Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radek Solnický

Věta o implicitních funkcích v ekonomické analýze

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Pražák Dalibor, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2008

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady a připomínky. Nemalý dík patří rovněž mým rodičům, kteří mne při studiu plně podporují a poskytují potřebné zázemí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Radek Solnický

Obsah

Název práce: Věta o implicitních funkcích v ekonomické analýze
Autor: Radek Solnický
Pracoviště: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Pražák Dalibor, Ph.D.
e-mail vedoucího: `prazak@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: V mnoha ekonomických modelech popisujících rovnováhy se využívá popis situace pomocí grafu. Rovnováhu pak představuje průsečík křivek. Logicky následuje otázka, jak se tato rovnováha změní, změníme-li vnější parametry modelu. V rámci grafu jde o posun některých křivek a vznik nových průsečíků. Z jejich pozice se usuzuje, v jakém vztahu je nová rovnováha vzhledem k původní. V této práci je představena metoda komparativní statické analýzy, matematicky exaktní metody, která zodpovídá tuto otázku bez nutnosti spoléhat se na intuitivní pojetí situace grafem. Je obecně odvozen její postup a následně je ilustrován na několika příkladech.

Klíčová slova: věta o implicitních funkcích, rovnováha, produkční funkce, užitková funkce

Title: Economic Analysis and the Implicit Function Theorem
Author: Radek Solnický
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Pražák Dalibor, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: `prazak@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: In economic models describing various equilibria, graphs are used to illustrate the situation. The equilibrium is represented by an intersection of curves. Consequently a question follows. How the equilibrium does change, if parametres of the model are altered. Considering the graph it means that some curves shift and new intersects are formed. Comparing their new position to the old one, conclusions about equilibria are made. In this work we present the Comparative Statics method, the mathematically exact way to answer this question indpendently on the graphic illustration of situation. Universal procedure is derived and then a few examples are shown.

Keywords: implicit function theorem, equilibrium, production function, utility function

Kapitola 1

Věta o implicitních funkcích

V různých ekonomických modelech se často vyskytuje situace, kdy je požadovaná situace popsána jako nějaká rovnováha. Graficky se obvykle jedná o průsečíky přímek nebo křivek. Následně se vyšetřuje, jak se změní tato rovnováha, pokud se změní parametry modelu. V případě grafického znázornění jde o to, jak a na kterou stranu se ta která křivka posune, kde se nachází nový průsečík, nový rovnovážný stav, a v jakém je vztahu s původní rovnováhou. Právě tento grafický přístup vede k metodě, která se nazývá komparativní statická analýza. Tato metoda se opírá o dvě významná matematická tvrzení. Větu o implicitní funkci a řetízkové pravidlo pro derivování. V této kapitole obě tvrzení zformulujeme, abychom se na ně mohli později odkazovat.

Věta (o implicitních funkcích). *Nechť funkce*

$$f_i(x_1, ..., x_n; \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

jsou třídy C^k *vzhledem k* $n + m$ *proměnným* $(x_1, ..., x_n; \alpha_1, ..., \alpha_m)$ *na okolí* $\mathcal{U}$ *bodu* $(x_1^0, ..., x_n^0; \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)$, *který splňuje, že*

$$f_i(x_1^0, ..., x_n^0; \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0) = 0 \quad i = 1, ..., n,$$

kde $k \geq 1$. *Nechť dále Jakobián této soustavy vzhledem k* $(x_1, ..., x_n)$ *je v bodě* $(x_1^0, ..., x_n^0; \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)$ *nenulový. Pak na okolí* $\mathcal{U}$ *jsou jednoznačně určeny funkce*

$$x_i = x_i(\alpha_1, ..., \alpha_m) \quad i = 1, ..., n$$

které jsou třídy C^k *a pro které platí*

$$f_i(x_1(\alpha_1, ..., \alpha_m), ..., x_n(\alpha_1, ..., \alpha_m); \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0 \quad i = 1, ..., n.$$

Věta (řetízkové pravidlo). *Nechť funkce $y = y(x_1, ..., x_n)$ je diferencovatelná a funkce $x_j = x_j(t_1, ..., t_m)$, $j = 1, ..., n$ jsou rovněž diferencovatelné. Pak*

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., m.$$

Důkazy obou tvrzení lze nalézt v libovolné učebnici matematické analýzy, například [4], str. 103 a 73.

Dále zde uvedeme tzv. větu o Lagrangeových multiplikátorech, neboť jí je v modelu spotřebitele maximalizujícího užitek při hledání vázaného extrému využito.

Věta (nutné podmínky pro vázaný extrém). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, ..., g_s, (1 \leq s < n)$ jsou funkce třídy C^1 na G a nechť v každém bodě $x \in G$ má Jacobiho matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

hodnost s. Nechť

$$M = \{z \in G : g_1(z) = 0, ..., g_s(z) = 0\}$$

a funkce f má v bodě $a \in M$ lokální extrém na M. Pak existuje právě jedna s-tice reálných čísel $(\lambda_1, ..., \lambda_s)$, že a je stacionárním bodem funkce

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x).$$

Důkaz opět v [4], str. 149.

V aplikacích komparativní statické analýzy na jednotlivé modely je pak použito také některých faktů z teorie ekonomie. Ty nejdůležitější zde krátce shrneme.

Definice. Relaci $\succ$, která je slabým uspořádáním (tj. asymetrická a negativně tranzitivní), nazýváme preferenční relace. Vztah $x \succ y$ čteme jako „x je lepší než y“.

Definice. Reálná funkce $U : X \to \mathbb{R}$ se nazývá ordinální užitková funkce na X, pokud pro všechna $x, y \in X$ je $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$.

Věta. *Nechť množina alternativ X je spočetná. Pak na X existuje ordinální užitková funkce.* (Důkaz v [5], str.10)
Poznamenejme, že v našem případě bude tato užitková funkce vždy existovat. Buď bude množina alternativ spočetná, nebo danou užitkovou funkci explicitně popíšeme.
Definice. Nezápornou funkci f definovanou na na nezáporném ortantu $\mathbb{R}^n_{0,+}$ nazýváme produkční funkce, pokud $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ a $f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} < 0$ pro $i = 1, ..., n$.

Kapitola 2

Komparativní statická analýza

Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, v mnoha ekonomických modelech je popsán rovnovážný stav jako řešení soustavy rovnic, kde neznámá je zadána implicitně. Typickým příkladem může být model rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou na trhu. Jak nabídka, tak poptávka jsou funkcí ceny a z předpokladů modelu existuje bod, tj. cena, kdy se tyto dvě funkce rovnají a nastane rovnováha. Tato cena je dána jako řešení rovnice popisující rovnovážnou situaci.

Popišme tento systém rovnic obecně jako soustavu n rovnic o n neznámých a m parametrech.

$$f^i(x_1, ..., x_n; \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Mějme nyní pevně zadány parametry $(\alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)$ a předpokládejme, že existuje řešení soustavy pro tento vektor parametrů, označme jej $(x_1^0, ..., x_n^0)$. Požadujme nyní, aby byly splněny podmínky Věty o implicitní funkci. Tím pádem můžeme vyjádřit jednotlivá x_i jako funkce parametrů α_j na okolí bodu $(x_1^0, ..., x_n^0; \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)$. Tedy

$$x_i = x_i(\alpha_1, ..., \alpha_m), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Pokud chceme zkoumat změnu i-té proměnné v závislosti na změnách parametrů, není nic jednoduššího, než do získané rovnice dosadit. Problémem ovšem je, že byť nám Věta o implicitní funkci dává existenci takovýchto předpisů pro proměnné x_i, neříká nic o tom, jak konkrétně tento předpis vypadá a v praxi nemusíme být ani schopni tento předpis vyjádřit. Komparativní statická analýza řeší tento problém následovně. Ustupme od požadavku ,,o kolik“ a zaměřme se pouze na ,,kterým směrem“. Přesněji řečeno, pokud bude funkce x_i dostatečně hladká, což nám může zaručit právě Věta o implicitní funkci, můžeme ji derivovat. Pokud se nám podaří získat znaménka parciálních derivací funkcí x_i podle parametrů α_j ve výše zmíněném bodě $(x_1^0, ..., x_n^0; \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)$, tj. znaménka,

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\right)^0, \quad i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m,$$

budeme vědět, jak reaguje ta která proměnná na malou změnu toho kterého parametru. Stejnou informaci, budou-li se měnit všechny parametry současně, získáme ze znalosti znaménka totálního diferenciálu

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2}\mathrm{d}\alpha_2 + ... + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m}\mathrm{d}\alpha_m.$$

Podívejme se nyní, jak získat znaménka parciálních derivací $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$. Označme ještě pro jednoduchost $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Zřejmě pro funkce f^i platí

$$f^i(x_1(\tilde{\alpha}), ..., x_n(\tilde{\alpha}); \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Zderivujeme podle α_j a převedeme člen $\frac{\partial f^i}{\partial \alpha_j}$ na pravou stranu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^i}{\partial \alpha_j} &= 0, \quad i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^i}{\partial \alpha_j}, \quad i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Pro názornost rozepišme celou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + ... + \frac{\partial f^1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^1}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + ... + \frac{\partial f^2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^2}{\partial \alpha_j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + ... + \frac{\partial f^n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^n}{\partial \alpha_j}, \end{aligned}$$

což ovšem není nic jiného než soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j}$, $i = 1, 2, .., n$. Označme determinant celé soustavy Δ a Δ_i determinant soustavy, ve které i-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran, tj.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & -\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_j} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & -\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_j} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Řešením naší soustavy je pak $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $\quad i = 1, 2, ..., n$. Poznamejme, že díky přepokladům Věty o implicitních funkcích je Δ, které je zároveň i Jakobiánem funkcí f^i vzhledem k x_i, nenulové, tedy soustava je vždy řešitelná.

Nyní nás ovšem zajímají znaménka jednotlivých $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j}$. Ta získáme, pokud se nám podaří určit znaménka Δ a Δ_i. V ekonomických modelech se ovšem tyto výrazy nikde explicitně nevyskytují. Naopak ale velice často máme, díky konstrukci modelu a ekonomickým předpokladům, k dispozici znalost znamének $\frac{\partial f_k}{\partial \alpha_j}$ a $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, tedy prvků těchto determinantů. To samozřejmě na určení znamének Δ a Δ_i obecně nestačí. Vyskytují se však situace, kdy lze ze znamének prvků v determinantu určit i znaménko determinantu samého. Typickým příkladem je

$$\begin{vmatrix} + & + & + & + & + \\ - & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{vmatrix} > 0$$

Tento příklad samozřejmě není jediným. Z definice determinantu plyne, že prohodíme-li nějaké dva sloupce nebo řádky ve výše uvedeném determinantu, dostaneme opět determinant, jehož znaménko známe. Podobně, přenásobíme-li nějaký řádek nebo sloupec v takovémto determinantu (-1) nezmění to nic na naší znalosti jeho znaménka, to jen změní paritu stejně jako při prohazování. Bližší detaily včetně důkazu tvrzení, že existuje právě a jen jedna základní struktura znamének prvků v determinantu, aby se z nich dalo určit znaménko celého determinantu, lze nalézt v [3].

Na závěr ještě poznamenejme, že k tomuto problému lze přistupovat i opačně. Místo $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j}$ by nás mohly zajímat $\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_1}$, tedy změny parametru v závislosti na změně proměnné. Příkladem by mohlo být jednání vlády, která má možnost regulovat dotace daného produktu, aby docílila určité produkce.

Analogicky jako v původním případě, za předpokladů Věty o implicitní funkci lze vyjádřit $\alpha_j = \alpha_j(x_1, ..., x_n), j = 1, 2, ..., m$. To vyžaduje nenulovost Jakobiánu soustavy, ale narážíme zde na drobný problém, neboť Jakobián jako takový je definován jen pro čtvercové matice. V případě, že $m = n$, se nic neděje, ale v ostatních případech musíme tento problém „obejít". Pokud například $m < n$, je nutno se vzdát $n - m$ proměnných v modelu. Naopak, pokud $m > n$, kontrolujeme více parametrů než samotných proměnných, lze použít jen $m - n$ z nich.

Kapitola 3

Aplikace a modely

V minulé kapitole jsme odvodili základní obecný postup při komparativní statické analýze. V této kapitole se pokusíme ilustrovat tento postup na několika příkladech - ekonomických modelech. Na začátku vždy zavedeme a stručně popíšeme model a dodáme, jaké výsledky bychom mohli očekávat, poté provedeme komparativní statickou analýzu a oba výsledky následně porovnáme.

3.1 Spotřebitel optimalizující svůj užitek

Začněme jedním z nejjednodušších modelů, chováním spotřebitele. Model je převzat knihy [2], str. 311. Popisuje situaci, kdy se spotřebitel mající k dispozici určité množství peněz rozhoduje, kolik a kterých statků nebo služeb nakoupit. Základním požadavkem v tomto modelu je, aby se spotřebitel choval ,,racionálně". To znamená, že se snaží za daných podmínek vždy docílit maximálního užitku. Zde ovšem vzniká otázka, jak určovat, co je pro toho kterého spotřebitele lepší nebo horší. My se spokojíme se situací, kdy za preferenční relaci na množině alternativ zvolíme takovou relaci, pro kterou platí, že $x \succ y$ právě tehdy, když $x_i > y_i$ pro nějaké pevné i a $x_j \geq y_j$ pro $i \neq j$. Indexy i a j zde označují pozice ve vektoru množství statků, které spotřebitel odebírá. Jednoduše řečeno, kombinace x je lepší, pokud obsahuje alespoň totéž co kombinace y a k tomu ještě něco navíc. S tímto přístupem je bohužel spojena i jistá nenasytitelnost, neboť čím více má spotřebitel k dispozici pro svou spotřebu, tím je spokojenější. To ovšem v praxi nemusí platit a také obvykle neplatí. Pro naše úvahy však toto zjednodušení postačí.

Z formálního hlediska tedy spotřebitel hledá maximum své užitkové funkce za podmínky rozpočtového omezení. Vyjádřeno v rovnicích:

$$\max U(x_1, ..., x_n)$$
$$p_1 x_1 + ... + p_n x_n \leq I$$
$$x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_{0,+},$$

kde U je spojitá alespoň dvakrát diferencovatelná ordinální užitková funkce, $x_1, ..., x_n$ statky nebo služby s kladnými cenami $p_1, ..., p_n$ a $I \in \mathbb{R}$ rozpočtové omezení. Zjevně množinou alternativ je zde $R^n_{0,+}$, což sice není spočetná množina, na druhou stranu lze například v knize [5] nalézt tvrzení, které ukazuje, že za určitých okolností lze i na nespočetné množině zavést ordinální užitkovou funkci. Můžeme tedy předpokládat, že nějakou funkci U máme k dispozici. Pro názornost se nyní omezíme na situaci, kdy se spotřebitel rozhoduje pouze mezi dvěma možnostmi. Tím se nám problém redukuje na

$$\max U(x_1, x_2)$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+.$$

Hledáme tedy extrém funkce dvou proměnných na uzavřené množině. Konkrétně jde o uzavřený trojúhelník s vrcholy $[0, 0], [\frac{I}{p_1}, 0], [0, \frac{I}{p_2}]$, označme jej M. Jednoduchou úvahou zjistíme, že maximum nemůže být nabyto na vnitřku této množiny. Kdyby totiž bylo, pak by spolu s tímto maximem patřilo do M i nějaké jeho otevřené okolí. Ovšem na tomto okolí se určitě vyskytuje kombinace, která obsahuje více jak x_1, tak x_2, tedy je „lepší“, a to je spor. Maxima je tedy vzhledem ke spojitosti U nutně nabýváno na hranici M. Další úvahou dospějeme k závěru, že maxima nemůže být nabyto ani na polouzavřených úsečkách $[[0, 0]; [\frac{I}{p_1}, 0])$ a $[[0, 0]; [0, \frac{I}{p_2}])$. Bod $[0, 0]$ nedává spotřebiteli žádný užitek a na vnitřcích úseček lze použít podobný argument jako v úvaze o vnitřku. Dospěli jsme tedy k závěru, že jedinou relevantní vazbou pro maximum je $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Sestavme si Lagrangeovu funkci

$$L := U(x_1, x_2) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2),$$

kde λ je Lagrangeův multiplikátor a řešme soustavu podmínek prvního řádu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Tím dostaneme stacionární bod. Předpokládejme, že je splněna i podmínka druhého řádu, tj. že

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & -p_1 \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & -p_2 \\
-p_1 & -p_2 & 0
\end{vmatrix} > 0.
$$

Protože je funkce L spojitá na kompaktní množině, nalezl spotřebitel své optimum, které je maximem jeho užitkové funkce na množině přípustných řešení. Tím jsme se ovšem dostali teprve na začátek komparativní statické analýzy, do situace, kdy existuje stabilní bod. Podívejme se nyní, co se stane, budeme-li chtít znát spotřebitelovu reakci na zvýšení ceny p_1. Standardní odpovědí, bez jakékoliv bližší znalosti situace, by bylo, že spotřebitel sníží nakupované množství x_1, respektive se pokusí najít novou kombinaci spotřeby x_1 a x_2, aby za nové situace opět dosáhl co největšího užitku. Vraťme se k našemu modelu. Jsme v situaci, kdy je rovnováha v modelu popsána třemi rovnicemi o třech neznámých x_1, x_2, λ a třech parametrech p_1, p_2, I:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 &= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 &= 0 \\
I - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Předpokládejme, že jsou splněny podmínky Věty o implicitní funkci na okolí našeho stacionárního bodu. To mimo jiné znamená, že Jakobián této soustavy je nenulový. Podíváme-li se pozorně, všimneme si, že tento Jakobián je totožný s podmínkou druhého řádu na naše maximum, tedy víme, že je nejen nenulový, ale dokonce kladný. Z Věty o implicitní funkci pak dostáváme, že mohu neznámé x_1, x_2 a λ na tomto okolí vyjádřit jako funkce parametrů

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(p_1, p_2, I) \\
x_2 &= x_1(p_1, p_2, I) \\
\lambda &= x_1(p_1, p_2, I)
\end{aligned}
$$

Protože chceme znát spotřebitelovu reakci na zvýšení p_1, budeme podle p_1 derivovat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} &= \lambda \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} &= 0 \\
-p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1} &= x_1
\end{aligned}$$

Pro výpočet Δ_1 využijeme rozvoje determinantu podle posledního řádku. Dostáváme tedy, že

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & -p_1 \\ 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & -p_2 \\ x_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & -p_2 \end{vmatrix} + \lambda(-p_2^2).$$

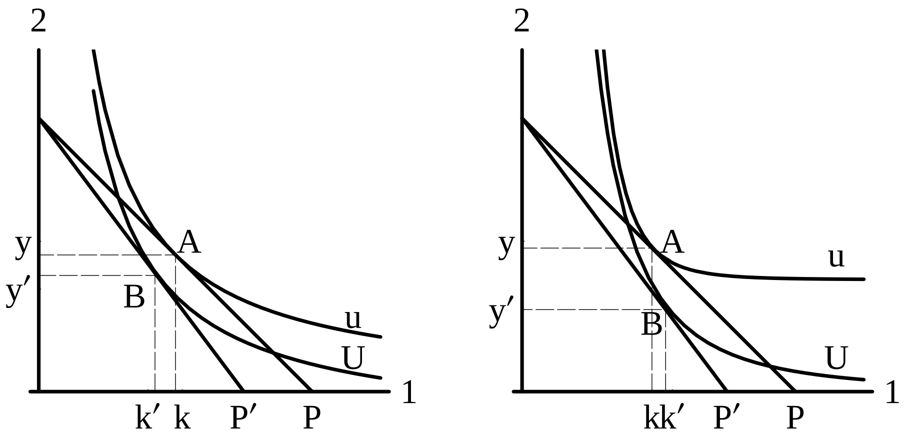
A tedy

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = x_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & -p_2 \end{vmatrix} \Delta^{-1} + \lambda\frac{-p_2^2}{\Delta} = -x_1\frac{\partial x_1}{\partial I} + \lambda\frac{-p_2^2}{\Delta}.$$

Poslední rovnost dostaneme, pokud zderivujeme podmínky prvního řádu podle I.

Víme, že $\Delta > 0$. Budeme-li předpokládat, že i $\lambda > 0$, pak druhý člen je záporný. To odpovídá substitučnímu efektu, kdy spotřebitel vzhledem ke zdražení jednoho produktu přesune svoji pozornost více k druhému produktu. (Je už jen technickou záležitostí, které produkty vystupují jako x_1 a x_2, aby substituce měla logický smysl.) Naopak o znaménku prvního členu nevíme bez dodatečných předpokladů nic. Vezmeme-li však v úvahu argument, že zvýšení rozpočtového omezení, tj. zvýšení množství peněz, které má spotřebitel k dispozici, vede obvykle obecně ke větší spotřebě a tedy i k většímu užitku, můžeme předpokládat, že $\frac{\partial x_1}{\partial I} > 0$, a tedy i první člen bude mít záporné znaménko. Poznamenejme, že tento člen se nazývá důchodový efekt. Za těchto předpokladů je pak $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$, což odpovídá základní představě, že zdražením výrobku jeho spotřeba poklesne. Na druhou stranu, situace, že $\frac{\partial x_1}{\partial I} > 0$ nemusí nastat vždy. Stačí si představit situaci, kdy půjde o produkt nižší kvality, který spotřebitel odebírá jako náhražku za jiný, kvalitní produkt, který je mu finančně nedostupný. Zvýšení příjmů pak může vést k tomu, že kvalitní produkt již bude dosažitelný a spotřebitel už nebude nucen odebírat jeho náhražky. Tedy $\frac{\partial x_1}{\partial I} < 0$. Bude-li pak hodnota tohoto členu dostatečně velká, může $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ nabýt kladných hodnot. Obecně by tedy mohlo dojít k situaci, že po zvýšení ceny produktu jej bude naopak spotřebitel nakupovat více.

Obě situace ilustrují následující dva obrázky. Na vodorovné ose je znázorněno odebírané množství prvního produktu, na svislé odběr druhého. Křivky u a U spojují body se stejnou hodnotou užitkové funkce. Úsečky P a P' znázorňují rozpočtová omezení. Na začátku se spotřebitel nachází v situaci A, kdy odebírá k prvního produktu a y druhého. Po zdražení prvního produktu se rozpočtové omezení přesune z pozice P do pozice P' a spotřebitel nalezne nové optimum v bodě B. V prvním případě odebírá méně zdraženého produktu, ve druhém více. Je zjevné, že tento jev závisí na tvaru užitkových funkcí. V obou případech je však užitek spotřebitele po zdražení nižší než před ním.



(a) Situace $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ (b) Situace $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$

3.2 Model nabídky a poptávky

Dalším modelem, kterým se budeme zabývat, je model rovnováhy nabídky a poptávky. Tento model čerpá opět z knihy [2], str. 329, cvičení 2. Jak název modelu napovídá, popisuje setkání prodávajících a nakupujících na trhu. Jak nabídka S, tak poptávka D závisejí na ceně, za kterou se daný výrobek prodává. Je dáno logikou věci, že zatímco s rostoucí cenou ochota prodávajích prodávat roste, poptávka klesá, tedy $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$ a $\frac{\partial S}{\partial p} > 0$. Dodejme ještě, že ekonomickým předpokladem modelu je dokonalá konkurence.

Mějme tedy ustavenu nějakou rovnováhu, kdy se nabídka vyrovná s poptávkou, při ceně p_0

$$D(p_0) = S(p_0).$$

Tato cena je určena jako řešení rovnice $D(p) - S(p) = 0$. Budeme-li jak poptávku tak nabídku považovat za lineární funkce a položíme-li $0 < D(0) < \infty$ a $S(0) = 0$, existuje rovnovážná cena vždy a je určena jednoznačně. Co se ovšem stane, zvýší-li se z nějakého důvodu poptávka po našem výrobku? Očekávatelnou odpovědí by bylo, že cena p_0 se zvýší. Podívejme se opět, co dokážeme zjistit pomocí komparativní statické analýzy. Zaveďme do našeho modelu parametry α_1 a α_2, které budou reprezentovat oblibu výrobku a náklady prodejce na výrobu. Dostaneme tedy rovnici

$$D(p, \alpha_1) - S(p, \alpha_2) = 0,$$

přičemž lze předpokládat, že $\frac{\partial D}{\partial \alpha_1} > 0$ a $\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} < 0$. Spočtěme nyní Jakobián J, přičemž předpokládejme, že funkce D a S jsou dostatečně hladké a že i ostatní předpoklady Věty o implicitní funkci jsou splněny na nějakém okolí rovnovážného stavu.

$$J = \left(\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \right)$$

Ovšem z předpokladů modelu víme, že $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$ a $\frac{\partial S}{\partial p} > 0$, tedy Jakobián je dokonce záporný.

Nyní můžeme položit $p = p(\alpha_1, \alpha_2)$ a podívat se, jak bude reagovat cena p na změny v α_1 a α_2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial D}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} &= 0 \\ \left(\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} &= -\frac{\partial D}{\partial \alpha_1} \end{aligned}$$

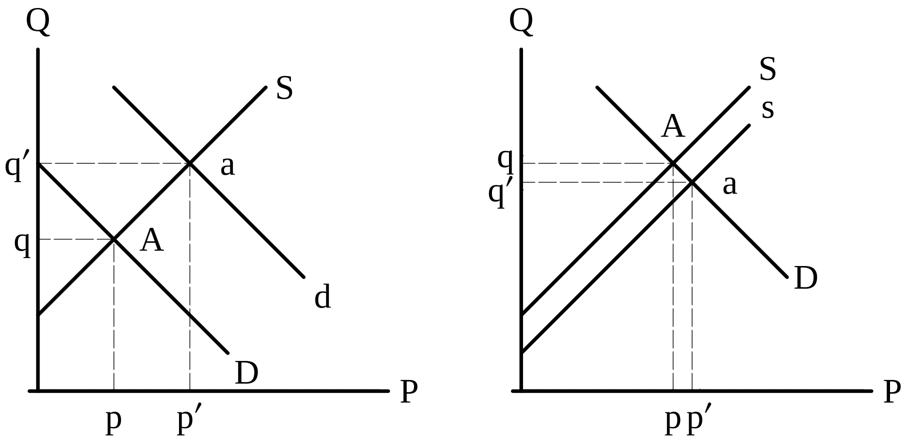
Jaké je tedy znaménko $\frac{\partial p}{\partial \alpha_1}$? Na levé straně v závorce vystupuje záporný výraz a na pravé straně rovnosti také. Nezbývá tedy jiná možnost, než že $\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} > 0$. A vskutku to odpovídá naší původní představě, že s rostoucí oblibou výrobku jeho cena roste. Existuje tedy nějaká možnost aby $\frac{\partial p}{\partial \alpha_1} < 0$? Odpověď je jednoduchá. V rámci tohoto modelu ne. Pokud bychom připustili kladnost výrazu $\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p}$, pak, pokud pracujeme pouze se znaménky, by to znamenalo, že $\frac{\partial D}{\partial p} > 0$ a $\frac{\partial S}{\partial p} < 0$. Tedy poptávka by se zvyšovala s rostoucí cenou výrobku a nabídka by se naopak snižovala, což je zjevně scestné.

Vyšetřeme nyní chování vzhledem k α_2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \end{aligned}$$

Na levé straně v závorce máme stejně jako v předchozím případě záporný člen a na pravé straně rovnosti vyskytuje $\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}$, které je také záporné. Tedy $\frac{\partial p}{\partial \alpha_2} > 0$. Řečeno slovy, nárůst nákladů na straně prodejce se projeví zvýšením ceny výrobku.

Situaci ještě naznačme obrázky popisujícími situace při zvýšení jednotlivých parametrů α_1 a α_2. Na osách měříme cenu P a obchodované množství Q. Původní rovnovážný stav je v obou obrázcích dán jako průsečík přímek D a S, kdy se na trhu obchoduje množství q za cenu p. Při navýšení poptávky (zvýšení α_1) se trh dostane do stavu, kdy se obchoduje sice větší množství výrobku, ale za vyšší cenu. Při zvýšení nákladů prodejce α_2 cena vzroste také, ale obchodované množství se sníží.



(a) Nárůst parametru α_1 (b) Nárůst parametru α_2

3.3 Firma maximalizující svůj zisk

V následující části se budeme zabývat modelem firmy vyrábějící v konkurenčním prostředí, která se snaží maximalizovat svůj zisk. Pro názornost budeme předpokládat, že vyrábí pouze jeden druh výrobku (výstupu) z N různých surovin (vstupů). Ptejme se, co se stane, zvýší-li se cena k-tého vstupu. Opět, bez jakýchkoliv dalších znalostí, bychom mohli předpokládat, že firma v důsledku vyšších nákladů odebere celkově méně vstupů a díky tomu vyrobí méně výstupu. Jinou odpovědí by mohlo být, že si firma najde nějakou náhradu za nyní dražší vstup, který se tak pokusí používat méně. Pomocí komparativní statické analýzy se podíváme na oba případy a ukážeme, že situace opět není tak jednoduchá.

Nejdříve zavedeme model naší firmy. Její zisk je pak jednoduše rozdíl příjmů z prodaných výstupů a nákladů na vstupy:

$$\Pi(x) = p^0 f(x) - \sum_0^N x_i w_i^0,$$

kde $p^0 \in \mathbb{R}^+$ je daná cena výstupu na trhu, f spojitá, dvakrát diferencovatelná produkční funkce, pro kterou platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ pro $i = 1, ..., N$ a matice

$$\mathbb{F} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1,1}^{N,N}$$

je negativně definitní na ortantu $\mathbb{R}_{0,+}^N$, $x_i \in \mathbb{R}_{0,+}$ jsou jednotlivá množství vstupů a $w_i^0 \in \mathbb{R}_+$ dané jednotlivé ceny vstupů. Dodejme, že $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ značí zvýšení produkce při zvýšení množství vstupu, zatímco $\mathbb{F} < 0$ dává snižující se mezní přírůstek výstupu. To znamená, že s každým dalším navýšením množství vstupu roste přírůstek výstupu méně a méně. Tento fakt si lze představit jako konkavitu produkční funkce a zároveň nám zaručí existenci maximálního zisku, neboť zatímco náklady na každou další jednotku vstupu jsou stále stejné, přírůstky množství vyrobených výstupů, potažmo přírůstky zisku klesají. V určitém bodě pak musí nutně dojít k obratu, kdy náklady na další navýšení produkce jsou vyšší než případný zisk. Zjevně maximum nemůže být na hranicích ortantu, neboť to by znamenalo, že firma některý vstup nepotřebuje vůbec, což je ve sporu s našimi předpoklady. Z toho vyplývá, že bod, ve kterém firma dosáhne maximálního zisku, je uvnitř ortantu. Dříve, než přistoupíme k výpočtům, označme pro zjednodušení $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pro $i, j = 1, .., N$.

Nechť jsou tedy v nějakém bodě $x^0 = (x_1^0, ..., x_N^0)$ splněny podmínky prvního řádu:

$$\begin{aligned} p^0 f_1(x^0) - w_1^0 &= 0 \\ &\vdots \\ p^0 f_N(x^0) - w_N^0 &= 0 \end{aligned}$$

Díky vlastnostem produkční funkce víme, že x^0 je bodem maxima zisku. Nyní chceme vyjádřit množství vstupů jako funkci cen vstupů a výstupů, abychom zjistili, jak bude reagovat množství odebíraných vstupů na změny cen. A zde vstoupí do hry Věta o implicitních funkcích. Funkce v soustavě jsou spojitě diferencovatelné jak vzhledem k x_i (díky dvojité spojité diferencovatelnosti f), tak vzhledem k p a w. Jakobián této soustavy vzhledem k x_i je

$$\begin{vmatrix} p^0 f_{11} & \cdots & p^0 f_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ p^0 f_{N1} & \cdots & p^0 f_{NN} \end{vmatrix} = (p^0)^n \det(\mathbb{F}) < 0.$$

Tedy opět můžeme vyjádřit

$$x_1, ..., x_N = x_1(p, w), ..., x_N(p, w).$$

Zderivujme podmínky prvního řádu podle p a vyjádřeme $\frac{\partial x_k}{\partial p}$.

$$\begin{aligned} f_1 + p(f_{11}\frac{\partial x_1}{\partial p} + ... + f_{1N}\frac{\partial x_N}{\partial p}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N + p(f_{N1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + ... + f_{NN}\frac{\partial x_N}{\partial p}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial p} \end{pmatrix} = -\frac{1}{p} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial p} \end{pmatrix} = -\frac{1}{p} \underbrace{\begin{pmatrix} f^{11} & \cdots & f^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{N1} & \cdots & f^{NN} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}^{-1}} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial p} = -\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N} f^{ki} f_i, \quad k = 1, ..., N,$$

kde f^{ki} jsou prvky matice $\mathbb{F}^{-1}$ na příslušných pozicích. Tento výsledek ponechme zatím na chvíli stranou a zderivujme podmínky prvního řádu ještě podle w_l a vyjádřeme $\frac{\partial x_k}{\partial w_l}$.

$$\begin{aligned}
p(f_{11}\frac{\partial x_1}{\partial w_l} + ... + f_{1N}\frac{\partial x_N}{\partial w_l}) &= 0 \\
&\vdots \\
p(f_{l1}\frac{\partial x_1}{\partial w_l} + ... + f_{lN}\frac{\partial x_N}{\partial w_l}) &= 1 \\
&\vdots \\
p(f_{N1}\frac{\partial x_1}{\partial w_l} + ... + f_{NN}\frac{\partial x_N}{\partial w_l}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{l1} & \cdots & f_{lN} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_l}{\partial w_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial w_l} \end{pmatrix} = -\frac{1}{p}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_l}{\partial w_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial w_l} \end{pmatrix} = -\frac{1}{p}\underbrace{\begin{pmatrix} f^{11} & \cdots & f^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{l1} & \cdots & f^{lN} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{N1} & \cdots & f^{NN} \end{pmatrix}}_{\mathbb{F}^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial w_l} = \frac{1}{p} f^{kl}, \quad k, l = 1, ..., N$$

Podívejme se nyní, co se stane s objemem produkce, zdraží-li k-tý vstup.

$$\frac{\partial f}{\partial w_k} = \sum_{i=1}^{N} f_i \frac{\partial x_i}{\partial w_k} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N} f_i f^{ik} = -\frac{\partial x_k}{\partial p},$$

protože $f^{ik} = f^{ki}$. Tedy velikost výstupu reaguje na zvýšení ceny k-tého vstupu přesně opačně než poptávka po k-tém vstupu na zvýšení ceny výstupu. Jinak řečeno, znaménko $\frac{\partial x_k}{\partial p}$ určí, zda se objem produkce zvýší nebo sníží.

Pro situaci, kdy $\frac{\partial x_k}{\partial p} < 0$, má ekonomie vyhrazen termín inferiorní vstup - vstup, jehož zdražení vyvolá zvýšení objemu produkce. Protože pracujeme jenom se znaménky a nikoliv s hodnotami f^{ik}, můžeme vyvodit jen postačující podmínku na inferioritu vstupu: Pokud je k-tý řádek (a díky symetrii i sloupec) matice $\mathbb{F}^{-1}$ kladný, je k-tý prvek inferiorní. Podotkněme, že ať už je k-tý vstup inferiorní nebo ne, zvýšení jeho ceny má vždy negativní dopad na zisk firmy, protože splnění podmínek prvního řádu ($pf_i - w_i = 0$) dá

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_k} = p \sum_{i=1}^{N} f_i \frac{\partial x_i}{\partial w_k} - \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial x_i}{\partial w_k} - x_k = -x_k < 0.$$

Detailnější rozbor problematiky inferiorních vstupů lze nalézt v [1].

Podívejme se ještě, jak to vypadá s objemem odběru k-tého vstupu při jeho zdražení.

$$\frac{\partial x_k}{\partial w_k} = \frac{1}{p} f^{kk},$$

tedy pokud je $f^{kk} > 0$, zareaguje firma na zdražení tohoto vstupu paradoxně zvýšením jeho odběru.

3.4 IS-LM model

Posledním modelem, kterým se budeme zabývat, je takzvaný IS-LM model ekonomiky. My se budeme zabývat jeho Mundell-Flemmingovým rozšířením na otevřenou ekonomiku tak, jak je popsán v [2], str. 325 a 328, cvičení 1. Nejdříve ale popišme model jednoduchý. Popisuje situaci, kdy dojde ke dvěma rovnovážným situacím. První je rovnováha mezi investicemi a úsporami, druhá mezi poptávkou a nabídkou peněz. Vše se zkoumá v závislosti na celkové produkci ekonomiky (HDP) a úrokové sazbě.

Označme HDP jako Y a úrokovou míru R. Úspory $S(Y, R)$ mají následující vlastnosti: roste-li příjem, rostou i úspory, ovšem nemohou růst rychleji než příjem samotný, tím dostáváme, že $0 < \frac{\partial S}{\partial Y} < 1$. Navíc odpovědí na zvýšení úrokové míry bude navýšení úspor. Tedy $\frac{\partial S}{\partial R} > 0$. Investice $I(Y, R)$ mají podobné vlastnosti, jen na zvýšení úrokové míry reagují opačně, tedy $0 < \frac{\partial I}{\partial Y} < 1$ a $\frac{\partial I}{\partial Y} < 0$. $L(Y, R)$ je poptávka po penězích s vlastnostmi

$\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$ a $\frac{\partial L}{\partial R} < 0$. Má-li nastat v modelu rovnováha, musí být množství úspor rovno množství investic a poptávka po penězích musí být stejná jako jejich nabídka, která je v základním IS-LM modelu pevně dána. Zapsáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} I(Y,R) - S(Y,R) &= 0 \\ L(Y,R) - L^* &= 0 \end{aligned}$$

Do rozšířeného modelu přidáme ještě vnější obchod. Označme X export a M import a zaveďme novou funkci $B = X_0 - M(Y) + K(R)$, která popisuje výměnu zboží. K v této rovnici značí pohyb kapitálu. Export považujme za pevně daný. Dále je $0 < \frac{\partial M}{\partial Y} < 1$, neboť s rostoucími příjmy roste poptávka po zboží (i dováženém), ovšem nemůže růst rychleji než příjmy samotné, a $\frac{\partial K}{\partial R} > 0$, protože vysoké úrokové sazby přitahují více kapitálu. Nová soustava rovnovážných rovnic bude tedy vypadat takto:

$$\begin{aligned} I(Y,R) - S(Y,R) + X_0 - M(Y) &= 0 \\ L(Y,R) - L^* &= 0 \\ B = X_0 - M(Y) + K(R) &= 0 \end{aligned}$$

Poznamenejme, že L^* nemůžeme dále považovat za volně daný parametr, neboť bychom měli systém tří rovnic o dvou neznámých a tedy aby zůstala zachována řešitelnost, musí se jeden z parametrů L^* a X_0 měnit v závislosti na druhém. Považujme tedy L^* za funkci $L^*(X_0, Y, R)$. Kromě toho zaveďme nový parametr α pro funkci $I = I(Y, R, \alpha)$ reprezentující vládní výdaje ($\frac{\partial I}{\partial \alpha} > 0$).

Nyní použijeme komparativní statické analýzy k vyšetření vlivu zvýšení vývozu a zvýšení vládních výdajů na výši HDP a úrokových sazeb. Předpokládejme, že se v modelu vytvořila rovnováha, upravme rovnice a požadujme dostatečnou hladkost všech funkcí a nenulovost Jakobiánu soustavy vzhledem k Y a R na okolí rovnovážného bodu $[Y_0, R_0]$.

$$\begin{aligned} I(Y,R) - S(Y,R) - K(R) &= 0 \\ L(Y,R) - L^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y} & \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial K}{\partial R} \\ \frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{\partial L^*}{\partial Y} & \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial L^*}{\partial R} \end{vmatrix} \neq 0$$

Můžeme tedy Y a R vyjádřit jako funkce obou parametrů:

$$Y = Y(\alpha, X)$$

$$R = R(\alpha, X).$$

A nyní už standardně zderivujeme upravené rovnice podle X a α a podíváme se na výsledky.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y} & \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial K}{\partial R} \\ \frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{\partial L^*}{\partial Y} & \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial L^*}{\partial R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial X} \\ \frac{\partial R}{\partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial L^*}{\partial X} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y} & \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial K}{\partial R} \\ \frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{\partial L^*}{\partial Y} & \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial L^*}{\partial R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial I}{\partial \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Označme Δ determinant matice soustavy a vypočteme neznámé $\frac{\partial Y}{\partial X}$, $\frac{\partial R}{\partial X}$, $\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$ a $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$.

$$\Delta = \frac{\partial L}{\partial R}\left(\frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y}\right) - \frac{\partial L}{\partial Y}\left(\frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial S}{\partial R}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial X} &= \frac{-\frac{\partial L^*}{\partial X}\left(\frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial K}{\partial R}\right)}{\Delta} \\ \frac{\partial R}{\partial X} &= \frac{\frac{\partial L^*}{\partial X}\left(\frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y}\right)}{\Delta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \frac{-\frac{\partial I}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial L^*}{\partial R}\right)}{\Delta} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \frac{\frac{\partial I}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial Y} - \frac{\partial L^*}{\partial Y}\right)}{\Delta} \end{aligned}$$

Přijmeme-li nyní předpoklady, že znaménka parciálních derivací L^* jsou opačná k příslušným parciálním derivacím L a že $\frac{\partial L^*}{\partial X} > 0$ (exportem se do ekonomiky dostávají peníze, které zvyšují jejich nabídku), a použijeme-li podmínku stability $\Delta > 0$ (odvození této podmínky lze nalézt v knize [2], str. 314, nebo lze použít předpoklad, že $\frac{\partial I}{\partial Y} \approx 0$ a $\frac{\partial S}{\partial R} \approx 0$), dostáváme, že

$$\frac{\partial Y}{\partial X} > 0 \quad \frac{\partial R}{\partial X} < 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} > 0 \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} > 0 \ .$$

Tedy zvýšení vývozu má pozitivní vliv na HDP, ovšem snižuje úrokové sazby, zatímco navýšení vládních výdajů vede jak k růstu HDP tak úrokové míry. Intuitivně lze tyto výsledky chápat tak, že v obou případech jde o navýšení produkce ekonomiky, ale zatímco v případě vývozu přicházejí do hry peníze zvenčí, které navýší nabídku peněz v ekonomice a tím sníží úrokové sazby, v případě vládních výdajů jde o peníze „vnitřní“, které pak musí nutně chybět jinde.

Literatura

[1] Bear D. B. T.: *Inferior inputs and the theory of the firm*, The J. of Political Economy, Vol 73, No. 3 (1965) 287–289.

[2] Gandolfo G.: *Economic dynamics*, Springer, Berlin, 1997.

[3] Lancaster K.: *The Scope of Qualitative Economics*, The Review of Economic Studies, Vol. 29, No. 2. (1962), 99–123.

[4] Zajíček L.: *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, Praha, 2003.

[5] Zimmermann K.: *Úvod do matematické ekonomie*, Karolinum, Praha, 2002.