Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Milena Benešová

Lévyho procesy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jakub Staněk
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

2008

Děkuji svému vedoucímu za všechny rady a připomínky, které mi velmi pomohly při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2008 Milena Benešová

Obsah

Název práce: Lévyho procesy
Autor: Milena Benešová
Katedra (ústav): KPMS
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jakub Staněk
e-mail vedoucího: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme jednu třídu náhodných procesů, Lévyho procesy. Tyto procesy se často využívají v praxi nejen v matematice, ale také ve fyzice nebo biologii. Cílem této práce je popsat základní definice a vlastnosti a uvést některou z aplikací těchto procesů ve finanční matematice. Protože jedním z Lévyho procesů je Wienerův proces, neboli Brownův pohyb, jsou zde popsány dva modely pro stochastické modelování úrokových sazeb, které právě tento proces používají. Kromě nejzákladnějších definic je zde také popsána existence Lévyho procesů, k jejímu odvození se využívá vlastností tzv. nekonečně dělitelných rozdělení, kterým je část práce také věnována.

Klíčová slova: Lévyho procesy, Poissonův proces, Wienerův proces

Title: Lévy processes
Author: Milena Benešová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jakub Staněk
Supervisor's e-mail address: stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study one class of the stochastic processes, Lévy processes. These processes are used in the practice not only in mathematics but also in physics and biology. The purpose of this study is the description of main definitions and characteristics and to introduce one of the aplications these processes in financial mathematic. Because one of the Lévy processes is Wiener process (Brownian motion), we describe two models for stochastic modelling of interest rates here, that use this process. We describe here not only the most fundamental definitions, but also the existence of Lévy processes and we need the infinitely divisible distributions for the derivation too - so we pay attention to this distribution class in the study.

Keywords: Lévy processes, Poisson process, Wiener process

Kapitola 1

Úvod

V této práci se budeme věnovat Lévyho procesům, tedy procesům, které mají určité speciální vlastnosti, a to hlavně vlastnost nezávislých přírůstků a homogenitu. Kromě teorie popíšeme také některé velmi používané Lévyho procesy, tedy Poissonův, složený Poissonův a Wienerův proces, který je jedním ze spojitých procesů. Všechny jsou v praxi velmi využívány. Základní aplikací Poissonova procesu je aplikace v teorii hromadné obsluhy, složený Poissonův proces se používá například v pojišťovnictví. Wienerův proces měl původně fyzikální význam, ve fyzice je ale znám spíše jako Brownův pohyb, který popisuje neustálý a neuspořádaný pohyb molekul. Ve finanční matematice je ideálním nástrojem pro popis chování cen aktiv (např. akcií, měn, komodit).

Dříve, než se budeme zabývat konkrétní aplikací, uvedeme ve druhé kapitole definice, které budeme potřebovat pro vyložení této teorie. Předpokládáme ovšem, že základy náhodných procesů a teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky čtenář zná.

Kapitola 3 uvádí definici Lévyho procesů, vlastnosti charakteristických funkcí, dále existenci a příklady Lévyho procesů. V podkapitole 3.3, která se týká existence Lévyho a aditivních procesů, je velmi důležitým pojmem pojem nekonečné dělitelnosti, proto jsou zde uvedeny také některé vlastnosti těchto rozdělení. Nejdůležitějším tvrzením v této podkapitole je Lévy-Khintchinova reprezentace, která popisuje všechna nekonečně dělitelná rozdělení. Díky úzkému vztahu mezi nimi a Lévyho a aditivními procesy v distribuci můžeme zajistit existenci těchto procesů.

V další podkapitole uvádíme nejznámější příklady Lévyho procesů a využití Wienerova procesu při simulaci úrokových sazeb.

Kapitola 2

Základní definice a značení

Stochastický (náhodný) proces je matematický popis vývoje náhodných jevů v čase. Lévyho procesy jsou stochastické procesy, které jsou homogenní a mají nezávislé přírůstky. Index t vždy používáme jako časovou proměnnou.

Mezi stochastické procesy patří Brownův pohyb (Wienerův proces) a Poissonův proces, které jsou popsány v další kapitole. Jak ukážeme, i tyto důležité procesy patří mezi Lévyho procesy.

V této kapitole uvedeme některé vlastnosti náhodných procesů, které dále budeme potřebovat právě ve třetí kapitole při konstrukci Poissonova a Wienerova procesu a při popisu pokročilejší teorie o existenci Lévyho procesů.

Definice 2.1 Rodina $\{X_t : t \geq 0\}$ náhodných veličin na R^d s parametrem $t \in [0, \infty)$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ se nazývá *náhodný proces*.

$P[\{\omega : X(\omega) \in B\}]$ značíme $P[X(\omega) \in B] = P_X(B)$ a nazýváme rozdělení náhodné veličiny X. Jestliže pro dvě náhodné veličiny X a Y na R^d platí vztah $P_X = P_Y$, píšeme $X \stackrel{d}{=} Y$. Nechť $\{X_t : t \geq 0\}$ je náhodný proces, $n \in N$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$, potom $P[\{X(t_1) \in B_1, \ldots, X(t_n) \in B_n\}]$ nazýváme *systém konečně-rozměrných rozdělení* náhodného procesu $\{X_t\}$. Náhodný proces $\{Y_t\}$ nazýváme *stochastická verze* náhodného procesu $\{X_t\}$, pokud platí $P[X_t = Y_t] = 1$ pro $t \in [0, \infty)$. Dva náhodné procesy jsou *shodné v distribuci*, pokud jejich systémy konečně-rozměrných rozdělení jsou shodné (píšeme $\{X_t\} \stackrel{d}{=} \{Y_t\}$). Pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X(\cdot, \omega)$ jen funkcí proměnné t a tuto funkci nazýváme *trajektorie procesu* $\{X_t, t \in T\}$.

Než definujeme Lévyho proces, musíme definovat stochastickou spojitost, neboli spojitost v pravděpodobnosti, protože také tuto vlastnost Lévyho procesy mají.

Definice 2.2 Náhodný proces $\{X_t\}$ na R^d je *spojitý v pravděpodobnosti (stochasticky spojitý)*, jestliže pro každé $t \geq 0$ a $\epsilon > 0$ platí:

$$\lim_{s \to t} P[|X_s - X_t| > \epsilon] = 0. \tag{2.1}$$

V teorii pravděpodobnosti se používají různé druhy konvergence, my zde zavádíme slabou konvergenci:

Definice 2.3 Posloupnost pravděpodobnostních měr $\mu_n, n = 1, 2, ...$ *konverguje slabě* k pravděpodobnostní míře μ, tedy

$$\mu_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu \tag{2.2}$$

jestliže pro každou spojitou omezenou funkci f platí:

$$\int_{R^d} f(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \to \int_{R^d} f(x)\mu(\mathrm{d}x) \qquad \text{pro} \quad n \to \infty \tag{2.3}$$

Dále definujeme konvoluci dvou rozdělení, což je důležitý pojem, protože díky konvoluci můžeme například jednoduše spočítat rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin. Předtím musíme ale zavést funkci, kterou nazýváme "identifikátor". V matematické analýze se tato funkce nazývá také charaktetristická funkce, což by se v této teorii mohlo plést.

Funkci $1_B(x)$ nazýváme *identifikátor množiny* B a platí pro ni:

$$1_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in B \\ 0 & \text{pro} \quad x \notin B \end{cases} \tag{2.4}$$

Definice 2.6 *Konvoluci* rozdělení μ_1 a μ_2 na R^d definujeme vztahem

$$\mu(B) = \int\int_{R^d \times R^d} 1_B(x+y)\mu_1(\mathrm{d}x)\mu_2(\mathrm{d}x), \qquad B \in \mathcal{B}(R^d) \tag{2.5}$$

Píšeme $\mu = \mu_1 * \mu_2$. Operace konvoluce je komutativní a asociativní. Jestliže X_1 a X_2 jsu nezávislé náhodné veličiny na R^d s rozdělením μ_1 a μ_2, potom $X_1 + X_2$ má rozdělení $\mu_1 * \mu_2$.

Dále definujeme symbol μ^n (*n-tá konvoluční mocnina pravděpodobnostní míry* μ), který v další kapitole rozšíříme na interval $[0, \infty]$:

$$\mu^n = \mu^{n*} = \underbrace{\mu * \ldots * \mu}_{n} \tag{2.6}$$

Dalším důležitým pojmem je nekonečná dělitelnost pravděpodobnostní míry, pomocí které budeme dále ukazovat existenci Lévyho a aditivních procesů:

Definice 2.7 Pravděpodobnostní míra μ na R^d je *nekonečně dělitelná*, jestliže pro každé přirozené číslo n existuje pravděpodobnostní míra μ_n na R^d tak, že platí

$$\mu = \mu_n^n \tag{2.7}$$

Zavedeme stochastický integrál a stochastický diferenciál (podle [3] na stranách 111-120). F_t nechť je soubor jevů, o kterých je v čase t dáno, zda nastaly nebo nenastaly. Tento soubor jevů tvoří pro každé t σ-algebru. Neklesající soustava $\mathcal{F} = \{F_t, t \geq 0\}$ vymezuje v množině náhodných jevů časovou dynamiku. Náhodné jevy z F_t můžeme nazývat *jevy do doby* t. Do F_t zahrnujeme všechny jevy nulové pravděpodobnosti. Soustavou $\mathcal{F}$ jsou rovněž vymezeny náhodné funkce s vlastností, že jejich hodnota je určena jevy do doby t. Tuto vlastnost nazýváme *neanticipativnost* (náhodné funkce jsou F_t-měřitelné).
Nyní zavedeme pojem stochastického integrálu pomocí jednoduchých funkcí. Časový parametr omezíme na interval $[0, T]$, kde $0 < T < \infty$.

Definice 2.8 Náhodná funkce $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\}$ se nazývá *jednoduchá*, je-li neanticipativní a existuje dělení $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ intervalu $[0, T]$ spolu s náhodnými veliinami $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ tak, že platí:

$$\phi_t = \varphi_j, \qquad t_j \leq t < t_{j+1}, \qquad j = 0, \cdots, n-1 \tag{2.8}$$

Definice 2.9 Nechť ϕ je jednoduchá funkce. Pro $t \in [0,T]$ je její *stochastický integrál* dán rovnicí

$$\int_0^t \phi_s \mathrm{d}W_s = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \varphi_k (W_t - W_{t_k}) \quad \text{při} \qquad t_k \geq t \geq t_{k+1} \quad (2.9)$$

Pro $k = 0$ je suma rovna 0.

Lze dokázat, že ke každé neanticipativní funkci ϕ splňující

$$E \int_0^T \phi_s^2 \mathrm{d}s < \infty$$

lze nalézt posloupnost jednoduchých funkcí $\{{}^n\phi, n = 1, 2, \ldots\}$ tak, že platí:

$$l.i.m._{n\to\infty} \int_0^t {}^n\phi \mathrm{d}W = \int_0^t \phi \mathrm{d}W \qquad t \in [0,T] \quad (2.10)$$

$l.i.m.X_n = X$ platí, právě když $E(X_n - X)^2 \to 0$. Tuto limitu nazýváme *limita podle kvadratického středu.*

Stochastický diferenciál je definován pomocí stochastického integrálu: Náhodný proces má *stochastický diferenciál*

$$\mathrm{d}X_t = A_t \mathrm{d}t + B_t \mathrm{d}W_t, \qquad t \in [0,T] \quad (2.11)$$

když platí

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s \mathrm{d}s + \int_0^t B_s \mathrm{d}W_s, \qquad t \in [0,T] \quad (2.12)$$

Kapitola 3

Lévyho procesy, příklady Lévyho procesů

V této kapitole přiblížíme definici a základní vlastnosti Lévyho procesů a charakteristických funkcí, které dále hrají důležitou roli při zkoumání Lévyho procesů.

3.1 Lévyho procesy

Začneme definicí Lévyho procesu, což je proces, který splňuje některé speciální vlastnosti, jako například vlastnost nezávislých přírůstků nebo homogenitu.

Definice 3.1.1 Náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na R^d je *Lévyho proces*, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každé $n \geq 1$ a $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ jsou náhodné veličiny $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_n-1}$ nezávislé (říkáme, že splňují vlastnost nezávislých přírůstků).
2. $X_0 = 0$ s.j.
3. Rozdělení $X_{s+t} - X_s$ nezávisí na s (proces je homogenní)
4. Proces je spojitý v pravděpodobnosti
5. Existuje $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tak, že $P[\Omega_0] = 1$ a pro každé $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ je zprava spojitá pro $t \geq 0$ a pro $t > 0$ má limitu zleva.

Lévyho proces na R^d nazýváme *d-dimenzionální Lévyho proces*. Každý proces, který splňuje podmínky 1.-4. nazýváme *Lévyho proces v distribuci*. Stochastický proces splňující podmínky 1.,2.,4. a 5. nazýváme *aditivní proces*. Proces, který splňuje pouze podmínky 1., 2. a 4., nazýváme *aditivní proces v distribuci*.

Pokud proces splňuje podmínky 2. a 3., můžeme podmínku 4. napsat ve tvaru:

$$lim_{t\to 0}P[|X_t| > \epsilon] = 1 \qquad \text{pro} \quad \epsilon > 0 \tag{3.1}$$

Důležitým pojmem v teorii pravděpodobnosti je náhodná procházka. Lévyho procesy si můžeme představit jako její spojitou analogii.

3.2 Charakteristické funkce

Rozdělení stochastických procesů můžeme popsat pomocí charakteristických funkcí. Tyto funkce mají pro popis rozdělení velmi dobré vlastnosti (některé v této kapitole také uvedeme), jsou základním nástrojem pro analýzu rozdělení nejen Lévyho procesů. Začneme základní definicí:

Definice 3.2.1 *Charakteristickou funkci* $\widehat{\mu}(z)$ pravděpodobnostní míry μ na R^d definujeme vztahem

$$\widehat{\mu}(z) = \int_{R^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}<z,x>}\mu(\mathrm{d}x), \quad z \in R^d \tag{3.2}$$

Charakteristická funkce rozdělení P_X náhodné veličiny X na R^d (ozn. $\widehat{P}_X(z)$) je funkce, která splňuje:

$$\widehat{P}_X(z) = \int_{R^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}<z,x>}P_X(\mathrm{d}x) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}<z,X>}] \tag{3.3}$$

Dále uvedeme některé nejdůležitější vlastnosti charakteristických funkcí. Samozřejmě bychom jich mohli uvést mnohem více, omezíme se ale pouze na ty základní.

Tvrzení 3.2.1 Nechť μ, μ_1 a μ_2 jsou rozdělení na R^d, potom platí:

1. Platí-li $\widehat{\mu}_1(z) = \widehat{\mu}_2(z)$ pro $z \in R^d$, potom $\mu_1 = \mu_2$.

2. Jestliže $\mu = \mu_1 * \mu_2$, potom $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_1(z)\widehat{\mu}_2(z)$. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávíslé náhodné veličiny na R^d, potom
$$\widehat{P}_{X_1+X_2}(z) = \widehat{P}_{X_1}(z)\widehat{P}_{X_2}(z) \tag{3.4}$$

3. Nechť $X = (X_j)_{j=1,\dots,n}$ je náhodná veličina na R^{nd}, kde $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny na R^d. Potom $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když
$$\widehat{P}_X(z) = \widehat{P}_{X_1}(z_1) \cdots \widehat{P}_{X_n}(z_n) \qquad \text{pro} \quad z = (z_j)_{j=1,\dots,n}, z_j \in R^d. \tag{3.5}$$

4. Jestliže $\widehat{\mu}_n(z)$ konverguje k funkci $\varphi(z)$ pro každé z a tato funkce je spojitá v bodě 0, potom je charakteristickou funcí nějakého rozdělení.

Na konec této podkapitoly uvedeme tvary charakterstických funkcí Poissonova, složeného Poissonova a normálního (Gaussova) rozdělení.

Příklad 3.1.1 Nechť $d = 1$. Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ definujeme předpisem
$$\mu\{k\} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k! \qquad \text{pro} \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.6}$$
Charakteristická funkce má potom tvar
$$\widehat{\mu}(z) = exp(\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1)), \qquad \text{pro} \quad z \in R \tag{3.7}$$

Příklad 3.1.2 Nechť máme jednorozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\mu \in R$ a $\sigma^2 > 0$, tedy hustota rezdělení
$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}. \tag{3.8}$$
Potom charakteristická funkce tohoto rozdělení má tvar:
$$\widehat{\mu}(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \mathrm{i}\mu z}, \quad z \in R. \tag{3.9}$$

Definice 3.2.2 Rozdělení μ na R^d je *složené Poissonovo*, jestliže pro nějaké $c > 0$ a nějaké σ na R^d takové, že $\sigma\{0\} = 0$, platí:
$$\widehat{\mu}(z) = exp(c(\widehat{\sigma}(z) - 1)) \qquad \text{pro} \quad z \in R^d \tag{3.10}$$

3.3 Existence Lévyho a aditivních procesů

V Kapitole 2 jsme definovali nekonečně dělitelná rozdělení. V této kapitole ukážeme, že je těsná souvislost mezi nimi a Lévyho procesy v distribuci a dále, že každý Lévyho proces v distribuci má modifikaci, která je Lévyho procesem. Kromě toho také každý aditivní proces v distribuci má modifikaci, která je aditivním procesem.

Příklad 3.3.1 Nechť $\{X_t\}$ je Lévyho proces na R^d, potom pro každé t je rozdělení X_t nekonečně dělitelné:
Položme $t_k = kt/n$. Nechť dále $\mu = P_{X_t}$ a $\mu_n = P_{X(t_k)-X(t_{k-1})}$. Díky homogenitě Lévyho procesu je toto nezávislé na k. Potom $\mu = \mu_n^n$, protože

$$X_t = (X_{t_1} - X_{t_0}) + \ldots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \qquad ,$$

tedy X_t je součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Vidíme, že mezi Lévyho procesy a nekonečně dělitelným rozdělením je úzký vztah.

Nyní uvedeme několik vlastností nekonečně dělitelných rozdělení, jejichž důkazy jsou uvedené v [1], konkrétně Lemma 3.3.1 můžeme nalézt na straně 32 (Lemma 7.4) a Lemma, které je zde uvedeno pod číslem 3.3.2 najdeme v [1] na straně 34 jako Lemma 7.8.

První Lemma popisuje, že konvoluce dvou nekonečně dělitelných rozdělení je také nekonečně dělitelná, druhé Lemma popisuje limitní vlastnost a třetí rozšiřuje n-tou konvoluční mocninu na interval všech nezáporných reálných čísel.

Lemma 3.3.1 Jestliže μ_1 a μ_2 jsou nekonečně-dělitelná, potom $\mu_1 * \mu_2$ je také nekonečně dělitelné rozdělení.

Lemma 3.3.2 Nechť $\{\mu_k\}$ je posloupnost nekonečně dělitelných rozdělení a $\mu_k \to \mu$, potom μ je také nekonečně dělitelné.

Z Lemmat 7.5 a 7.6, které jsou uvedeny na stranách 32 a 33 v [1], plyne, že pokud μ je nekonečně dělitelné, potom pro každé přirozené číslo n je rozdělení, splňující $\mu = \mu_n^n$, určeno jednoznačně a platí: $\mu_n = \mu^{1/n}$. Nechť tedy máme pro každé přirozené n dáno rozdělení $\mu^{1/n}$. Toto rozdělení je nekonečně dělitelné, platí tedy:

$$\widehat{\mu}(z)^{1/n} = (\widehat{\mu}(y)^{1/(nk)})^k \qquad \text{pro každé} \quad k \in N \tag{3.11}$$

Podle Lemmatu 3.3.1 je také $\mu^{m/n}$ nekonečně dělitelné pro každé přirozené m a n. Pro každé iracionální číslo $t > 0$ můžeme najít posloupnost racionálních čísel r_n, které k tomuto t konvergují. Potom $\widehat{\mu}(z)^{r_n} \to \widehat{\mu}(z)^t$ a $\widehat{\mu}(z)^t$ je spojité. Potom podle tvrzení 3.2.1 (4) je $\widehat{\mu}(z)^t$ charakteristická funkce. Nyní už stačí použít pouze Lemma 3.3.2., ze kterého vyplývá, že rozdělení dané funkcí $\widehat{\mu}(z)^t$ je nekonečně dělitelné.
Z toho tedy vyplývá, že jestliže μ je nekonečně dělitelné, potom pro každé $t \in [0, \infty)$, μ^t je definovatelné a také nekonečně dělitelné rozdělení.
Tuto poznámku můžeme najít v [1] na straně 35, kde je zformulována jako Lemma 7.9.

Dále ukážeme korespondenci mezi nekonečně dělitelnými rozděleními a Lévyho procesy v distribuci:

Tvrzení 3.3.1

1. Jestliže $\{X_t : t \geq 0\}$ je Lévyho proces v distribuci na R^d, potom pro každé $t \geq 0$, P_{X_t} je nekonečně dělitelné a pro $P_{X_1} = \mu$ je $P_{X_t} = \mu^t$.

2. Naopak, jestliže μ je nekonečně dělitelné rozdělení na R^d, potom existuje Lévyho proces v distribuci $\{X_t : t \geq 0\}$ takový, že $P_{X_1} = \mu$.

3. Jestliže $\{X_t\}$ a $\{X'_t\}$ jsou Lévyho procesy v distribuci na R^d takové, že $P_{X_1} = P_{X'_1}$, potom $\{X_t\}$ a $\{X'_t\}$ jsou identické v distribuci.

Důkaz tohoto tvrzení je uveden v [1], str. 35, Tvrzení 7.10.

Následující tvrzení se nazývá *Lévy-Khintchinova reprezentace* a představuje vyjádření charakteristických funkcí pro všechna nekonečně-dělitelná rozdělení. Označme $D = \{x : |x| \leq 1\}$ uzavřenou jednotkovou kouli.

Tvrzení 3.3.2 Lévy-Khintchinova reprezentace

1. Nechť μ je nekonečně-dělitelné rozdělení na R^d, potom pro $z \in R^d$

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}\langle \gamma, z\rangle + \int_{R^d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle z, x\rangle 1_D(x))\nu(\mathrm{d}x)\right], \tag{3.12}$$

kde A je pozitivně-semidefintní symetrická matice s rozměry $d \times d$, ν je míra na R^d splňující

$$\nu(0) = 0 \qquad \text{a} \quad \int_{R^d} min(|x^2|, 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty, \tag{3.13}$$

a $\gamma \in R^d$.

2. $\widehat{\mu}(z)$ je pomocí A, ν a γ určena jednoznačně.

3. Obráceně, jestliže A je symetrická pozitivně-semidefinitní matice o rozměrech $d \times d$, ν je pravděpodobnostní míra splňující (3.13) a $\gamma \in R^d$, potom existuje nekonečně-dělitelné rozdělení μ s charakteristickou funkcí splňující (3.12).

Následuje část důkazu tohoto tvrzení, celý důkaz je uveden v [1] jako důkaz Tvrzení 8.1, druhá a třetí část na straně 40-41 a první část je dokázána na straně 44, k důkazu této části jsou ovšem potřeba další tvrzení, která nejsou v tomto textu uvedena, proto tuto část důkazu zde nebudeme uvádět:

Dk. 2.: Dokazujeme, že (3.12) je jednoznačně určeno pomocí trojice (A, ν, γ). Prvně se pokusíme odhadnout výraz, který je v (3.12) integrován, a to pomocí lemmatu, který je uveden také v [1], a to na straně 40 jako Lemma 8.6:

Pro každé $u \in R$ a $n \in N$ platí:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}u)^k}{k!} + \theta \frac{|u|^n}{n!}$$

pro nějaké $\theta \in C$ splňující $|\theta| \leq 1$.

Díky tomu můžeme tedy provést odhad:

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\, z,x\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle\, z, x\rangle 1_D(x)| \leq \frac{1}{2}|z|^2|x|^2 1_{\{|x|\leq 1\}}(x) + 2 \cdot 1_{\{|x|>1\}}(x) \tag{3.14}$$

Užitím Lebesgueovy věty a odhadu 3.14 lze ukázat, že výraz v exponenciále v 3.12 je spojitý v z. Zlogaritmováním charakteristické funkce dostaneme:

$$\log \widehat{\mu}(sz) = -\frac{1}{2}s^2\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}s\langle \gamma, z\rangle + \int_{R^d} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle sz,x\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle sz, x\rangle 1_D(x))\nu(\mathrm{d}x)$$

Použitím Lebesgueovy věty a odhadu 3.14 lze ukázat, že

$$s^{-2}\log\widehat{\mu}(sz)\to-\frac{1}{2}\langle z,Az\rangle\qquad\text{pro}\quad s\to\infty$$

Z toho již plyne, že A je jednoznačně určeno pomocí míry μ.

Dále položíme $\psi(z)=\log\widehat{\mu}(z)+\frac{1}{2}\langle z,Az\rangle$ a nechť $C=[-1,1]^d$. Potom můžeme ukázat, že

$$\int_C(\psi(z)-\psi(z+w))\mathrm{d}w=2^d\int_{R^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin x_j}{x_j}\right)\nu(\mathrm{d}x)\qquad(3.15)$$

kde $\frac{\sin x_j}{x_j}$ je 1 pro $x_j=0$. Tuto rovnost ukážeme takto:

$$\psi(z)-\psi(z+w)=\log\widehat{\mu}(z)+\frac{1}{2}\langle z,Az\rangle-\log\widehat{\mu}(z+w)-\frac{1}{2}\langle z+w,A(z+w)\rangle=$$

$$=\mathrm{i}\langle\gamma,z\rangle+\int_{R^d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}-1-\mathrm{i}\langle z,x\rangle 1_D(x)\nu(\mathrm{d}x))-$$
$$-\mathrm{i}\langle\gamma,z+w\rangle-\int_{R^d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z+w,x\rangle}-1-\mathrm{i}\langle z+w,x\rangle 1_D(x)\nu(\mathrm{d}x))=$$
$$=-\mathrm{i}\langle\gamma,w\rangle+\int_{R^d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z+w,x\rangle}+\mathrm{i}\langle w,x\rangle 1_D(x)\nu(\mathrm{d}x))$$

a dále pomocí odhadu:

$$|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z+w,x\rangle}+\mathrm{i}\langle w,x\rangle|=$$
$$=|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle w,x\rangle}+\mathrm{i}\langle w,x\rangle|=$$
$$=|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle w,x\rangle}+\mathrm{i}\langle w,x\rangle)+\mathrm{i}\langle w,x\rangle(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle})|\leq$$
$$\leq|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle w,x\rangle}+\mathrm{i}\langle w,x\rangle|+|\langle w,x\rangle||1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}|\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}|w|^2|x|^2+|w||x|^2|z|$$

Nyní už můžeme použít Fubiniovu větu, tedy

$$\int_C(\psi(z)-\psi(z+w))\mathrm{d}w=\int_{R^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}\nu(\mathrm{d}x)\int_C(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle w,x\rangle}\mathrm{d}w)$$

A počítejme:

$$\int_C(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle w,x\rangle}\mathrm{d}w)=\underbrace{\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}}_{d}\mathrm{e}^{i\sum x_iw_i}\mathrm{d}w_i=$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j w_j} \mathrm{d}w_j = \prod_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} \cos x_j w_j \mathrm{d}w_j = \prod_{j=1}^{d} \int_{-x_j}^{x_j} \frac{\cos z_j}{x_j} \mathrm{d}z_j$$

V poslední rovnosti jsme použili substituci $z_j = x_j w_j$.
Z toho již vyplývá (3.15). Nyní položme

$$\rho(\mathrm{d}x) = 2^d \left(1 - \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin x_j}{x_j}\right) \nu(\mathrm{d}x)$$

Potom ρ je konečná míra, neboť

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{\sin x_j}{x_j} = 1 - \frac{1}{6}|x|^2 + O(|x|^4) \qquad \text{pro} \quad |x| \to 0$$

Pravá strana výrazu (3.15) je Fourierova transformace ρ, tedy podle Tvrzení 3.2.1 (2) je ρ jednoznačně vyjádřeno pomocí ψ a to dále pomocí μ, tedy ν je jednoznačně určená pomocí μ. Nakonec γ je určena pomocí μ, A a ν z výrazu (3.12).

Trojice z předchozího tvrzení jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení s charakteristickou funkcí (3.12) a tuto trojici nyní definujeme jako charakteristickou trojici této míry:

Definice 3.3.1 (A, ν, γ) z tvrzení 3.3.2 nazýváme *charakteristická trojice* míry μ. Matici A nazýváme *gaussovská kovarianční matice* a míru ν nazýváme *Lévyho míra*. Je-li $A = 0$, říkáme, že μ je *ryze negaussovská*.

Důsledek 3.3.1 Je-li (A, ν, γ) charakteristická trojice míry μ, potom $(tA, t\nu, t\gamma)$ je charakteristická trojice míry μ^t.

Důsledek 3.3.2 Každé nekonečně dělitelné rozdělení je limitou posloupnosti složených Poissonových rozdělení.

Následující tvrzení ukazuje vztah mezi aditivními procesy a nekonečně dělitelným rozdělením, tedy nejen Lévyho proces, ale také aditivní proces má s nekonečně-dělitelným rozdělením úzký vztah.

Tvrzení 3.3.3 Nechť $\{X_t : t \geq 0\}$ je aditivní proces v distribuci na R^d, potom pro každé t je rozdělení X_t nekonečně-dělitelé.

Tuto část zakončíme tvrzením o existenci Lévyho a aditivních procesech:

Tvrzení 3.3.4 Nechť $\{X_t\}$ je Lévyho, respektive aditivní proces v distribuci na R^d. Potom existuje modifikace, která je Lévyho, respektive aditivním procesem.
Důkaz tohoto tvrzení je také proveden v [1] na straně 63 jako Tvrzení 11.5.

3.4 Příklady Lévyho procesů

V této podkapitole uvedeme příklady Lévyho procesů a teorii aplikujeme na praktické příklady z oboru finanční matematiky, kde se právě tyto procesy hojně využívají.

Poissonův a složený Poissonův proces

Nyní definujeme a zkonstruujeme Poissonův proces a složený Poissonův proces a přiblížíme jejich základní vlastnosti.

Definice 3.4.1 Stochastický proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na R nazýváme *Poissonův proces* s parametrem $c > 0$, jestliže je Lévyho proces a pro $t > 0$ má X_t Poissonovo rozdělení se střední hodnotou ct.

Tvrzení 3.4.1 Konstrukce Poissonova procesu Nechť $\{Z_n : n = 0, 1, \ldots\}$ je náhodná procházka na R, definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Definujme $T_n = Z_n - Z_{n-1}$, potom T_n má exponenciální rozdělení s parametrem $c > 0$. Definujme dále proces X_t vztahem

$$X_t(\omega) = n \qquad \text{právě tehdy, když} \quad Z_n(\omega) \leq t < Z_{n+1}(\omega) \tag{3.16}$$

Potom X_t je Poissonův proces s parametrem c.
Důkaz tohoto tvrzení můžeme nalézt v [1] na straně 15 (Tvrzení 3.2).

Charakteristickou vlastností náhodné veličiny T, která má exponenciální rozdělení, je tzv. *vlastnost zapomínání*:

$$P[T > s + t | T > s] = P[T > t] \qquad \text{pro} \quad s \geq 0 \qquad \text{a} \quad t \geq 0 \tag{3.17}$$

Nechť $\{X_t\}$ je Poissonův proces. Označme pro každý interval I počet skoků procesu $X_t(\omega), t \in I$ jako $J(I) = J(I)(\omega)$.

Tvrzení 3.4.2 Pro $0 < s < t$ a $n \geq 1$, potom podmíněné rozdělení X_s za podmínky $X_t = n$ je binomické s parametry n a s/t. Pro $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ a $I_j = (t_{j-1}, t_j]$, potom podmíněné rozdělení $(J(I_1), \ldots, J(I_k))$ za podmínky $X_t = n$ je multinomické s parametry n, $(t_1 - t_0)/t, \ldots, (t_k - t_{k-1})/t$.
Důkaz je uveden v [1] na straně 17 jako Tvrzení 3.3.

Dále definujeme složený Poissonův proces. Složené Poissonovo rozdělení a složený Poissonův proces zobecňuje Poissonovo rozdělení a proces (neboli Poissonovo rozdělení je speciálním případem složeného Poissonova rozdělení). Složený Poissonův proces je důležitý např. v teorii rizika v pojišťovnictví, kde počet událostí do času t tvoří Poissonův proces a výše pojistného plnění jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením σ, potom celkový úhrn škod v t dnech tvoří složený Poissonův proces X_t pro $d = 1$.

Definice 3.4.2 Nechť $c > 0$ a dále nechť σ je rozdělení na R^d takové, že platí $\sigma\{0\} = 0$. Náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na R^d nazýváme *složený Poissonův proces*, jestliže je Lévyho procesem a pro $t > 0$ má X_t složené Poissonovo rozdělení, tedy platí:

$$E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z, X(t)\rangle}] = exp(tc(\widehat{\sigma}(z) - 1)) \qquad \text{pro} \quad z \in R^d \tag{3.18}$$

Tvrzení 3.4.3 Konstrukce složeného Poissonova procesu Nechť $\{N_t : t \geq 0\}$ je Poisson;v proces s parametrem $c > 0$ a $\{S_n : n = 0, 1, \ldots\}$ nechť je náhodná procházka na R^d definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Nechť dále $\{N_t\}$ a $\{S_n\}$ jsou nezávislé a $P[S_1 = 0] = 0$. Definujme proces X_t vztahem

$$X_t(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega) \tag{3.19}$$

Potom $\{X_t\}$ je složený Poissonův proces, který splňuje 2.4, kde σ je rozdělení S_1.
Důkaz je uveden opět v [1] na straně 18 jako důkaz Tvrzení 4.3.

Wienerův proces (Brownův pohyb)

Dalším procesem důležitým nejen pro finanční matematiku je Wienerův proces. V této části ho zadefinujeme, popíšeme jeho konstrukci a také jeho základní vlastnosti.

Definice 3.4.3 Náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na R^d definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ je *Wienerův proces*, jestliže tvoří Lévyho proces a dále splňuje následující podmínky:

1. Pro $t > 0$ má X_t Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 0 a kovariančnί maticí tI, kde I je identická matice.
2. Existuje $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tak, že $P[\Omega_0] = 1$ a pro každé $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ je spojitý v t.

Wienerův proces na R^d nazýváme *d-dimenzionální Wienerův proces*

Ve většině dostupné literatury se Wienerův proces uvažuje spojitý, například v [2] na str. 405 je definice uvedena takto:
Stochastický proces $\{W_t : t \geq 0\}$ je Wienerův, když platí:

1. $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = N(0, |t - s|)$, $t, s \geq 0$
2. $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ jsouzávislé náhodné veličiny pro $0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_n < \infty$
3. W má všechny trajektorie spojité, $W(0) = 0$.

Následující tvrzení doplňuje existenci aditivních procesů. Pro nás je ovšem důležitý důsledek tohoto tvrzení o existenci Wienerova procesu, tvrzení je opět uvedeno bez důkazu, ovšem důkaz je uveden v [1] na straně 63 (Tvrzení 11.7).

Tvrzení 3.4.4 Nechť $\{X_t\}$ je aditivní proces na R^d s normálním rozdělením pro každé t, potom $\{X_t\}$ je spojitý s.j.

Důsledek 3.4.1 Wienerův proces na R^d existuje.

Tvrzení 3.4.5 Nechť $\{X(t)\}$ je náhodný proces na R^d a $X_1(t), \ldots, X_d(t)$ jsou složky vektoru $X(t)$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $\{X(t)\}$ je d-dimenzionální Wienerův proces

2. $\{X_j(t)\}$ je 1-dimenzionální Wienerův proces pro každé j a složky vektoru $\{X_1(t)\}, \ldots, \{X_d(t)\}$ jsou nezávislé

Důkaz je opět uveden v [1] (strana 22, Tvrzení 5.2).

V následujících tvrzeních jsou popsány některé důležité a zajímavé vlastnosti Wienerova procesu. Nejdříve se ale podíváme na některé transformace Wienerova procesu.

Tvrzení 3.4.6 Nechť $\{X(t)\}$ je d-dimenzionální Wienerův proces. Potom

1. $\{-X_t\}$ je d-dimenzionální Wienerův proces
2. Pro každé $c > 0$, $\{c^{-\frac{1}{2}}X(ct)\}$ je d-dimenzionální Wienerův proces
3. Definujme $Y(t) = tX(t^{-1})$ pro $t > 0$ a $Y(0) = 0$. Potom $\{Y(t)\}$ je d-dimenzionální Wienerův proces.

Důkaz tohoto tvrzení je uveden v [1] na straně 24 (tvrzení 5.4).

Tvrzení 3.4.7 Nediferencovatelnost Nechť $d = 1$ a nechť $X(t, \omega)$ je Wienerův proces. Potom neexistuje interval, na kterém by $X(t, \omega)$ měl derivaci.

Důkaz tohoto tvrzení je uveden v [1] (str. 27, Tvrzení 5.9).

Na závěr této kapitoly uvádíme jednu z mnoha aplikací Wienerova procesu a to aplikaci ve finanční matematice: popis dvou metod stochastického modelování úrokových sazeb. Tato pasáž je provedena podle článku [4].

Stochastické modely popisující chování úrokových sazeb musí brát v úvahu speciální vlastnosti, především to, že se pohybují v určitém rozmezí (nerostou do nekonečna ani neklesají pod nulu) a to, že se vrací k určité rovnovážné hodnotě. My zde popíšeme tzv. jednofaktorové modely, které počítají pouze s jednou SDE, tedy s jedním zdrojem nejistoty. Prvním z těchto modelů je Vašíčkův model, který je pojmenovaný po Oldřichu Vašíčkovi a byl publikován v časopise *Journal of Financial Economics* v roce 1977. Druhým je CIR model (Cox, Ingersoll, Ross model), který byl publikován v roce 1985 v článku *A theory of the Term Structure of Interest*

Rates v časopise *Econometria.*

Vašíčkův model:

Model popisuje změnu úrokových sazeb pomocí SDE

$$\mathrm{d}r(t) = a[b - r(t)]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t)$$

a,b,$\sigma > 0$
r je úroková sazba
a je koeficient rychlosti přizpůsobení dynamiky rovnovážné úrokové míře
b je rovnovážná úroková míra
σ je volatilita úrokové sazby

Volatilita úrokové sazby je ve Vašíčkově modelu konstantní. Největší nevýhodou tohoto modelu je, že úrokové sazby mohou být záporné.

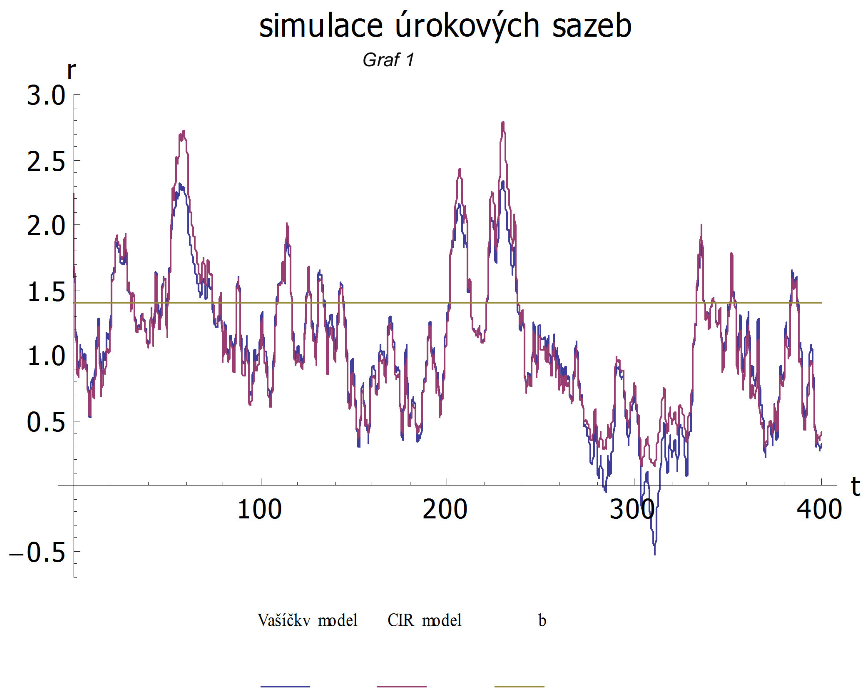
CIR model:

Volatilita úrokových sazeb v tomto modelu není konstantní. Závislost na druhé odmocnině úrokové sazby zajišťuje nezápornost simulované úrokové sazby v případě, že $2ab > \sigma^2$. Tento model proto popíšeme rovnicí

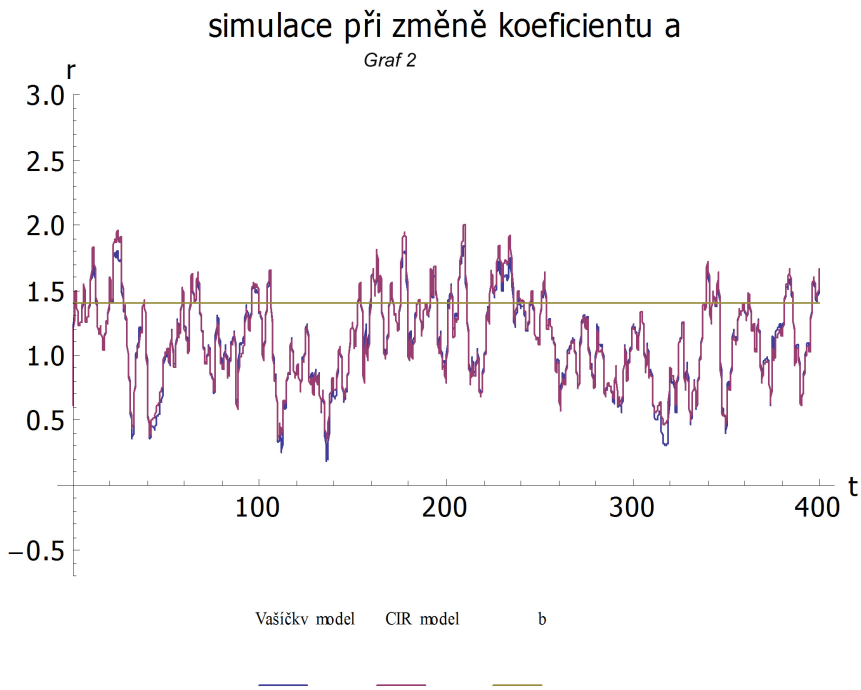
$$\mathrm{d}r(t) = a[b - r(t)]\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W(t)$$

kde konstanty mají stejný význam jako v předchozím případě.

Dále jsme pomocí programu *Mathematica* porovnávali simulace úrokových sazeb pomocí těchto dvou modelů. Parametry jsou zvoleny takto: $a = 0,1$, $b = 1,4$, $\sigma = 0,2$ a $r(0) = 1,4$:



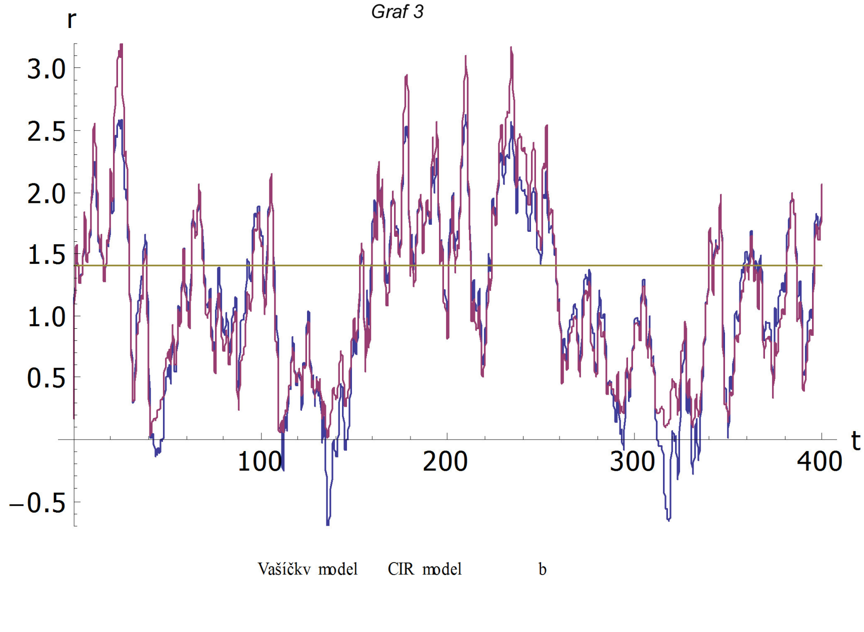
Dále ukážeme vliv parametru a na chování modelovaných úrokových sazeb. Graf 2 modeluje úrokové sazby při $a = 0,3$, ostatní parametry zůstaly stejné. Je vidět, že při větším a mají úrokové míry větší tendenci vracet se k rovnovážné úrokové míře.



Dále chceme ukázat vliv změny parametru σ na modelování úrokových sazeb. Volatilita CIR modelu závisí na $\sqrt{r(t)}$, kdežto ve Vašíčkově modelu je konstantní. Graf 3 modeluje úrokové sazby při $\sigma = 0,29$, ostatní parametry zůstavají stejné jako v první simulaci. Parametr σ je volatilitou úrokové sazby. Zvětšíme-li tento parametr, úrokové sazby mají menší tendenci vracet se k rovnovážné úrokové míře.

simulace při změně koeficientu σ

Graf 3



Výhody a nevýhody těchto modelů:

Výhodou Vašíčkova modelu je normalita simulované řady $r(t)$. Nevýhodou ovšem je to, že úrokové sazby mohou v reálném čase nabývat záporných hodnot. Tuto nevýhodu odstraňuje CIR model (díky nekonstantní volatilitě úrokových sazeb, nezápornost platí v případě, že $2ab > \sigma^2$). Čím jsou větší simulované úrokové sazby, tím je větší i volatilita procesu. Velkou výhodou obou metod je jejich relativní jednoduchost.

Kapitola 4

Závěr

V této práci jsme se věnovali teorii Lévyho procesů, přičemž základní literaturou pro teoretickou část byla [1]. Kromě popisu těchto procesů jsme též vyslovili věty o existenci Lévyho procesů, a to pomocí nekonečně dělitelných rozdělení.

Tyto procesy jsou využívány v různých oborech. Především Poissonův a Wienerův proces patří mezi Lévyho procesy, které mají velmi široké využití v praxi. My jsme zde ukázali použití Wienerova prcesu ve finanční matematice, konkrétně na dvou modelech, které se používají pro stochastické modelování úrokových sazeb. Použili jsme jednofaktorové modely, Vašíčkův a CIR model a úrokové sazby jsme nasimulovali pomocí programu Mathematica. Následně jsme tyto dva modely porovnali. Díky relativní jednoduchosti jsou velmi dobře použitelné v praxi.

Literatura

[1] Sato K.-I.: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.

[2] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti, Matematické základy*, Academia, Praha, 1987.

[3] Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.

[4] Zeytun S., Gupta A.: *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*, 2007.