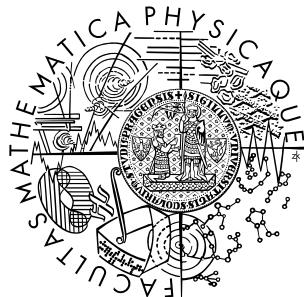


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martina Kalužíková

Diskontované řízení portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2008

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Jakubu Kozákovi za jeho pomoc v boji s výpočetní technikou a také Daně Staníkové za rady v počátcích mé práce. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za řadu podnětných rad a připomínek.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. dubna 2008

Martina Kalužíková

Název práce: Diskontované řízení protfolia

Autor: Martina Kalužíková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

e-mail vedoucího: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Mějme investora, který investuje na akciovém a peněžním trhu. Jeho cílem je maximalizovat očekávaný akumulovaný diskontovaný užitek z tržní hodnoty portfólia v nekonečném časovém horizontu. Ukážeme, že pro $\beta < 1$ blízké 1 výsledky odpovídají maximalizaci logaritmické užitkové funkce z tržní hodnoty portfólia v nekonečném horizontu.

Klíčová slova: Markovovy procesy, Howardův algoritmus, Brownův pohyb

Title: Diskontic Control of Portfolio

Author: Martina Kalužíková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We consider an investor who invests in a stock and a money market. His aim is to maximize the expected accumulated diskontic utility from market value of the portfolio in indefinite time horizont. We show, that for $\beta < 1$ close to 1 the results correspond with maximization of logarithmical utility function of portfolio market value in infinite horizon.

Keywords: Markov process, Howard's algorithm, Brownian motion

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Motivace | 5 |
| Úvod | 6 |
| 1 Markovovy řetězce s diskrétním časem | 7 |
| 1.1 Řízené Markovovy řetězce | 10 |
| 1.1.1 Markovovy řetězce s diskontovaným oceněním přechodů | 10 |
| 1.1.2 Nehomogenní řízení | 15 |
| 1.2 Howardův iterační postup | 16 |
| 2 Brownův pohyb a Itôovo lemma | 18 |
| 2.1 Itôovo lemma | 18 |
| 2.2 Brownův pohyb | 19 |
| 3 Optimální obchodní strategie | 21 |
| 3.1 Spojitý model | 21 |
| 3.2 Aproximace spojitého modelu diskrétním | 23 |
| 3.3 Nalezení optimálního řízení | 24 |
| 3.3.1 Spojitý model | 24 |
| 3.3.2 Diskrétní model | 25 |
| 3.3.3 Porovnání očekávaných výsledků v daných modelech | 27 |
| 3.3.4 Porovnání numerických hodnot | 27 |
| A Programová realizace diskrétního modelu | 30 |
| A.1 Případ pro $\beta \rightarrow 1^-$ | 30 |
| A.2 Případ pro $\beta << 1$ | 32 |
| Literatura | 34 |

Moticace

1. Uvažujme investora jehož úkolem je maximalizovat očekávaný akumulovaný diskontovaný užitek z tržní hodnoty portfólia v nekonečném časovém horizontu.
2. Zajímá nás zda platí rovnost

$$\sum_{l=0}^{\infty} \beta^l \ln \mathcal{W}_{l\delta} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l \sum_{k=1}^l \Delta \ln \mathcal{W}_{k\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \beta^l \right) \Delta \ln \mathcal{W}_{k\delta} = \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Delta \ln \mathcal{W}_{k\delta}.$$

Označíme-li užitkovou funkci $u(x) = \ln x$, pak úloha maximalizovat $\mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Delta \ln \mathcal{W}_{k\delta}$ a úloha maximalizovat $\mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k u(\mathcal{W}_{k\delta})$ má stejné řešení.

Úvod

Tato práce se zabývá nalezením optimální obchodní strategie při existenci transakčních nákladů v diskrétním modelu.

První kapitola je věnovaná shrnutí poznatků o diskontovaných řízených i neřízených Markovových řetězcích s diskrétním časem. Klíčovou částí této kapitoly je popis a důkaz modifikovaného Howardova iteračního algoritmu v sekci 1.2, který se v diskrétním případě používá k nalezení optimální obchodní strategie. Jako výchozí zdroje mi v této kapitole sloužily [6] v části věnované neřízeným Markovovým řetězcům, [3] pro řízené řetězce a [7].

Druhá kapitola se zabývá co nejjednodušším přiblížením Brownova pohybu, který je využíván při odvození spojitého modelu. Vzhledem k tomu, že tato práce je zaměřena hlavně na diskrétní případ, jsou pojmy v této kapitole pouze zjednodušeně přiblíženy. Používala jsem přitom publikace [1], [4], [7] a [8].

Závěrečná kapitola se v části 3.1 věnuje popisu problému hledání obchodní strategie ve spojitém modelu. Ani zde však nebyl kladen hlavní důraz na detailní popis, ale spíše na shrnutí hlavních charakteristik spojitého modelu, které jsou využity v závěrečné numerické studii. Problematici spojitého modelu se detailně věnuje [2] nebo [5], z nichž jsem také čerpala.

Kapitola 1

Markovovy řetězce s diskrétním časem

Nechť posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečnou množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$, dále jen X_n . Pro další práci potřebujeme zavést matici pravděpodobnosti přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ a pravděpodobnosti přechodu

$$p_{ij} := P(X_n = j | X_{n-1} = i).$$

Dále je třeba zavést nový pojem a to stacionární rozdělení, které budeme značit

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_j, j \in S).$$

Nechť $\boldsymbol{\pi}$ je pravděpodobnostní rozdělení na množině S , tj. $\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Potom se tedy $\boldsymbol{\pi}$ nazývá stacionární rozdělení daného řetězce X_n , jestliže platí

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}. \quad (1.1)$$

Poznámka 1.0.1: V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavami jsou všechny stavky trvalé, nenulové.

Věta 1.0.1 *Jsou-li všechny stavky trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jediné. Jsou-li všechny stavky neperiodické, potom pro stacionární pravděpodobnosti π_j platí*

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in S \quad (1.2)$$

a rovněž

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n), \quad j \in S, \quad (1.3)$$

kde $p_{ij}^{(n)} := P(X_{n+m} = j | X_m = i)$ a $p_j(n) = P(X_n = j)$

Důkaz: Viz důkaz věty 2.25 (ii) v [6]

□

Věta 1.0.2 Nechť j je přechodný stav Markovova řetězce. Potom při $n \rightarrow \infty$

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0, \quad i \in S. \quad (1.4)$$

Důkaz: Viz důkaz věty 2.9 (i) v [6]

□

K důkazu věty 1.0.4 budeme potřebovat následující větu z teorie matic.

Věta 1.0.3 Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ je matice taková, že $\mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{0}$ při $n \rightarrow \infty$, kde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ je nulová matice. Potom matice $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ je regulární a platí

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}^k.$$

Důkaz: Viz důkaz věty B.2 v [6].

□

Věta 1.0.4 Bud' X_n aperiodický homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy S s nerozložitelnou množinou trvalých stavů \mathbf{C} a množinou přechodných stavů \mathbf{T} . Pak pro matici přechodu \mathbf{P} tohoto řetězce platí

$$\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{\Pi} \text{ pro } n \rightarrow \infty, \text{ kde } \mathbf{\Pi} := (\boldsymbol{\pi}, \dots, \boldsymbol{\pi})^T \in \mathbb{R}^{S \times S}$$

je matice s řádky jsou tvořenými vektory stacionárního rozdělení $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^S$ řetězce X_n .

Důkaz: Podle věty 2.12 v [6] se stavy řetězce X_n dají přečíslovat tak, aby po přečíslování byla matice přechodu \mathbf{P} tohoto řetězce ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{T \times C}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ a $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{C \times C}$ je matice přechodu ergodického podřetězce odpovídající trvalým stavům řetězce X_n a kde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{C \times T}$ je nulová matice. Podle poznámky 1.0.1 a věty 2.25 v [6] existuje právě jedno rozdělení $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{R}^C$ na C takové, že $\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\boldsymbol{\pi}}$ takové, že $\mathbf{P}^n \rightarrow \tilde{\mathbf{\Pi}} = (\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\pi}})^T$. Pak $\boldsymbol{\pi}^T := (\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T, \mathbf{0}^T) \in \mathbb{R}^S$ je stacionární rozdělení X_n , neboť

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P} = (\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\boldsymbol{\pi}}^T \mathbf{0}) = (\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T, \mathbf{0}^T) = \boldsymbol{\pi}^T \quad (1.6)$$

a kde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^T$ je nulový vektor.

Pokud naopak $\boldsymbol{\nu} = (\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T, \bar{\boldsymbol{\nu}}^T)^T$ je stacionární rozdělení řetězce X_n , kde $\tilde{\boldsymbol{\nu}} \in \mathbb{R}^C$, $\bar{\boldsymbol{\nu}} \in \mathbb{R}^T$. Pak platí soustavy

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \bar{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{Q} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \quad (1.7)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{0} + \bar{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{R} = \bar{\boldsymbol{\nu}}^T. \quad (1.8)$$

Podle věty 2.9 v [6] platí $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ a podle věty 1.0.3 je matice $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ regulární a z (1.4) tak dostáváme, že $\bar{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^T$. Pak $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ je rozdělení na C a podle (1.3) platí

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T. \quad (1.9)$$

Z jednoznačnosti $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ dostáváme, že $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}$ a tak

$$\boldsymbol{\pi}^T = (\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T, \mathbf{0}^T) = (\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T, \mathbf{0}^T) = \boldsymbol{\nu}^T. \quad (1.10)$$

Zbývá ukázat, že $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j$ pro $n \rightarrow \infty$. Případ $i \in S, j \in T$ plyne z věty 1.0.2 a případ $i, j \in C$ z věty 1.0.1.

Nechť nyní $i \in T, j \in C$. Pro potřeby důkazu definujeme čas prvního vstupu řetězce X_n do množiny trvalých stavů C předpisem a pravděpodobnosti absorpcie

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0, X_n \in C\}, \quad u_{ij}^{(n)} := P_i(X_\tau = j, \tau = n | X_0 = i), \quad i \in T, j \in C. \quad (1.11)$$

Podle věty o úplné pravděpodobnosti pro $0 \leq u_{is}^{(k)}$ platí

$$\sum_{s \in C} \sum_{k=0}^{\infty} u_{is}^{(k)} = 1.$$

Podobně rozborem možností dostáváme

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{s \in C} \sum_{k=0}^n u_{is}^{(k)} p_{sj}^{(n-k)} = \sum_{s \in C} \sum_{k=0}^{\infty} u_{is}^{(k)} p_{sj}^{(n-k)} \mathbf{1}_{[n \geq k]}. \quad (1.12)$$

Dále z Lebesqueovy věty o majorantě a z konvergence

$$p_{sj}^{(n-k)} \mathbf{1}_{[n \geq k]} \rightarrow \pi_j$$

plyne, že

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \sum_{s \in C} \sum_{k=0}^{\infty} u_{is}^{(k)} \pi_j = \pi_j \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

□

1.1 Řízené Markovovy řetězce

V této kapitole budeme pracovat jen opět s homogenními Markovovými řetězci s konečně mnoha stavů. Nyní ke každému stavu $s \in S$ uvažujme konečnou množinu přípustných rozhodnutí R_s . Homogenním řízením řetězce X_n pak budeme rozumět jakýkoli prvek

$$\mathbf{r} = (r_s)_{s \in S} \in \mathbf{R} := \prod_{s \in S} R_s,$$

který ke každému stavu $s \in S$ přiřazuje rozhodnutí $r_s \in R_s$.

Předpokládejme, že přechod řetězce X_n ze stavu $i \in S$ do stavu $j \in S$ je spojen se ziskem ${}_\rho z_{ij}$ pokud jsme zvolili rozhodnutí $\rho \in R_i$. Dále předpokládejme, že přechod řetězce X_n ze stavu $i \in S$ do stavu $j \in S$ nastane při rozhodnutí $\rho \in R_i$ s pravděpodobností ${}_\rho p_{ij}$. Je-li tedy řetězec X_n ve stavu $i \in S$ a my zvolili rozhodnutí $\rho \in R_i$, bude se hodnota řetězce X_{n+1} v následujícím okamžiku řídit rozdělením ${}_\rho \mathbf{p}_i := ({}_\rho p_{ij})_{i \in S}$. Získané hodnoty odpovídající jednotlivým přechodům pak budeme zapisovat pomocí vektoru ocenění ${}_\rho \mathbf{z}_i := ({}_\rho z_{ij})_{j \in S}$.

Pro konkrétní homogenní řízení $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ je pak X_n homogenním Markovovým řetězcem s maticí přechodu $\mathbf{r}\mathbf{P}$ a s oceněním přechodů daných maticí $\mathbf{r}\mathbf{Z}$, kde

$$\mathbf{r}\mathbf{P} = ({}_{r_i} \mathbf{p}_i^\top)_{i \in S} = ({}_{r_i} p_{ij})_{i, j \in S}, \quad \mathbf{r}\mathbf{Z} = ({}_{r_i} \mathbf{z}_i^\top)_{i \in S} = ({}_{r_i} z_{ij})_{i, j \in S}.$$

Tyto rovnosti upravují vztahy mezi maticovým, vektorovým a složkovým zápisem. Dále zavedeme vektor středních výnosů za jedno období $\mathbf{r}\mathbf{q}$ odpovídající různým počátečním stavům a řízení $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ předpisem

$$\mathbf{r}\mathbf{q} := ({}_{r_i} q_i)_{i \in S}, \text{ kde } {}_\rho q_i := {}_\rho \mathbf{p}_i^\top {}_\rho \mathbf{z}_i$$

představuje střední výnos za jedno období odpovídající počátečnímu stavu $i \in S$ Markovova řetězce X_n a rozhodnutí $\rho \in R_i$.

1.1.1 Markovovy řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Předpokládejme, že kapitál je úročen a že se zajímáme o jeho hodnotu diskontovanou k počátečnímu okamžiku. Přepočítání částek splatných na konci jednotlivých období na jejich hodnotu k počátečnímu okamžiku se nazýva diskontováním. Jedná se o násobení hodnotou $\beta \in (0, 1)$, kterou budeme nazývat diskontní faktor.

V této části budeme předpokládat, že je pevně zvoleno nějaké řízení $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$. Odpovídající matici přechodu budeme značit \mathbf{P} a matici ocenění \mathbf{Z} . Přední index \mathbf{r} tak budeme vynechávat. Předpokládejme, že zisk z_{ij} související s přechodem ze stavu $i \in S$ do stavu $j \in S$ v období $(n, n+1)$ už je přepočítán (rozuměno diskontován) do okamžiku n .

Věta 1.1.1 *Mějme Markovův řetězec s konečnou množinou stavů S , matici pravděpodobnosti přechodu \mathbf{P} a matici ocenění přechodu \mathbf{Z} , kde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ a $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{S \times S}$.*

Dále mějme diskontní faktor $\beta \in (0, 1)$. Pro výpočet středního diskontovaného výnosu $\mathbf{v}(n) \in \mathbb{R}^S$ za n období platí následující rekurentní vztah

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(n-1), \quad (1.13)$$

kde $n \geq 1$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^S$ a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^S$ značí vektor výnosů realizovaných za jedno období

$$\mathbf{q} = (q_i)_{i \in S}, \quad \text{kde } q_i := \mathbf{p}_i^T \mathbf{z}_i. \quad (1.14)$$

Důkaz: Viz obdoba důkazu věty 2.29 v [6]. Přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ je spojen se ziskem z_{ij} v čase n . Potom ocenění tohoto přechodu přepočítané k počátečnímu okamžíku je $\beta^n z_{ij}$, kde $0 < \beta < 1$ je daný diskontní faktor. Realizace $(X_0 = i, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$ dává výnos $z_{ii_1} + \beta z_{i_1 i_2} + \dots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1} i_n}$. Pravděpodobnost této realizace podmíněná tím, že $X_0 = i$ je $p_{ii_1} p_{i_1 \dots i_n}$, kde $p_{i_1 \dots i_n} := p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \dots p_{i_{n-1} i_n}$. Střední výnos za n období při počátečním stavu i je tedy roven

$$\begin{aligned} v_i(n) &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} (z_{ii_1} + \beta(z_{i_1 i_2}) + \dots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1} i_n}) p_{ii_1} p_{i_1 \dots i_n} \\ &= \sum_{i_1} z_{ii_1} p_{ii_1} + \beta \sum_{i_1} p_{i_1 i_2} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} (z_{i_1 i_2} + \beta z_{i_2 i_3} + \dots + \beta^{n-2} z_{i_{n-1} i_n}) p_{i_1 \dots i_n} \\ &= q_i + \beta \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1), \quad i \in S, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Pro $i \in S$ a $n \in \mathbb{N}$ tak dostáváme vztah $v_i(n) = q_i + \beta \sum_{j_1} p_{ij_1} v_{j_1}(n-1)$, což je složkový zápis maticového vztahu (1.13). \square

Věta 1.1.2 Pro diskontovaný střední výnos plati

$$\mathbf{v}(\infty) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} \quad (1.15)$$

Důkaz: Z rekurentního vztahu dostávame

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} (\mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-2)) = \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} \quad (1.16)$$

Protože $0 < \beta < 1$ a $\mathbf{P}^k \rightarrow \prod$, konverguje matice $\beta^k \mathbf{P}^k$ k nulové matici. Podle dříve zmíněných vět tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}. \quad (1.17)$$

\square

Tato věta je uvedena jako věta 2.30 v [6]. Následující větu i s poznámkami můžeme nalézt v [3].

Věta 1.1.3 Pro diskontované očekávané výnosy platí

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{v}(\infty) + O(\beta^n), n \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

Důkaz: Podle věty 1.1.1 platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} - \beta^n \mathbf{P}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} \right) \\ &= (\mathbf{I} - \beta^n \mathbf{P}^n) (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Podle věty 1.1.2 platí

$$(\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{v}(\infty), \quad (1.19)$$

a tak dostáváme

$$\mathbf{v}(n) - \mathbf{v}(\infty) = -\beta^n \mathbf{P}^n (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = O(\beta^n), \quad (1.20)$$

neboť podle věty 1.0.4 platí $\mathbf{P}^n (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\Pi} (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$. \square

Poznámka 1.1.1: Z definice stacionárního rozdělení plyne

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T,$$

kde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^S$. Z předpokladu, že matice \mathbf{P} je stochastická plyne, že

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Potom také

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\Pi}$$

a z vlastnosti $\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{1} = 1$ dostáváme, že

$$\boldsymbol{\Pi}^2 = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\Pi}.$$

Z definice (1.1) dostaneme, že

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\Pi}.$$

S jejich použitím lze odvodit

$$(\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})^2 = \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}\boldsymbol{\Pi} - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{P} + \boldsymbol{\Pi}^2 = \mathbf{P}^2 - \boldsymbol{\Pi}$$

a dále indukcí pro $k \geq 1$ získáváme

$$(\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}. \quad (1.21)$$

Poznámka 1.1.2: Z věty 1.1.3 a poznámky 1.1.1 získáváme vztah

$$(\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi} \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.22)$$

pro $k \rightarrow \infty$. Podle věty 1.0.3 je matice $\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})$ regulární, přičemž platí

$$(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}),$$

z čehož vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} - \mathbf{I}. \quad (1.23)$$

Pokud posuneme sčítací index do nuly a dosadíme (1.23) do posledního vztahu dostaneme konvergentní maticovou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} - \mathbf{I},$$

neboli

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \boldsymbol{\Pi}) = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} - \boldsymbol{\Pi}. \quad (1.24)$$

Nyní zavedeme několik označení pro další zjednodušení zápisu.

Označení: Matici odvozenou v (1.24) budeme označovat

$$\mathbf{A} =: [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi})]^{-1} - \boldsymbol{\Pi} \quad (1.25)$$

a pro součiny $\mathbf{A}\mathbf{q}$ a $\boldsymbol{\Pi}\mathbf{q}$ zavedeme označení

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{q}.$$

Při použití tohoto označení ve vztahu pro přibližnou hodnotu očekávaného výnosu

$$\tilde{\mathbf{v}}(n) \sim n\boldsymbol{\Pi}\mathbf{q} + [(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1} - \boldsymbol{\Pi}] \mathbf{q}. \quad (1.26)$$

dostaneme vyjádření očekávaného výnosu $\tilde{\mathbf{v}}(n)$ pro $n \rightarrow \infty$ ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{v}}(n) = n\boldsymbol{\Pi}\mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{q} + o(1) = n\mathbf{c} + \mathbf{b} + o(1). \quad (1.27)$$

Ze vztahu $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T$ plyne, že

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{q} = c \cdot \mathbf{1},$$

kde $c = \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{q}$ reprezentuje dlouhodobý přírustek středního výnosu za jedno období. Vektor \mathbf{b} pak představuje korekce zohledňující to, ze kterého stavu řetězec vychází.

Věta 1.1.4 Pro diskontovaný střední výnos \mathbf{v} platí vztah

$$\mathbf{v}(1 - \beta) = \mathbf{\Pi}\mathbf{q} + (1 - \beta)[\mathbf{I} - \beta(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1}\mathbf{q}.$$

Potom také platí

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{\Pi}\mathbf{q}}{1 - \beta} + \mathbf{A}\mathbf{q} + o(1), \quad (1.28)$$

pro $\beta \rightarrow 1_-$ a $\mathbf{\Pi}\mathbf{q} = c\mathbf{1}$.

Důkaz: Nechť platí následující vztahy

$$\mathbf{v}(1 - \beta) \rightarrow \mathbf{c}\mathbf{1}$$

pro $\beta \rightarrow 1_-$, kde $\mathbf{c} = \mathbf{\Pi}\mathbf{q} = c\mathbf{1}$, tj.

$$\mathbf{v}(1 - \beta) \rightarrow \mathbf{\Pi}\mathbf{q},$$

kde $\mathbf{\Pi} = (\pi, \dots, \pi)^T \in \mathbb{R}^{S \times S}$. Zřejmě s využitím (1.21) platí následující vztah

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\mathbf{P})^k &= \sum_{k=0}^{\infty} [\beta(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\mathbf{\Pi})^k \\ &= [\mathbf{I} - \beta(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1} + [\mathbf{I} - \beta\mathbf{\Pi}]^{-1}, \end{aligned}$$

kde první scítanec pro $\beta \rightarrow 1_-$ konverguje k

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1} = O(1)$$

a druhý je roven součtu nekonečné geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \mathbf{\Pi}^k$. Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(1 - \beta) - \mathbf{\Pi}\mathbf{q} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\mathbf{P})^k (1 - \beta) - \mathbf{\Pi} \right] \mathbf{q} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (1 - \beta)(\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) \right] \mathbf{q} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (1 - \beta)(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k \right] \mathbf{q} \\ &= (1 - \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k \mathbf{q} \\ &= (1 - \beta)[\mathbf{I} - \beta(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1} \mathbf{q} \rightarrow [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1} \mathbf{q} \end{aligned}$$

pro $\beta \rightarrow 1_-$, kde se opět využívá vztahu 1.0.4 a věty 1.1.3 a také znalosti geometrického rozdělení.

Ukázali jsme tak, že platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(1 - \beta) &= \mathbf{\Pi}\mathbf{q} + (1 - \beta)[\mathbf{I} - \beta(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1}\mathbf{q} \\ &= \mathbf{\Pi}\mathbf{q} + (1 - \beta)\mathbf{A}\mathbf{q} + o(1 - \beta) \end{aligned}$$

pro $\beta \rightarrow 1_-$ a to je náš požadovaný vztah (1.28). \square

1.1.2 Nehomogenní řízení

V této části budeme uvažovat situaci, kdy v každém diskrétním časovém okamžiku se rozhodneme, které (homogenní) řízení pro tento okamžik (krok) budeme volit. Nehomogenním řízením řetězce X_n na intervalu $(0, N)$ tak budeme rozumět posloupnost (homogenních) řízení $(\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N) \in \mathbf{R}^N$. Opět zde zavádíme pojem diskontování, což je přepočítávání částek splatných ke konci jednotlivých období na jejich hodnotu k počátečnímu okamžiku a β je tzv. diskontní faktor. Označíme-li symbolem $\mathbf{v}(n, N)$ diskontovaný střední výnos za časové období (n, N) , dostaneme podobně jako ve větě 1.1.1 rekurentní vztah

$$\mathbf{v}(n, N) = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} + \beta {}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}\mathbf{v}(n+1, N), \quad (1.29)$$

kde $\mathbf{v}(N, N) = \mathbf{0}$ a ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} = ({}_{\mathbf{r}}q_i; i \in S)$ značí výnos realizovaný za jedno období

$${}_{\rho}\mathbf{q} = ({}_{\rho}\mathbf{p}_i \cdot {}_{\rho}\mathbf{z}_i^T). \quad (1.30)$$

přičemž $\rho := r_i \in R_i$. Definujeme-li

$$\widehat{\mathbf{v}}_i(n-1, N) = \max_{\rho \in R_i} ({}_{\rho}q_i + \beta {}_{\rho}\mathbf{p}_i^T \widehat{\mathbf{v}}(n, N)) \quad (1.31)$$

a $\widehat{\mathbf{v}}(N, N) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^S$, dostaneme

$$\mathbf{v}(n, N) \leq \widehat{\mathbf{v}}(n, N)$$

pro každé $n \in \{0, \dots, N\}$. Podrobný důkaz je možné získat mírnou obměnou důkazu obdobné nerovnosti pro případ $\beta = 1$, viz. [3] strana 124. To znamená, že příslušné nehomogenní řízení je na intervalu $(0, N)$ optimální. Na příkladech v [3] se na stranách 125–128 ukazuje, že pro velká $N \in \mathbb{N}$ vychází optimální řízení v nediskontovaném případě ve tvaru $(\mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}, \mathbf{r}^k, \dots, \mathbf{r}^N)$, kde \mathbf{r} odpovídá optimálnímu homogennímu řízení.

Lze pak očekávat, že na nekonečném intervalu $(0, \infty)$ bude maximální střední výnos dávat (nehomogenní) řízení $(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \dots) \in \mathbf{R}^N$ vytvořené z optimálního homogenního řízení $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$. Ze vztahu (1.31) tak dostáváme návod jak toto optimální (homogenní) řízení \mathbf{r} hledat. Podrobný popis příslušného postupu, včetně důkazu, je uveden v následující části.

Pro další práci je vhodné při čtení následného iteračního postupu porovnávat (1.32) se vzorcem (1.31)

1.2 Howardův iterační postup

V této části zavedeme pro zjednodušení zkrácené označení: přední index odpovídající řízení $\mathbf{r}^{(k)} = (r_i^{(k)}, i \in S)$ v k -tém kroku algoritmu budeme zkráceně zapisovat písmenem k . Tedy místo obšírného zápisu $_{\mathbf{r}^{(k)}} \mathbf{P}$ a $_{\mathbf{r}^{(k)}} \mathbf{Z}$ budeme užívat pouze zápis ${}_k \mathbf{P} = ({}_k \mathbf{p}_i^T, i \in S)^T$ a ${}_k \mathbf{Z} = ({}_k \mathbf{z}_i^T, i \in S)^T$ a obdobně místo $_{\mathbf{r}^{(k)}} \mathbf{q}$ píšeme ${}_k \mathbf{q} = ({}_k q_i, i \in S)$, místo ${}_{\mathbf{r}_i^{(k)}} \mathbf{p}_i$ pouze ${}_k \mathbf{p}_i = ({}_k p_{ij}, j \in S)$ a místo ${}_{\mathbf{r}_i^{(k)}} \mathbf{z}_i$ jen ${}_k \mathbf{z}_i = ({}_k z_{ij}, j \in S)$.

Algoritmus popíšeme v několika následujících krocích:

1. Zvolíme nulté přiblížení $\mathbf{r}^{(k)}$, $k = 0$ k hledanému homogennímu řízení.
2. Toto $\mathbf{r}^{(k)}$ jednoznačně určuje matice ${}_k \mathbf{P}$ a ${}_k \mathbf{Z}$. Pomocí vzorce ${}_k q_i = {}_k \mathbf{p}_i^T {}_k \mathbf{z}_i$ pro $i \in S$ vypočteme složky vektoru ${}_k \mathbf{q}$ odpovídající střednímu výnosu za období délky jedna pro řízení $\mathbf{r}^{(k)}$.
3. Vypočítáme složky vektoru akumulovaného středního výnosu na základě diskontovaného řízení odpovídající řízení $r^{(k)}$

$${}_k \mathbf{v} := (\mathbf{I} - \beta_k \mathbf{P})^{-1} {}_k \mathbf{q}.$$

4. Pro všechna $i \in S$ najdeme rozhodnutí $r_i^{(k+1)} \in R_i$

$$r_i^{(k+1)} = \arg \max_{\rho \in R_i} ({}_\rho q_i + {}_\rho \mathbf{p}_i^T {}_k \mathbf{v}). \quad (1.32)$$

Pokud rozhodnutí v minulém kroku $r_i^{(k)} \in R_i$ dává maximální výsledek

$$\max_{\rho \in R_i} ({}_\rho q_i + {}_\rho \mathbf{p}_i^T {}_k \mathbf{v}),$$

pak volíme $r_i^{(k+1)} := r_i^{(k)}$. V opačném případě nestanovujeme, které z více možných rozhodnutí vedoucí k maximálnímu výsledku zvolíme.

Poznámka 1.2.1: Z kroku 4 algoritmu plyne, že pro řízení $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$${}_{k+1} \mathbf{q} + \beta_{k+1} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{v} \geq {}_k \mathbf{q} + \beta_k \mathbf{P}_k \mathbf{v} \quad (1.33)$$

platí kdykoli $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$.

Věta 1.2.1 *Nechť $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$${}_{k+1} \mathbf{v} \geq {}_k \mathbf{q} + \beta_k \mathbf{P}_k \mathbf{v} \quad (1.34)$$

Speciálně volbou $\mathbf{s} := {}_k \mathbf{v}$ dostáváme ${}_{k+1} \mathbf{v} \geq {}_k \mathbf{v}$.

Důkaz: Volíme-li $\mathbf{s} := {}_k \mathbf{v}$, dostaneme z nerovnosti (1.33) nerovnost

$${}_{k+1} \mathbf{q} + \beta_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{v} \geq {}_k \mathbf{q} + \beta_k \mathbf{P}_k \mathbf{v} = {}_k \mathbf{v}. \quad (1.35)$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost zapsanou ve tvaru ${}_{k+1} \mathbf{q} \geq (\mathbf{I} - \beta_{k+1} \mathbf{P})_k \mathbf{v}$ nezápornou maticí $(\mathbf{I} - \beta_{k+1} \mathbf{P})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_{k+1} \mathbf{P})^n$ obdržíme nerovnost

$${}_{k+1} \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \beta_{k+1} \mathbf{P})^{-1} {}_{k+1} \mathbf{q} \geq {}_k \mathbf{v}. \quad (1.36)$$

Dále z nerovnosti (1.33) a z (1.36) plyne, že

$${}_{k+1} \mathbf{v} = {}_{k+1} \mathbf{q} + \beta_{k+1} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{v} \geq {}_{k+1} \mathbf{q} + \beta_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{v} \geq {}_s \mathbf{q} + \beta_s \mathbf{P}_k \mathbf{v},$$

kdykoli $s \in \mathbf{R}$

□

Věta 1.2.2 *Nechť $k \in \mathbb{N}_0$ je takové, že ${}_{k+1} \mathbf{v} = {}_k \mathbf{v}$, pak platí ${}_k \mathbf{v} \geq {}_s \mathbf{v}$ pro každé $\mathbf{s} \in \mathbf{R}$.*

Důkaz: Z nerovnosti (1.34) a z předpokladu ${}_{k+1} \mathbf{v} = {}_k \mathbf{v}$ dostáváme, že ${}_s \mathbf{q} \leq (\mathbf{I} - \beta_s \mathbf{P})_k \mathbf{v}$. Vynásobením této nerovnosti nezápornou maticí $(\mathbf{I} - \beta_s \mathbf{P})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_s \mathbf{P})^n$ dostaneme nerovnost ${}_k \mathbf{v} \geq (\mathbf{I} - \beta_s \mathbf{P})^{-1} {}_s \mathbf{q} = {}_s \mathbf{v}$.

□

Věta 1.2.3 *Po konečně mnoha krocích algoritmus končí nalezením optimálního homogenního řízení. To nastává v okamžiku, kdy další iterační krok vede k témuž vektorovému výnosu jako ten předcházení.*

Důkaz: Řízení podle věty 1.2.1 dává neklesající posloupnost vektorů ${}_k \mathbf{v} = {}_k \mathbf{q} + \beta_k \mathbf{P}_k \mathbf{v}$, přičemž poznámka o způsobu volby $\arg \max$ zaručí, že změna řízení vede k vyššímu výnosu alespoň v jedné složce vektoru. Je nutné ověřit, že iterační postup po konečně mnoha krocích skončí. Ve druhé části ověříme, že výsledné řízení je skutečně optimální.

1. Po konečně mnoha krocích se iterační postup jistě zastaví. Možnost, že by se nezastavil můžeme vyloučit.

(a) Z věty 1.2.1 plyne, že ${}_k \mathbf{v}$ je neklesající posloupnost v \mathbb{R}^m nabývající konečně mnoha hodnot z množiny $\{{}_r \mathbf{v}, r \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ (v původním značení).

Odtud v každé k -té složce je ${}_k \mathbf{v}$ stacionární posloupnost a díky tomuto poznatku je ${}_k \mathbf{v}$ stacionární posloupnost, tj. $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 : {}_k \mathbf{v} = {}_{k_0} \mathbf{v}$.

(b) Nyní sporem ukážeme, že $\forall k \geq k_0$ platí ${}_k r = {}_{k_0} r$ a to s využitím vztahu ${}_k \mathbf{v} = {}_{k_0} \mathbf{v}$.

Nechť ${}_k r \neq {}_{k_0} r$. Pak $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ platí ${}_k \mathbf{v}_i > {}_{k_0} \mathbf{v}_i \geq {}_s \mathbf{v}_i$, což nám dává spor, který jsme dostali druhou nerovností díky větě 1.2.2.

V první části důkazu jsme ukázali, že každý iterační krok vede pro různá řízení k vyššímu očekávanému výnosu. A za předpokladu, že řízení je jen konečně mnoho, je zřejmé, že algoritmus musí po konečně mnoha krocích skončit.

2. Ověření optimality ${}_k r$ plyne přímo z věty 1.2.2 a to například volbou $k = k_0$.

Kapitola 2

Brownův pohyb a Itôovo lemma

Tato kapitola vychází z bakalářské práce [7]. Nejprve heuristicky odvodíme formuli Itôovo lemmatu a v další části zadefinujeme Brownův pohyb. Výsledky potom využijeme v následující kapitole.

2.1 Itôovo lemma

Nechť X_0 je náhodná veličina odpovídající pozorované hodnotě sledované veličiny v čase 0, která nezávislá s n.v. ϵ se symetrickým alternativním rozdelením

$$P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = 1/2 \quad (2.1)$$

a předpokládejme, že hodnota sledované veličiny v čase Δt je dána následující rovnicí

$$X_{\Delta t} = X_0 + \mu \Delta t + \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (2.2)$$

kde $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že je dána dostatečně hladká transformace $f \in C^2(\mathbb{R})$ a že nás zajímá vyjádření změny transformované veličiny v závislosti na výsledné hodnotě veličiny ϵ . Budeme předpokládat, že uvažovaný časový interval Δt je velmi malý, proto mu odpovídá podle (2.2) velmi malá změna $\Delta X := X_{\Delta t} - X_0$ sledované veličiny a také velmi malá změna $f(\Delta X) := f(X_{\Delta t}) - f(X_0)$ transformované hodnoty. Použitím Taylorova rozvoje druhého řádu funkce f v bodě X_0 dostaneme

$$\Delta f(X) \sim f'(X_0) \Delta X + \frac{1}{2} f''(X_0) (\Delta X)^2 \quad (2.3)$$

$$\sim f'(X_0) (\mu \Delta t + \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} f''(X_0) (\mu \Delta t + \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t})^2. \quad (2.4)$$

Pokud budeme zanedbávat členy řádvě menší jako $\Delta t \rightarrow 0^+$, dojdeme k odhadu

$$\Delta f(X) \sim f'(X_0) (\mu \Delta t + \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t}) + \frac{f''(X_0)}{2} \epsilon^2 \sigma^2 \Delta t \quad (2.5)$$

$$\sim \left[f'(X_0) \mu + \frac{f''(X_0)}{2} \sigma^2 \right] \Delta t + f'(X_0) \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Protože $P(\varepsilon^2 = 1) = 1$ podle (2.1). Tuto approximaci budeme využívat v následující kapitole. V další části této kapitoly budeme směřovat k jejímu diferenciálnímu vyjádření.

2.2 Brownův pohyb

Nyní přejdeme od diskrétních intervalů délky Δt ke spojitému času. Přírůstek času Δt je v tomto případě reprezentovaný jako dt a akumulativní součty nezávislých veličin ε budou po časové a prostorové standardizaci konvergovat k Wienerovu procesu.

Definice 2.2.1: Nechť náhodný proces $W(t)$ splňuje následující podmínky:

1. $W(0) = 0$ a $(W(t), t \geq 0)$ má spojité trajektorie.
2. Přírustky $\Delta W(t_1), \Delta W(t_2), \dots, \Delta W(t_n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro libovolné časy $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, kde $\Delta W(t_i) = W(t_i) - W(t_{i-1})$.
3. Pro libovolné časové okamžiky mají přírustky $W(t) - W(s)$ normální rozdělení $\mathcal{N}(0, t-s)$ pro $t \geq s$,

pak tento náhodný proces nazýváme Wienerovým procesem.

Důležitou vlastností Wienerova procesu (kterou budeme dále využívat) je, že jeho kvadratická variace na intervalu $[0, t]$ je rovna t pro každé $t \geq 0$. Symbolicky tuto vlastnost zapíšeme v diferenciální podobě ve tvaru

$$(\mathrm{d}W(t))^2 = dt. \quad (2.7)$$

Pro názornost ukážeme, že

$$\sum_{k=1}^n \left[W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right) \right]^2 \rightarrow \Delta t \quad (2.8)$$

pro $n \rightarrow \infty$ v L^2 . Zřejmě střední hodnota levé strany (2.8) je rovna pravé straně (2.8). Ukážeme teda, že rozptyl levé části se blíží 0 pro $n \rightarrow \infty$. Označme

$$\Delta W_k := W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right).$$

Potom

$$\mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{var}(\Delta W_k)^2 = \frac{(\Delta t)^2}{n} \mathrm{var}(N^2) \rightarrow 0$$

pro $n \rightarrow \infty$, kde N je náhodná veličina s rozdělením $\mathcal{N}(0, 1)$.

Přejdeme k vyjádření přírustků ve spojitém modelu. Nechť μ_t a σ_t jsou pro jednoduchost spojité procesy takové, že jejich historie do času t , $(\mu_s, s \leq t)$ a $(\sigma_s, s \leq t)$

jsou nezávislé s $(W(T) - W(t), T \geq t)$ pro každé $t \geq 0$ a nechť infinitezimální přírůstek procesu X_t se dá zapsat ve tvaru

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad (2.9)$$

kde dW symbolicky označuje infinitizimální přírůstek Wienerova procesu. Potom proces X_t budeme nazývat Itôov proces. μ_t se nazývá *drift*, σ_t *disperzní koeficient* a σ_t^2 *difúzní koeficient*. Dosazením speciální volby

$$\mu_t = \mu X_t, \quad \sigma_t = \sigma X_t$$

do (2.9) dostaneme rovnici *geometrického Brownova pohybu* ve tvaru

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW. \quad (2.10)$$

Poznámka 2.2.1: Nechť U_t je Itôov proces a $f \in C^2(\mathbb{R})$, potom $f(U_t)$ je také Itôov proces a platí *Itôova formule*

$$df(U_t) = f'(U_t) dU_t + \frac{1}{2} f''(U_t)(dU_t)^2. \quad (2.11)$$

V dalším textu budeme využívat i následující znění vícerozměrné verze Itôovy formule bez toho, abychom uváděli její přesnou formulaci.

$$\begin{aligned} df(U_t, V_t) &= f'_1(U_t, V_t) dU_t + f'_2(U_t, V_t) dV_t \\ &\quad + \frac{1}{2} [f''_{11}(U_t, V_t)(dU_t)^2 + f''_{22}(U_t, V_t)(dV_t)^2 + 2f''_{12}(U_t, V_t)(dU_t)(dV_t)], \end{aligned}$$

pokud $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a (U_t, V_t) je "sdruženě" Itôov proces.

Speciálně, volbou $f(x, y) = xy$, dostaneme *stochastickou verzi Per Partes* ve tvaru

$$dU_t V_t = U_t dV_t + V_t dU_t + (dU_t)(dV_t). \quad (2.12)$$

Vztahy v poznámce (2.2.1) zůstanou v platnosti i v případě, že v definici Itôova procesu X_t nahradíme diferenciál $\mu_t dt$ diferenciálem ze spojitého procesu dZ_t , takže Z_t je spojitý proces s lokálně konečnou variací takový, že jeho historie $(Z_s, s \leq t)$ dohromady s historií procesu $(\sigma_s, s \leq t)$ do času t je nezávislá s $(W(T) - W(t), T \geq t)$ pro každé $t \geq 0$. W značí příslušný Wienerův proces.

Kapitola 3

Optimální obchodní strategie

3.1 Spojitý model

Představme si investora, který investuje na akciovém a peněžním trhu. Předpokládejme, že tržní cenu akcie \mathcal{S}_t je možné modelovat pomocí geometrického Brownova pohybu

$$d\mathcal{S}_t = \mu \mathcal{S}_t dt + \sigma \mathcal{S}_t dW_t, \quad \mathcal{S}_0 = s_0.$$

Dále zavedeme následující označení: \mathcal{W}_t je tržní cena portfolia, \mathcal{N}_t udává počet akcií v portfoliu a investorova pozice v čase t je π_t . Pozice π_t je určena podílem investic na akciovém trhu v investorově portfoliu. Omezíme se pouze na případ, kdy $\pi_t \in (0, 1)$. Při tomto označení je možné vyjádřit cenu akciové části portfolia jako

$$\pi_t \mathcal{W}_t = \mathcal{N}_t \mathcal{S}_t. \quad (3.1)$$

Pokud investor neobchoduje, pak \mathcal{N}_t je konstantní a přírustek tržní ceny portfolia je způsoben pouze změnou tržní ceny akcie

$$d\mathcal{W}_t = \mathcal{N}_t d\mathcal{S}_t = \mathcal{N}_t \mathcal{S}_t (\mu dt + \sigma dW_t) = \mathcal{W}_t \pi_t (\mu dt + \sigma dW_t). \quad (3.2)$$

Podle vztahu (3.2) a Itôovy formule (2.6) s volbou $f(x) = x^{-1}$ platí

$$\mathcal{W}_t d\mathcal{W}_t^{-1} = -\frac{d\mathcal{W}_t}{\mathcal{W}_t} + \left(\frac{d\mathcal{W}_t}{\mathcal{W}_t} \right)^2 = \pi_t (-\mu + \sigma^2 \pi_t) dt - \pi_t \sigma dW_t. \quad (3.3)$$

Z (3.2) a Itôova lemmatu volbou $f(x) = \ln x$ dostáváme

$$d \ln \mathcal{W}_t = (\mu \pi_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \pi_t^2) dt + \sigma \pi_t dW_t. \quad (3.4)$$

Dle stochastické verze Per Partes vztahů (2.10), (3.1), (3.3) a předpokladu, že \mathcal{N}_t je konstantní dostaneme

$$d\pi_t = \mathcal{N}_t \mathcal{W}_t^{-1} d\mathcal{S}_t + \mathcal{N}_t \mathcal{S}_t \mathcal{W}_t^{-1} \mathcal{W}_t d\mathcal{W}_t^{-1} + \mathcal{N}_t (d\mathcal{S}_t)(d\mathcal{W}_t^{-1}) \quad (3.5)$$

$$= \pi_t (1 - \pi_t) [(\mu - \sigma^2 \pi_t) dt + \sigma dW_t]. \quad (3.6)$$

Po zavedení vztahů pro drift $B(x)$ a difuzi $S^2(x)$

$$B(x) = x(1-x)[\mu - \sigma^2 x] \quad S(x) = \sigma x(1-x),$$

můžeme přírustek pozice při neobchodování zapsat ve tvaru

$$d\pi_t = B(\pi_t) dt + S(\pi_t) dW_t. \quad (3.7)$$

Nyní předpokládejme, že v čase t nakoupíme $\Delta\mathcal{N}_t \geq 0$ akcií, pak $\mathcal{N}_t\mathcal{S}_t = \mathcal{W}_t x_t$ vzroste o hodnotu $\mathcal{S}_t\Delta\mathcal{N}_t$, což představuje objem tohoto obchodu. Předpokládejme dále, že při nákupu platíme $(1+\delta)$ -krát tržní cenu akcie, kde $\delta > 0$. Velikost transakčních nákladů je pak rovna

$$\delta\mathcal{S}_t\Delta\mathcal{N}_t = \Delta(\delta\mathcal{S}_t\mathcal{N}_t),$$

protože nákup proběhne v nekonečně krátném časovém intervalu $[t, t+dt]$, během něhož se cena akcie \mathcal{S}_t nezmění. O stejnou hodnotu musí poklesnout tržní cena portfólia. Nasledující hodnota tak během nákupu zůstává konstantní

$$\mathcal{W}_t + \delta\mathcal{N}_t\mathcal{S}_t = \mathcal{W}_t(1 + \delta x_t).$$

V diferenciální podobě lze psát

$$d^+ \ln \mathcal{W}_t = -d^+ \ln(1 + \delta\pi_t) = -\vartheta_+(\pi_t) d^+ \pi_t,$$

kde d^+ reprezentuje infinitezimální změnu způsobenou nákupem akcie odpovídající infinitezimální změně pozice $d^+ \pi_t =: d\pi_t^+$ a kde

$$\vartheta_+(x) = \frac{\delta}{1 + \delta x}. \quad (3.8)$$

Při prodeji předpokládáme, že obdržíme $(1-\epsilon)$ -krát tržní cenu akcie, kde $0 < \epsilon < 1$. Podobně jako při nákupu bychom mohli ukázat, že při prodeji zůstává konstantní následující hodnota

$$\mathcal{W}_t - \epsilon\mathcal{N}_t\mathcal{S}_t = \mathcal{W}_t(1 - \epsilon x_t).$$

V diferenciální podobě s využitím d^- , které reprezentuje změnu způsobenou prodejem akcií odpovídající infinitezimální změně pozice $-d^- \pi_t =: -d\pi_t^-$ dostaneme

$$d^- \ln \pi_t = -d^- \ln(1 - \epsilon\pi_t) = \vartheta_-(\pi_t) d^-(\pi_t) = -\vartheta_-(\pi_t) d(\pi_t^-),$$

kde

$$\vartheta_-(x) = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon x}. \quad (3.9)$$

Obecně pak celkový přírustek pozice vyjadřuje rovnice

$$d\pi_t = B(\pi_t) dt + S(\pi_t) dW_t + d\pi_t^+ - d\pi_t^-. \quad (3.10)$$

Rovnost (3.10) lze také chápat jako definiční rovnost pro diferenciály $d^+ x_t$ a $d^- x_t$ spolu s omezujícím předpokladem, že jejich neurčité integrály jsou neklesající procesy, což lze v diferenciální symbolice napsat ve tvaru $d^+ x_t, d^- x_t \geq 0$. Rovnost (3.10) tak blíže upřesňuje význam diferenciálů d^+ a d^- . Celkovou dynamiku tržní ceny portfolia je tak možné zapsat rovnicí

$$d \ln \mathcal{W}_t = \left(\mu\pi_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 \right) dt + \sigma\pi_t dW_t - \vartheta_+(\pi_t) d\pi_t^+ - \vartheta_-(\pi_t) d\pi_t^-. \quad (3.11)$$

3.2 Aproximace spojitého modelu diskrétním

Model investorovy pozice (3.10) je modelem spojitým. Při approximaci tohoto modelu diskrétním, musí být zachovány jeho charakteristiky, což jsou střední hodnota a rozptyl infinitezimálních přírustků procesu. Předpokládejme nyní, že počáteční pozice investora v čase nula je

$$\pi_0 = x_0.$$

Pro podmíněnou střední hodnotu ve spojitém modelu pak platí vztah

$$E[\underbrace{\pi_{dt} - \pi_0}_{d\pi_t} | \pi_0 = x] \sim B(x) dt. \quad (3.12)$$

Při výpočtu střední hodnoty jsme vyšli ze vztahu (3.10) a poznatku ze sekce 2.2 o Wienerově procesu, jehož přírustek $dW(t) \sim \mathcal{N}(0, dt)$. Toho využijeme i při výpočtu rozptylu

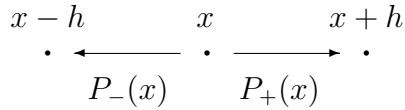
$$var[\pi_{dt} - \pi_0 | \pi_0 = x] \sim E[(\pi_{dt} - \pi_0)^2 | \pi_0 = x] \sim S^2(x) dt. \quad (3.13)$$

V (3.13) jsme ve druhém členu zanedbali výraz

$$(E[\pi_{dt} - \pi_0 | \pi_0 = x])^2 \sim B^2(x) (dt)^2,$$

což je možné za předpokladu, že časové přírustky dt jsou malé.

V diskrétním modelu bude situace vypadat následovně.



Počáteční investorova pozice v čase nula je v bodě x . V čase dt bude $\pi_{dt} = x+h$ s pravděpodobností $P_+(x)$, s pravděpodobností $P_-(x)$ v $\pi_{dt} = x-h$ a s pravděpodobností $P_0(x)$ zůstane v bodě $\pi_{dt} = x$. Přitom musí platit

$$P_0(x) = 1 - P_+(x) - P_-(x). \quad (3.14)$$

Začneme vyjádřením střední hodnoty investorovy pozice π_{dt} .

$$\begin{aligned} E[\pi_{dt} | \pi_0 = x] &= P_-(x)(x-h) + P_0(x)x + P_+(x)(x+h) \\ &= x + P_-(x)(-h) + P_+(x)(h), \end{aligned}$$

kde jsme v posledním vztahu využili (3.14). Po odečtení π_0 získáme vyjádření pro střední hodnotu a rozptyl přírustku tohoto diskrétního modelu

$$E[\pi_{dt} - \pi_0 | \pi_0 = x] = h(P_+(x) - P_-(x)) \quad (3.15)$$

$$var[\pi_{dt} - \pi_0 | \pi_0 = x] \sim E[(\pi_{dt} - \pi_0)^2 | \pi_0 = x] \quad (3.16)$$

$$\sim h^2(P_-(x) + P_+(x)). \quad (3.17)$$

Ve vztahu (3.16) jsme zanedbali druhý člen rozptylu. To je možné jen při volbě malých změn investorovy pozice h . Porovnáním výsledků spojitého a diskrétního přístupu dostaneme odhad $P_+(x)$ a $P_-(x)$.

$$B(x) dt \sim h[P_+(x) - P_-(x)] \quad (3.18)$$

$$S^2(x) dt \sim h^2[P_+(x) + P_-(x)]. \quad (3.19)$$

Řešením soustavy rovnic (3.18) a (3.19) pro $dt \rightarrow 0$ a $h \rightarrow 0$ jsme získali odhady

$$P_+(x) \sim \frac{hB(x) dt + S^2(x) dt}{2h^2} \geq 0 \quad (3.20)$$

$$P_-(x) \sim \frac{-hB(x) dt + S^2(x) dt}{2h^2} \geq 0, \quad (3.21)$$

kde nezápornost v (3.20) a (3.21) můžeme pro malá h dosáhnout v případě, že $S^2(x) > 0$. Ze vztahu (3.14) je ted' možné dopočítat $P_0(x)$

$$P_0(x) = 1 - [P_+(x) + P_-(x)] \sim 1 - \frac{S^2(x) dt}{h^2}. \quad (3.22)$$

Přitom $P_0(x)$ musí splňovat podmínu

$$P_0(x) \geq 0.$$

To platí, pokud $S^2(x) dt \leq h^2$ a tedy lze volit

$$dt = \frac{h^2}{k},$$

kde $k \geq S^2(x)$ platí pro všechna uvažovaná x a speciálně pro $x \in (0, 1)$ platí $k = \frac{1}{16} \geq x^2(1-x)^2$.

3.3 Nalezení optimálního řízení

V případě, že platíme za obchodování transakční náklady, lze očekávat, že optimální strategii bude udržovat pozici v určitém intervalu, označme jej $[\alpha, \beta]$, a neobchodovat, pokud se pozice investora nachází uvnitř (α, β) , viz [2] a [5].

3.3.1 Spojitý model

Podrobné odvození je zpracováno v [2]. Na tomto místě pouze shrneme vztahy, které umožňují porovnání numerických výsledků diskrétního a spojitého modelu.

Optimální interval (α, β) nalezneme v případě spojitého modelu jako argument maxima funkce

$$u(\alpha, \beta) = \frac{\left| \frac{\beta}{1-\beta} \right|^{2\rho} \xi_\beta - \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right|^{2\rho} \xi_\alpha}{\frac{1}{2\rho} \left[\left| \frac{\beta}{1-\beta} \right|^{2\rho} - \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right|^{2\rho} \right]} \quad \text{pro } \rho \neq 0 \quad \text{nebo}$$

$$u(\alpha, \beta) = \frac{\xi_\beta - \xi_\alpha}{\ln \frac{\beta}{1-\beta} - \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{pro } \rho = 0$$

na množině $\{(\alpha, \beta), 0 < \alpha < \beta < 1\}$, kde

$$\rho := \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \xi_\alpha := \alpha \frac{1+\delta}{1+\delta\alpha} \quad \text{a} \quad \xi_\beta := \beta \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\beta},$$

za předpokladu, že $0 < \frac{\mu}{\sigma^2} < 1$.

3.3.2 Diskrétní model

V tomto modelu využijeme při hledání optimální strategie Howardův iterační postup odvozený v části 1.2.

Předpokládejme, že množina možných stavů Markovova řetězce je ve tvaru $S = 1, \dots, m$, kde $m = 1/h - 1 \in \mathbb{N}$. To odpovídá množině pozic investora $\mathbb{X} := x_k, k \in S \subseteq (0, 1)$, kde $x_k = h \cdot k$.

V tomto modelu budeme za přípustná řízení považovat rozhodnutí investora koupit akcie (+), prodat akcie (-) nebo vůbec neobchodovat (0). Množiny možných řízení řetězce v jednotlivých stavech jsou následující:

- $R_1 = \{+\}$ a $R_m = \{-\}$: krajní polohy považujeme za bezpodmínečné. Tedy musíme zahájit okamžitý nákup, resp. prodej, abychom udrželi pozici π_t v množině \mathbb{X} resp. v intervalu $[h, 1-h]$.
- $R_2 = \{+, 0\}$ a $R_{m-1} = \{0, -\}$: ve stavech bezprostředně sousedících s krajními stavami volíme strategii tak, abychom opět udržovali pozici π_t v intervalu $[h, 1-h]$.
- $R_i = \{+, 0, -\}$ pro $i \in \{3, \dots, m-2\}$: v těchto stavech není investorovo rozhodování nijak omezeno.

Množina všech řízení řetězce je pak ve tvaru $\mathbf{R} = \prod_{i=1}^m R_i$.

Matici pravděpodobnosti přechodu \mathbf{P} je nutné určit pro každé řízení řetězce. Její členy závisí na rozhodnutí, které v daném stavu učiníme. Pokud je naším rozhodnutím ve stavu i neobchodovat, neznamená to ještě, že řetězec zůstává ve stejném stavu, proto rozdělení pravděpodobností přechodu je následující:

$$(0) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad p_{i,i-1} = P_-(x_i) \\ \hline \quad \quad \quad p_{i,i} = P_0(x_i) \\ \diagdown \quad p_{i,i+1} = P_+(x_i), \end{array}$$

kde $P_-(x_i)$, $P_0(x_i)$ a $P_+(x_i)$ jsou po řadě dány vztahy (3.21), (3.22) a (3.20).

- Pokud nákoupíme posuneme tím řetězec ze stavu i do stavu $i + 1$. Pak pohybu z tohoto stavu odpovídají pravděpodobnosti přechodu:

$$(+) \quad \begin{array}{c} p_{i,i} = P_-(x_{i+1}) \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_{i,i+2} = P_+(x_{i+1}). \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_{i,i+1} = P_0(x_{i+1}) \end{array}$$

- Pro rozhodnutí prodávat pak pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu $i - 1$ jsou dány vztahy:

$$(-) \quad \begin{array}{c} p_{i,i-2} = P_-(x_{i-1}) \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_{i,i} = P_+(x_{i-1}) \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_{i,i-1} = P_0(x_{i-1}) \end{array}$$

Matice ocenění přechodů \mathbf{Z} také odrážejí záměr investora.

Nechť ocenění z_{ij} nezávisí na j , což odpovídá tomu, že oceňujeme setrvání řetězce v jednotlivých stavech, nikoli přechody mezi nimi. Pak také platí ${}_0\mathbf{z}_i = {}_0z_i \cdot \mathbf{1}$.

- Při rozhodnutí neobchodovat se neplatí žádné transakční náklady a ocenění přechodu odpovídá přírustku logaritmu tržní hodnoty portfolia spojených se setrváním pozice π_t v blízkosti hodnoty x_i , resp. s přírustkem procesu $\int (\mu\pi_s - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2) ds$.

$${}_0z_i = {}_0z(x_i) := (\mu x_i - \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2) dt.$$

- Rozhodnutí nakoupit je zatíženo transakčními náklady $h\vartheta_+(x)$ definovanými vztahem (3.8). Příslušné ocenění je tvaru

$${}_+z_i = {}_+z(x_i) := {}_0z(x_i) - h\vartheta_+(x_i).$$

- Pro případ prodeje a s tím spojenými transakčními náklady $h\vartheta_-(x)$ určenými (3.9) je ocenění přechodu

$$-_z_i = {}_-z(x_i) := {}_0z(x_i) - h\vartheta_-(x_i).$$

Nyní už je možné pro nalezení optimálního řízení použít modifikovaný Howardův algoritmus s počátečním přiblížením např. ${}_0z := (+, 0, \dots, 0, -)$.

3.3.3 Porovnání očekávaných výsledků v daných modelech

Předpokládejme, že se řetězec nachází na počátku ve stavu i , pak očekávaný výnos za n období je přibližně $\mathbf{v}(n)$ pro diskontovaný případ a $\tilde{\mathbf{v}}(n)$ pro případ nediskontovaný.

Výsledky tohoto diskontovaného modelu s $\beta \rightarrow 1^-$ budeme porovnávat s výsledky nediskontovaného modelu, které jsou uvedeny v [7]. Zmíněný nediskontovaný model odpovídá vztahu

$$\tilde{\mathbf{v}}(n) \sim nc\mathbf{1} + \mathbf{b} \text{ pro } n \rightarrow \infty \text{ a } \beta = 1, \text{ kde vektory } \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{b} \text{ získáme z Howardova algoritmu.}$$

Naproti tomu diskontovaný případ je tvaru

$$\mathbf{v}(n) \sim \frac{c\mathbf{1}}{1-\beta} + \mathbf{b} \text{ pro } \beta \rightarrow 1^- \text{ a tento případ se bude porovnávat s modelem kdy } \beta \ll 1.$$

Časový interval $(0, \infty)$ rozdělíme na n podintervalů délky dt . Numericky porovnatelné hodnoty jsou $\frac{c}{dt}$ a přírustky $\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \sim \frac{b_i - b_{i-1}}{h}$.

3.3.4 Porovnání numerických hodnot

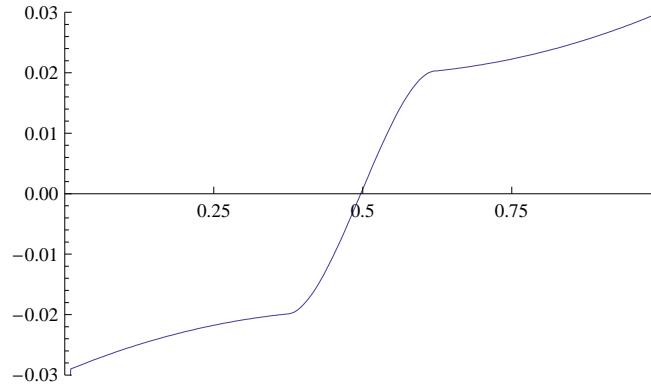
Ekvivalence modelů je ilustrována na dvou příkladech, v obou jsou transakční náklady $\delta = \epsilon = 2\%$, volatilita $\sigma = 1$ a $\mu = 1/2$. Odlišnost příkladů je v hodnotě β . Nejdříve budeme uvažovat, že $\beta \rightarrow 1^-$ a toto budeme porovnávat s modelem, kdy $\beta = 1$ a poté v druhém případě $\beta \ll 1$.

Výsledky modelu dávají po řadě interval (α, β) , který je porovnatelný s výsledným intervalom uvedeným v [7] pro spojitý model a hodnotu diferenčních podílů $\frac{v_i - v_{i-1}}{h} = b'$, které lze rovněž srovnat s výsledky spojitého modelu.

Diskretizace spojitého modelu byla provedena s krokem $h = 0.005$ a časovou změnou $dt = 0.0004$ při volbě $\varepsilon = 0.00001$.

Výstupem jsou po řadě graf diferenčních podílů vektoru b' , výsledné řízení z posledního kroku, kde strategii nakoupit odpovídá 1, rozhodnutí prodat je reprezentováno -1 a neobchodování 0. Další část výstupu tvoří výsledný interval (α, β) . Na závěr je uvedena hodnota $\frac{c}{dt}$ v posledním kroku, která je poslední hodnotou v posloupnosti a ta by podle předpokladu měla být rostoucí.

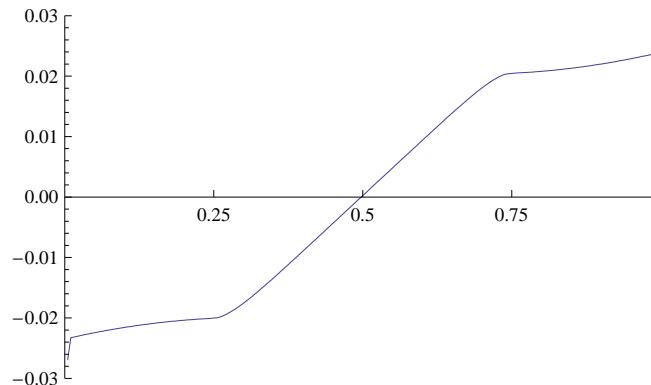
Howard[0.005, 0.0004, 0.5, 1, 0.02, 0.02, 0.005]



{0.37, 0.63}

{0.117718}

Howard[0.005, 0.0004, 0.5, 1, 0.02, 0.02, 10]



{ 0.25, 0.75 }

V grafech jsou zakresleny hodnoty diferenčních podílu s opačným znaménkem a to pro snazší srovnatelnost s hodnotami v grafu spojitého modelu.

Nežli začneme se srovnáním je třeba připomenout vztah pro parametr β využívaný v numerické realizaci, který je tvaru $\beta = \exp\{-\alpha \cdot dt\}$.

Porovnatelnost těchto dvou grafů je ve výsledném intervalu, kdy pro $\alpha = 0.005$ je interval užší než pro $\alpha = 10$ a také v hodnotách $\frac{c}{dt}$. Pokud bude diskontování velké, pak ztráta z transakčních nákladů je příliš velká a již se nedá nahradit. Proto se také méně obchoduje. Ztráta je definována vztahem $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{\beta}{1-\beta}$, což má váhu pro $\beta \rightarrow 0$ rovnou $0(\beta)$.

Diskrétní model skýtá stále jednu nevýhodu a to, že volba kroku h by měla být co nejmenší. Tím se ale zvyšuje časová náročnost výpočtu. Je tedy nutné zvolit kompromis mezi dobou čekání na výsledek a jeho přesnosti.

Dodatek A

Programová realizace diskrétního modelu

A.1 Případ pro $\beta \rightarrow 1^-$

```
Howard[h, dt, μ, σ, δ, ε, α];
h = 0.005;
m = Round[1/h] - 1;
Jednotkova = IdentityMatrix[m];
r = Table[0, {m}];
r[[1]] = 1;
r[[m]] = -1;
sig = 1;
sigmakv = sig^2;
mu = 0.5; (*0.4*)
B[x_]:=x*(1-x)*(mu - sigmakv*x);
SS[x_]:=sigmakv*x^2*(1-x)^2;
m = Round[1/h] - 1;
k = 1/16;
dt = h^2/k;
delta = 0.02;
epsilon = 0.02;
nuplus[x_]:=delta/(1 + delta * x);
numinus[x_]:=epsilon/(1 - epsilon * x);
Pdoprava[x_]:=(h * B[x] * dt + SS[x] * dt)/(2h^2);
Pdoleva[x_]:=(-h * B[x] * dt + SS[x] * dt)/(2h^2);
Pnula[x_]:=1 - (SS[x] * dt)/(h^2);
s = Table[0, {m}];
q = Table[0, {m}];

alfa = 0.005;
faktor = Exp[-alfa * dt];
```

```

Print[s];
While[(r - s).(r - s) > 0,
P = Table[0, {m}, {m}];
s = r;
Print[s];
For[i = 1, i ≤ m, i++, x = h * i;
q[[i]] = (mu * x - 1/2 * sigmakv * x^2) * dt;
If[r[[i]] == 1, q[[i]] = q[[i]] - h * nuplus[x]];
If[r[[i]] == -1, q[[i]] = q[[i]] - h * numinus[x]];
Switch[r[[i]], 1, P[[i, i]] = Pdoleva[x + h]; P[[i, i + 1]] = Pnula[x + h]; P[[i, i + 2]] = Pdoprava[x + h], -1,
P[[i, i - 2]] = Pdoleva[x - h]; P[[i, i - 1]] = Pnula[x - h]; P[[i, i]] = Pdoprava[x - h], 0, P[[i, i - 1]] = Pdoleva[x]
P[[i, i]] = Pnula[x]; P[[i, i + 1]] = Pdoprava[x]];
w = LinearSolve[Jednotkova - faktorP, q];
v = w;
Print[w];
For[i = 2, i ≤ m - 1, i++, r[[i]] = s[[i]];
x = h * i;
q[[i]] = (mu * x - 1/2 * sigmakv * x^2) * dt;
NIC = q[[i]] + Pdoleva[x]v[[i - 1]] + Pnula[x]v[[i]] + Pdoprava[x]v[[i + 1]];
If[NIC > w[[i]], w[[i]] = NIC; r[[i]] = 0];
If[i < m - 1, NAKUP = q[[i]] - h * nuplus[x] + Pdoleva[x + h] * v[[i]] + Pnula[x + h]v[[i + 1]] + Pdoprava[x + h];
If[NAKUP > w[[i]], w[[i]] = NAKUP; r[[i]] = 1];
If[i > 2, PRODEJ = q[[i]] - h * numinus[x] + Pdoleva[x - h]v[[i - 2]] + Pnula[x - h]v[[i - 1]] + Pdoprava[x - h];
If[PRODEJ > w[[i]], w[[i]] = PRODEJ; r[[i]] = -1];
];
c = Mean[w] * (1 - faktor)/dt;
Print[r];
difference = Table[0, {m - 1}];
vektor = Table[0, {m}];
prirustek = Table[0, {m}];
index = 1;
z[index] = r;
For[i = 1, i ≤ m, i++, vektor[[i]] = w[[i]];
prirustek = (w[[i]] - w[[i - 1]])/h];
Print[vektor];
PopisOsy = Table[{i * 50, ToString[(h * i * 50)//N]}, {i, 1, (m)/50}];
i = 1;
While[i ≠ m, difference[[i]] = (w[[i]] - w[[i + 1]])/h; i++];
ListPlot[difference, PlotJoined → True, Ticks → {PopisOsy, Automatic}, PlotRange → {{0, 197}, {-0.03, 0.03}}];
Rozmezi[x_List]:=Position[x, 1]/Last, Position[x, -1]/First]//Flatten;
{α, β} = Rozmezi[z[index]];

Print[z[index]];
Print[(h * {α, β})//N];
Print[c];

```

A.2 Případ pro $\beta \ll 1$

```

Howard[h, dt, μ, σ, δ, ε, α];
h = 0.005;
m = Round[1/h] - 1;
Jednotkova = IdentityMatrix[m];
r = Table[0, {m}];
r[[1]] = 1;
r[[m]] = -1;
sig = 1;
sigmakv = sig^2;
mu = 0.5; (*0.4*)
B[x_]:=x * (1 - x) * (mu - sigmakv * x);
SS[x_]:=sigmakv * x^2 * (1 - x)^2;
m = Round[1/h] - 1;
k = 1/16;
dt = h^2/k;
delta = 0.02;
epsilon = 0.02;
nuplus[x_]:=delta/(1 + delta * x);
numinus[x_]:=epsilon/(1 - epsilon * x);
Pdoprava[x_]:=(h * B[x] * dt + SS[x] * dt)/(2h^2);
Pdoleva[x_]:=(-h * B[x] * dt + SS[x] * dt)/(2h^2);
Pnula[x_]:=1 - (SS[x] * dt)/(h^2);
s = Table[0, {m}];
q = Table[0, {m}];

alfa = 10;
faktor = Exp[-alfa * dt];
Print[s];
While[(r - s).(r - s) > 0,
P = Table[0, {m}, {m}];
s = r;
Print[s];
For[i = 1, i ≤ m, i++, x = h * i;
q[[i]] = (mu * x - 1/2 * sigmakv * x^2) * dt;
If[r[[i]] == 1, q[[i]] = q[[i]] - h * nuplus[x]];
If[r[[i]] == -1, q[[i]] = q[[i]] - h * numinus[x]];
Switch[r[[i]], 1, P[[i, i]] = Pdoleva[x + h]; P[[i, i + 1]] = Pnula[x + h]; P[[i, i + 2]] = Pdoprava[x + h], -1,
P[[i, i - 2]] = Pdoleva[x - h]; P[[i, i - 1]] = Pnula[x - h]; P[[i, i]] = Pdoprava[x - h], 0, P[[i, i - 1]] = Pdoleva[x]
P[[i, i]] = Pnula[x]; P[[i, i + 1]] = Pdoprava[x]];
w = LinearSolve[Jednotkova - faktor P, q];
v = w;
Print[w];
For[i = 2, i ≤ m - 1, i++, r[[i]] = s[[i]]];
x = h * i;

```

```

q[[i]] = (mu * x - 1/2 * sigmakv * x^2) * dt;
NIC = q[[i]] + Pdoleva[x]v[[i - 1]] + Pnula[x]v[[i]] + Pdoprava[x]v[[i + 1]];
If[NIC > w[[i]], w[[i]] = NIC; r[[i]] = 0;];
If[i < m - 1, NAKUP = q[[i]] - h * nuplus[x] + Pdoleva[x + h] * v[[i]] + Pnula[x + h]v[[i + 1]] + Pdoprava[x + h];
If[NAKUP > w[[i]], w[[i]] = NAKUP; r[[i]] = 1; ]; ];
If[i > 2, PRODEJ = q[[i]] - h * numinus[x] + Pdoleva[x - h]v[[i - 2]] + Pnula[x - h]v[[i - 1]] + Pdoprava[x - h];
If[PRODEJ > w[[i]], w[[i]] = PRODEJ; r[[i]] = -1; ]; ];
];
c = Mean[w] * (1 - faktor)/dt;
Print[r];
difference = Table[0, {m - 1}];
vektor = Table[0, {m}];
prirustek = Table[0, {m}];
index = 1;
z[index] = r;
For[i = 1, i ≤ m, i++, vektor[[i]] = w[[i]];
prirustek = (w[[i]] - w[[i - 1]])/h; ];
Print[vektor];
PopisOsy = Table[{i * 50, ToString[(h * i * 50)//N]}, {i, 1, (m)/50}];
i = 1;
While[i ≠ m, difference[[i]] = (w[[i]] - w[[i + 1]])/h; i++];
ListPlot[difference, PlotJoined → True, Ticks → {PopisOsy, Automatic}, PlotRange → {{0, 197}, {-0.03, 0.03}}];
Rozmezi[x_List]:= {Position[x, 1]//Last, Position[x, -1]//First}//Flatten;
{α, β} = Rozmezi[z[index]];

Print[z[index]];
Print[(h * {α, β})//N];
Print[c];

```

Literatura

- [1] Baz J., Chacko G. (2004): Financial Derivatives Pricing, Applications, and Mathematics, Cambridge University Press
- [2] Dostál P.: Investment Strategies in the Long Run with Proportional Transaction Costs and HARA Utility Function odeslaný do Quantitative Finance
- [3] Dupač V., Dupačová J. (1975): Markovovy procesy Díl I, Skripta MFF UK, SNTL, Praha
- [4] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J. (2002): Stochastic Modeling in Economics and Finance, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [5] Janeček K., Shreve S.E. (2004): Asymptotic Analysis for Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs, Finance & Stochastics, 8, 181-206
- [6] Prášková Z., Lachout P. (2005): Základy náhodných procesů, Nakladatelství Karolinum, Praha
- [7] Staníková D. (2006): Asymptotické řízení portfólia, Bakalářská práce MFF, Praha
- [8] Stacho M. (2006): Viskózní řešení diferenciálních rovnic a aplikace ve financích, Bakalářská práce MFF, Praha