Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Andrea Pacáková

Charakterizace pravděpodobnostních rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: **Prof. Lev Klebanov, DrSc**

Studijní program: **Matematika, obecná matematika**

2008

Na tomto místě chci poděkovat především vedoucímu své bakalářské práce panu profesoru Lvu Klebanovovi, DrSc., za zájem, podporu a veškerý čas, který věnoval mé práci. V neposlední řadě patří můj dík rodině za vytvoření podmínek, jež mi umožňují dosud studovat.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne *20. května 2008*

Andrea Pacáková

Obsah

Název práce: *Charakterizace pravděpodobnostních rozdělení*

Autor: *Andrea Pacáková*

Katedra:K*atedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Vedoucí bakalářské práce: *Prof. Lev Klebanov, DrSc.*

e-mail vedoucího práce: klebanov@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: *Tato práce se zabývá charakterizací normálního a stabilního rozdělení. Víme, že rozdělení součtu nezávislých normálních náhodných veličin je normální, a právě studium jistého opaku tohoto tvrzení je hlavním cílem této práce. Podstatná část následného textu je věnována studiu vlastností intenzivně monotónních operátorů a silně E-pozitivních rodin funkcí, pomocí nichž jsou dokázány zajímavé skutečnosti, jako je následující: Můžeme-li předpokládat shodu rozdělení jedné náhodné veličiny a lineární formy z nezávislých náhodných veličin, pak za přidání dalších předpokladů dokážeme již přesně určit jejich rozdělení. Poslední kapitola je věnována Bernsteinově větě a jejímu důkazu založeném právě na větách o charakterizaci normálního rozdělení.*

Klíčová slova: *intenzivně monotónní operátor, silně E-pozitivní rodina, lineární forma, normální a stabilní rozdělení*

Title: *Characterization of probability distributions*

Author: *Andrea Pacáková*

Department: *Department of Probability and Mathematical Statistics*

Supervisor: *Prof. Lev Klebanov, DrSc.*

Supervisor's e-mail address: klebanov@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: *This work deals with some characterizations of normal and stable laws. We already know that distribution of a sum of independent normal random variables is normal. The main aim of this work is to study the certain reverse of this fact. Essential part of this text is devoted to studying properties of intensively monotone operators and strongly E-positive families of functions which lead us to proving some interesting facts as following. Consider the conformity of distribution of one random variable and of a linear form made of independent random variables. Then after adding certain conditions we can already identify their distribution. The last chapter is devoted to the Bernstein theorem and its proof based just on the characterization of normal law.*

Keywords: *intensively monotone operator, strongly E-positive family, linear form, normal and stable distributions*

1 Polyova věta a silně E-pozitivní rodiny

1.1 Polyova věta

Charakterizace rozdělení spočívá v jejich popisu pomocí vlastností náhodných veličin z tohoto rozdělení. Například platí-li, že určitá lineární forma ze stejně rozdělených náhodných nezávislých veličin má stejné rozdělení jako první člen v této formě, pak mají tyto náhodné veličiny normální rozdělení. Toto říká věta matematika Polyy, jejíž zjednodušenou verzi pro případ dvou symetrických náhodných veličin si nyní uvedeme.

1.1 Věta (Polyova) *Nechť jsou X_1 a X_2 nedegenerované, nezávislé, symetrické a stejně rozdělené náhodné veličiny. Pak platí, že X_1 je stejně rozdělená jako lineární forma*

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$$

právě tehdy, když má náhodná veličina X_1 normální rozdělení.

Před důkazem Polyovy věty definujme následující silně E-pozitivní rodiny.

1.2 Silně E-pozitivní rodiny

Nechť $T > 0$. Mějme $C = C\,[0,T]$ prostor spojitých funkcí definovaných na intervalu $[0,T]$. [2]

1.2 Definice [2] Nechť $E \subset C$, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je rodina prvků E. Říkáme, že rodina $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silně E-pozitivní, platí – li:

a) pro každou $f \in E$ existují $t_0 \in (0,T]$ a $\lambda_0 \in \Lambda$ takové, že $f(t_0) = f_{\lambda_0}(t_0)$

b) pro každou $f \in E$ a $\lambda \in \Lambda$ buď $f(t) = f_\lambda(t)$ pro každé $t \in [0,T]$, nebo existuje $\delta > 0$ taková, že rozdíl $f(t) - f_\lambda(t)$ zachovává své znaménko na intervalu $(0,\delta]$.

Nyní si uvedeme pro nás velice důležitý příklad E-pozitivní rodiny funkcí, který využijeme jak v důkazu Polyovy věty, tak i v dalších charakterizacích normálního rozdělení.

1.3 Příklad [2] Mějme rodinu charakteristických funkcí symetrických, nedegenerovaných náhodných veličin a za E označme množinu jejich restrikcí na interval $[0, T]$. Nechť $\varphi(t)$ je charakteristická funkce symetrického nedegenerovaného normálního rozdělení. Položme

$$f_\lambda(t) = \varphi(t/\lambda), \qquad t \in [0, T], \lambda > 0.$$

Potom rodina $(f_\lambda)_{\lambda > 0}$ je silně E-pozitivní.

Důkaz [2] Nechť $f \in E$. Vezměme $t_1 > 0$ libovolný bod, ve kterém je $0 < \varphi(t_1) < 1$. Protože f je nedegenerovaná charakteristická funkce, existuje $t_0 \in [0, T]$ takové, že $\varphi(t_1) < f(t_0) < 1$. Ze spojitosti funkce φ existuje bod $\tilde{t} > 0$ takový, že $\varphi(\tilde{t}) = f(t_0)$. Položme $\lambda_0 = \frac{t_0}{\tilde{t}}$, tedy $\tilde{t} = \frac{t_0}{\lambda_0}$, tedy $f(t_0) = \varphi\left(\frac{t_0}{\lambda_0}\right) = \varphi_{\lambda_0}(t_0)$ a vlastnost a) silně E-pozitivní množiny funkcí je splněna.

Dále předpokládejme, že bod b) ze silné E-pozitivity neplatí. Potom existuje číslo λ_1 a posloupnost bodů $\{t_k\}$ taková, že

$f(t_k) = f_{\lambda_1}(t_k), k \in \mathbb{N}, t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Označme $F(x)$ distribuční funkci odpovídajíci charakteristické funkci $f(t)$. Dále označme $F_{\lambda_1}(x)$ distribuční funkce vztahující se k rozdělení s charakteristickou funkcí $f_{\lambda_1}(t)$. Ukážeme, že $f(t)$ je nekonečně diferencovatelná a pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ je

$$f^{(2n)}(0) = f_{\lambda_1}^{(2n)}(0) \tag{1.1}$$

(Za předpokladu nekonečné diferencovatelnosti jsou derivace lichých řádů v nule automaticky nulové díky symetrii těchto rozdělení a tedy nulovosti lichých momentů.)

Použijeme matematickou indukci. Nejprve ukážeme, že je rovnost (1.1) platná pro $n = 1$. Máme

$$1 - f(t_k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t_k x) + i\sin(t_k x)\, dF(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2\left(\frac{t_k x}{2}\right)$$

$$- \sin^2\left(\frac{t_k x}{2}\right) dF(x) = 1$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} 1 - 2\sin^2\left(\frac{t_k x}{2}\right) dF(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t_k x}{2}\right) dF(x)$$

$$= 1 - f_{\lambda_1}(t_k) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t_k x}{2}\right) dF_{\lambda_1}(x), \tag{1.2}$$

protože $\int_{-\infty}^{\infty} 1\, dF(x) = 1$.

Víme, že rozdělení s charakteristickou funkcí f_{λ_1} má konečné druhé momenty, platí tedy, že pro nějaké $C > 0$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\lambda_1}(x) < C.$$

Protože

$$C > \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\lambda_1}(x) \geq \lim_{t_k \to 0} \frac{1}{2} \int_{-A}^{A} x^2 \left(\frac{\sin \frac{t_k x}{2}}{\frac{t_k x}{2}}\right)^2 dF_{\lambda_1}(x)$$

$$= \lim_{t_k \to 0} \frac{2 \int_{-A}^{A} \left(\frac{\sin \frac{t_k x}{2}}{\frac{t_k x}{2}}\right)^2 \left(\frac{t_k x}{2}\right)^2 dF_{\lambda_1}(x)}{t_k^2}$$

$$= \lim_{t_k \to 0} \frac{2 \int_{-A}^{A} \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF_{\lambda_1}(x)}{t_k^2}$$

pro každé $A > 0$, jsou integrály tohoto typu stejnoměrně omezené. Proto je pro každé dostatečně malé t_k

$$0 \leq \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF_{\lambda_1}(x)}{t_k^2} < C_1,$$

kde C_1 je nějaká kladná konstanta. Ze vztahu (1.2) víme, že

$$\frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF_{\lambda_1}(x)}{t_k^2} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF(x)}{t_k^2}.$$

Nyní obráceně, protože

$$C_1 > \frac{2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF(x)}{t_k^2} \geq \frac{1}{2} \int_{-A}^{A} x^2 \left(\frac{\sin \frac{t_k x}{2}}{\frac{t_k x}{2}} \right)^2 dF(x)$$

pro každé $A>0$, jsou integrály tohoto typu stejnoměrně omezené.

Když $t_k \to 0$, dostaneme, že pro každé $A>0$ jsou integrály

$$\int_{-A}^{A} x^2 dF(x)$$

také stejnoměrně omezené, a tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty.$$

Existuje tedy druhý moment a z vlastností charakteristické funkce ([3], strana 29) dostáváme, že je $f(t)$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Dále $f'(0) = 0$ ze symetrie f.

Ze vztahů (1.2) dále dostaneme

$$\lim_{t_k \to 0} \frac{1 - f(t_k)}{t_k^2} = \lim_{t_k \to 0} \frac{1 - f_{\lambda_1}(t_k)}{t_k^2}.$$

Pomocí L`Hospitalova pravidla ale

$$\lim_{t_k \to 0} \frac{1 - f(t_k)}{t_k^2} = \lim_{t_k \to 0} \frac{-f'(t_k)}{2t_k} = \lim_{t_k \to 0} \left(-\frac{1}{2} f''(t_k) \right) = -\frac{1}{2} f''(0),$$

totéž platí pro f_{λ_1}:

$$\lim_{t_k \to 0} \frac{1 - f_{\lambda_1}(t_k)}{t_k^2} = -\frac{1}{2} f''_{\lambda_1}(0)$$

a tedy $f''(0) = f''_{\lambda_1}(0)$.

Nyní dokážeme (1.1) pro $n>1$.

Víme, že $f(t_k) = f_{\lambda_1}(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $t_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, a tedy pro funkci $h(t) \coloneqq f(t) - f_{\lambda_1}(t)$ platí, že $h(t_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $t_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Víme, že h je dvakrát spojitě diferencovatelná. Z Rolleovy věty vyplývá, že existuje taková posloupnost $\mu_k \in (t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, že $h'(\mu_k) = 0$

a $\mu_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Nyní chceme ukázat nekonečnou diferencovatelnost h. Víme, že je h dvakrát spojitě diferencovatelná, proto z Rolleovy věty máme posloupnost $\mu_k^1 \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ takovou, že $h''(\mu_k^1) = 0$ a $\mu_k^1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, tedy

$$f''(\mu_k^1) = f''_{\lambda_1}(\mu_k^1). \tag{1.3}$$

Nyní potřebujeme, aby funkce na levé i na pravé straně rovnosti (1.3) byly charakteristické funkce. To ale nejsou, protože

$$f''_{\lambda_1}(0) = f''(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) \neq 1$$

Položíme-li ale

$$d_2 \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\lambda_1}(x)$$

a

$$dF^{d_2}(x) = \frac{x^2}{d_2} dF(x),$$

je

$$-\frac{f''(t)}{d_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{x^2}{d_2} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{d_2}(x)$$

a můžeme označit

$$f^{d_2} \coloneqq -\frac{1}{d_2} f'', \qquad f_{\lambda_1}^{d_2} \coloneqq -\frac{1}{d_2} f''_{\lambda_1}.$$

Potom f^{d_2}, $f_{\lambda_1}^{d_2}$ jsou charakteristické funkce a platí

$$f^{d_2}(\mu_k^1) = f_{\lambda_1}^{d_2}(\mu_k^1).$$

Protože je $f_{\lambda_1}^{d_2}$ opět nekonečně diferencovatelná, stejně jako v případě pro $n = 1$ máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^{d_2}(x) < \infty,$$

tedy charakteristická funkce f^{d_2} je dvakrát spojitě diferencovatelná. Proto má funkce f'' druhou derivaci a tedy f má čtvrtou. Můžeme takto postupovat dál, až dostaneme posloupnosti charakteristických funkcí $f^{d_{2l}}$, $f_{\lambda_1}^{d_{2l}}$, $l = 1, 2, \ldots$ a bodů μ_k^l, $l = 1, 2, \ldots$, pro které

$$f^{d_{2l}}(\mu_k^l) = f_{\lambda_1}^{d_{2l}}(\mu_k^l)$$

a pro každé $l = 1, 2, \ldots$ je

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k^l = 0.$$

Stejnými úvahami jako výše (pro $n = 1$) dostaneme, že každá $f^{d_{2l}}$ má druhou derivaci, tedy že f je nekonečně diferencovatelná. Dále opět pomocí L'Hospitalova pravidla dostaneme, že

$$f^{d_{2l}}(0) = f_{\lambda_1}^{d_{2l}}(0), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

tedy i

$$f^{(2n)}(0) = f_{\lambda_1}^{(2n)}(0), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vidíme, že v nule jsou si rovny derivace charakteristických funkcí f a f_{λ_1}, proto i všechny momenty rozdělení s charakteristickými funkcemi f a f_{λ_1} jsou si rovny. Konečně, vzhledem k tomu, že normální rozdělení se dá jednoznačně určit svými momenty, je f charakteristická funkce normálního rozdělení.

1.3 Důkaz Polyovy věty a následné souvislosti

Důkaz (Polyovy věty) Nejprve ověříme implikaci, že mají-li náhodné veličiny X_1 a X_2 normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, pak má i lineární forma $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Víme, že rozdělení lineární formy normálních členů je opět normální, $\mathrm{E}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} = 0$ a $\mathrm{var}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{var}(X_1 + X_2) = \sigma^2$. Tím je první implikace ukázaná.

Nyní obráceně: Nechť jsou X_1 a $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ stejně rozdělené. Je-li f charakteristická funkce náhodné veličiny X_1, dá se to napsat jako

$$f(t) = f^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{1.4}$$

Nechť je $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ stejné jako v příkladu **1.3**, tedy

$$f_\lambda(t) = \varphi(t/\lambda), t \in [0, T], \lambda > 0,$$

kde φ je nějaká charakteristická funkce normálního rozdělení. f je nedegenerovaná, proto víme, že existuje alespoň jedna funkce f_{λ_0}, která ji v nějakém bodě t_0>0 protíná. Víme také, že pro f_{λ_0} z prvně dokázané implikace platí

$$f_{\lambda_0}(t) = f_{\lambda_0}^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \tag{1.5}$$

a tedy

$$f_{\lambda_0}(t_0) = f(t_0),$$

$$f_{\lambda_0}^2\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right) = f^2\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right),$$

a protože jsou f_{λ_0} a f reálné symetrické, pak i

$$f_{\lambda_0}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Nyní položme $t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{2}}$, , po dosazení tedy

$$f_{\lambda_0}(t_1) = f(t_1).$$

A ze vztahu (1.4) a (1.5) opět

$$f_{\lambda_0}^2\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right) = f^2\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right)$$

a

$$f_{\lambda_0}\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dále položme $t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = \frac{t_0}{2}$. Indukcí dostáváme posloupnost t_k takovou, že

$$f_{\lambda_0}\left(\frac{t_k}{2^{\frac{k}{2}}}\right) = f\left(\frac{t_k}{2^{\frac{k}{2}}}\right)$$

a $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

E je množina nedegenerovaných symetrických charakteristických funkcí restringovaných na interval $[0,T]$, kde T je nějaké kladné číslo, a z příkladu **1.3** víme, že $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silně E-pozitivní rodina. Z vlastnosti (b) silně E-pozitivních rodiny tedy víme, že

$$f_{\lambda_0}(t) = f(t)$$

pro každé $t \in [0,T]$, a f je tedy charakteristickou funkcí normálního rozdělení.

Nyní si ještě jednou všimněme vztahu (1.4) v důkazu Polyovy věty. Stejné rozdělení jedné náhodné veličiny a nějaké lineární formy nás vždy povede k podobnému vzorci, kterým se řídí charakteristické funkce. Operátor napravo v (1.5) má určité vlastnosti, které se dohromady jmenují intenzivní monotonie. To nás tedy vede ke studiu intenzivně monotónních operátorů a jejich dalších vlastností, zvláště vztahu k silně E-pozitivním rodinám a ke konstantám. Tyto vlastnosti budeme využívat ve studování charakterizace normálního a stabilního rozdělení.

2 Intenzivně monotónní operátory

2.1 Definice a základní vlastnosti

Nechť $T > 0$. Mějme $C = C\,[0,T]$ prostor spojitých funkcí definovaných na intervalu $[0,T]$. [2]

2.1 Poznámka [2] $f \geq g$ pro f, $g \in C$ znamená $f(t) \geq g(t)$ pro všechna $t \in [0,T]$, podobně pro relace $>$, $\leq$, $<$.

2.2 Definice [2] Nechť A je operátor z $E \subset C$ do C. Potom říkáme, že operátor A je intenzivně monotónní, platí-li pro f_1, f_2 funkce z E

a) je-li $f_1(s) \geq f_2(s)$ pro každé $s \in (0,t)$, pak $(Af_1)(s) \geq (Af_2)(s)$

b) je-li $f_1(s) > f_2(s)$ pro každé $s \in (0,t)$, pak $(Af_1)(t) > (Af_2)(t)$.

Jednou z hlavních vět, které budeme potřebovat při dokazování pro nás stěžejních vět z kapitoly o charakterizaci normálního rozdělení, je následující tvrzení:

2.3 Věta [2] *Nechť A je intenzivně monotónní operátor na E⊂C a $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silně E-pozitivní množina funkcí. Předpokládejme, že $Af_\lambda = f_\lambda$ pro každou $\lambda \in \Lambda$.*
Potom platí-li $Af = f$ pro nějakou $f \in E$, existuje $\lambda \in \Lambda$ takové, že $f = f_\lambda$.
Jinými slovy, všechna řešení rovnice $Af = f$ jsou prvky množiny $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Důkaz [2] Nechť platí $Af = f$ pro $f \in E$. Protože množina $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silně E-pozitivní, můžeme najít t_0 a $\lambda_0 \in \Lambda$ takové, že $f(t_0) = f_{\lambda_0}(t_0)$. Dále jsou dvě možnosti:

a) $f(t) = f_{\lambda_0}(t)$ pro každé $t \in [0,T]$. V tomto případě není co dokazovat, dané λ_0 je to hledané λ.

b) $f \not\equiv f_{\lambda_0}$. Uvažujme bod

$$t^* = \inf\{t;\ 0 \leq t \leq t_0, f(t) = f_{\lambda_0}(t)\}$$

Potom $t^* \leq t_0$, dále $f(t^*) = f_{\lambda_0}(t^*)$, protože funkce f a f_{δ_0} jsou spojité. Z vlastnosti b) silně E-pozitivní množiny funkcí je $t^* > 0$. Proto buď

i) $f(t) > f_{\lambda_0}(t)$ pro $0 < t < t^*$, nebo

ii) $f(t) < f_{\lambda_0}(t)$ pro $0 < t < t^*$.

Z předpokladů vyplývá, že $(Af)(t) = f(t)$, dále $\left(Af_{\lambda_0}\right)(t) = f(t)$ pro každé $t \in [0, T]$.

Položme $t = t^*$,

tedy

$(Af)(t^*) = f(t^*)$, a dále $\left(Af_{\lambda_0}\right)(t^*) = f(t^*)$.

Odečteme druhou rovnici od první a dostaneme

$$(Af)(t^*) - \left(Af_{\lambda_0}\right)(t^*) = 0 \tag{2.1}$$

Ale v případě i) máme

$$(Af)(t^*) > \left(A f_{\lambda_0}\right)(t^*)$$

a v případě ii)

$$(Af)(t^*) < \left(A f_{\lambda_0}\right)(t^*),$$

protože A je intenzivně monotónní operátor. Přišli jsme tedy do sporu s rovnicí (2.1), což znamená, že případ b) je nemožný.

2.4 Definice [2] Nechť $E \subset C$. Definujeme

$$\alpha_-(f) = \min\{f(x);\ x \in [0, T]\}$$
$$\alpha_+(f) = \max\{f(x);\ x \in [0, T]\}$$

dále nechť $\nabla(E)$ je množina čísel, které se dají napsat buď jako $\alpha_-(f)$ nebo jako $\alpha_+(f)$ pro nějakou $f \in E$, tedy

$$\nabla(E) = \{a;\ a = \alpha_-(f) \text{ nebo } a = \alpha_+(f), f \in E\}$$

Říkáme, že E je vlastní podmnožina C, když pro každé $a \in \nabla(E)$ funkce, která je identicky rovná a, patří do E.

Následuje další tvrzení využívané v důkazech vět o charakterizaci stabilního rozdělení v kapitole 3.

2.5 Věta [2] *Nechť E je vlastní podmnožina C a A je nějaký intenzivně monotónní operátor na E, pro který platí $Aa = a$ pro každé $a \in \nabla(E)$. Potom, je-li splněna rovnost $Af = f$ pro nějakou funkci $f \in E$, je f konstanta.*

Důkaz [2] Nechť platí $Af = f$ pro $f \in E$. Položme

$$a_0 = \min\{f(t);\ t \in [0,T]\}$$
$$x_0 = \inf\{x;\ x \in [0,T], f(x) = a_0\}$$
Protože f je spojitá, je $f(x_0) = a_0$. Dále máme
$$(Af)(x_0) = f(x_0),$$
a také
$$Aa_0 = a_0,$$
tedy
$$(Af)(x_0) = a_0.$$
V případě $x_0 > 0$ je $f(x) > a_0$ pro $x \in (0, x_0)$, a tedy protože A je intenzivně monotónní operátor, platí
$$f(x_0) = (Af)(x_0) > Aa_0 = a_0.$$
Avšak $(Af)(x_0) = a_0$, tedy $x_0 = 0$.
Nyní nechť
$$a_1 = \max\{f(t);\ t \in [0,T]\}$$
$$x_1 = \inf\{x;\ x \in [0,T], f(x) = a_1\}.$$
Podobně jako výše dostáváme
$$f(x_1) = a_1, \qquad (Af)(x_1) = f(x_1), \qquad Aa_1 = a_1,$$
tedy
$$(Af)(x_1) = a_1.$$
Opět kdyby $x_1 > 0$, pak $f(x) < a_1$ pro $x \in (0, x_1)$, a tedy protože je A intenzivně monotónní operátor, platilo by
$$f(x_1) = (Af)(x_1) < Aa_1 = a_1,$$
což by byl spor s $(Af)(x_1) = a_1$, tedy $x_1 = 0$.
Závěrem
$$f(0) = \min\{f(t);\ t \in [0,T]\} = \max\{f(t); t \in [0,T]\},$$
a tedy f je konstanta.

V následující kapitolce zmíníme některé pro nás důležité

2.2 Příklady intenzivně monotónních operátorů

2.6 Lemma [2] *Nechť $g(t, x_1, \dots, x_n)$ je spojitá funkce definovaná na nějaké množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Předpokládejme, že g je neklesající v každé proměnné $x_j, j = 1, \dots, n$ a* *je striktně monotónní alespoň v jedné proměnné* $x_j, j = 1, \dots, n$. *Nechť* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *jsou intenzivně monotónní operátory z E do C, nechť pro každou funkci* $f \in E$ *je bod* $\big(t, (A_1 f)(t), \dots, (A_n f)(t)\big) \in \Omega$ *pro každé* $t \in [O, T]$. *Potom je operátor definovaný*

$$(Af)(t) = g(t, (A_1 f)(t), \dots, (A_n f)(t)), \qquad f \in E$$

intenzivně monotónní operátor z E do C.

Důkaz Nechť $f_a(s) \geq f_b(s)$ pro každé $s \in (0, t)$. Pak

$$\big(Af_a(s)\big) = g\big(s, (A_1 f_a)(s), \dots, (A_n f_a)(s)\big) \geq g\big(s, (A_1 f_b)(s), \dots, (A_n f_b)(s)\big)$$
$$= (Af_b(s)),$$

protože $(A_i f_a)(s) \geq (A_i f_b)(s)$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a g je neklesající v každé proměnné, dále nechť $f_a(s) > f_b(s)$ pro každé $s \in (0, t)$. Pak

$$(Af_a(t)) = g\big(t, (A_1 f_a)(t), \dots, (A_n f_a)(t)\big) > g\big(t, (A_1 f_b)(t), \dots, (A_n f_b)(t)\big)$$
$$= (Af_b(t)),$$

protože $(A_i f_a)(t) > (A_i f_b)(t)$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a g je rostoucí v alespoň jedné proměnné (mimo t).

2.7 Lemma [2] *Nechť* A_1 *a* A_2 *jsou dva intenzivně monotónní operátory z* $E \subset C$ *do* E_1 *respektive z* $E_1 \subset C$ *do* C. *Potom je operátor*

$$A: (Af)(t) = \big(A_1(A_2 f)\big)(t)$$

intenzivně monotónní operátor z E *do* C.

2.8 Lemma [2] *Je-li* A *intenzivně monotónní operátor z* E *do* C, $E_1 \subset E$, A_1 *restrikce operátoru* A *na* E_1, *potom* A_1 *je intenzivně monotónní operátor z* E_1 *do* C.

2.9 Příklad [2] Nechť $E = C = C[0, T]$, nechť $\alpha \in (0, 1)$ libovolné pevné. Operátor A definovaný:

$$(Af)(t) = f(\alpha t), \qquad t \in [0, T],$$

je zřejmě intenzivně monotónní operátor.

2.10 Příklad [2] Nechť $\sigma(x)$ je neklesající funkce na $[0, 1]$, $\sigma(1) < \infty$, s alespoň jedním bodem v $(0, 1)$, ve kterém je $\sigma(x)$ rostoucí. Potom operátor

$$A: (Af)(t) = \int_0^1 f(xt)d\sigma(x)$$

je intenzivně monotónní.

2.11 Příklad [2] Nechť π je nějaká pravděpodobnostní míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Předpokládejme, že $a_1(\omega), \dots, a_n(\omega)$ jsou měřitelné funkce $\omega \in \Omega$, pro které platí podmínka $0 \leq a_j(\omega) \leq 1, j = 1, \dots, n$, a také množina

$$\{\omega;\ \omega \in \Omega, \exists j: a_j(\omega) \neq 0, a_j(\omega) \neq 1\}$$

má kladnou π-míru. Potom operátor

$$A: (Af)(t) = \int_\Omega \prod_{j=1}^n f\big(a_j(\omega)t\big)\, d\pi(\,\omega)$$

je intenzivně monotónní operátor z množiny nezáporných spojitých funkcí na $[0, T]$ do C.

Důkaz [2] Plyne z příkladů **1.10**, **1.11** a Lemmat **1.9**, **1.7**, **1.8**

3 Charakterizace pravděpodobnostních rozdělení

3.1 Normální rozdělení

3.1 Poznámka Jsou-li $f_0, f_1, \dots, f_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ charakteristické funkce a platí-li $f_0(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_k(t)$, říkáme, že $f_1, f_2, \dots, f_k$ jsou komponenty charakteristické funkce f_0.

Cramérova věta o normalitě komponent charakteristické funkce normálního rozdělení zní:

3.2 Věta [2] (Cramér) *Nechť je $a > 0$, $f(t)$ je charakteristická funkce normálního rozdělění, $f_1(t)$ a $f_2(t)$ jsou nějaké charakteristické funkce. Potom platí $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ pro každé t z intervalu $[-a, a]$, právě když f_1 a f_2 jsou charakteristické funkce normálního rozdělění.*

Jinými slovy, platí nejen normalita součtu dvou nezávislých normálních náhodných veličin, ale také obráceně, je-li rozdělení součtu náhodných veličin X_1 a X_2 normální, potom samotné náhodné veličiny X_1 a X_2 mají normální rozdělění. [2]

Důkaz Cramérovy věty zde neuvádíme, není předmětem studia v této práci. Zatím bez důkazu zde také uvedeme jisté rozšíření Polyovy věty. Tato věta je ale důsledkem dalšího rozšíření, které po ní bude následovat, a proto není nutné tento důkaz uvádět.

3.3 Věta [2] Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny a $a_1, a_2 \dots, a_n$ jsou nenulové konstanty splňující podmínku

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1.$$

Potom je náhodná veličina X_1 stejně rozdělená jako lineární forma

$$L = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$$

právě tehdy, když má X_1 normální rozdělení.

Nejprve tedy uvedeme rozšíření Cramérovy a Polyovy věty o normálním rozdělení. K tomu je potřebná následující definice.

3.4 Definice [2] Nechť f a f_1 jsou nedegenerované charakteristické funkce. Existuje alespoň jedna spojitá funkce

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t; f, f_1)$$

na okolí bodu 0, například na intervalu $[-\gamma, \gamma]$, taková, že na tomto okolí platí

$$|f_1(t)| = |f(\alpha_1(t))|.$$

Funkci $\alpha_1(t; f, f_1)$ nazýváme funkcí spojení charakteristické funkce f_1 s charakteristickou funkcí f.

3.5 Lemma [2] *Je-li f_1 nedegenerovanou komponentou charakteristické funkce f, pak* $|\alpha_1(t)| \leq t$.

Důkaz f_1 je komponentou f, tedy existuje nějaká charakteristická funkce f_2 taková, že

$f(t) = f_1(t) f_2(t)$.

Dále víme, že $|f_2(t)| \leq 1$, $|f(t)| = |f_1(t)||f_2(t)|$, proto $|f_1(t)| \geq |f(t)|$ na okolí nuly. Hodnota těchto funkcí v bodě nula je jedna a vezmeme interval $[-\gamma, \gamma]$, který patří do tohoto okolí. Nechť je t pevné, $t \in [-\gamma, \gamma]$. Funkce jsou spojité, proto existuje $s \in [0, t]$ takové, že $|f_1(t)| = |f(s)|$. Definujme $\alpha_1(t) = s$, tedy $|\alpha_1(t)| \leq t$.

3.6 Poznámka [2] Budeme pracovat s charakteristickými funkcemi neřešetovitých rozdělení, můžeme tedy předpokládat, že α_1 je definována pro takové hodnoty t, že $|f(s)| \neq 1$ a $|f_1(s)| \neq 1$ pro všechny $|s| \leq t$. Dále předpokládejme, že $|f_1(s)| \neq 0$ pro všechny $|s| \leq t$ (omezíme se jednoduše na menší interval kolem nuly). Tedy $\alpha_1(t) \neq t$. Protože budeme pracovat se symetrickými charakteristickými funkcemi nebo jejich absolutními hodnotami, je navíc možné předpokládat že $\alpha_1(t) \cdot t \geq 0$. Závěrem, $\alpha_1(t) \in (0, t)$ pro $t>0$ a $\alpha_1(t) \in (t, 0)$ pro $t<0$ a $\alpha_1(t) = 0$ pro $t = 0$.

3.7 Věta [2] *Nechť* $X_0, X_1, \dots, X_n$ *jsou nezávislé nedegenerované náhodné veličiny. Nechť* $\alpha_j(t)$ *jsou funkce spojení charakteristické funkce veličiny* X_j *s charakteristickou funkcí veličiny* X_0*. Dále nechť platí rovnost*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2(t) = t^2$$

pro všechna t *na nějakém okolí* U *bodu* $t = 0$.

Potom platí, že náhodné veličiny X_0 *a* $\sum_{j=1}^{n} X_j$ *jsou stejně rozdělené právě tehdy, když náhodné veličiny* $X_0, X_1, \dots, X_n$ *mají normální rozdělení.*

3.8 Poznámka [2] V případě platnosti této věty jsou parametry normálního rozdělení (μ_j, σ_j^2) těchto náhodných veličin určeny následovně:

$$\mu_0 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \,, \qquad \sigma_0^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 .$$

3.9 Poznámka [2] Nechť je X_0 náhodná veličina, která má standardní normální rozdělení, stejně rozdělená jako součet náhodných veličin X_1 a X_2. Potom pro charakteristické funkce $f_1(t)$ a $f_2(t)$ náhodných veličin X_1 a X_2 platí

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = f_0(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Dále

$$\left|\exp\left(-\frac{\alpha_j(t)}{2}\right)\right| = \left|f_j(t)\right|, \qquad j = 1, 2,$$

odtud

$$\alpha_j(t) = \sqrt{-2\log\left|f_j(t)\right|}, \qquad j = 1, 2,$$

a

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -2\log|f_1(t)| - 2\log|f_2(t)| = -2\log|\mathrm{f}_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{f}_2(\mathrm{t})|$$
$$= -2\log\left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right) = t^2.$$

Tedy podmínka $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2(t) = t^2$ z věty **3.7** je splněna a Cramérova věta je důsledkem věty **3.7**.

Také rozšíření Polyovy věty- věta **3.3-** plyne z věty **3.7**: položíme-li $\alpha_j(t) = a_j t$, podmínka $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$ implikuje vztah $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2(t) = t^2$.

Důkaz [2] věty **3.7** Mají-li náhodné veličiny $X_0, X_1, \dots, X_n$ normální rozdělení a platí-li pro jejich parametry vztahy $\mu_0 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$, $\sigma_0^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$, pak protože součet nezávislých normálních náhodných veličin má normální rozdělení, mají náhodné veličiny X_0 a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ stejné rozdělení.

Nyní obráceně, nechť mají statistiky X_0 a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ stejné rozdělení. Dokážeme normalitu náhodných veličin $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Nechť f_j je charakteristická funkce náhodné veličiny X_j, $j = 0, 1, \dots, n$. Protože jsou $X_0, X_1, \dots, X_n$ nezávislé, stejné rozdělení X_0 a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ je ekvivalentní s rovností

$$f_0(t) = \prod_{j=1}^{n} f_j(t).$$

Z rovnosti

$$f_j(t) = f_0\left(\alpha_j(t)\right)$$

na nějakém okolí U bodu nula vyplývá, že na U platí rovnost

$$|f_0(t)|^2 = \prod_{j=1}^{n} \left|f_0(\alpha_j(t))\right|^2. \tag{3.1}$$

Vezměme číslo $T > 0$ takové, že interval $[0, T] \subset U$. Nechť C a E jsou tytéž jako v příkladu **1.3**, $\varphi(t)$ je charakteristická funkce (symetrického) normálního rozdělení a množina $(\varphi_\lambda(t))_{\lambda > 0}$, kde φ_λ je definovaná vztahem $\varphi_\lambda(t) = \varphi(\frac{t}{\lambda})$, je silně E-pozitivní.

Definujme operátor A z E do C předpisem

$$(Af)(t) = \prod_{j=1}^{n} f\left(\alpha_j(t)\right), \qquad t \in [0, T].$$

Dokážeme, že A je intenzivně monotónní operátor.

Nechť $f_1(s) \geq f_2(s)$, $s \in (0, t)$. Pak i $f_1\left(\alpha_j(s)\right) \geq f_2\left(\alpha_j(s)\right)$, $j = 1, \dots, n$, protože $s > \alpha_j(s) > 0$, $j = 1, \dots, n$, takže

$$(Af_1)(s) = \prod_{j=1}^{n} f_1\left(\alpha_j(s)\right) \geq \prod_{j=1}^{n} f_2\left(\alpha_j(s)\right) = (Af_2)(s).$$

Dále nechť $f_1(s) > f_2(s)$, $s \in (0, t)$. Pak

$$(Af_1)(t) = \prod_{j=1}^{n} f_1\left(\alpha_j(t)\right) > \prod_{j=1}^{n} f_2\left(\alpha_j(t)\right) = (Af_2)(t),$$

protože $t > \alpha_j(t) > 0$. Protože

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2(t) = t^2, \qquad t \in [0,T] \subset U,$$

a tedy

$$(A\varphi_\lambda)(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_\lambda(\alpha_j(t)) = \exp\left(-\frac{b}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2(t)\right) = \exp\left(-\frac{b}{2}t^2\right) = \varphi_\lambda(t),$$

kde b je parametr rozptylu normálního rozdělení reprezentovaného chrakteristickou funkcí φ_λ, je

$$(A\varphi_\lambda)(t) = \varphi_\lambda(t)$$

pro $t \in [0,T]$, $\lambda > 0$.

Jsou tedy splněny předpoklady věty **2.3**. Podle této věty, pokud $Af = f$, $f \in E$, pak existuje λ_0 taková, že

$f(t) = \varphi_{\lambda_0}(t)$, $t \in [0,T]$.

Ale funkce $|f_0(t)|^2 \in E$ a z rovnosti (3.1) plyne, že

$$A(|f_0|^2) = |f_0|^2.$$

Tedy

$$f_0(t) \cdot f_0(-t) = |f_0(t)|^2 = \varphi_{\lambda_0}(t).$$

Proto z Cramérovy věty plyne, že funkce $f_0(t)$ je charakteristickou funkcí symetrického normálního rozdělení, $f_0(-t) = f_0(t)$. Dále z ní plyne, že i komponenty funkce $f_0(t)$ $f_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, jsou charakteristické funkce normálního rozdělení.

Další příklad charakterizace normálního rozdělení pomocí stejného rozdělení jedné náhodné veličiny a lineární formy náhodných veličin máme za předpokladu, že je tato lineární forma s náhodnými koeficienty. Nyní tedy uvedeme větu o charakterizaci normálního rozdělení pomocí stejného rozdělení náhodné veličiny a náhodné lineární formy ze spočetné množiny nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. Při důkazu této věty budeme opět používat aparátu intenzivně monotónních operátorů.

3.10 Věta [2] *Nechť* $X_0, X_1, X_2, \dots$ *je posloupnost symetrických nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin, dále* $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ *je náhodná posloupnost nezávislá na* $(X_1, X_2, X_3, \dots)$. *Předpokládejme, že* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = 1$ *s pravděpodobností jedna a alespoň dva členy* a *jsou s kladnou pravděpodobností nenulové. Nechť dále řada* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ *konverguje s pravděpodobností jedna.*

Potom je-li náhodná veličina X_0 *stejně rozdělená jako* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$, *má* X_0 *normální rozdělení.*

Důkaz [2] Nechť f je charakteristická funkce $X_i, i = 0, 1, 2, \dots$ Předpokládejme, že $a_j = a_j(\omega_1)$ jsou funkce definované na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_1, \mathcal{L}, \pi)$. Potom pro charakteristickou funkci g formy $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ platí

$$g(t) = E\exp\left(it\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j\right) = \int_{\Omega_1\times\Omega} \exp\left(it\sum_{j=1}^{\infty} a_j(\omega_1)X_j(\omega)\right) d(\pi(\omega_1)\times P(\omega))$$

$$= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega} \exp\left(it\sum_{j=1}^{\infty} a_j(\omega_1)X_j(\omega)\right) dP(\omega)\right) d\pi(\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_1}\prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\,\omega_1).$$

To znamená, že podmínka stejného rozdělení X_0 a $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ je ekvivalentní s

$$f(t) = \int_{\Omega_1}^{q}\prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\,\omega_1).$$

Nechť E je tatáž jako v příkladu **1.3**, tedy $\varphi(t)$ je charakteristická funkce normálního rozdělení. Potom množina $(\varphi_\lambda(t))_{\lambda>0}$, kde φ_λ je definovaná vztahem $\varphi_\lambda(t) = \varphi(\frac{t}{\lambda})$, je silně E-pozitivní. Definujme opět operátor A následovně:

$$(Af)(t) = \int_{\Omega_1}\prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\,\omega_1).$$

Z příkladu **2.11** a přechodu ke spočetné množině náhodných veličin je A intenzivně monotónní operátor. Dále

$$A\varphi_\lambda(t) = \int_\Omega \prod_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{b\big(a_j(\omega_1)t\big)^2}{2}\right) d\pi(\omega_1)$$

$$= \int_\Omega \exp\left(-\frac{bt^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j(\omega_1)\right) d\pi(\omega_1) = \exp\left(-\frac{bt^2}{2}\right)\cdot \int_\Omega 1 d\pi(\omega_1)$$

$$= \varphi_\lambda(t),$$

kde b je parametr rozptylu vztahující se k charakteristické funkci φ_λ.

Jsou tedy splněny podmínky věty **2.3**, a protože $(Af)(t) = f(t)$, je $f(t)$ charakteristickou funkcí normálního rozdělení.

3.11 Poznámka [2] Za důsledek věty **3.10** se považuje charakterizace normálního rozdělení stejným rozdělením jedné náhodné veličiny a lineární formy s náhodným počtem členů.

3.2 Stabilní rozdělení

3.12 Definice [4] Stabilní rozdělení $L(x;\alpha,\beta,c,\mu)$ je definováno Fourierovou transformací charakteristické funkce $\varphi(t)$ následovně:

$$f(x;\alpha,\beta,c,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-itx}dt,$$

kde

$$\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{|ct|^\alpha}{2}(1 - i\beta\operatorname{sgn}(t)\phi)\right),$$

kde

$$\phi = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}\log|t|, & \alpha = 1 \\ \tan\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \in [0,2], \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\beta \in [-1,1]$.

μ je parametr posunutí, c je parametr „širokosti“ rozdělení, které neovlivňují tvar hustoty; $\beta \in [-1,1]$ je parametr symetrie a $\alpha \in [0,2]$ je tzv. exponent. Pro $\alpha = 2$ je to ale normální rozdělení, pro $\alpha = 0$ je to rozdělení degenerované, a proto budeme předpokládat, že $\alpha \in (0,2)$. Je-li $\beta = 0$, pak je rozdělení symetrické kolem μ.

Stabilní rozdělení má důležitou vlastnost – stabilitu. To znamená, že má-li nějaký počet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin stabilní rozdělení, pak má lineární kombinace těchto veličin totéž stabilní rozdělení, toto rozdělení se může lišit nejvýše v parametrech μ a β. Konkrétněji podle zdroje [4]: „Mají-li nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 stabilní rozdělení $L(x;\alpha,\beta,c,\mu)$, a je-li $Y = AX_1 + BX_2 + C$ jejich lineární kombinace, pak existují čísla D a E taková, že $DY + E$ má stabilní rozdělení $L(Dy + E;\alpha,\beta,c,\mu)$, neboli Y má stabilní rozdělení $L\left(y;\alpha,\beta,\frac{c}{D},\frac{\mu-E}{D}\right)$. Je-li $E = 0$ pro všechna A, B a C, potom má Y striktně stabilní rozdělení.“ [4]

3.13 Poznámka Víme, že normální rozdělení splňuje výše uvedené vlastnosti.

Nás zajímá symetrické stabilní rozdělení, to znamená, že parametry β a μ budou rovny nule a proto charakteristická funkce „našeho“ stabilního rozdělení bude mít tvar

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|ct|^{\alpha}}{2}\right) = \exp(-\lambda|t|^{\alpha}), \alpha \in (0,2),$$

kde $-\lambda$ je nějaká záporná konstanta (z důvodu nedegenerovanosti rozdělení).

Mějme X_1 a X_2 nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Z Polyovy věty vyplývá, že podmínka stejného rozdělení náhodné veličiny X_1 a formy $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ je ekvivalentní s normalitou rozdělení X_1. Nyní místo $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ mějme formu

$$\frac{X_1 + X_2}{2^{\frac{1}{\alpha}}},$$

kde $\alpha \in (0,2)$ je pevná konstanta. Z vlastnosti stabilního rozdělení platí, že mají-li X_1 a X_2 stabilní rozdělení s exponentem α, pak jsou statistiky X_1 a $\frac{X_1+X_2}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ stejně rozdělené.

Na druhou stranu, stejné rozdělení X_1 a $\frac{X_1+X_2}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ za přidání jistých předpokladů na X_1 a X_2 zaručuje, že X_1 a $\frac{X_1+X_2}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ mají stabilní rozdělení. Přidejme tedy podmínku, že se logaritmus charakteristické funkce náhodné veličiny X_1 chová na nějakém okolí bodu nula jako $K \cdot |t|^{\alpha}$, kde K je nějaká konstanta. Potom ze shody rozdělení náhodných veličin X_1a $\frac{X_1+X_2}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ vyplývá, že $f(t)$ je charakteristická funkce stabilního rozdělení. [2]

V následujících odstavcích uvedeme rozšíření této charakterizace stabilního rozdělení na případy různých typů lineárních forem.

3.14 Věta [2] *Nechť $X_0, X_1, \dots, X_n$ jsou nedegenerované nezávislé symetrické náhodné veličiny. Nechť $f_j(t), j = 0, 1, \dots, n$ jsou charakteristické funkce veličin $X_j, j = 0, 1, \dots, n$, a $\alpha_j(t), j = 1, 2, \dots, n$ jsou funkce spojení charakteristické funkce f_j s charakteristickou funkcí f_0 . Nechť $\alpha \in (0, 2)$ je nějaká konstanta. Předpokládejme, že $\alpha_j(t)$ jsou definovány pro všechna reálná t a že platí*

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} = |t|^{\alpha}.$$

Nechť dále existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - f_0(t)\right)}{|t|^{\alpha}}.$$

Potom jsou-li náhodné veličiny X_0 a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ stejně rozdělené, pak mají obě stabilní rozdělení s exponentem α.

Důkaz [2] Protože jsou $f_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$ symetrické, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\alpha_j(t) \cdot t \geq 0$.

Podmínka stejného rozdělení veličin X_0 a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ se dá ekvivalentně napsat jako

$$f_0(t) = \prod_{j=1}^{n} f_j(t).$$

Protože jsou $\alpha_j(t)$ funkce spojení mezi f_j a f_0, platí z předchozího vztahu rovnost

$$f_0(t) = \prod_{j=1}^{n} f_0\left(\alpha_j(t)\right).$$

(3.2)

Protože $\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} = |t|^{\alpha}$ a $f_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$ jsou charakteristické funkce neřešetovitých rozdělení, tedy $f_j(t)$<1 pro $t \neq 0$ a $j = 0, 1, \dots, n$, je $\left|\alpha_j(t)\right| < |t|$, a ze vztahu (3.2) je vidět, že $f_0(t) > 0, t \in \mathbb{R}$. Kdyby totiž $f_0\left(t_\beta\right) = 0$ pro nějaká $\left(t_\beta\right)_{\beta \in B}$, ze spojitosti funkce f_0 a z toho, že $f_0(0) = 1$, muselo by existovat $\tilde{t} = \min_{\beta \in B, t_\beta > 0} t_\beta$. Pak by ale také platilo $f_0\left(\alpha_j(\tilde{t})\right) = 0$ pro nějaké $j = 1, \dots, n$, což by byl spor s $\left|\alpha_j(\tilde{t})\right| < |\tilde{t}|$, $\alpha_j(\tilde{t}) \cdot \tilde{t} \geq 0$.

Můžeme tedy použít logaritmus funkce f_0 a vztah (3.2) přepíšeme jako

$$\log f_0(t) = \sum_{j=1}^{n} \log f_0\left(\alpha_j(t)\right).$$

Označme

$$v(t) = \log f_0(t)$$

a dostáváme

$$v(t) = \sum_{j=1}^{n} v\left(\alpha_j(t)\right).$$

(3.3)

Víme, že $\alpha_j(t) \cdot t \geq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a všechna $j = 0, 1, \dots, n$. Položme

$$v(t) = |t|^{\alpha} \cdot u(t).$$

Předpoklad existence konečné limity

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - f_0(t)\right)}{|t|^{\alpha}}$$

nám zaručuje, že $u(t)$ můžeme spojitě dodefinovat v nule. Protože totiž pro nějakou kladnou konstantu C platí

$$C = \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - f_0(t)\right)}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{v(t)}}{|t|^{\alpha}},$$

a na okolí nuly se e^x chová jako $1 + x$ (z Taylorova rozvoje e^x), platí

$$C \approx \lim_{t \to 0} \frac{-v(t)}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t \to 0} - u(t).$$

Vztah (3.3) přepíšeme do tvaru

$$|t|^{\alpha} \cdot u(t) = \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} u\left(\alpha_j(t)\right),$$

tedy

$$u(t) = |t|^{-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} u\left(\alpha_j(t)\right).$$

(3.4)

Nechť je $T > 0$ libovolné kladné číslo. Definujme operátor A na prostoru $C = C[0,T]$ pro $g \in C_{-} = \{g; g \in C, g(t) \leq 0, t \in C[0,T]\}$ následovně:

$$(Ag)(t) = \begin{cases} |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} g(\alpha_j(t)), & t>0 \\ g(0), & t = 0 \end{cases}$$

Operátor A je z C_{-} do C, protože α_j jsou spojité funkce a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} g(\alpha_j(t)) &= \lim_{t\to 0} |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} \left(g(0) + g\left(\alpha_j(t)\right) - g(0)\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\alpha_j(t)}{t}\right|^{\alpha} g(0) + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\alpha_j(t)}{t}\right|^{\alpha} \left(g\left(\alpha_j(t)\right) - g(0)\right) \right) \\ &= g(0) \end{aligned}$$

protože $\left|\frac{\alpha_j(t)}{t}\right|^{\alpha} \leq 1$ a $g\left(\alpha_j(t)\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g(0)$.

Dále platí, že A je intenzivně monotónní operátor. Je-li $g_1(s) \leq g_2(s), s \in (0,t)$, pak

$$\begin{aligned} (Ag_1)(s) &= |s|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(s)\right|^{\alpha} g_1\left(\alpha_j(s)\right) \leq |s|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(s)\right|^{\alpha} g_2\left(\alpha_j(s)\right) \\ &= (Ag_2)(s) \end{aligned}$$

protože $\alpha_j(s) \in (0,s), j = 1,2,\dots,n$.

Je-li $g_1(s) < g_2(s), s \in (0,t)$, pak

$$(Ag_1)(t) = |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} g_1(\alpha_j(t)) < |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} g_2(\alpha_j(t)) = (Ag_2)(t)$$

protože $\alpha_j(t) \in (0,t), j = 1,2,\dots,n$.

Dále nechť a je nějaká konstanta, pak

$$Aa = |t|^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} a = a$$

z podmínky $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} = |t|^{\alpha}$. Ze vztahu (3.4) plyne, že pro funkci $u(t)$ platí $Au = u$. Tím jsou splněny předpoklady věty **1.6**. Z toho vyplývá, že existuje záporná (z nedegenerovanosti charakteristické funkce f_0) konstanta $-\lambda$, že $u \equiv -\lambda$, tedy

$$\log f_0(t) = v(t) = |t|^{\alpha} \cdot (-\lambda),$$

po úpravě

$$f_0(t) = \exp(-\lambda \cdot |t|^{\alpha}).$$

3.15 Důsledek [2] *Nechť jsou $X_0, X_1, \dots, X_n$ nedegenerované nezávislé symetrické stejně rozdělené náhodné veličiny s charakteristickou funkcí $f(t)$. Nechť $\alpha \in (0, 2)$. Předpokládejme, že existuje konečná limita*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - f(t)\right)}{|t|^{\alpha}}.$$

Nechť je náhodná veličina X_0 stejně rozdělená jako lineární forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_j X_j,$$

kde $a_j \neq 0,\ j = 1, 2, \dots, n$, a

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_j\right|^{\alpha} = 1.$$

Potom $f(t)$ je charakteristickou funkcí symetrického stabilního rozdělení s koeficientem α.

Důkaz [2] Položme $Y_j = a_j X_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, a aplikujme větu **3.14** na náhodné veličiny $X_0, Y_1, \dots, Y_n$. Pro charakteristickou funkci g náhodné veličiny Y_j platí

$$g(t) = Ee^{itY_j} = Ee^{ita_jX_j} = f\left(a_j t\right),$$

tedy funkce spojení charakteristické funkce náhodné veličiny Y_j s charakteristickou funkcí veličiny X_0 je $\alpha_j(t) = a_j t$. Protože

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j(t)\right|^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \left|a_j t\right|^{\alpha} = |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left|a_j\right|^{\alpha} = |t|^{\alpha},$$

jsou splněny předpoklady věty **2.13**, ze které plyne dané tvrzení.

3.16 Poznámka Zdroj [2] na straně 37 : „Věta **3.14** je analogií věty **3.7** pro případ charakterizace stabilního rozdělení s exponentem α místo normálního rozdělení. Avšak z věty **3.7** můžeme usoudit, že náhodné veličiny $X_1, X_2 \dots, X_n$ mají normální rozdělení, zatímco ve větě **3.14** nemůžeme udělat závěr, že charakteristické funkce veličin $X_1, X_2 \dots, X_n$ jsou charakteristickými funkcemi stabilního rozdělení.“

Následuje obdoba věty **3.10** pro stabilní rozdělení.

3.17 Věta [2] *Nechť je $X_0, X_1, X_2, \dots$ posloupnost symetrických, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin s charakteristickou funkcí $f(t)$ a $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ je náhodná posloupnost, rozdělená nezávisle na $X_0, X_1, X_3, \dots$ Předpokládejme, že pro nějaké $\alpha \in (0, 2)$ je*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{\alpha} = 1$$

s pravděpodobností jedna a s kladnou pravděpodobností jsou alespoň dva prvky této posloupnosti nenulové. Nechť existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{\big(1 - f(t)\big)}{|t|^{\alpha}}.$$

Je-li náhodná veličina X_0 stejně rozdělená jako náhodná lineární forma $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ (za předpokladu konvergence $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ s pravděpodobností jedna), pak má X_0 symetrické stabilní rozdělení s exponentem α.

Důkaz [2] Jsou-li $a_j = a_j(\omega_1)$ funkce definované na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_1, \mathcal{L}, \pi)$, platí pro charakteristickou funkci $g(t)$ formy $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ stejně jako v důkazu věty 3.10 následující:

$$g(t) = \int_{\Omega_1} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\,\omega_1),$$

kde $f(t)$ je charakteristická funkce veličiny X_0. Takže předpoklad stejného rozdělení X_0 a $\sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j$ se dá napsat jako

$$f(t) = \int_{\Omega_1} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\omega_1). \tag{3.5}$$

Funkce $f(t)$ je nenulová na celé reálné ose. To ukážeme následovně.

Nechť Ω_a je ta část Ω_1, na které je pro všechna $\omega_1 \in \Omega_a$ právě jedno $j \in \mathbb{N}$, takové, že $a_j(\omega_1)$ je rovno jedné a zbylá $a_j(\omega_1)$ jsou nulová, a nechť Ω_b je jeho doplněk v Ω_1, tedy pro každé $\omega_1 \in \Omega_b$ jsou alespoň dvě $a_j(\omega_1)$ nenulová. Pak

$$f(t) = \int_{\Omega_a} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\omega_1) + \int_{\Omega_b} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\omega_1),$$

ale

$$\int_{\Omega_a} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\omega_1) = \int_{\Omega_a} f(t) d\pi(\omega_1) = f(t) \cdot \pi(\Omega_a).$$

Označme $\pi_a = \pi(\Omega_a)$. Víme, že $0 \leq \pi_a < 1$, tedy

$$f(t) \cdot (1 - \pi_a) = \int_{\Omega_b} \prod_{j=1}^{\infty} f\big(a_j(\omega_1)t\big)\, d\pi(\omega_1),$$

dále na Ω_b jsou alespoň dvě a_j nenulové a úvahou stejnou jako ve větě **3.14** dostaneme, že $f(t)$ nemůže nikde nabývat nulové hodnoty.

Z důvodu symetrie f můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a_j(\omega) \geq 0$ s pravděpodobností jedna. Položme

$$v(t) = \log f(t),$$
$$u(t) \cdot |t|^{\alpha} = v(t).$$

Vztah (3.5) můžeme napsat jako

$$u(t) = |t|^{-\alpha} \log \int_{\Omega_1} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} u\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1).$$

Za předpokladu konečnosti limity

$$\lim_{t \to 0} \frac{\big(1 - f(t)\big)}{|t|^{\alpha}}$$

vyplývá stejně jako v důkazu věty **3.14**, že $u(t)$ může být v nule spojitě dodefinována svou limitou, a proto můžeme předpokládat její spojitost.

Nechť $T>0$ je libovolné kladné číslo. Definujme operátor A působící na $g \in C_- = C_-[0, T]$ následovně

$$(Ag)(t) = \begin{cases} |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_1} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1), & t>0 \\ g(0), & t>0 \end{cases}$$

Platí, že $Ag \in C$, protože postupem podobným jako ve větě **3.14** zjistíme, že

$$\lim_{t\to 0} |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_1} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1) = g(0).$$

Dále, A je intenzivně monotónní operátor. Nechť $g_1(s) \leq g_2(s)$ pro každé $s \in (0, t)$, pak

$$\begin{aligned} (Ag_1)(s) &= |s|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_1} \exp\left\{ |s|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_1\big(a_j(\omega_1) \cdot s\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1) \\ &\leq |s|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_1} \exp\left\{ |s|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_2\big(a_j(\omega_1) \cdot s\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1) \\ &= (Ag\quad)(s) \end{aligned}$$

protože $a_j(\omega_1) \cdot s \in (0, t)$ s pravděpodobností jedna. Nechť $g_1(s) < g_2(s)$ pro každé $s \in (0, t)$. Pak pro g_1 a g_2 platí

$$\begin{aligned} (Ag_1)(t) &= |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_a} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_1\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1) \\ &\quad + |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_b} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_1\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1) \\ &= g_1(t) \cdot \pi_a \\ &\quad + |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_b} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_1\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1), \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned} (Ag_2)(t) &= g_2(t) \cdot \pi_a \\ &\quad + |t|^{-\alpha} \log \int\limits_{\Omega_b} \exp\left\{ |t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_2\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1) \right\} d\pi(\omega_1). \end{aligned}$$

Na Ω_b je pro každé $\omega_1 \in \Omega_b$ $a_j(\omega_1) \cdot t \in (0, t)$, tedy

$$|t|^{-\alpha} \log \int_{\Omega_b} \exp\left\{|t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_1\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1)\right\} d\pi(\omega_1)$$

$$< |t|^{-\alpha} \log \int_{\Omega_b} \exp\left\{|t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} g_2\big(a_j(\omega_1) \cdot t\big) \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1)\right\} d\pi(\omega_1),$$

a ze spojitosti g_1 a g_2 je $g_1(t) \leq g_2(t)$, tedy

$$(Ag_1)(t) < (Ag_2)(t).$$

Je-li a nějaká konstanta, je

$$Aa = |t|^{-\alpha} \log \int_{\Omega_1} \exp\left\{|t|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} a \cdot a_j^{\alpha}(\omega_1)\right\} d\pi(\omega_1)$$

$$= |t|^{-\alpha} \log \int_{\Omega_1} \exp\{|t|^{\alpha} a\} d\pi(\omega_1) = a,$$

čímž jsou splněny předpoklady věty **2.5.** A protože $Au = u$, je u nějaká konstanta $-\lambda$, (neboť u je záporná). Tedy

$$-\lambda \cdot |t|^{\alpha} = \log f(t)$$

$$f(t) = \exp\{-\lambda \cdot |t|^{\alpha}\},$$

a f je tedy charakteristická funkce stabilního rozdělení.

3.18 Poznámka [2] Stejně jako u normálního rozdělení je speciálním případem věty **3.17** charakterizace stabilního rozdělení pomocí lineární formy s náhodným počtem členů.

4 Příklad použití charakterizace normálního rozdělení – Bernsteinova věta

4.1 Věta [1] Nechť X_1 a X_2 jsou nedegenerované a nezávislé náhodné veličiny. Potom platí, že jsou-li náhodné veličiny $X_1 + X_2$ a $X_1 - X_2$ nezávislé, pak mají X_1 a X_2 normální rozdělení (a tedy i $X_1 + X_2$ a $X_1 - X_2$).

Důkaz této věty založíme na větě **3.3** a na Cramérově větě **3.2**.
Nezávislost dvojice veličin X_1 a X_2 a dvojice $X_1 + X_2$ a $X_1 - X_2$ nám pro každá reálná s a t dává následující vztahy

$$\mathrm{E}e^{itX_1} \cdot \mathrm{E}e^{itX_2} \cdot \mathrm{E}e^{isX_1} \cdot \mathrm{E}e^{-isX_2} = \mathrm{E}e^{it(X_1+X_2)} \cdot \mathrm{E}e^{is(X_1-X_2)} = \mathrm{E}e^{i(t+s)X_1+i(t-s)X_2}$$
$$= \mathrm{E}e^{i(t+s)X_1} \cdot \mathrm{E}e^{i(t-s)X_2}.$$

Jsou-li tedy f_1 a f_2 charakteristické funkce náhodných veličin X_1 a X_2, platí

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot f_1(s) \cdot f_2(-s) = f_1(t+s) \cdot f_2(t-s). \tag{4.1}$$

Nejprve přepokládejme, že X_1 a X_2 jsou symetrické náhodné veličiny. Potom se vztah (4.1) změní na

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot f_1(s) \cdot f_2(s) = f_1(t+s) \cdot f_2(t-s)$$

pro každá reálná s a t.
Nejprve položme $s = t$. Potom

$$\left(f_1(t)\right)^2 \cdot \left(f_2(t)\right)^2 = f_1(2t)$$

pro každé reálné t. Dále nechť $-s = t$, pak pro každé reálné t

$$\left(f_1(t)\right)^2 \cdot \left(f_2(t)\right)^2 = f_2(2t).$$

Vidíme tedy, že $f_1(t) = f_2(t)$ pro každé reálné t, proto jsou X_1 a X_2 stejně rozdělené symetrické náhodné veličiny. Položme $f := f_1 = f_2$ Nyní můžeme vztah (4.1) přepsat jako

$$\left(f(t)\right)^2 \cdot \left(f(s)\right)^2 = f(t+s) \cdot f(t-s). \tag{4.2}$$

Položíme $s = t$ a dostáváme

$$\left(f(t)\right)^4 = f(2t),$$

neboli

$$\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^4 = f(t)$$

pro každé t reálné. Tento vztah je ale ekvivalentní s následujícím. Máme čtyři nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny, jejichž charakteristická funkce je f, označme je Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, a platí, že Y_1 je stejně rozdělená jako lineární forma

$$\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{2}.$$

Zkontrolujme zbylý předpoklady věty **3.3**, musí platit, že součet kvadrátů koeficientů u jednotlivých náhodných veličin musí být jedna, ale $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Tudíž z věty **3.3** plyne, že náhodná veličina Y_1, tedy i X_1 a X_2, má normální rozdělení.

V případě, že $s \neq t$, dosadíme-li do pravé a levé strany vztahu (4.2) charakteristickou funkci symetrického normálního rozdělení, po úpravách vyjde, že rovnost (4.2) pro ni platí.

Nyní nechť náhodné veličiny X_1a X_2 nejsou symetrické. Definujme si nové náhodné veličiny Y_1 a Y_2 pro které bude platit, že Y_j je stejně rozdělená jako $-X_j$, $j = 1, 2$ a mezi náhodnými veličinami X_1, X_2, Y_1, Y_2 bude platit všeobecná nezávislost. Označme

$$L_1 = X_1 + X_2, \qquad L_2 = X_1 - X_2.$$

Z podmínky, že jsou L_1 a L_2 nezávislé, plyne, že i $Y_1 + Y_2$ a $Y_1 - Y_2$ jsou nezávislé, protože lineární forma $Y_1 + Y_2$ je stejně rozdělená jako $-L_1$ a forma $Y_1 - Y_2$ je stejně rozdělená jako $-L_2$, dále mezi L_1 a $Y_1 + Y_2$ a také mezi L_2 a $Y_1 - Y_2$ platí nezávislost.

Nechť Z_1 a Z_2 jsou náhodné veličiny, pro které platí $Z_j = X_j + Y_j$, $j = 1, 2$.

Potom Z_1 a Z_2 jsou nedegenerované náhodné veličiny, jsou nezávislé, a protože pro charakteristické funkce f_{X_1} a f_{Z_1} náhodných veličin X_1 a Z_1 platí

$$f_{Z_1}(t) = Ee^{itX_1}e^{itY_1} = Ee^{itX_1} \cdot Ee^{-itX_1} = f_{X_1}(t) \cdot f_{X_1}(-t) = \left|f_{X_1}(t)\right|^2,$$

(podobně pro Z_2), jsou také symetrické. Dále platí, že

$$Z_1 + Z_2 = L_1 + Y_1 + Y_2$$

a

$$Z_1 - Z_2 = L_2 + Y_1 - Y_2$$

jsou také nezávislé.

Z_1 a Z_2 tedy splňují potřebné předpoklady této věty a navíc podmínku symetrie, a tedy Z_1 a Z_2 mají normální rozdělení. Protože ale $Z_j = X_j + Y_j$, X_j a Y_j jsou nezávislé, $j = 1, 2$, podle Cramérovy věty mají X_1 a X_2 normální rozdělení.

Seznam literatury

[1] Gelbaum B. R., Some theorems in Probability Theory, Pacific Journal of Mathematics 118 (1985)

[2] Kakosyan A. V., Klebanov L. B., Melamed J. A.: *Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984

[3] Lukacs E.: *Characteristic Functions*, Charles Griffin & Company Limited, Londýn, 1960

[4] *Wikipedia – The Free Encyklopedia* http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution