distribution is established and several different tests with their power functions are compared.

Keywords: Rényi divergences, Rényi statistics, exponential families, maximum likelihood estimate

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Inspirací pro tuto práci byl výzkum v oblasti použití Rényiho statistik při testování hypotéz o parametru rozdělení (viz výzkumná zpráva [fa06]). Jednou z úloh bylo sestavení testovacího algoritmu pro testování jednoduché hypotézy v případě nezávislých pozorování z rozdělení exponenciálního typu.

Za platnosti nulové hypotézy je známé asymptotické rozdělení Rényiho statistik, což bylo také použito pro určení kritického oboru testu. Při zjišťování síly testu však bylo nutné provést simulace z daných rozdělení a výsledkem byl tedy pouze její odhad metodou Monte Carlo. Pokud ale uvažujeme rozdělení z exponenciálních rodin, mají Rényiho divergence jednoduchý tvar. Proto se nabízí otázka, zda by v tomto případě nešlo určit explicitní rozdělení Rényiho statistik a tím také přesně spočítat síly testu.

1.2 Cíl práce

Hlavním cílem této práce bude projít vytipovanou skupinu rozdělení z exponenciální rodiny (Poissonovo, Bernoulliho, binomické, geometrické, negativně-binomické, exponenciální, Gamma, normální) a u každého určit rozdělení Rényiho statistik. Jestliže již budeme znát jejich rozdělení, není problém určit kritický obor testu a najít vzorce pro výpočet síly testu.

Abychom mohli úspěšně pracovat s Rényiho statistikami, je třeba vědět více o chování Rényiho divergencí, od kterých jsou odvozené. Proto je na začátek práce zahrnuta kapitola věnovaná základní teorii Rényiho divergencí, především zaměřená na jejich vlastnosti v exponenciálních rodinách. Závěr této kapitoly je věnován nalezení maximálně věrohodného odhadu parametru pro rozdělení z exponenciálních rodin a zjištění obecného průběhu Rényiho statistik v závilosti na maximálně věrohodném odhadu, což je stěžejní věta pro samotné určování jejich rozdělení.

V další kapitole se pro jednotlivé případy rozdělení z exponenciálních rodin zabýváme vlastním odvozením rozdělení Rényiho statistik a výpočtem síly testu. Vzorově jsou provedeny všechny výpočty u Poissonova rozdělení, což je také možné chápat jako předloha pro další rozdělení, kde se postupuje zcela analogicky. Z tohoto důvodu již u ostatních rozdělení postupujeme o něco rychleji.

Závěrečná kapitola je věnována ukázce použití Rényiho statistik pro testování jednoduché hypotézy proti oboustranné alternativě o parametru Poissonova rozdělení. Pro testování dané hypotézy bylo navrhnuto několik různých testů, které jsme chtěli mezi sebou porovnat. Testy se lišily jak rozsahem náhodného výběru, tak i řádem použité Rényiho divergence. Ve všech případech byl nalezen kritický obor a podle výsledků třetí kapitoly spočteny síly testu pro parametry z okolí testované hodnoty.

Kapitola 2

Rényiho divergence pro exponenciální rodiny

V této kapitole uvedeme nejprve základní informace o Rényiho divergencích, potom se hlouběji zaměříme na divergence pro rozdělení exponenciálního typu a jejich použití při testování hypotéz.

Úmluva. V celém tomto textu bude $\mathfrak{X}$ označovat metrický prostor a $\mathcal{A}$ bude σ-algebra borelovských podmnožin $\mathfrak{X}$.

Pokud bude integrace probíhat přes celý prostor $\mathfrak{X}$, budeme označení prostoru vynechávat, tj. budeme psát $\int f \mathrm{d}\mu$ místo $\int_{\mathfrak{X}} f \mathrm{d}\mu$.

Dále budeme uvažovat sloupcové vektory a $'$ bude značit transpozici.

2.1 Rényiho divergence

Rényiho divergence získaly jméno podle svého autora Alfréda Rényiho, který je roku 1961 popsal v článku [re61]. Rényi definoval divergence pro řády $r > 0$ a odvodil jejich základní vlastnosti. Dále se touto problematikou zabývala dvojice matematiků Fridrich Liese a Igor Vajda, kteří shrnuli své závěry v knize [lv87]. Nezabývali se však pouze Rényiho divergencemi, ale hlavní přínos jejich práce spočíval ve vybudování teorie obecných f-divergencí pro konvexní funkci f reálné proměnné. Pro tyto divergence také odvodili řadu jejich důležitých vlastností, např. větu o oboru hodnot, větu o symetrii, větu o monotonii, větu o izomorfismu a další. Samotné Rényiho divergence zde byly definovány jako speciální případ f-divergencí, což mělo dva hlavní důsledky. Jednak došlo k jejich určitému zobecnění, a proto bylo možné je rozšířit na všechny reálné řády $r \in \mathbb{R}$. Dále mnoho jejich vlastností vyplynulo z vět již dokázaných pro f-divergence.

Protože úkolem této práce nebude studium obecných f-divergencí, definujeme Rényiho divergence ekvivalentně, ale bez využití předchozí teorie f-divergencí. Pro ucelenost textu také dokážeme přímo některé jejich zajímavé a důležité vlastnosti.

Definice 2.1.1. Nechť P, P_0 jsou navzájem ekvivalentní pravděpodobnostní míry na $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$, které jsou absolutně spojité vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ na $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Označme

$$f = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}, \qquad f_0 = \frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}\mu}$$

jejich Radon-Nikodýmovy derivace podle míry μ. Nechť $r \in \mathbb{R}$. Definujeme zobecněné Rényiho

divergence řádu r předpisem:

$$D_r(P,P_0) = \frac{1}{r(r-1)} \log \int_M f^r f_0^{1-r}\,\mathrm{d}\mu, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \tag{2.1}$$

$$D_1(P,P_0) = \int_M f \log \frac{f}{f_0}\,\mathrm{d}\mu, \tag{2.2}$$

$$D_0(P,P_0) = D_1(P_0,P), \tag{2.3}$$

přičemž integrace probíhá množinu $M = \{x \in \mathfrak{X};\ f(x)f_0(x) > 0\}$.

Poznámka 2.1.2. Obecně je možné definovat Rényiho divergence i pro pravděpodobnostní míry, které nejsou navzájem ekvivalentní. Jedná se o rozšíření spíše technického rázu, protože ve většině případů neekvivalentních měr Rényiho divergence stejně vycházejí ∞. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme na knihu [lv87].

Úmluva. Dále bude P a P_0 vždy označovat pravděpodobnostní míry splňující předpoklady definice 2.1.1.

Snadným důsledkem definice 2.1.1 je křížová symetrie Rényiho divergencí, kterou ukazuje následující lemma.

Lemma 2.1.3. *Nechť pro $r \in \mathbb{R}$ jsou $D_r(P,P_0)$ definovány vzorci* (2.1), (2.2), (2.3). *Potom pro všechna $r \in \mathbb{R}$ platí*

$$D_r(P,P_0) = D_{1-r}(P_0,P).$$

Důsledek 2.1.4. *Jediná Rényiho divergence, která je symetrická v pravém slova smyslu je divergence řádu $r = \frac{1}{2}$.*

Poznámka 2.1.5. Rényiho divergence řádu $r = \frac{1}{2}$ je také známá pod názvem Bhattacharyyova vzdálenost a můžeme se o ní více dočíst v článku [bh46]. Dalšími známými představiteli třídy Rényiho divergencí jsou tzv. Kullbackova a převrácená Kullbackova vzdálenost, které odpovídají $D_1(P,P_0)$ a $D_0(P,P_0)$. Informace o nich nalezneme v [kl51].

Věta 2.1.6. *Nechť $r \in \mathbb{R}$ a nechť Rényiho divergence jsou definovány vzorci* (2.1), (2.2), (2.3). *Označíme-li*

$$\alpha = \inf\{r \in \mathbb{R};\ \int_M f^r f_0^{1-r}\mathrm{d}\mu < \infty\}, \quad \beta = \sup\{r \in \mathbb{R};\ \int_M f^r f_0^{1-r}\mathrm{d}\mu < \infty\},$$

potom $D_r(P,\,P_0)$ jakožto funkce proměnné r jsou spojité na intervalu $[\alpha,\beta]$.

Důkaz. Protože pro všechna $r \in (0,1)$ jsou $\frac{1}{r}$ a $\frac{1}{1-r}$ sdružené exponenty, tj. platí $\frac{1}{\frac{1}{r}} + \frac{1}{\frac{1}{1-r}} = 1$, můžeme použít Hőlderovu nerovnost:

$$0 \le \int_M f^r f_0^{1-r}\mathrm{d}\mu \le \left(\int_M f\mathrm{d}\mu\right)^r \left(\int_M f_0\mathrm{d}\mu\right)^{1-r} \le 1. \tag{2.4}$$

Z toho plyne, že $\alpha \le 0$ a $\beta \ge 1$ a s ohledem na definici 2.1.1 a symetrii Rényiho divergencí dokázanou v lemmatu 2.1.3 stačí ukázat spojitost $D_r(P,\,P_0)$ v bodě $r = 1$, tedy ověřit platnost limity

$$\lim_{r\to 1} D_r(P,P_0) = D_1(P,P_0).$$

Podle (2.1) je levá strana tohoto výrazu rovna

$$\lim_{r\to 1} \frac{\log \int_M f^r f_0^{1-r}\mathrm{d}\mu}{r(r-1)},$$

což je limita typu $\frac{0}{0}$. Aplikací l'Hospitalova pravidla, tj. derivací čitatele i jmenovatele podle r, získáme výraz

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{\int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu}{2r-1}.$$

Nechť $\mathcal{P}(1,\varepsilon)$ značí prstencové okolí bodu 1 o poloměru ε. Aby bylo možné provést záměnu derivce a integrálu, je třeba podle Lebesgueovy věty najít pro nějaké $\varepsilon > 0$ a pro všechna $r \in \mathcal{P}(1,\varepsilon)$ integrovatelnou majorantu funkcí $f^r f_0^{1-r}$.

(i) Nechť $\beta = 1$, potom hledáme majorantu pouze pro $r \in (0,1)$. Protože funkce log je konkávní, máme pro všechna $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} r\log(x) + (1-r)\log(y) &\leq \log\big(rx + (1-r)y\big) \\ \log\left(x^r y^{1-r}\right) &\leq \log\big(rx + (1-r)y\big) \\ x^r y^{1-r} &\leq rx + (1-r)y \\ x^r y^{1-r} &\leq x + y \end{aligned}$$

Proto za majorantu zvolíme funkci $f + f_0$.

(ii) Nechť $\beta > 1$. Nechť $\varepsilon \in (0,1)$ tak, že $1 + \varepsilon < \beta$. Potom existují konstanty $a, b > 0$ tak, že pro všechna $r \in \mathcal{P}(1,\varepsilon)$ a všechna $x > 0$ platí $x^r \leq a + bx^{1+\varepsilon}$. V tomto případě proto bude majorantou funkce $\left(a + b\left(\frac{f}{f_0}\right)^{1+\varepsilon}\right) f_0$.

Nyní pro oba případy společně zaměníme derivaci a integrál a výraz dále upravíme. Poznamenejme, že pro případ $\beta = 1$ počítáme pouze limitu zleva.

$$\lim_{r\to 1} \frac{\int_M f^r \log(f) f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu - \int_M f^r f_0^{1-r} \log(f_0) \mathrm{d}\mu}{(2r-1)\int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu} = \lim_{r\to 1} \frac{\int_M f^r f_0^{1-r} \log\left(\frac{f}{f_0}\right) \mathrm{d}\mu}{(2r-1)\int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu}.$$

Provedením limity na pravé straně rovnosti získáváme vzorec (2.2) a tvrzení je dokázáno. □

Věta 2.1.7. *Nechť $r \in \mathbb{R}$ a nechť Rényiho divergence jsou definovány vzorci* (2.1), (2.2), (2.3). *Potom pro všechna $r \in \mathbb{R}$ platí*

$$0 \leq D_r(P, P_0).$$

Rovnosti je dosaženo, jestliže $P = P_0$.

Důkaz. Nechť $r \in (0,1)$. Potom $\frac{1}{r(r-1)} < 0$ a vzhledem k nerovnosti (2.4) je i

$$\log \int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu \leq 0,$$

což dává tvrzení věty.
Nechť $r > 1$. Potom $\frac{1}{r(r-1)} > 0$ a zbývá ukázat, že $\log \int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu \geq 0$, neboli

$$\int_M f^r f_0^{1-r} \mathrm{d}\mu \geq 1.$$

Nechť $s > 1$ je sdružený argument k r. Opět využijeme Hőlderovu nerovnost, tentokrát na prostoru s mírou $f_0 \,\mathrm{d}\mu$:

$$1 = \int_M f \,\mathrm{d}\mu = \int_M \frac{f}{f_0} f_0 \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_M \left(\frac{f}{f_0}\right)^r f_0 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_M f_0 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Nechť $r < 0$. Potom $1 - r > 1$ a tvrzení plyne z předchozí části důkazu a lemmatu 2.1.3.

Protože $D_1(P, P_0) = \lim_{r\to 1} D_r(P, P_0)$ a $D_0(P, P_0) = \lim_{r\to 0} D_r(P, P_0)$ podle věty 2.1.6, máme požadovanou nerovnost i pro $r = 1$ a $r = 0$.

Jestliže $P = P_0$, potom $f(x) = f_0(x)$ pro všechna $x \in \mathfrak{X}$ a dosazením do (2.1), (2.2), (2.3) snadno ověříme nulovost divergencí. □

Pro úplnou představu o oboru hodnot Rényiho divergencí uvedeme bez důkazu následující větu, která je jedním z důsledků již zmiňované věty o oboru hodnot obecných f-divergencí z knihy [lv87].

Věta 2.1.8. *Nechť $r \in \mathbb{R}$ a nechť Rényiho divergence jsou definovány vzorci* (2.1), (2.2), (2.3). *Potom platí:*

(i) Pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je $D_r(P, P_0) \in [0, \infty)$, přičemž všech hodnot z tohoto intervalu se nabývá.

(ii) Pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je $D_r(P, P_0) = 0$, právě když $P = P_0$.

2.2 Rozdělení exponenciálního typu

Mnoho ve statistice nejčastěji používaných rozdělení patří do tzv. exponenciální rodiny, poprvé představené v [fi34]. Z diskrétních jsou to např.: Bernoulliho, binomické, Poissonovo a negativně-binomické. Ze spojitých např.: exponenciální, normální, Gamma, Beta, Weibullovo, Reyleighovo, Paretovo, χ^2 nebo Dirichletovo.

Definice 2.2.1. Nechť $\{P_\theta\,;\ \theta \in \Theta\}$ je systém pravděpodobnostních měr na $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ indexovaných parametrem $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Nechť existuje σ-konečná míra μ na $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ tak, že pro všechna $\theta \in \Theta$ je P_θ absolutně spojitá vzhledem k μ. Označme $f(x, \theta) = \frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}\mu}$ Radon-Nikodýmovu derivaci míry P_θ podle μ. Řekneme, že $\{P_\theta\,;\ \theta \in \Theta\}$ je přirozená exponenciální rodina, jestliže existuje měřitelné zobrazení $T : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^d$ a funkce $\kappa : \Theta \to \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x, \theta) = \exp\{\theta' T(x) - \kappa(\theta)\}, \quad \text{kde } x \in \mathfrak{X},\ \theta \in \Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^d;\ \int \exp\{\theta' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x) < \infty\}. \tag{2.5}$$

Úmluva. V tomto textu budeme uvažovat pouze přirozené exponenciální rodiny, proto budeme slovo přirozené vynechávat.

Vlastnosti exponenciálních rodin jsou popsány např. v knize [br86], proto zde zopakujeme pouze ty nejdůležitější.

Lemma 2.2.2. *Za předpokladů definice* 2.2.1 *a při označení $c(\theta) = \int \exp\{\theta' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x)$ platí:*

(i) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^d\,;\ c(\theta) < \infty\}$ je konvexní množina,

(ii) $\kappa(\theta) = \log c(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$,

(iii) κ je konvexní funkce.

Důkaz. (i) Nechť $a \in (0, 1)$, potom $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{1-a}$ jsou sdružené exponenty. Nechť $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, potom podle Hőlderovy nerovnosti dostáváme:

$$\begin{aligned}
&\int \exp\{\big(a\theta_1 + (1-a)\theta_2\big)' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x) \\
&\qquad = \int \exp\{a\theta_1' T(x)\} \exp\{(1-a)\theta_2' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x) \\
&\qquad \le \left(\int \exp\{\theta_1' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x)\right)^a \left(\int \exp\{\theta_2' T(x)\}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-a}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

tedy $c\big(a\theta_1 + (1-a)\theta_2\big) \le c(\theta_1)^a c(\theta_2)^{1-a} < \infty$ a Θ je konvexní množina.

(ii) Podle definice 2.2.1 je $f(x,\theta) = \exp\{\theta' T(x) - \kappa(\theta)\}$, a proto

$$\exp\{\kappa(\theta)\} f(x,\theta) = \exp\{\theta' T(x)\}.$$

Nyní obě strany rovnosti vyintegrujeme přes $\mathfrak{X}$:

$$\exp\{\kappa(\theta)\} = \int \exp\{\theta' T(x)\} \mathrm{d}\mu(x) = c(\theta),$$

odkud plyne požadovaný vztah.

(iii) Přepisem nerovnosti (2.6) získáváme:

$$c\big(a\theta_1 + (1-a)\theta_2\big) \leq (c(\theta_1))^a \, (c(\theta_2))^{1-a}.$$

Aplikujeme-li na obě strany nerovnosti funkci log dostaneme, že $\kappa = \log c$ je konvexní funkce na Θ.

□

Rozdělení z exponenciální rodiny mají mnohé velmi příjemné matematické vlastnosti a jak bylo ukázáno v [lv87], i v případě Rényiho divergencí dochází ke značnému zjednodušení.

Věta 2.2.3. *Nechť θ_1, $\theta_2 \in \Theta$. Potom Rényiho divergence měr P_{θ_1}, P_{θ_2} z exponenciální rodiny s hustotou danou předpisem* (2.5) *lze vyjádřit:*

$$D_r(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \begin{cases} \frac{1}{r(r-1)} \left[\kappa\big(r\theta_1 + (1-r)\theta_2\big) - r\kappa(\theta_1) - (1-r)\kappa(\theta_2)\right] & \\ & \textit{je-li } \ r\theta_1 + (1-r)\theta_2 \in \Theta, \\ \infty & \textit{jinak,} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$D_1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \kappa'(\theta_1)(\theta_1 - \theta_2) - \kappa(\theta_1) + \kappa(\theta_2), \tag{2.8}$$

$$D_0(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \kappa'(\theta_2)(\theta_2 - \theta_1) - \kappa(\theta_2) + \kappa(\theta_1). \tag{2.9}$$

Důkaz. Podle výsledků předchozího lemmatu je $\kappa(\theta) = \log c(\theta)$, proto vzorec (2.5) můžeme ekvivalentně zapsat jako $f(x,\theta) = \frac{1}{c(\theta)} \exp\{\theta' T(x)\}$.
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, potom dosazením do (2.1) dostáváme:

$$D_r(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) = \frac{1}{r(r-1)} \log\left[\frac{1}{c(\theta_1)^r c(\theta_2)^{1-r}} \int \exp\{r\theta_0' T(x) + (1-r)\theta_1' T(x)\} \mathrm{d}\mu(x)\right] =$$

Pokud $r\theta_1 + (1-r)\theta_2 \notin \Theta$, pak integrál na pravé straně rovnosti má hodnotu ∞, jinak

$$= \frac{1}{r(r-1)} \log\left[\frac{c\big(r\theta_1 + (1-r)\theta_2\big)}{c(\theta_1)^r c(\theta_2)^{1-r}}\right] =$$

$$= \frac{1}{r(r-1)} \left[\kappa\big(r\theta_1 + (1-r)\theta_2\big) - r\kappa(\theta_1) - (1-r)\kappa(\theta_2)\right].$$

Pro $r = 1$ použijeme (2.2):

$$\begin{aligned} D_1(P_{\theta_1}, P_{\theta_2}) &= \int \frac{\exp\{\theta_1' T(x)\}}{c(\theta_1)} \log\left[\frac{\frac{1}{c(\theta_1)} \exp\{\theta_1' T(x)\}}{\frac{1}{c(\theta_2)} \exp\{\theta_2' T(x)\}}\right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \frac{1}{c(\theta_1)} \int \exp\{\theta_1' T(x)\} \left[\kappa(\theta_2) - \kappa(\theta_1) + \theta_1' T(x) - \theta_2' T(x)\right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \kappa(\theta_2) - \kappa(\theta_1) + \frac{1}{c(\theta_1)} \int \exp\{\theta_1' T(x)\} (\theta_1 - \theta_2)' T(x) \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \kappa(\theta_2) - \kappa(\theta_1) + \frac{c'(\theta_1)}{c(\theta_1)} (\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \kappa(\theta_2) - \kappa(\theta_1) + \kappa'(\theta_1)(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Rovnost pro $D_0(P_{\theta_1}, P_{\theta_2})$ snadno plyne z definice (2.3) a z předchozí části důkazu. □

Úmluva. Pro zjednodušení dalšího textu budeme Rényiho divergence značit $D_r(\theta_1, \theta_2)$ místo $D_r(P_{\theta_1}, P_{\theta_2})$.

2.3 Úloha testování hypotéz

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení exponenciálního typu určeného hustotou (2.5), můžeme s výhodou použít Rényiho divergence pro testování jednoduché hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti oboustranné alternativě $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Nejprve najdeme na základě dat maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ a sestavíme testovou statistiku

$$\tilde{D}_{r,n} = 2nD_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big),\ r \in \mathbb{R}.$$

Pro určení kritického oboru je stěžejní následující věta, která byla v obecnějším tvaru formulovaná a dokázaná v [mpv97]. Zde uvedeme bez důkazu pouze její speciální případ.

Věta 2.3.1. *Nechť $\{P_\theta\,;\ \theta \in \Theta\}$ je přirozená exponenciální rodina s hustotami $\{f_\theta\,;\ \theta \in \Theta\}$, kde $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, minimální ve smyslu [br86]. Potom za předpokladu platnosti nulové hypotézy $H_0 :\ \theta = \theta_0$ Rényiho statistika*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2nD_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big)$$

konverguje pro $n \to \infty$ v distribuci k náhodné veličině, která má rozdělení χ^2 s d stupni volnosti.

Díky této větě známe asymptotické rozdělení Rényiho statistik, a proto k nalezení kritického oboru testu na hladině α můžeme použít $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení χ^2_d.

Jak je ukázáno ve větě 2.2.3, Rényiho divergence pro rozdělení exponenciálního typu mají mnohem jednodušší tvar. Proto je možné určit explicitní rozdělení Rényiho statistik a tím také přesně najít kritický obor.

Rényiho statistika $\tilde{D}_{r,n}$ je funkcí maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$, což je náhodná veličina závislá na parametru θ. Aby bylo vůbec možné určit její rozdělení, potřebujeme znát rozdělení $\hat{\theta}_n$.

Další věta ukazuje, jak vypadá maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ pro exponenciální rodiny s jednorozměrným parametrem θ.

Poznámka 2.3.2. Maximálně věrohodný odhad nemusí vždy existovat. V knize [br86] nalezneme nutnou a postačující podmínka pro jeho existenci skoro jistě. Nutno však dodat, že tato podmínka nemusí být splněna ani v řadě běžných rozděleních exponenciálního typu. V literatuře se tyto problémy řeší několika způsoby, které ale nemohou být diskutovány v této práci, proto zájemce odkázujeme na příslušnou literaturu. My se zde omezíme pouze na případy, kdy maximálně věrohodný odhad existuje, i když to již nebudeme dále explicitně zmiňovat.

Věta 2.3.3. *Nechť $d = 1$ a nechť Θ, T a κ jsou definovány jako v 2.2.1. Nechť dále $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení exponenciálního typu s hustotou určenou vzorcem (2.5). Potom maximálně věrohodný odhad parametru θ je*

$$\hat{\theta}_n = (\kappa')^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i)\right).$$

Důkaz. Protože náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, platí pro jejich sdruženou hustotu

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \exp\{\theta T(x_i) - \kappa(\theta)\} = \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - n\kappa(\theta)\right\}.$$

Nyní přejdeme k ekvivalentní úloze maximalizovat funkci $L(\theta) = \log f(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, kterou nazýváme logaritmická věrohodnostní funkce. Maximálně věrohodný odhad nalezneme jako argument maxima této funkce, tj. $\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \log f(x_1, \ldots, x_n, \theta)$.

Z článku [mpv97] se dozvíme, že pro všechna $\theta \in \Theta$ je funkce κ nekonečně diferencovatelná a můžeme proto hledat maximum pomocí derivace funkce $L(\theta)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} L(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\theta \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - n\kappa(\theta)\right] = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - n\kappa'(\theta).$$

Položíme-li poslední výraz roven 0, dostaneme

$$\kappa'(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i). \tag{2.10}$$

Stejný článek [mpv97] nám také říká, že $(\kappa')^{-1}$ existuje na Θ a že rovnice (2.10) má jediné řešení, kterým je hledané maximum. □

Díky této větě můžeme říci, že se stačí zabývat pouze rozdělením náhodné veličiny

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} T(X_i).$$

U jednodušších rozdělení se většinou jedná o náhodnou veličinu tvaru $\sum_{i=1}^{n} X_i$, jejíž rozdělení je známé.

Nechť tedy $\xi = \sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ je náhodná veličina se známým rozdělením. Dále nás pro určení kritického oboru bude zajímat, jaký je obecný průběh Rényiho statistik jakožto funkcí proměnné ξ. Nejprve si však uvědomme, jaký je jejich průběh v závislosti na proměnné $\hat{\theta}_n$.

Věta 2.3.4. *Nechť $d = 1$ a nechť Θ, T a κ jsou definovány jako v 2.2.1. Nechť dále $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení exponenciálního typu s hustotou (2.5). Potom pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je Rényiho statistika $\tilde{D}_{r,n}$ funkcí proměnné $\hat{\theta}_n$, která je nerostoucí pro $\hat{\theta}_n \leq \theta_0$, neklesající pro $\hat{\theta}_n \geq \theta_0$ a v bodě $\hat{\theta}_n = \theta_0$ nabývá svého globálního minima.*

Důkaz. Protože $\tilde{D}_{r,n} = 2nD_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big)$, plyne z věty 2.1.8, že pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je oborem hodnot Rényiho statistik interval $[0, \infty]$. Ze stejné věty také vyplývá, že $\tilde{D}_{r,n} = 0$, právě když $\hat{\theta}_n = \theta_0$, tudíž tento bod je globálním minimem.

Zbývá vyšetřit monotonii $\tilde{D}_{r,n}$, což je ekvivalentní monotonii $D_r\big(\,.\,, \theta_0\big)$. Již bylo řečeno v důkazu věty 2.3.3, že funkce κ je nekonečně diferencovatelná. Dále podle lemmatu 2.2.2 je κ konvexní, tedy κ' je neklesající.

Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ a nechť $r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0 \in \Theta$. Podle vzorce (2.7) má Rényiho divergence řádu r pro $\hat{\theta}_n$ a θ_0 tvar:

$$D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \frac{1}{r(r-1)}\left[\kappa\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) - r\kappa(\hat{\theta}_n) - (1-r)\kappa(\theta_0)\right].$$

Zderivujme tento výraz podle $\hat{\theta}_n$:

$$D_r'\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \frac{1}{r-1}\left[\kappa'\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) - \kappa'(\hat{\theta}_n)\right].$$

(i) Nechť $r > 1$, potom $\frac{1}{r-1} > 0$ a postupnými úpravami získáme

$$\begin{aligned}
\kappa'\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) - \kappa'(\hat{\theta}_n) &\geq 0 \\
\kappa'\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) &\geq \kappa'(\hat{\theta}_n) \\
r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0 &\geq \hat{\theta}_n \\
(1-r)\theta_0 &\geq (1-r)\hat{\theta}_n \\
\theta_0 &\leq \hat{\theta}_n.
\end{aligned}$$

Proto $D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big)$ je neklesající funkcí pro $\hat{\theta}_n \geq \theta_0$. Pokud bychom v předchozím výpočtu obrátili první nerovnost, dojdeme stejnými úpravami k požadované monotonii funkce $D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big)$ pro $\hat{\theta}_n \leq \theta_0$.

(ii) Nechť $r < 1$, potom $\frac{1}{r-1} < 0$ a obdobnými úpravami jako v důkazu (i) vyjde dokazované tvrzení.

Nechť $r = 1$, potom $D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \kappa'(\hat{\theta}_n)\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) + \kappa(\theta_0) - \kappa(\hat{\theta}_n)$ a derivace je

$$D_1'\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \kappa'(\hat{\theta}_n)\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) + \kappa'(\hat{\theta}_n) - \kappa'(\hat{\theta}_n) = \kappa'(\hat{\theta}_n)\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big).$$

Protože výraz na pravé straně je nezáporný, právě když $\hat{\theta}_n \geq \theta_0$, je $D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big)$ neklesající právě pro tato $\hat{\theta}_n$ a nerostoucí pro $\hat{\theta}_n \leq \theta_0$.
Nechť $r = 0$, potom $D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \kappa'(\theta_0)\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) + \kappa(\hat{\theta}_n) - \kappa(\theta_0)$ a derivace je

$$D_0'\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = -\kappa'(\theta_0) + \kappa'(\hat{\theta}_n),$$

což je nezáporné, právě když $\hat{\theta}_n \geq \theta_0$, tedy i Rényiho divergence řádu $r = 0$ je neklesající pro $\hat{\theta}_n \geq \theta_0$ a nerostoucí pro ostatní $\hat{\theta}_n$. □

Důsledek 2.3.5. *Nechť $d = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení exponenciálního typu s hustotou* (2.5). *Potom pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je Rényiho statistika $\tilde{D}_{r,n}$ funkcí proměnné ξ, která je nerostoucí pro $\xi \leq n\kappa'(\theta_0)$, neklesající pro $\xi \geq n\kappa'(\theta_0)$ a v bodě $\xi = n\kappa'(\theta_0)$ nabývá svého globálního minima.*

Důkaz. Podle věty 2.3.3 platí rovnost $\hat{\theta}_n = (\kappa')^{-1}\left(\frac{1}{n}\xi\right)$, kde κ' je neklesající funkcí. Proto i $(\kappa')^{-1}$ je neklesající a $\hat{\theta}_n$ je neklesající funkcí proměnné ξ. Budeme-li nyní chápat $\tilde{D}_{r,n}$ jako funkci složenou, je monotonie z minulé věty zachována. Zbývá určit bod globálního minima, který získáme snadnou úpravou výrazu $(\kappa')^{-1}\left(\frac{1}{n}\xi\right) = \theta_0$. □

Kapitola 3

Rozdělení Rényiho statistik

Pro vybrané exponenciální rodiny odvodíme v této kapitole rozdělení Rényiho statistik a najdeme vzorce pro výpočet síly testu. Vybírali jsme pouze takové rodiny, u kterých známe rozdělení statistiky ξ definované výše. U Poissonova rozdělení provedeme podrobný výpočet se všemi zdůvodněními, u ostatních rozdělení jsou úvahy zcela analogické, proto již budeme postupovat rychleji.

3.1 Poissonovo rozdělení

Lemma 3.1.1. *Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Označíme-li $\theta = \log \lambda$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x, \theta) = \exp\{\theta x - \exp\{\theta\}\}, \qquad x = 0, 1, \dots, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

vzhledem k aritmetické míře přenásobené elementem $\frac{1}{x!}$.

Dále pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Důkaz. Nechť $x \in \{0, 1, \dots\}$, upravíme vzorec pro hustotu Poissonova rozdělení

$$f(x, \lambda) = \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^x}{x!} = \exp\{x \log \lambda - \lambda\}\frac{1}{x!}$$

a zavedením substituce $\theta = \log \lambda$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Tím jsme odvodili, že $\kappa(\theta) = \exp\{\theta\}$ a věta 2.3.3 dává maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$. □

Dále již budeme uvažovat Poissonovo rozdělení s hustotou v exponenciálním tvaru a parametrem e^θ odpovídajícím parametru λ.

Věta 3.1.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem e^θ. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s Poissonovým rozdělením s parametrem $n\mathrm{e}^\theta$ a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) + \frac{\mathrm{e}^{\theta_0}}{r}\right), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}}{r(r-1)}\left(\frac{\xi}{n}\right)^r - \frac{\xi}{n(r-1)},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n\left(t_1(\xi) + \mathrm{e}^{\theta_0}\right), \quad \textit{kde } t_1(\xi) = \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n}\right) - \theta_0 - 1\right),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\left(t_0(\xi) + \mathrm{e}^{\theta_0}(\theta_0 - 1)\right), \quad \textit{kde } t_0(\xi) = \frac{\xi}{n} - \mathrm{e}^{\theta_0}\log\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem e^θ, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ Poissonovo rozdělení s parametrem $n\mathrm{e}^\theta$.
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = \mathrm{e}^\theta$, $\kappa'(\theta) = \mathrm{e}^\theta$, $\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\xi}{n}\right)$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned} D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)}\left[\mathrm{e}^{r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0} - r\mathrm{e}^{\hat{\theta}_n} - (1-r)\mathrm{e}^{\theta_0}\right] = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}}{r(r-1)}\left(\frac{\xi}{n}\right)^r - \frac{\xi}{n(r-1)} + \frac{\mathrm{e}^{\theta_0}}{r}. \end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned} D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) - \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n} + \mathrm{e}^{\theta_0} = \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n}\right) - \theta_0\right) - \frac{\xi}{n} + \mathrm{e}^{\theta_0} = \\ &= \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n}\right) - \theta_0 - 1\right) + \mathrm{e}^{\theta_0}. \end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \mathrm{e}^{\theta_0}\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) - \mathrm{e}^{\theta_0} + \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n} = \frac{\xi}{n} - \mathrm{e}^{\theta_0}\log\left(\frac{\xi}{n}\right) + \mathrm{e}^{\theta_0}(\theta_0 - 1).$$

Nyní stačí uvážit, že $\tilde{D}_{r,n} = 2nD_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big), \quad r \in \mathbb{R}$. □

Protože $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ má Poissonovo rozdělení, může nabývat všech hodnot z množiny $\mathbb{N}_0$. Podívejme se na chování Rényiho statistik v krajních bodech tohoto definičního oboru. K tomu stačí vyšetřit chování transformací t_r, $r \in \mathbb{R}$.

Pozorování 3.1.3. *Nechť t_r, $r \in \mathbb{R}$ jsou definovány jako ve větě 3.1.2. Potom pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je*

$$\lim_{\xi \to \infty} t_r(\xi) = \infty.$$

Dále platí

$$\lim_{\xi \to 0_+} t_r(\xi) = 0 \quad \textit{pro } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \lim_{\xi \to 0_+} t_0(\xi) = \infty.$$

Podle věty 2.1.8 je $\tilde{D}_{r,n} = 2nD_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = 0$, právě když $\hat{\theta}_n = \theta_0$. Uvážíme-li navíc průběh Rényiho statistiky v závislosti na $\hat{\theta}_n$, je zřejmé, že pro "malé" hodnoty $\tilde{D}_{r,n}$ nebudeme hypotézu H_0 zamítat.

Pro danou hladinu testu α tedy hledáme $c_\alpha > 0$ tak, aby $P(\tilde{D}_{r,n} \le c_\alpha | \theta = \theta_0) \ge 1 - \alpha$, čímž máme určený kritický obor $W = \{\tilde{D}_{r,n} > c_\alpha\}$. Kdybychom použili fakt, že za platnosti nulové hypotézy má $\tilde{D}_{r,n}$ asymptoticky χ_1^2 rozdělení, zvolíme $c_\alpha = (\chi_1^2)^{-1}(1-\alpha)$. My však víme, že $\tilde{D}_{r,n}$ je také funkcí náhodné veličiny ξ s Poissonovým rozdělením s parametrem $n\mathrm{e}^{\theta_0}$. Proto můžeme ekvivalentně určit kritický obor pomocí čísel a_α, b_α takových, že

$$0 \le a_\alpha < n\mathrm{e}^{\theta_0} < b_\alpha < \infty,$$

$$P\big(\xi \in (a_\alpha, b_\alpha) | \theta = \theta_0\big) \ge 1 - \alpha, \qquad t_r(a_\alpha) = t_r(b_\alpha).$$

Jak jsme ale viděli v předcházejícím lemmatu, nemusí být funkce t_r v pravém okolí 0 vždy neomezená, a proto takováto a_α, b_α obecně nemusí existovat. Pokud tomu tak nebude, položíme $a_\alpha = 0$ a budeme hledat pouze $b_\alpha > n\mathrm{e}^{\theta_0}$ tak, aby

$$P\big(\xi < b_\alpha | \theta = \theta_0\big) \ge 1 - \alpha.$$

Důsledek 3.1.4. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány jako výše. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha,\theta_1) = 1 - \sum_{\substack{a_\alpha<k<b_\alpha \\ k\in\mathbb{N}_0}} \exp\{-n\mathrm{e}^{\theta_1}\}\frac{(n\mathrm{e}^{\theta_1})^x}{x!}.$$

Důkaz. Úpravou výrazu pro sílu testu získáme:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha,\theta_1) = P\big(\tilde{D}_{r,n} > c_\alpha|\theta=\theta_1\big) = P\big(t_r(\xi) > t_r(b_\alpha)|\theta=\theta_1\big) = P\big(\xi \notin (a_\alpha,b_\alpha)|\theta=\theta_1\big)\\ = 1 - P\big(\xi\in(a_\alpha,b_\alpha)|\theta=\theta_1\big).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta=\theta_1$ má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ Poissonovo rozdělení s parametrem $n\mathrm{e}^{\theta_1}$. □

Poznámka 3.1.5. Připomeňme ještě, že pokud bychom neznali explicitní rozdělení $\tilde{D}_{r,n}$, můžeme sice určit kritický obor pomocí asymtotického chování statistik za podmínky $\theta=\theta_0$, ale už nemáme žádnou znalost pravděpodobnosti $P(\tilde{D}_{r,n} > c_\alpha|\theta=\theta_1)$ pro $\theta_1\neq\theta_0$, která určuje sílu testu. V těchto případech se obvykle síla testu odhaduje metodou Monte Carlo.

3.2 Bernoulliho rozdělení

Lemma 3.2.1. *Nechť náhodná veličina X má Bernoulliho rozdělení s parametrem $p\in(0,1)$. Označme $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\{\theta x - \log(1+\mathrm{e}^\theta)\}, \qquad x=0,1, \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Dále pro náhodný výběr $X_1,\dots,X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n-\sum\limits_{i=1}^n X_i}\right).$$

Důkaz. Nechť $x\in\{0,1\}$. Úpravou vzorce pro hustotu Bernoulliho rozdělení

$$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x} = \exp\left\{x\log\left(\frac{p}{1-p}\right) + \log(1-p)\right\}$$

a zavedením substituce $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ dostáváme požadovaný exponenciální tvar hustoty. Odvodili jsme, že $\kappa(\theta) = \log(1+\mathrm{e}^\theta)$ a věta 2.3.3 dává maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$. □

V dalším textu budeme uvažovat Bernoulliho rozdělení s parametrem $\frac{\mathrm{e}^\theta}{1+\mathrm{e}^\theta}$, který odpovídá klasickému parametru p.

Věta 3.2.2. *Nechť $n\in\mathbb{N}$ a nechť $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z Bernoulliho rozdělení s parametrem $\frac{\mathrm{e}^\theta}{1+\mathrm{e}^\theta}$. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s binomickým rozdělením s parametry n, $\frac{\mathrm{e}^\theta}{1+\mathrm{e}^\theta}$ a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) - \frac{\log(n)}{r-1} + \frac{\log\left(1+\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r}\right), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = \frac{\log\left((n-\xi)^r + \xi^r\mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n(t_1(\xi) + \log\left(1+\mathrm{e}^{\theta_0}\right)), \quad \textit{kde } t_1(\xi) = \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n-\xi}\right) - \theta_0\right) - \log\left(\frac{n}{n-\xi}\right),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\left(t_0(\xi) + \log\left(\frac{n}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}\right) + \frac{\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}\right), \quad \textit{kde } t_0(\xi) = -\frac{\log(n-\xi) + \mathrm{e}^{\theta_0}\log(\xi)}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}.$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Bernoulliova rozdělení s parametrem $\frac{e^\theta}{1+e^\theta}$, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ binomické rozdělení s parametry n, $\frac{e^\theta}{1+e^\theta}$.
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = \log(1+e^\theta)$, $\kappa'(\theta) = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}$, $\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\xi}{n-\xi}\right)$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r(\hat{\theta}_n, \theta_0) &= \frac{1}{r(r-1)}\left[\log\left(1 + e^{r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0}\right) - r\log(1+e^{\hat{\theta}_n}) - (1-r)\log\left(1+e^{\theta_0}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{r(r-1)}\log\left(1 + \left(\frac{\xi}{n-\xi}\right)^r e^{(1-r)\theta_0}\right) - \frac{1}{r-1}\log\left(1 + \frac{\xi}{n-\xi}\right) + \\
&\qquad + \frac{\log\left(1+e^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= \frac{1}{r(r-1)}\log\left((n-\xi)^r + \xi^r e^{(1-r)\theta_0}\right) - \frac{\log(n-\xi)}{r-1} - \frac{\log(n)}{r-1} + \\
&\qquad + \frac{\log(n-\xi)}{r-1} + \frac{\log\left(1+e^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= \frac{1}{r(r-1)}\log\left((n-\xi)^r + \xi^r e^{(1-r)\theta_0}\right) - \frac{\log(n)}{r-1} + \frac{\log\left(1+e^{\theta_0}\right)}{r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned}
D_1(\hat{\theta}_n, \theta) &= \frac{e^{\hat{\theta}_n}}{1+e^{\hat{\theta}_n}}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) - \log(1+e^{\hat{\theta}_n}) + \log\left(1+e^{\theta_0}\right) = \\
&= \frac{\frac{\xi}{n-\xi}}{1+\frac{\xi}{n-\xi}}\left(\log\left(\frac{\xi}{n-\xi}\right) - \theta_0\right) - \log\left(1 + \frac{\xi}{n-\xi}\right) + \log\left(1+e^{\theta_0}\right) = \\
&= \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n-\xi}\right) - \theta_0\right) - \log\left(\frac{n}{n-\xi}\right) + \log\left(1+e^{\theta_0}\right).
\end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned}
D_0(\hat{\theta}_n, \theta) &= \frac{e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}}\left(\theta_0 - \hat{\theta}_n\right) - \log\left(1+e^{\theta_0}\right) + \log(1+e^{\hat{\theta}_n}) = \\
&= \frac{\theta_0 e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}} - \frac{e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}}\log\left(\frac{\xi}{n-\xi}\right) + \log\left(1 + \frac{\xi}{n-\xi}\right) - \log\left(1+e^{\theta_0}\right) = \\
&= \frac{-e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}}\log(\xi) + \frac{e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}}\log(n-\xi) + \log(n) - \log(n-\xi) - \\
&\qquad - \log\left(1+e^{\theta_0}\right) + \frac{\theta_0 e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}} = \\
&= -\frac{\log(n-\xi) + e^{\theta_0}\log(\xi)}{1+e^{\theta_0}} + \log\left(\frac{n}{1+e^{\theta_0}}\right) + \frac{\theta_0 e^{\theta_0}}{1+e^{\theta_0}}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.2.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \sum_{\substack{a_\alpha < k < b_\alpha \\ k \in \mathbb{N}_0}} \exp\left\{\theta_1 k - n\log(1+e^{\theta_1})\right\}\binom{n}{k}.$$

Důkaz. I v tomto případě můžeme použít odvození (3.2). Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ binomické rozdělení s parametry n a $\frac{e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}}$ a odpovídající exponenciální hustotou z lemmatu 3.3.1. □

3.3 Binomické rozdělení – n známé

Lemma 3.3.1. *Nechť náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, přičemž n je známé. Označme $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\left\{\theta x - n\log(1+\mathrm{e}^{\theta})\right\}, \qquad x = 0,1,\dots,n, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

vzhledem k aritmetické míře přenásobené elementem $\binom{n}{x}$.

Dále pro náhodný výběr $X_1,\dots,X_m$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_m = \log\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} X_i}{nm - \sum\limits_{i=1}^{m} X_i}\right).$$

Důkaz. Nechť $x \in \{0,1,\dots,n\}$. Úpravou vzorce pro hustotu binomického rozdělení

$$f(x,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \exp\left\{x\log\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\log(1-p)\right\}\binom{n}{x}$$

a zavedením substituce $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_m$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Dále budeme opět uvažovat místo parametru p odpovídající parametr z exponenciálního tvaru hustoty $\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{1+\mathrm{e}^{\theta}}$.

Věta 3.3.2. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1,\dots,X_m$ je náhodný výběr z binomického rozdělení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{1+\mathrm{e}^{\theta}}$. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s binomickým rozdělením s parametry nm, $\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{1+\mathrm{e}^{\theta}}$ a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2nm\left(t_r(\xi) - \frac{\log(nm)}{r-1} + \frac{\log\left(1+\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r}\right), \text{ kde } t_r(\xi) = \frac{\log\left((nm-\xi)^r + \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2nm\big(t_1(\xi) + \log\left(1+\mathrm{e}^{\theta_0}\right)\big), \text{ kde } t_1(\xi) = \frac{\xi}{nm}\left(\log\left(\frac{\xi}{nm-\xi}\right) - \theta_0\right) - \log\left(\frac{nm}{nm-\xi}\right),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2nm\left(t_0(\xi) + \log\left(\frac{nm}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}\right) + \frac{\theta_0 \mathrm{e}^{\theta_0}}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}\right), \text{ kde } t_0(\xi) = -\frac{\log(nm-\xi) + \mathrm{e}^{\theta_0}\log(\xi)}{1+\mathrm{e}^{\theta_0}}.$$

Důkaz. Jestliže náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry n, p, pak je součtem n nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s Bernoulliovým rozdělením s parametrem p. Proto daný náhodný výběr $X_1,\dots,X_m$ můžeme také chápat jako výběr $Y_1,\dots,Y_{nm}$ z odpovídajícího Bernoulliova rozdělení. Potom již tvrzení věty plyne z 3.2.2. □

Důsledek 3.3.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha,\theta_1) = 1 - \sum_{\substack{a_\alpha < k < b_\alpha \\ k \in \mathbb{N}_0}} \exp\left\{\theta_1 k - nm\log(1+\mathrm{e}^{\theta_1})\right\}\binom{nm}{k}.$$

Důkaz. Opět použijme odvození (3.2). S ohledem na důkaz věty 3.3.2 si uvědomme, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^{m} X_i$ binomické rozdělení s parametry nm a $\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{1+\mathrm{e}^{\theta_1}}$. Odpovídající hustotu proto získáme úpravou hustoty z lemmatu 3.3.1. □

3.4 Geometrické rozdělení

Lemma 3.4.1. *Nechť náhodná veličina X má geometrické rozdělení s parametrem $p \in (0,1)$. Označme $\theta = \log(1-p)$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\{\theta x + \log(1-\mathrm{e}^{\theta})\}, \qquad x = 0,1,\dots, \quad \theta < 0.$$

Dále pro náhodný výběr $X_1,\dots,X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right).$$

Důkaz. Nechť $x \in \{0,1,\dots\}$. Úpravou vzorce pro hustotu geometrického rozdělení

$$f(x,p) = (1-p)^x p = \exp\{x\log(1-p) + \log(p)\}$$

a zavedením substituce $\theta = \log(1-p)$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Dále budeme uvažovat místo parametru p odpovídající parametr z exponenciálního tvaru hustoty $1-\mathrm{e}^{\theta}$.

Věta 3.4.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení s parametrem $1-\mathrm{e}^{\theta}$. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s negativně-binomickým rozdělením s parametry n a $1-\mathrm{e}^{\theta}$ a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) + \frac{log(n)}{r-1} - \frac{\log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r}\right), \quad kde\ t_r(\xi) = -\frac{\log\left((n+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n\left(t_1(\xi) - \log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)\right), \quad kde\ t_1(\xi) = \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right) - \theta_0\right) + \log\left(\frac{n}{n+\xi}\right),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\left(t_0(\xi) + \log\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}{n}\right) + \frac{\theta_0 \mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\right), \quad kde\ t_0(\xi) = \frac{\log(n+\xi) - \mathrm{e}^{\theta_0}\log(\xi)}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}.$$

Důkaz. Protože $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení s parametrem $1-\mathrm{e}^{\theta}$, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i$ negativně-binomické rozdělení s parametry n a $1-\mathrm{e}^{\theta}$ (viz [ra78]).
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = -\log(1-\mathrm{e}^{\theta})$, $\kappa'(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{1-\mathrm{e}^{\theta}}$, $\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right)$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\left(\hat{\theta}_n, \theta_0\right) &= \frac{1}{r(r-1)}\left[-\log\left(1-\mathrm{e}^{r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0}\right) + r\log\left(1-\mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}\right) + (1-r)\log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)\right] = \\
&= \frac{-1}{r(r-1)}\log\left(1-\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right)^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right) + \frac{1}{r-1}\log\left(1-\frac{\xi}{n+\xi}\right) - \\
&\qquad - \frac{\log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= -\frac{\log\left((n+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)} + \frac{\log(n+\xi)}{r-1} + \frac{\log(n)}{r-1} - \frac{\log(n+\xi)}{r-1} - \\
&\qquad - \frac{\log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= -\frac{\log\left((n+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)} + \frac{\log(n)}{r-1} - \frac{\log\left(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned}
D_1\big(\hat\theta_n, \theta_0\big) &= \frac{\mathrm{e}^{\hat\theta_n}}{1-\mathrm{e}^{\hat\theta_n}}\big(\hat\theta_n - \theta_0\big) + \log(1-\mathrm{e}^{\hat\theta_n}) - \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) = \\
&= \frac{\frac{\xi}{n+\xi}}{1-\frac{\xi}{n+\xi}}\left(\log\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right) - \theta_0\right) + \log\left(1-\frac{\xi}{n+\xi}\right) - \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) = \\
&= \frac{\xi}{n}\left(\log\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right) - \theta_0\right) + \log\left(\frac{n}{n+\xi}\right) - \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big).
\end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned}
D_0\big(\hat\theta_n, \theta_0\big) &= \frac{\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\big(\theta_0 - \hat\theta_n\big) + \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) - \log(1-\mathrm{e}^{\hat\theta_n}) = \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\left(\theta_0 - \log\left(\frac{\xi}{n+\xi}\right)\right) - \log\left(1-\frac{\xi}{n+\xi}\right) + \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) = \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(\xi) + \frac{\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(n+\xi) + \log(n+\xi) - \log(n) + \\
&\qquad + \log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) + \frac{\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} = \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(\xi) + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(n+\xi) + \log\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}{n}\right) + \frac{\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} = \\
&= \frac{\log(n+\xi) - \mathrm{e}^{\theta}\log(\xi)}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} + \log\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}{n}\right) + \frac{\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.4.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \sum_{\substack{a_\alpha < k < b_\alpha \\ k \in \mathbb{N}_0}} \exp\{\theta_1 k + n\log(1-\mathrm{e}^{\theta_1})\}\binom{n+k-1}{k}.$$

Důkaz. Nejprve výraz pro sílu testu upravíme jako v (3.2). Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má uvažovaná náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ negativně-binomické rozdělení s parametry n a $1 - \mathrm{e}^{\theta_1}$ a odpovídající hustotou z lemmatu 3.5.1. □

3.5 Negativně-binomické rozdělení – t známé

Lemma 3.5.1. *Nechť náhodná veličina X má negativně-binomické rozdělení s parametry $t > 0$ a $p \in (0,1)$, kde t je známý parametr. Označme $\theta = \log(1-p)$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\{\theta x + t\log(1-\mathrm{e}^{\theta})\}, \qquad x = 0, 1, \ldots, \quad \theta < 0$$

vzhledem k aritmetické míře přenásobené elementem $\binom{t+x-1}{x}$.

Dále pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat\theta_n = \log\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{nt + \sum\limits_{i=1}^n X_i}\right).$$

Důkaz. Nechť $x \in \{0, 1, \dots\}$. Úpravou vzorce pro hustotu negativně-binomického rozdělení

$$f(x,p) = \binom{t+x-1}{x} p^t (1-p)^x = \exp\{x \log(1-p) + t \log(p)\} \binom{t+x-1}{x}$$

a zavedením substituce $\theta = \log(1-p)$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

V dalším textu již budeme uvažovat negatovně-binomické rozdělení s parametrem $1 - \mathrm{e}^{\theta}$, který odpovídá klasickímu parametru p.

Věta 3.5.2. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z negativně-binomického rozdělení s parametry $t > 0$ a $1 - \mathrm{e}^{\theta}$. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s negativně-binomickým rozdělením s parametry nt, $1 - \mathrm{e}^{\theta}$ a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n \left(t_r(\xi) + \frac{t \log(nt)}{r-1} - \frac{t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r} \right), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = -\frac{\log\left((nt+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n \Big(t_1(\xi) - t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right) \Big), \quad \textit{kde } t_1(\xi) = \frac{\xi}{n} \left(\log\left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right) - \theta_0 \right) + t \log\left(\frac{nt}{nt+\xi}\right),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n \left(t_0(\xi) + t \log\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\theta_0}}{nt}\right) + \frac{t\theta_0 \mathrm{e}^{\theta_0}}{1 - \mathrm{e}^{\theta_0}} \right), \quad \textit{kde } t_0(\xi) = \frac{t \log(nt+\xi) - t\mathrm{e}^{\theta_0} \log(\xi)}{1 - \mathrm{e}^{\theta_0}}.$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z negativně-binomického rozdělení s parametry t a $1 - \mathrm{e}^{\theta}$, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ negativně-binomické rozdělení s parametry nt a $1 - \mathrm{e}^{\theta}$ (viz [ra78]).
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = -t \log(1 - \mathrm{e}^{\theta})$, $\kappa'(\theta) = \frac{t\mathrm{e}^{\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\theta}}$, $\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right)$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)} \left[-t \log\left(1 - \mathrm{e}^{r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0}\right) + rt \log\left(1 - \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}\right) + (1-r)t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right) \right] = \\
&= -\frac{t}{r(r-1)} \log\left(1 - \left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right)^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right) + \frac{t}{r-1} \log\left(1 - \frac{\xi}{nt+\xi}\right) - \\
&\qquad - \frac{t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= -\frac{t \log\left((nt+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)} + \frac{t \log(nt+\xi)}{r-1} + \frac{t \log(nt)}{r-1} - \frac{t \log(nt+\xi)}{r-1} - \\
&\qquad - \frac{t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r} = \\
&= -\frac{t \log\left((nt+\xi)^r - \xi^r \mathrm{e}^{(1-r)\theta_0}\right)}{r(r-1)} + \frac{t \log(nt)}{r-1} - \frac{t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right)}{r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned}
D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{t\mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}}{1 - \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}} \big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) + t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}\right) - t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right) = \\
&= \frac{t \frac{\xi}{nt+\xi}}{1 - \frac{\xi}{nt+\xi}} \left(\log\left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right) - \theta_0 \right) + t \log\left(1 - \frac{\xi}{nt+\xi}\right) - t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right) = \\
&= \frac{\xi}{n} \left(\log\left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right) - \theta_0 \right) + t \log\left(\frac{nt}{nt+\xi}\right) - t \log\left(1 - \mathrm{e}^{\theta_0}\right).
\end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned}
D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{t\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) + t\log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) - t\log\big(1-\mathrm{e}^{\hat{\theta}_n}\big) = \\
&= \frac{t\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} - \frac{t\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log\left(\frac{\xi}{nt+\xi}\right) - t\log\left(1-\frac{\xi}{nt+\xi}\right) + t\log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) = \\
&= -\frac{t\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(\xi) + \frac{t\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}\log(nt+\xi) - t\log(nt) + t\log(nt+\xi) + \\
&\qquad + t\log\big(1-\mathrm{e}^{\theta_0}\big) + \frac{t\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} = \\
&= \frac{t\log(nt+\xi) - t\mathrm{e}^{\theta_0}\log(\xi)}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}} + t\log\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}{nt}\right) + \frac{t\theta_0\mathrm{e}^{\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\theta_0}}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.5.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \sum_{\substack{a_\alpha < k < b_\alpha \\ k \in \mathbb{N}_0}} \exp\{\theta_1 k + nt\log(1-\mathrm{e}^{\theta_1})\}\binom{nt+k-1}{k}.$$

Důkaz. Opět použijme odvození (3.2). S ohledem na důkaz věty 3.5.2 platí, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ negativně-binomické rozdělení s parametry nt a $1 - \mathrm{e}^{\theta_1}$ a odpovídající hustotu z lemmatu 3.5.1. □

3.6 Exponenciální rozdělení

Lemma 3.6.1. *Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Označme $\theta = \lambda$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x, \theta) = \exp\{-\theta x + \log(\theta)\}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Dále pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^n X_i}.$$

Důkaz. Nechť $x > 0$. Úpravou vzorce pro hustotu exponenciálního rozdělení

$$f(x, \lambda) = \lambda\exp\{-\lambda x\} = \exp\{-\lambda x + \log(\lambda)\}$$

a zavedením substituce $\theta = \lambda$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Dále budeme uvažovat místo parametru λ odpovídající parametr z exponenciálního tvaru hustoty θ.

Věta 3.6.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\theta > 0$. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s Gamma*

rozdělením s parametry θ, n a platí:

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) + \frac{\log(n)}{r-1} - \frac{\log(\theta_0)}{r}\right), \quad kde\, t_r(\xi) = -\frac{\log\big(rn + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} - \frac{\log(\xi)}{r},$$
$$\tilde{D}_{1,n} = 2n\left(t_1(\xi) + \log\left(\frac{n}{\theta_0}\right) - 1\right), \quad kde\, t_1(\xi) = \frac{\theta_0\xi}{n} - \log(\xi),$$
$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\left(t_0(\xi) + \log\left(\frac{\theta_0}{n}\right) - 1\right), \quad kde\, t_0(\xi) = \frac{n}{\theta_0\xi} + \log(\xi).$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem θ, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ Gamma rozdělení s parametry θ, n (viz [ra78]).
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = -\log(\theta)$, $\kappa'(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $\hat{\theta}_n = \frac{n}{\xi}$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)}\Big[-\log\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) + r\log(\hat{\theta}_n) + (1-r)\log(\theta_0)\Big] = \\
&= -\frac{1}{r(r-1)}\log\left(\frac{rn}{\xi} + (1-r)\theta_0\right) + \frac{1}{r-1}\log\left(\frac{n}{\xi}\right) - \frac{\log(\theta_0)}{r} = \\
&= -\frac{\log\big(rn + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} + \frac{\log(\xi)}{r(r-1)} - \frac{\log(\xi)}{r-1} + \frac{\log(n)}{r-1} - \frac{\log(\theta_0)}{r} = \\
&= -\frac{\log\big(rn + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} - \frac{\log(\xi)}{r} + \frac{\log(n)}{r-1} - \frac{\log(\theta_0)}{r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned}
D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{1}{\hat{\theta}_n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) + \log(\hat{\theta}_n) - \log(\theta_0) = -\frac{\xi}{n}\left(\frac{n}{\xi} - \theta_0\right) + \log\left(\frac{n}{\xi}\right) - \log(\theta_0) = \\
&= \frac{\theta_0\xi}{n} - \log(\xi) + \log\left(\frac{n}{\theta_0}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned}
D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{1}{\theta_0}\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) + \log(\theta_0) - \log(\hat{\theta}_n) = -\frac{1}{\theta_0}\left(\theta_0 - \frac{n}{\xi}\right) + \log(\theta_0) - \log\left(\frac{n}{\xi}\right) = \\
&= \frac{n}{\theta_0\xi} + \log(\xi) + \log\left(\frac{\theta_0}{n}\right) - 1.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.6.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \exp\{-\theta_1 x + n\log(\theta_1)\}\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve výraz pro sílu testu upravíme jako v (3.2). Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má uvažovaná náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ Gamma rozdělení s parametry θ_1, n a odpovídající hustotou z lemmatu 3.7.1. □

3.7 Gamma rozdělení – p známé

Lemma 3.7.1. *Nechť náhodná veličina X má Gamma rozdělení s parametry $a > 0$, $p > 0$, kde p je známé. Označme $\theta = a$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\{-\theta x + p\log(\theta)\}, \qquad x > 0, \quad \theta > 0$$

vzhledem k Lebesgueově míře přenásobené elementem $\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}$.

Dále pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \frac{pn}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}.$$

Důkaz. Nechť $x > 0$. Úpravou vzorce pro hustotu Gamma rozdělení

$$f(x,a) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \exp\{-ax\} x^{p-1} = \exp\{-ax + p\log(a)\} \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

a zavedením substituce $\theta = a$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Dále budeme uvažovat místo parametru a odpovídající parametr z exponenciálního tvaru hustoty θ.

Věta 3.7.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Gamma rozdělení s parametrem $\theta > 0$ a $p > 0$ známé. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s Gamma rozdělením s parametry θ, np a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) + \frac{p\log(np)}{r-1} - \frac{p\log(\theta_0)}{r}\right), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = -\frac{p\log\big(rnp + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} - \frac{p\log(\xi)}{r},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n\big(t_1(\xi) + p\log(np) - p\log(\theta_0) - p\big), \quad \textit{kde } t_1(\xi) = \frac{\theta_0\xi}{n} - p\log(\xi),$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\big(t_0(\xi) - p\log(np) + p\log(\theta_0) - p\big), \quad \textit{kde } t_0(\xi) = \frac{np^2}{\theta_0\xi} + p\log(\xi).$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Gamma rozdělení s parametrem θ a p, má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Gamma rozdělení s parametry θ, np (viz [ra78]).
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = -p\log(\theta)$, $\kappa'(\theta) = -\frac{p}{\theta}$, $\hat{\theta}_n = \frac{np}{\xi}$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)}\Big[-p\log\big(r\hat{\theta}_n + (1-r)\theta_0\big) + rp\log(\hat{\theta}_n) + (1-r)p\log(\theta_0)\Big] = \\
&= -\frac{p}{r(r-1)}\log\left(\frac{rnp}{\xi} + (1-r)\theta_0\right) + \frac{p}{r-1}\log\left(\frac{np}{\xi}\right) - \frac{p\log(\theta_0)}{r} = \\
&= -\frac{p\log\big(rnp + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} + \frac{p\log(\xi)}{r(r-1)} + \frac{p\log(np)}{r-1} - \\
&\qquad - \frac{p\log(\xi)}{r-1} - \frac{p\log(\theta_0)}{r} = \\
&= -\frac{p\log\big(rnp + (1-r)\theta_0\xi\big)}{r(r-1)} - \frac{p\log(\xi)}{r} + \frac{p\log(np)}{r-1} - \frac{p\log(\theta_0)}{r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned} D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{p}{\hat{\theta}_n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) + p\log(\hat{\theta}_n) - p\log(\theta_0) = \\ &= -\frac{\xi}{n}\left(\frac{np}{\xi} - \theta_0\right) + p\log(np) - p\log(\xi) - p\log(\theta_0) = \\ &= \frac{\theta_0\xi}{n} - p\log(\xi) + p\log(np) - p\log(\theta_0) - p. \end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned} D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{p}{\theta_0}\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) + p\log(\theta_0) - p\log(\hat{\theta}_n) = \\ &= -\frac{p}{\theta_0}\left(\theta_0 - \frac{np}{\xi}\right) + p\log(\theta_0) - p\log\left(\frac{np}{\xi}\right) = \\ &= \frac{np^2}{\theta_0\xi} + p\log(\xi) - p\log(np) + p\log(\theta_0) - p. \end{aligned}$$

□

Důsledek 3.7.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \exp\{-\theta_1 x + np\log(\theta_1)\}\frac{x^{np-1}}{\Gamma(np)}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve výraz pro sílu testu upravíme jako v (3.2). Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má uvažovaná náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$ Gamma rozdělení s parametry θ_1, np a odpovídající hustotou z lemmatu 3.7.1. □

3.8 Normální rozdělení – σ^2 známé

Lemma 3.8.1. *Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, kde σ^2 je známé. Označme $\theta = \mu$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x, \theta) = \exp\left\{\theta\frac{x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

vzhledem k Lebesgueově míře přenásobené elementem

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Dále pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Úpravou vzorce pro hustotu normálního rozdělení

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \exp\left\{\mu\frac{x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

a zavedením substituce $\theta = \mu$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Pokud bychom postupovali stejně jako u předchozích rozdělení, využili bychom pro určení rozdělení Rényiho statistik náhodnou veličinu

$$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

V tomto případě se však jeví výhodnější uvažovat náhodnou veličinu

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\theta}_n,$$

která má normální rozdělení se střední hodnotou θ a známým rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$.

Věta 3.8.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou θ a rozptylem σ^2, kde σ^2 je známé. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s normálním rozdělením se střední hodnotou θ, rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$ a pro všechna $r \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = \frac{n}{\sigma^2} t_r(\xi), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = (\xi - \theta)^2.$$

Důkaz. Protože $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou θ a rozptylem σ^2, má náhodná veličina $\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ normální rozdělení se střední hodnotou θ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$.
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = \frac{\theta^2}{2\sigma^2}$, $\kappa'(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$, $\hat{\theta}_n = \xi$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)} \left[\frac{(r\xi + (1-r)\theta_0)^2}{2\sigma^2} - r\frac{\xi^2}{2\sigma^2} - (1-r)\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{r^2\xi^2 + 2r(1-r)\theta_0\xi + (1-r)^2\theta_0^2}{r(r-1)} - \frac{\xi^2}{r-1} + \frac{\theta_0^2}{r} \right] = \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{r\xi^2}{r-1} - 2\theta_0\xi - \frac{(1-r)\theta_0^2}{r} - \frac{\xi^2}{r-1} + \frac{\theta_0^2}{r} \right] = \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}(\xi^2 - 2\theta_0\xi + \theta_0^2) = \frac{(\xi - \theta_0)^2}{2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \frac{\xi}{\sigma^2}(\xi - \theta_0) - \frac{\xi^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} = \frac{\xi^2}{2\sigma^2} - \frac{\theta_0\xi}{\sigma^2} + \frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} = \frac{(\xi - \theta_0)^2}{2\sigma^2}.$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) = \frac{\theta_0}{\sigma^2}(\theta_0 - \xi) - \frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} + \frac{\xi^2}{2\sigma^2} = \frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} - \frac{\theta_0\xi}{\sigma^2} + \frac{\xi^2}{2\sigma^2} = \frac{(\xi - \theta_0)^2}{2\sigma^2}.$$

□

Jak plyne z věty 2.3.4, jsou Rényiho statistiky $\tilde{D}_{r,n}$ jakožto funkce proměnné $\xi = \hat{\theta}_n$ nerostoucí pro $\xi \leq \theta_0$ a neklesající pro $\xi \geq \theta_0$. Proto můžeme kritický obor hledat obdobně jako v předchozích případech.

Důsledek 3.8.3. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci 3.1. Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \exp\left\{\theta_1 \frac{nx}{\sigma^2} - \frac{n\theta_1^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}\right\} \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve výraz pro sílu testu upravíme jako v (3.2). Nyní si stačí uvědomit, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má uvažovaná náhodná veličina $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ normální rozdělení se střední hodnotou θ_1 a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$. Odpovídající hustotu získáme z lemmatu 3.8.1, jestliže σ^2 nahradíme $\frac{\sigma^2}{n}$. □

3.9 Normální rozdělení – μ známé

Lemma 3.9.1. *Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, kde μ je známé. Označme $\theta = \frac{1}{2\sigma^2}$, potom X má exponenciální hustotu*

$$f(x,\theta) = \exp\left\{-\theta(x-\mu)^2 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0.$$

Dále pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z tohoto rozdělení je maximálně věrohodný odhad parametru θ tvaru

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}.$$

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Úpravou vzorce pro hustotu normálního rozdělení

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right\}$$

a zavedením substituce $\theta = \frac{1}{2\sigma^2}$ dostáváme požadovaný tvar hustoty. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ je potom důsledkem věty 2.3.3. □

Lemma 3.9.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, z nichž každá má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Potom náhodná veličina $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ má rozdělení určené hustotou*

$$f_n(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\sigma^n}\, y^{\frac{n}{2}-1}\exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\}, \quad y > 0. \tag{3.3}$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení provedeme matematickou indukcí podle n.

Nechť $n = 1$, potom hledáme hustotu náhodné veličiny $Y = X_1^2$. K tomu použijeme větu o transformaci náhodné veličiny, kterou čtenář najde v knize [an05]. Po provedení transformace zvlášť pro $X_1 > 0$ a $X_1 < 0$ dostáváme požadovaný tvar $f_1(y)$, $y > 0$.

Nechť $n > 1$, potom $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + X_{n+1}^2$ je konvolucí dvou nezávislých náhodných veličin se známými hustotami f_n a f_1, proto použijeme větu o konvoluci, opět z knihy [an05].

$$g(y) = \int_0^y f_n(y-z)f_1(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^{n+1}}\int_0^y (y-z)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y-z}{2\sigma^2}}z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^{n+1}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}}y^{\frac{n}{2}-1}\int_0^y\left(1-\frac{z}{y}\right)^{\frac{n}{2}-1}z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z =$$

zavedením substituce $u = \dfrac{z}{y}$ a použitím *Beta* funkce získáváme

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^{n+1}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\sigma^2}}y^{\frac{n+1}{2}-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right).$$

Nyní stačí využít vztahu $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ a jsme hotovi. □

Věta 3.9.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{1}{2\theta}$, kde μ je známé. Potom Rényiho statistiky jsou funkcemi náhodné veličiny ξ s rozdělením určeným hustotou* (3.3) *a platí:*

$$\tilde{D}_{r,n} = 2n\left(t_r(\xi) + \frac{\log(n)}{2(r-1)} - \frac{\log(\theta_0)}{2r}\right), \quad \textit{kde } t_r(\xi) = -\frac{\log\big(rn - 2(1-r)\theta_0\xi\big)}{2r(r-1)} - \frac{\log(2\xi)}{2r},$$

$$\tilde{D}_{1,n} = 2n\left(t_1(\xi) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{\theta_0}\right) - \frac{1}{2}\right), \quad \textit{kde } t_1(\xi) = \frac{\theta_0\xi}{n} - \frac{\log(2\xi)}{2},$$

$$\tilde{D}_{0,n} = 2n\left(t_0(\xi) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\theta_0}{n}\right) - \frac{1}{2}\right), \quad \textit{kde } t_0(\xi) = \frac{n}{4\theta_0\xi} + \frac{\log(2\xi)}{2}.$$

Důkaz. Položíme-li $\xi = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, plyne rozdělení této náhodné veličiny přímo z lemmatu 3.9.2.
Nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, dosazením $\kappa(\theta) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$, $\kappa'(\theta) = -\frac{1}{2\theta}$, $\hat{\theta}_n = \frac{n}{2\xi}$ do vzorce (2.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
D_r\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= \frac{1}{r(r-1)}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{r\hat{\theta}_n - (1-r)\theta_0}\right) - \frac{r}{2}\log\left(\frac{\pi}{\hat{\theta}_n}\right) - \frac{1-r}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta_0}\right)\right] = \\
&= \frac{\log(\pi)}{2r(r-1)} - \frac{1}{2r(r-1)}\log\left(\frac{rn}{2\xi} - (1-r)\theta_0\right) - \frac{\log(\pi)}{2(r-1)} + \\
&\quad + \frac{1}{2(r-1)}\log\left(\frac{n}{2\xi}\right) + \frac{\log(\pi)}{2r} - \frac{\log(\theta_0)}{2r} = \\
&= -\frac{\log\big(rn - 2(1-r)\theta_0\xi\big)}{2r(r-1)} + \frac{\log(2\xi)}{2r(r-1)} - \frac{\log(2\xi)}{2(r-1)} + \frac{\log(n)}{2(r-1)} - \frac{\log(\theta_0)}{2r} = \\
&= -\frac{\log\big(rn - 2(1-r)\theta_0\xi\big)}{2r(r-1)} - \frac{\log(2\xi)}{2r} + \frac{\log(n)}{2(r-1)} - \frac{\log(\theta_0)}{2r}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 1$ dosadíme do (2.8):

$$\begin{aligned}
D_1\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{1}{2\hat{\theta}_n}\big(\hat{\theta}_n - \theta_0\big) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\hat{\theta}_n}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta_0}\right) = \\
&= -\frac{2\xi}{2n}\left(\frac{n}{2\xi} - \theta_0\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\pi\xi}{n}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta_0}\right) = \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\theta_0\xi}{n} - \frac{\log(\pi)}{2} - \frac{\log(2\xi)}{2} + \frac{\log(n)}{2} + \frac{\log(\pi)}{2} - \frac{\log(\theta_0)}{2} = \\
&= \frac{\theta_0\xi}{n} - \frac{\log(2\xi)}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{\theta_0}\right) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pro $r = 0$ dosadíme do (2.9):

$$\begin{aligned}
D_0\big(\hat{\theta}_n, \theta_0\big) &= -\frac{1}{2\theta_0}\big(\theta_0 - \hat{\theta}_n\big) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta_0}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\hat{\theta}_n}\right) = \\
&= -\frac{1}{2\theta_0}\left(\theta_0 - \frac{n}{2\xi}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{\theta_0}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\pi\xi}{n}\right) = \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{n}{4\theta_0\xi} - \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{\log(\theta_0)}{2} + \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{\log(2\xi)}{2} - \frac{\log(n)}{2} = \\
&= \frac{n}{4\theta_0\xi} + \frac{\log(2\xi)}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\theta_0}{n}\right) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.9.4. *Nechť c_α, a_α, b_α jsou definovány analogicky jako v sekci* 3.1. *Potom pro θ_1 z prstencového okolí θ_0 je silofunkce testu na hladině α vyjádřena vzorcem*

$$\beta(\alpha, \theta_1) = 1 - \frac{\theta_1^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{a_\alpha}^{b_\alpha} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\{-\theta_1 x\} \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve výraz pro sílu testu upravíme jako v (3.2). Nyní si uvědomme, že za podmínky $\theta = \theta_1$ má náhodná veličina $\xi = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ hustotu danou vzorcem (3.3), kde $\theta_1 = \frac{1}{2\sigma^2}$. $\square$

Kapitola 4

Aplikace pro Poissonovo rozdělení

Výsledky předchozí kapitoly ilustrujeme na konkrétním příkladu Poissonova rozdělení.

Uvažujme model, kde $\mathfrak{X} = \{0, 1, \dots\}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$, $\Theta = \mathbb{R}$ a pro všechna $\theta \in \Theta$, všechna $x \in \mathfrak{X}$ je

$$f(x, \theta) = \exp\{\theta x - \exp\{\theta\}\}\frac{1}{x!}$$

hustota pravděpodobnosti Poissonova rozdělení s parametrem e^{θ}, která byla odvozená v lemmatu 3.1.1. Nechť dále $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z tohoto rozdělení. Podle stejného lemmatu je maximálně věrohodný odhad parametru θ vyjádřen vztahem

$$\hat{\theta}_n = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$

a proto podle věty 3.1.2 je pro všechna $r \in \mathbb{R}$ Rényiho statistika $\tilde{D}_{r,n}$ funkcí náhodné veličiny $\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i$, která má Poissonovo rozdělení s parametrem $n\mathrm{e}^{\theta}$.

Nechť $\alpha = 0.05$. Budeme testovat nulovou hypotézu $H_0 : \theta = 3$ proti oboustranné alternativě $H_1 : \theta \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ na hladině α. Hlavní výhodou Rényiho statistik pro testování hypotéz je možnost optimalizovat mezi těmito statistikami na základě silofunkce, což má dobrou použitelnost právě pro malé rozsahy náhodných výběrů n. To je však v rozporu s tím, že pokud neznáme jejich explicitní rozdělení, musíme hledat kritický obor pomocí asymptotického, což zase dává dobré výsleky pouze pro velká n. Díky větě 3.1.2 známe rozdělení statistik $\tilde{D}_{r,n}$ pro $r \in \mathbb{R}$, a proto se zaměříme na srovnání testů pro $n \in \{10, 20, 50\}$. Pro daná n také provedeme výběr nejlepšího testu z množiny

$$\{\mathcal{T}^{\alpha}_{-0.5,n}, \mathcal{T}^{\alpha}_{0,n}, \mathcal{T}^{\alpha}_{0.5,n}, \mathcal{T}^{\alpha}_{1,n}, \mathcal{T}^{\alpha}_{2,n}\},$$

kde $\mathcal{T}^{\alpha}_{r,n}$ označuje test na hladině α při daném rozsahu výberu n a s použitím Rényiho statistiky $\tilde{D}_{r,n}$. Kvalitu testu budeme hodnotit podle silofunkce testu $\beta(\alpha, \theta_1)$ pro θ_1 z prstencového okolí $\theta_0 = 3$.

Jak bylo odvozeno v sekci 3.1, pro určení kritického oboru potřebujeme najít čísla a_α, b_α tak, že

$$P(\xi \in (a_\alpha, b_\alpha)|\theta = \theta_0) \geq 1 - \alpha, \qquad t_r(a_\alpha) = t_r(b_\alpha),$$

popřípadě číslo b_α takové, že $P(\xi < b_\alpha|\theta = \theta_0) \geq 1 - \alpha$. Na rozdíl od spojitých rozdělení, není u dikrétních většinou možné najít kritický obor W přesně tak, aby $P(\tilde{D}_{r,n} \in W|\theta = \theta_0) = 1 - \alpha$. Proto dosažená hladina testu bývá obvykle ostře menší než požadované α.

K nalezení čísel a_α, b_α pro jednotlivá $r \in \{-0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$ a pro $n \in \{10, 20, 50\}$ jsme použili Program MATHEMATICA. Protože pracujeme s diskrétním rozdělením, nebyla tato

Tabulka 4.1: **Meze kritického oboru**

	$n = 10$		$n = 20$		$n = 50$	
r	A_α	B_α	A_α	B_α	A_α	B_α
-0.5	175	230	364	442	944	1068
0	175	230	364	442	944	1068
0.5	174	229	364	442	943	1067
1	174	229	363	441	943	1067
2	173	228	363	441	942	1066

čísla danými podmínkami určena jednoznačně. Proto jsme se omezili na určení celočíselných mezí kritického oboru. Těmi jsou čísla A_α, B_α tak, že $A_\alpha = \lceil a_\alpha \rceil$ a $B_\alpha = \lfloor b_\alpha \rfloor$, kde $\lceil\,.\,\rceil$ (resp. $\lfloor\,.\,\rfloor$) značí horní (resp. dolní) celou část čísla. Výsledné meze pro jednotlivé testy jsou shrnuty v tabulce 4.1.

Již zde je patrné, že pro dané n zřejmě nebudou mezi zvolenými testy žádné výrazné rozdíly. To ale můžeme nejlépe poznat z hodnot silofunkce testu pro θ_1 z prstencového okolí $\theta_0 = 3$, kterou spočteme na základě důsledku 3.1.4. Výsledky pro

$$\theta_1 \in \{2.45,\, 2.5, \ldots,\, 2.95\} \cup \{\,3.05,\, 3.1, \ldots,\, 3.45\}$$

nalezneme v tabulkách 4.2, 4.3, 4.4, přičemž řádek odpovídající $\theta_1 = \theta_0 = 3$ vyjadřuje dosaženou hladinu testu.

Tabulka 4.2: **Síly testu pro** $n = 10$

θ_1	$r = -0.5$	$r = 0$	$r = 0.5$	$r = 1$	$r = 2$
2.45	1.	1.	1.	1.	1.
2.5	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
2.55	0.99995	0.99995	0.99993	0.99993	0.99991
2.6	0.99951	0.99951	0.99936	0.99936	0.99915
2.65	0.99638	0.99638	0.99544	0.99544	0.99428
2.7	0.98048	0.98048	0.97648	0.97648	0.97181
2.75	0.92387	0.92387	0.91221	0.91221	0.89923
2.8	0.78496	0.78496	0.76194	0.76194	0.73758
2.85	0.55404	0.55404	0.52393	0.52393	0.49362
2.9	0.29888	0.29888	0.27338	0.27338	0.24899
2.95	0.11711	0.11711	0.10396	0.10396	0.09217
3.	*0.04929*	*0.04929*	*0.04817*	*0.04817*	*0.04818*
3.05	0.09771	0.09771	0.10839	0.10839	0.12028
3.1	0.28164	0.28164	0.30432	0.30432	0.32784
3.15	0.57016	0.57016	0.59582	0.59582	0.62111
3.2	0.82781	0.82781	0.84394	0.84394	0.85906
3.25	0.95796	0.95796	0.96344	0.96344	0.96834
3.3	0.99418	0.99418	0.99516	0.99516	0.99599
3.35	0.99957	0.99957	0.99966	0.99966	0.99973
3.4	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999
3.45	1.	1.	1.	1.	1.

Tabulka 4.3: **Síly testu pro** $n = 20$

θ_1	$r = -0.5$	$r = 0$	$r = 0.5$	$r = 1$	$r = 2$
2.45	1.	1.	1.	1.	1.
2.5	1.	1.	1.	1.	1.
2.55	1.	1.	1.	1.	1.
2.6	1.	1.	1.	1.	1.
2.65	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
2.7	0.99989	0.99989	0.99989	0.99987	0.99987
2.75	0.99745	0.99745	0.99745	0.99699	0.99699
2.8	0.97030	0.97030	0.97030	0.96652	0.96652
2.85	0.83026	0.83026	0.83026	0.81654	0.81654
2.9	0.50388	0.50388	0.50388	0.48296	0.48296
2.95	0.17186	0.17186	0.17186	0.15921	0.15921
3.	*0.04904*	*0.04904*	*0.04904*	*0.04868*	*0.04868*
3.05	0.16453	0.16453	0.16453	0.17634	0.17634
3.1	0.52451	0.52451	0.52451	0.54339	0.54339
3.15	0.86934	0.86934	0.86934	0.87909	0.87909
3.2	0.98621	0.98621	0.98621	0.98777	0.98777
3.25	0.99952	0.99952	0.99952	0.99959	0.99959
3.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.35	1.	1.	1.	1.	1.
3.4	1.	1.	1.	1.	1.
3.45	1.	1.	1.	1.	1.

Tabulka 4.4: **Síly testu pro** $n = 50$

θ_1	$r = -0.5$	$r = 0$	$r = 0.5$	$r = 1$	$r = 2$
2.45	1.	1.	1.	1.	1.
2.5	1.	1.	1.	1.	1.
2.55	1.	1.	1.	1.	1.
2.6	1.	1.	1.	1.	1.
2.65	1.	1.	1.	1.	1.
2.7	1.	1.	1.	1.	1.
2.75	1.	1.	1.	1.	1.
2.8	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
2.85	0.99606	0.99606	0.99565	0.99565	0.99521
2.9	0.87543	0.87543	0.86857	0.86857	0.86146
2.95	0.35321	0.35321	0.34124	0.34124	0.32942
3.	*0.04883*	*0.04883*	*0.04859*	*0.04859*	*0.04858*
3.05	0.34620	0.34620	0.35755	0.35755	0.36903
3.1	0.89351	0.89351	0.89899	0.89899	0.90426
3.15	0.99822	0.99822	0.99839	0.99839	0.99854
3.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.25	1.	1.	1.	1.	1.
3.3	1.	1.	1.	1.	1.
3.35	1.	1.	1.	1.	1.
3.4	1.	1.	1.	1.	1.
3.45	1.	1.	1.	1.	1.

Tyto tabulky potvrzují, že mezi zvolenými testy nelze nalézt stejnoměrně nejsilnější test. Samozřejmě platí, že čím větší rozsah výběru, tím silnější testy dostáváme. Dále můžeme pozorovat, jak se mění silofunkce testu pro pevná θ_1 z uvažovaného okolí θ_0. V levém okolí dochází s postupným zvyšováním řádu příslušné Rényiho divergence r k poklesu síly testu. Naproti tomu se v pravém okolí síly testu postupně zvyšují.

Zjistili jsme, že stejnoměrně nejsilnější test neexistuje. Přesto můžeme na základě silofunkce mezi testy vybírat, použijeme-li nějakou optimaliźační metodu.

Literatura

[an05] Anděl J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2005.

[bh46] Bhattacharyya A.: *On some analogues to the amount of information and their uses in statistical estimation*, Sankhya, **8** (1946) 1–14.

[br86] Brown L.D.: *Fundamentals of statistical exponential families*, Lecture Notes 9, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1986.

[fa06] Fajfrová L.: *Applications of the generalised Rényi divergences in testing hypotheses about exponential models I*, (VZ DAR-ÚTIA 30/2006), ÚTIA AV ČR, Praha, 2006, 30 pp.

[fi34] Fisher R.A.: *Two new properties of mathematical likelihood*, Proceedings of the Royal Society, **A144** (1934) 285–307.

[lv87] Liese F., Vajda I.: *Convex statistical distances*, Teubner, Leipzig, 1987.

[kl51] Kullback S., Leibler R.: *On information and sufficiency*, Ann. Math. Statist., **22** (1951) 79–86.

[mpv97] Morales D., Pardo L., Vajda I.: *Some new statistics for testing hypotheses in parametric models*, Journal of Multivariate Analysis, **62** (1997) 137–168.

[ra78] Rao C.R.: *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*, Praha, Academia, 1978.

[re61] Rényi A.: *On measures of entropy and information*, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., **1** (1961) 547–561.