Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vojtěch Novotný

Metrické prostory hölderovských funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2008

Poděkování

Děkuji všem, kteří mi pomáhali při psaní bakalářské práce. Předně vedoucímu Prof. RNDr. Miroslavu Huškovi, DrSc. za cenné rady, připomínky a náměty i svým rodičům, dalším příbuzným či přátelům za podporu během celého studia a pomoc s jazykovou korekturou textu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Chrudimi dne 27. května 2008 Vojtěch Novotný

Obsah

Název práce: Metrické prostory hölderovských funkcí
Autor: Vojtěch Novotný
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
E-mail vedoucího: `mhusek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Úkolem bakalářské práce je definovat prostory α-hölderovských zobrazení s přirozenou pseudonormou a studovat jejich vlastnosti. Neseparabilitu, úplnost či vztahy jednotlivých prostorů vyšetřujeme nejdříve na reálných hölderovských funkcích definovaných na $[0, 1]$, později na jiných omezených uzavřených, polouzavřených i otevřených intervalech a nakonec na celé reálné přímce. V závěrečné kapitole získané výsledky zobecňujeme pro hölderovská zobrazení v obecnějších metrických prostorech.

Klíčová slova: hölderovské zobrazení, lipschitzovské zobrazení, metrický prostor

Title: Metric spaces of Hölder mappings
Author: Vojtěch Novotný
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Supervisor's e-mail address: `mhusek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: The task of the bachelor work is to define spaces of α-Hölder mappings with their natural pseudonorm and to study their properties. First we investigate nonseparability, completeness and relations between particular spaces of real Hölder functions defined on $[0, 1]$, later on other bounded closed or half-closed or opened intervals, and finally on the whole real line. In the last chapter we generalize the obtained results to Hölder mappings with values in more general metric spaces.

Keywords: Hölder mapping, Lipschitz mapping, metric space

Kapitola 1

Hölderovská zobrazení na obecných metrických prostorech

1.1 Definice a základní vlastnosti

Tato práce se zabývá vlastnostmi hölderovských zobrazení. Nejprve zaveďme pojmy metrický prostor, izometrické prostory a objasněme si, co jsou hölderovská zobrazení.

Definice 1.1. *(Metrika, metrický prostor, vzdálenost.)* Pro danou množinu X říkáme, že funkce ϱ z $X \times X$ do reálných čísel je *metrikou na* X, pokud splňuje pro všechna $x, y, z \in X$

1. $\varrho(x, y) \geqq 0$ a rovnost nastane, právě když $x = y$,
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$.

Dvojici (X, ϱ) nazýváme *metrickým prostorem* a o $\varrho(x, y)$ hovoříme jako o *vzdálenosti* x *a* y.

Definice 1.2. *(Izometrické prostory.)* Dva metrické prostory (X, ϱ) a (Y, σ) nazveme *izometrickými*, jestliže existuje zobrazení f z prostoru X na Y takové, že $\sigma(f(x), f(y)) = \varrho(x, y)$ pro každá $x, y \in X$.

Definice 1.3. *(Hölderovské zobrazení stupně α, lipschitzovské zobrazení.)* Nechť (X,ϱ) a (Y,σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a α nezáporné číslo. Existuje-li konstanta $k \geqq 0$ taková, že pro všechna různá $x, y \in X$ platí
$$\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leqq k \cdot \varrho^{\alpha}\left(x, y\right),$$
hovoříme o f jako o *hölderovském zobrazení stupně* α (nebo α*-hölderovském zobrazení*, někdy navíc ještě dodáváme *s konstantou* k). Je-li $\alpha = 1$, nazýváme f *lipschitzovským zobrazením.*

Poznámka 1.4. Pro každou konečnou množinu X s libovolnou metrikou ϱ, všechny metrické prostory (Y,σ) a kterékoliv $\alpha \geqq 0$ je každé zobrazení f z X do Y α-hölderovské.

Poznámka 1.5. Za povšimnutí stojí i jednoduchá úvaha. Libovolné zobrazení f z metrického prostoru (X,ϱ) s diskrétní metrikou do metrického prostoru (Y,σ) s omezenou metrikou[1] je α-hölderovské pro každé $\alpha \geqq 0$.

Jak vypovídá následující věta, zvlášť můžeme vyčlenit 0-hölderovská zobrazení.

Věta 1.6. *Buďte (X,ϱ) a (Y,σ) dva metrické prostory a f zobrazení z X do Y. Potom f je 0-hölderovské, právě když je omezené (což znamená, že existuje konstanta m, pro niž $\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leqq m$, kdykoliv $x, y \in X$).*

Důkaz. Podle definice 0-hölderovského zobrazení existuje k, pro něž a pro všechna různá $x, y \in X$ platí
$$\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leqq k \cdot \varrho^{0}\left(x, y\right) = k.$$
Položíme-li $k = m$, je f 0-hölderovské právě tehdy, když je omezené. $\square$

Z definice jednoduše vyplývá základní tvrzení.

[1]Metrika ϱ je *diskrétní* na X, pokud
$$\varrho\left(x, y\right) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$
O metrice σ na Y hovoříme jako o *omezené*, jestliže existuje $m > 0$ tak, že
$$\sigma\left(x, y\right) \leqq m \qquad \text{pro všechna } x, y \in Y.$$

Věta 1.7. *Pro kladné α je každé α-hölderovském zobrazení f z metrického prostoru (X, ϱ) do metrického prostoru (Y, σ) stejnoměrně spojité (neboli pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že pro $x, y \in X$ vyhovující $\varrho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$).*

Důkaz. K danému $\varepsilon > 0$ stačí položit $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}$, kde k je jako v definici 1.3. Pak pro $x, y \in X$ taková, že $\varrho(x, y) < \delta$, dostáváme

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqq k \cdot \varrho^{\alpha}(x, y) < k \cdot \left(\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{k}}\right)^{\alpha} = \varepsilon.$$

□

Poznámka 1.8. Uvědomme si, že „nemůžeme očekávat“ obrácenou implikaci. Jinak by každé α-hölderovské zobrazení bylo zároveň β-hölderovské pro $\alpha, \beta > 0$. Zároveň předchozí tvrzení neplatí díky větě 1.6 pro $\alpha = 0$, prostor X s hromadným bodem x a alespoň dvouprvkový Y. Protipříklad snadno zkonstruujeme tak, že pro x „náhodně“ vybereme $y \in Y$ a definujeme $f(x) = y$. Všechny ostatní prvky z X může f zobrazovat na jeden libovolný bod z Y různý od y.

Zajímavou partii mohou hrát vztahy mezi hölderovskými zobrazeními různých stupňů.

Věta 1.9. *Předpokládejme, že $0 \leqq \beta < \alpha$, f je α-hölderovské zobrazení z omezeného metrického prostoru (X, ϱ) do metrického prostoru (Y, σ). Pak je f rovněž β-hölderovské.*

Důkaz. Je-li X prázdné nebo jednobodové, plyne tvrzení ihned z poznámky 1.4. V opačném případě existují konstanty $k \geqq 0$ z definice hölderovského zobrazení a $m > 0$ z omezenosti prostoru X, pro něž pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqq k \cdot \varrho^{\alpha}(x, y) = k \cdot \varrho^{\alpha-\beta}(x, y) \cdot \varrho^{\beta}(x, y) \leqq \left(k \cdot m^{\alpha-\beta}\right) \cdot \varrho^{\beta}(x, y).$$

Zobrazení f je β-hölderovské s konstantou $\left(k \cdot m^{\alpha-\beta}\right)$. □

Kapitola 2

Reálné hölderovské funkce

Úmluva 2.1. V této kapitole se budeme zajímat o α-hölderovské funkce zobrazující reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo jejich podmnožiny do reálných čísel. Aniž bychom to dále výslovně uváděli, uvažujeme na podmnožině X reálných čísel metriku τ definovanou vztahem $\tau(x, y) = |y - x|$ pro $x, y \in X$.

Věta 2.2. *Buď $\alpha > 1$ a f α-hölderovská funkce zobrazující interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pak je f na I již nutně konstantní.*

Důkaz. Vezměme si libovolné $x \in I$. Z definice existuje $k \in \mathbb{R}$, že pro $y \in I$, $y \neq x$, platí

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqq k \cdot |x - y|^{\alpha - 1}.$$

Provedeme-li na nerovnost limitní přechod $y \to x$, dostaneme na levé straně absolutní hodnotu derivace f v bodě x, pokud existuje. Na pravé straně se výraz blíží k nule (exponent $\alpha - 1$ je podle předpokladu kladný), a tudíž $f'(x)$ existuje a je nulová. Protože jsme uvažovali libovolné $x \in I$, je derivace f nulová na celém I a f je zde konstantní. □

2.1 Reálné hölderovské funkce na intervalu $[0, 1]$

V celé nadcházející podkapitole budeme zjišťovat vlastnosti α-hölderovských funkcí f z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$. Podle věty 2.2 dostaneme „zajímavé výsledky“ jen pro $\alpha \in [0, 1]$.

Definice 2.3. *(Prostor $\mathcal{H}_\alpha$.)* Pro $\alpha \in [0,1]$ označme $\mathcal{H}_\alpha$ množinu všech α-hölderovských funkcí $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$.

Poznámka 2.4. Proč se nezabývat všemi α-hölderovskými funkcemi f na intervalu $[0,1]$? Omezení $f(0) = 0$ není zásadní, protože $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ je α-hölderovské právě tehdy, když f definované jako $f(x) = g(x) - g(0)$ pro $x \in [0,1]$ je α-hölderovské. Ono totiž

$$|g(x) - g(y)| = |(g(x) - g(0)) - (g(y) - g(0))| = |f(x) - f(y)|.$$

V nule můžeme „předepsat" jakoukoliv hodnotu. Protože budeme zavádět vektrový prostor $\mathcal{H}_\alpha$ a má-li být $f(0) + f(0) = f(0)$, stanovme $f(0) = 0$ pro $f \in \mathcal{H}_\alpha$.

Věta 2.5. *Pro každé $\alpha \in [0,1]$ je $\mathcal{H}_\alpha$ vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel.*

Důkaz. Na $\mathcal{H}_\alpha$ přirozeně definujeme sčítání $\overset{\mathcal{H}_\alpha}{+}$ a násobení $\overset{\mathcal{H}_\alpha}{\cdot}$ prvkem tělesa. Pro $f, g \in \mathcal{H}_\alpha$, $x \in [0,1]$ a $r \in \mathbb{R}$ položme

$$\left(f \overset{\mathcal{H}_\alpha}{+} g\right)(x) = f(x) + g(x), \qquad \left(r \overset{\mathcal{H}_\alpha}{\cdot} f\right)(x) = r \cdot f(x).$$

Pokud $f, g \in \mathcal{H}_\alpha$, existují $k, l \geqq 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha, \qquad |g(x) - g(y)| \leqq l \cdot |x-y|^\alpha.$$

Odtud odvodíme dva základní vztahy. Zaprvé

$$\begin{aligned} \left|\left(f \overset{\mathcal{H}_\alpha}{+} g\right)(x) - \left(f \overset{\mathcal{H}_\alpha}{+} g\right)(y)\right| &\leqq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqq \\ &\leqq (k+l) \cdot |x-y|^\alpha \end{aligned}$$

a zadruhé

$$\begin{aligned} \left|\left(r \overset{\mathcal{H}_\alpha}{\cdot} f\right)(x) - \left(r \overset{\mathcal{H}_\alpha}{\cdot} f\right)(y)\right| &= |r \cdot f(x) - r \cdot f(y)| = \\ &= |r| \cdot |f(x) - f(y)| \leqq |r| \cdot k \cdot |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Vidíme, že ani součet dvou α-hölderovských zobrazení ani jejich vynásobení skalárem „α-hölderovskost" neporuší. Za nulový prvek vektorového prostoru položme nulové zobrazení $\overset{\mathcal{H}_\alpha}{0}(x) = 0$ pro každé $x \in [0,1]$. Všechny další požadované vlastnosti vektorového prostoru jsou splněny „automaticky“. $\square$

Nadále značme operace na vektorovém prostoru $\mathcal{H}_\alpha$ pro větší přehlednost pouze $+$, $\cdot$ a 0. Z definice hölderovského zobrazení existuje takové číslo $k \geqq 0$, pro něž a pro všechny $x, y \in X$, $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha .$$

Přirozeně vyvstává otázka, jaké takové nejmenší k může být. Odpověď nám podává následující definice.

Definice 2.6. *($\|\cdot\|_\alpha$.)* Pro reálnou funkci $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ definujme

$$\|f\|_\alpha = \inf\left\{k \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in [0,1], x \neq y\right\}.$$

Pro další práci pro nás bude výhodnější vyjádření z následující věty.

Věta 2.7. *Je-li f funkce z $[0,1]$ do $\mathbb{R}$, je splněna rovnost*

$$\|f\|_\alpha = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0,1], x \neq y\right\}.$$

Důkaz. Uvedené supremum označme $\|f\|^\alpha$. Nejprve ukážeme nerovnost $\|f\|_\alpha \leqq \|f\|^\alpha$. Pro každá různá $x, y \in [0,1]$ je

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq \|f\|^\alpha \qquad \text{a také} \qquad |f(x) - f(y)| \leqq \|f\|^\alpha \cdot |x-y|^\alpha ,$$

jenže $\|f\|_\alpha$ je infimum těch k, pro která nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha$$

platí pro všechna $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$.

Podívejme se na $\|f\|_\alpha \geqq \|f\|^\alpha$. Pro $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, máme

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq \|f\|_\alpha ,$$

přejdeme-li na levé straně k supremu, získáváme tvrzení. $\square$

S výše definovanou funkcí $\|\cdot\|_\alpha$ se budeme zabývat α-hölderovskými reálnými funkcemi.

Definice 2.8. *(Pseudonorma, norma, normovaný vektorový prostor.)* Je-li X vektorový prostor nad tělesem T, pak funkci $\|\cdot\|$ z X do nezáporných reálných čísel nazveme *pseudonormou*, jestliže

1. $\|0\| = 0$,
2. pro každé $r \in T$ a $x \in X$ platí $\|r \cdot x\| = |r| \cdot \|x\|$,
3. pro libovolná $x, y \in X$ je splněna nerovnost $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

Jestliže navíc platí

4. kdykoliv $\|x\| = 0$, pak již nutně $x = 0$,

hovoříme o $\|\cdot\|$ jako o *normě* na X a o dvojici $(X, \|\cdot\|)$ jako o *normovaném vektorovém prostoru nad tělesem T*.

Poznámka 2.9. Pro přesnost uveďme, že v definici normy lze vynechat bod 1., neboť už nutně vyplývá ze 2. a 4. Pro $r = 0$ a libovolné $x \in X$ je

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = |0| \cdot \|x\| = 0.$$

Věta 2.10. *Pro každé $\alpha \in [0, 1]$ je funkce $\|\cdot\|_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathbb{R}$ normou na $\mathcal{H}_\alpha$.*

Důkaz. Buďte $f, g \in \mathcal{H}_\alpha$, $r \in \mathbb{R}$, $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$. Pak

1. $\frac{|0(x)-0(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0$, tedy $\|0\|_\alpha = 0$.
2. $\frac{|r \cdot f(x) - r \cdot f(y)|}{|x-y|^\alpha} = |r| \cdot \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ a můžeme přejít k supremu přes množinu $\{x, y \in [0, 1], x \neq y\}$.
3. $\frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha$ a opět provedeme přechod k supremu přes příslušnou množinu.

Tři uvedené vlastnosti platí pro f a g α-hölderovské. Tím máme zaručené, že $\|\cdot\|_\alpha$ je pseudonorma.

4. Platí-li $\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0, 1], x \neq y\right\} = 0$, musí být celý výraz $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ a i jeho čitatel nulový pro všechna příslušná x, y. Odtud musí být f konstantní na $[0, 1]$. Jedna z vlastností prostorů $\mathcal{H}_\alpha$ říká, že $f(0) = 0$. Z $\|f\|_\alpha = 0$ vyplývá $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [0, 1]$.

$\square$

Věta 2.11. *Mějme* $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$ *a* $f \in \mathcal{H}_\alpha$. *Pak*

$$\|f\|_\alpha \geqq \|f\|_\beta \, .$$

Důkaz. Vezměme si $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, a počítejme

$$\|f\|_\alpha \geqq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha-\beta}} \geqq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

Při přechodu v poslední nerovnosti jsme užili faktu, že $x, y \in [0,1]$, odkud $|x-y| \leqq 1$. Nezáporné číslo nejvýše rovné 1 ani po umocnění na kladné $\alpha-\beta$ „nepřeskočí“ jedničku, takže jeho převrácená hodnota je alespoň jedna. Nerovnost samozřejmě zůstane zachována i po přechodu k supremu přes $\{x, y \in [0,1], x \neq y\}$. □

Mnohokrát budeme užívat vztahů, které vyplývají z konkávnosti funkce $z \mapsto z^\alpha$ pro $z \geqq 0$ a $\alpha \in (0,1]$.

Věta 2.12. *Nechť* $\alpha \in (0,1]$. *Pro každé* $x \geqq y \geqq 0$ *platí*[1]

$$x^\alpha - y^\alpha \leqq (x-y)^\alpha \, , \qquad x^\alpha + y^\alpha \geqq (x+y)^\alpha \, .$$

Důkaz. Pevně zvolme $y \geqq 0$ a definujme $g(x) = (x-y)^\alpha - (x^\alpha - y^\alpha)$ pro $x \geqq y$. Krátkým výpočtem zjistíme $g(y) = 0$ a $g'(x) = \alpha(x-y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}$. Jelikož pro $x \geqq y \geqq 0$, $x \neq 0$, je $\frac{x-y}{x}$ nezáporné a nejvýš rovné jedné a $(\alpha - 1)$ není kladné, platí $\left(\frac{x-y}{x}\right)^{\alpha-1} \geqq 1$ a derivace $g'(x) \geqq 0$. Tedy g je neklesající, v y má funkční hodnotu rovnu nule a $(x-y)^\alpha \geqq (x^\alpha - y^\alpha)$ pro $x \geqq y \geqq 0$ (přímým dosazením můžeme povolit též $x = 0$).

Druhý vztah nám vzejde po položení $(x+y)$ místo x do již dokázané části. Vždyť

$$(x+y)^\alpha - y^\alpha \leqq (x+y-y)^\alpha = x^\alpha.$$

□

[1] Tvrzení platí také pro $\alpha = 0$, bereme-li $0^0 = 0$. Stačí přímo dosadit.

Věta 2.13. *Pro* $1 \geqq \alpha > \beta > 0$ *platí* $\mathcal{H}_\alpha \underset{\neq}{\subset} \mathcal{H}_\beta \underset{\neq}{\subset} \tilde{\mathcal{C}} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{H}_0$, *kde* $\tilde{\mathcal{C}}$ *značí spojité funkce na intervalu* $[0,1]$ *s nulovou funkční hodnotou v nule.*

Důkaz. Některá uvedená vnoření jsme již uvedli dříve. Že je β-hölderovské zobrazení (stejnoměrně) spojité, víme z věty 1.7. Spojitá zobrazení uzavřeného intevalu do $\mathbb{R}$ jsou omezená, takže podle tvrzení 1.6 platí poslední inkluze. Zbývající vztahy pro různé parametry vyplývají z věty 1.9.

Pro úplnost musíme dodat argumenty, proč nikde nenastane rovnost. Položíme-li $f(x) = x^\beta$, $x \in [0,1]$, stanovíme $f \in \mathcal{H}_\beta$, neboť z předchozího

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} = \frac{\left|x^\beta - y^\beta\right|}{|x-y|^\beta} \leqq \frac{|x-y|^\beta}{|x-y|^\beta} = 1.$$

Současně $f \notin \mathcal{H}_\alpha$. V opačném případě by existovalo[2] $k > 0$, že by pro různá $x, y \in [0,1]$ platilo

$$|f(x) - f(y)| = \left|x^\beta - y^\beta\right| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha .$$

Konkrétně pro $y = 0$ by $x^\beta \leqq k \cdot x^\alpha$, jenže $0 < \frac{1}{k} \leqq x^{\alpha-\beta}$ není splněno pro „malá“ x.

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

je „samozřejmě“ omezená (tzn. 0-hölderovská), ale není spojitá.

Nakonec

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\log x}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{\log \frac{1}{2}}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

je spojitá[3] a nulová v nule. Ovšem pro žádné $\alpha > 0$ není α-hölderovská. Jinak by existovalo kladné[2] k, aby pro všechna různá $x, y \in [0,1]$ platilo $|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha$. Když vezmeme $y = 0$ a jakékoliv „malé“ $x > 0$, mělo by být

$$0 < \frac{1}{k} \leqq x^\alpha \cdot |\log x| .$$

Ale limita $x^\alpha \cdot |\log x|$ je pro $x \to 0+$ nulová, což je spor. □

Podívejme se konečně na některé vlastnosti prostorů $\mathcal{H}_\alpha$, jako jsou separabilita a úplnost. Nejprve dokažme pomocné tvrzení.

---

[2]Lehce vyloučíme $k = 0$ vzhledem k různým funkčním hodnotám kupříkladu v nule a jedničce.

[3]Logaritmus je na intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ spojitý, nenabývá nuly a $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{\log x} = 0$.

Věta 2.14. *Existuje-li v metrickém prostoru (X, ϱ) diskrétní nespočetný podprostor M, není (X, ϱ) separabilní, neboli v něm neexistuje spočetná hustá podmnožina S.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme sporem. Předpokládejme, že existuje spočetná hustá podmnožina S prostoru X. Podprostor M je diskrétní, existuje tedy $r > 0$, že pro různá $m_1, m_2 \in M$ je $\varrho(m_1, m_2) \geqq r$. Naopak S je hustá, takže pro každé $\varepsilon > 0$ a všechna $x \in X$ najdeme $s \in S$, že $\varrho(x, s) < \varepsilon$. Zvolme si $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Jak jsme řekli, pro každé $m \in M$ (kterých je nespočetně) existuje nějaké $s \in S$ (těch je pouze spočetně), že $\varrho(m, s) < \frac{r}{2}$. Porovnáme-li velikosti obou zmíněných množin, zijistíme, že pro nějaké $s \in S$ musíme naleznout dvě různá m_1, m_2 taková, že $\varrho(m_1, s) < \frac{r}{2}$ a $\varrho(m_2, s) < \frac{r}{2}$. Jenže z vlastností metriky a předpokladu jde spor

$$r \leqq \varrho(m_1, m_2) \leqq \varrho(m_1, s) + \varrho(s, m_2) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

□

Věta 2.15. *Žádný prostor $\mathcal{H}_\alpha$ není separabilní, kdykoliv $\alpha \in [0, 1]$.*

Důkaz. Vzhledem k předchozí větě nalezneme M podmnožinu $\mathcal{H}_\alpha$, která bude diskrétní a nespočetná. Pro $s \in (0, 1]$ definujme funkce $f_s : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vztahem

$$f_s(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, s], \\ (x - s)^\alpha, & x \in (s, 1]. \end{cases}$$

Ověříme, že $f_s \in \mathcal{H}_\alpha$. Při vyšetřování suprema $\frac{|f_s(x) - f_s(y)|}{|x-y|^\alpha}$ přes množinu $\{x, y \in [0, 1], x \neq y\}$ můžeme bez problémů „opominout" případ, kdy alespoň jedno z x, y (třeba y) je menší než s. Za tohoto předpokladu

$$\frac{|f_s(x) - f_s(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|f_s(x) - 0|}{|x - y|^\alpha} \leqq \frac{|f_s(x) - 0|}{|x - s|^\alpha} = \frac{|f_s(x) - f_s(s)|}{|x - s|^\alpha}.$$

Zbývá diskutovat $x \geqq s$ a $y \geqq s$. Nechť $x \geqq y$. S využitím věty 2.12, kdy za x a y dosadíme $(x - y)$ a $(y - s)$, obdržíme

$$(x - y)^\alpha + (y - s)^\alpha \geqq (x - y + y - s)^\alpha = (x - s)^\alpha.$$

Nezapomeňme, že $(x - s)^\alpha - (y - s)^\alpha \geqq 0$ vzhledem k $x \geqq y$. Konečně

$$\frac{|f_s(x) - f_s(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|(x - s)^\alpha - (y - s)^\alpha|}{|x - y|^\alpha} \leqq \frac{|(x - y)^\alpha|}{|x - y|^\alpha} = 1,$$

odtud $\|f_s\|_\alpha \leqq 1$ a f_s je α-hölderovská. Navíc byla definována, aby $f_s(0) = 0$, a proto $f_s \in \mathcal{H}_\alpha$.

Za M označme množinu $\{f_s, s \in (0,1]\}$. Zřejmě $M \subset \mathcal{H}_\alpha$ je nespočetná, neboť netriviální interval jako podmnožina reálných čísel je nespočetný. Chceme ukázat, že M je diskrétní, tedy že existuje $r > 0$, jež pro všechna $f_s, f_t \in M$, $f_s \neq f_t$ (ekvivalentně $s \neq t$), dá $\|f_s - f_t\|_\alpha \geqq r$. Bez újmy na obecnosti nechť $1 \geqq s > t > 0$. Protože

$$
\begin{aligned}
\|f_s - f_t\|_\alpha &= \sup\left\{\frac{|(f_s - f_t)(x) - (f_s - f_t)(y)|}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0,1], x \neq y\right\} \geqq \\
&\geqq \frac{|(f_s - f_t)(s) - (f_s - f_t)(t)|}{|s-t|^\alpha} = \frac{|0 - (s-t)^\alpha - 0 + 0|}{|s-t|^\alpha} = 1,
\end{aligned}
$$

označme $r = 1$ a „máme hotovo“. $\square$

Věta 2.16. *Pro libovolné $\alpha \in [0,1]$ je prostor $\mathcal{H}_\alpha$ úplný, neboli každá jeho cauchyovská podposloupnost (vzhledem k normě $\|\cdot\|_\alpha$) má limitu v tomto prostoru.*

Důkaz. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost funkcí z $\mathcal{H}_\alpha$. Podle definice pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $m \geqq n_0$ a $n \geqq n_0$ bude $\|f_m - f_n\|_\alpha < \varepsilon$. V „řeči suprema“ obdržíme

$$
\sup\left\{\frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)|}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0,1], x \neq y\right\} < \varepsilon.
$$

Speciálně pro $y = 0$ a libovolné $x \in (0,1]$ zjišťujeme

$$
\frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(0)|}{|x-0|^\alpha} = \frac{|(f_m - f_n)(x)|}{|x|^\alpha} \leqq \|f_m - f_n\|_\alpha < \varepsilon
$$

a po přihlédnutí k „velikosti“ x, které ve své α mocnině nabývá nejvýše jedničky, vidíme

$$
|(f_m - f_n)(x)| < \varepsilon.
$$

Nerovnost je splněna též pro $x = 0$, neboť v tom případě jsou už z definice prostorů $\mathcal{H}_\alpha$ oba $f_m(0)$ a $f_n(0)$ nulové a $f(0) = 0$. Pro libovolné x z intervalu $[0,1]$ je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, a tudíž má limitu – označme ji $f(x)$. Takto definovaná funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ by mohla být námi hledanou limitou v prostoru $\mathcal{H}_\alpha$. K tomu nám zbývá ověřit, že v něm skutečně leží a že f_n konverguje k f vzhledem k $\|\cdot\|_\alpha$.

Mějme $\varepsilon > 0$ a různá x a y z intervalu $[0,1]$. Jak jsme si uvědomili, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m, n \geqq n_0$ platí $\|f_m - f_n\|_\alpha < \varepsilon$. Pak pro každé přirozené $n > n_0$

$$\|f_n\|_\alpha = \|f_n - f_{n_0} + f_{n_0}\|_\alpha \leqq \|f_n - f_{n_0}\|_\alpha + \|f_{n_0}\|_\alpha < \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\alpha .$$

Výraz na pravé straně je konečný, označme ho r. Pro různá x a y z intervalu $[0,1]$ nabývá $\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}$ hodnoty menší než r. Díky konvergenci f_n k f je $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq r$, a proto $f \in \mathcal{H}_\alpha$. Podobně v nerovnosti

$$\frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon$$

„pošleme“ $m \to \infty$, čímž

$$\frac{|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqq \varepsilon.$$

Uvedený vztah platí pro každá $x, y \in [0,1]$, která jsou různá, a odtud i pro supremum přes příslušnou množinu. Celkově $f_n \to f$ v prostoru $\mathcal{H}_\alpha$ a f je limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. $\square$

Nyní se můžeme pustit do studia dalších vlastností prostorů $\mathcal{H}_\alpha$. Termíny *množina první* a *druhé kategorie* se navzájem doplňují. O F jako podmnožině metrického prostoru (X, ϱ) řekneme, že je první kategorie v X, jestliže existují $F_n \subseteqq F$, $n \in \mathbb{N}$, které jsou řídké v (X, ϱ) a $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Věta 2.17. *Každý prostor $\mathcal{H}_\alpha$ je v sobě druhé kategorie, kdykoliv $\alpha \in [0,1]$.*

Důkaz. Baireova věta tvrdí, že neprázdný úplný metrický prostor je (v sobě) druhé kategorie. Neprázdnost ověřuje nulová funkce zobrazující $[0,1]$ na nulu. Do úvahy stačí vzít výsledek předchozí věty. $\square$

I přes předchozí fakt obdržíme „opačný vztah“ pro různé prostory $\mathcal{H}_\alpha$ a $\mathcal{H}_\beta$.

Věta 2.18. *Za předpokladu $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$ je $\mathcal{H}_\alpha$ množinou první kategorie v $\mathcal{H}_\beta$.*

Důkaz. Podle věty 1.9 a definice je $\mathcal{H}_\alpha$ podmnožinou $\mathcal{H}_\beta$. Položme pro $n \in \mathbb{N}$ množiny $F_n = \{f \in \mathcal{H}_\alpha, \|f\|_\alpha \leqq n\}$. Jejich sjednocení přes všechna přirozená čísla pokrývá $\mathcal{H}_\alpha$: stačí ověřit, že F_n jsou řídké v $\mathcal{H}_\beta$. V důkazu značme pro množinu $K \in \mathcal{H}_\beta$ symbolem $\overline{K}^\beta$ její uzávěr a jako $\mathrm{int}_\beta K$ její vnitřek v prostoru $\mathcal{H}_\beta$. Kdyby existovalo $n \in \mathbb{N}$, že by F_n nebyla řídká, pak by $\mathrm{int}_\beta \overline{F_n}^\beta \neq \emptyset$. Jelikož to je otevřená množina, existovaly by $f \in \mathrm{int}_\beta \overline{F_n}^\beta$ a $r > 0$, že $B(f, r) = \left\{ g \in \mathcal{H}_\beta, \|g - f\|_\beta < r \right\} \subset \overline{F_n}^\beta$. Pro každou netriviální kouli $B(h, s)$ obsaženou v $B(f, r)$ by byl průnik $B(h, s) \cap F_n$ neprázdný. Jenže $g(x) = f(x) + \frac{r}{2} \cdot x^\beta$ jako součet dvou β-hölderovských funkcí nulových v nule (nahlédněme k 2.13) leží v $\mathcal{H}_\beta$, $\|g - f\|_\beta = \frac{r}{2} \cdot \left\| x^\beta \right\|_\beta = \frac{r}{2}$ a pro $B\left(g, \frac{r}{4}\right) \subset B(f, r)$ ukážeme opak: $B\left(g, \frac{r}{4}\right) \cap F_n = \emptyset$. Z toho vyplyne pro všechna n přirozená $\mathrm{int}_\beta \overline{F_n}^\beta = \emptyset$ a celé tvrzení věty.

Buď $h \in B\left(g, \frac{r}{4}\right)$ zcela libovolné. Odůvodněme, proč h neleží v F_n, čili $\|h\|_\alpha > n$. Počítejme

$$
\begin{aligned}
\|h\|_\alpha &= \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha}, x, y \in [0,1], x \neq y \right\} \geqq \\
&\geqq \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^\alpha}, x \in (0,1] \right\} = \\
&= \sup \left\{ \frac{|h(x) - g(x) + g(x) - f(x) + f(x)|}{x^\alpha}, x \in (0,1] \right\} \geqq \\
&\geqq \sup \left\{ -\frac{|h(x) - g(x)|}{x^\alpha} + \frac{|g(x) - f(x)|}{x^\alpha} - \frac{|f(x)|}{x^\alpha}, x \in (0,1] \right\} \geqq \\
&\geqq \sup \left\{ -\frac{r}{4} \cdot x^{\beta - \alpha} + \frac{r}{2} \cdot x^{\beta - \alpha} - n, x \in (0,1] \right\} = \infty.
\end{aligned}
$$

Vidíme $\|h\|_\alpha > n$, neboli $h \notin F_n$ a $B\left(g, \frac{r}{4}\right) \cap F_n = \emptyset$, čímž věta platí. □

2.2 Reálné hölderovské funkce na uzavřeném intervalu

„Dá se očekávat," že podobné výsledky jako v předcházející části budou platit též na jakémkoliv uzavřeném intervalu $[a, b]$, $a < b$. Jako dříve se podle věty 2.2 stačí omezit na $\alpha \in [0, 1]$. Stejným argumentem jako v poznámce 2.4 kupříkladu položme funkci nulovou v a.

Definice 2.19. *(Prostor $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$, $\|\cdot\|_\alpha^{[a,b]}$.)* Mějme dána $\alpha \in [0, 1]$ a reálná a, b taková, že $a < b$. Symbolem $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ označme množinu všech α-hölderovských funkcí $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, pro něž $f(a) = 0$. Dále definujme $\|\cdot\|_\alpha^{[a,b]} : \mathcal{H}_\alpha^{[a,b]} \to \mathbb{R}$ pro $f \in \mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ jako

$$\|f\|_\alpha^{[a,b]} = \inf\left\{k \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in [a,b], x \neq y\right\}.$$

Věta 2.20. *Nechť $[a,b]$ je netriviální interval, $\alpha \in [0,1]$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ reálná funkce a $g(u) = f\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$ pro u z intervalu $[a,b]$. Pak f leží v prostoru $\mathcal{H}_\alpha$ tehdy a jen tehdy, když g leží v $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$. Navíc $\|f\|_\alpha = \frac{\|g\|_\alpha^{[a,b]}}{(b-a)^\alpha}$.*

Důkaz. Zřejmě platí $f(0) = 0$, právě když $g(a) = 0$. Pokud bude splněn vztah pro normy, bude celé tvrzení dokázáno, neboť $\frac{1}{(b-a)^\alpha}$ je kladná konstanta. Ten ověříme následující sérií ekvivalencí[4]

$$\begin{aligned}
& |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in [0,1] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \left|f\left(\frac{x}{b-a}\right) - f\left(\frac{y}{b-a}\right)\right| \leqq k \cdot \left|\frac{x-y}{b-a}\right|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in [0, b-a] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \left|f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f\left(\frac{y-a}{b-a}\right)\right| \leqq k \cdot \left|\frac{x-y}{b-a}\right|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in [a,b] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & |g(u) - g(v)| \leqq \frac{k}{(b-a)^\alpha} \cdot |u-v|^\alpha \text{ pro } \forall u, v \in [a,b].
\end{aligned}$$

Když vyšetříme infimum ze všech $k \in \mathbb{R}$ vyhovujících první či poslední uvedené podmínce, získáme

$$\|f\|_\alpha = \frac{\|g\|_\alpha^{[a,b]}}{(b-a)^\alpha}.$$

□

Nyní se odkažme na předchozí výsledky a vyslovme následující tezi.

Věta 2.21. *Pro všechna $a < b$, $\alpha \in [0,1]$, je prostor $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ úplný, není separabilní a je v sobě druhé kategorie. Navíc pro $1 \geqq \alpha > \beta > 0$ platí $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]} \subsetneqq \mathcal{H}_\beta^{[a,b]} \subsetneqq \tilde{\mathcal{C}}^{[a,b]} \subsetneqq \mathcal{H}_0^{[a,b]}$, přičemž $\tilde{\mathcal{C}}^{[a,b]}$ značí spojité funkce na intervalu $[a,b]$ nulové v a. Připustíme-li $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$, bude množina $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ první kategorie v $\mathcal{H}_\beta^{[a,b]}$.*

Důkaz. Plyne přímo z předcházející věty a totožných tvrzení pro interval $[0,1]$ z minulé podkapitoly. □

[4] „Samozřejmě“ nezáleží na tom, zda v uvažovaných nerovnostech povolíme, či zakážeme $x = y$, respektive $u = v$. Pro tyto dvojice jsou požadavky splněny automaticky.

2.3 Rozšíření reálných hölderovských funkcí

Než se začneme soustředit na hölderovské funkce na všech omezených intervalech a na reálné ose, zastavíme se u jejich rozšiřování. Tentokrát může být „výchozí“ metrický prostor obecný, „cílovým“ budou opět reálná čísla.

Věta 2.22. *Nechť A je podmnožinou metrického prostoru (X, ϱ) a funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská s konstantou $k > 0$. Pak existuje rozšíření na lipschitzovské zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$ rovněž s konstantou k takové, že $F = f$ na A.*

Důkaz. Z definice lipschitzovké funkce f víme, že pro (různá) $x, y \in A$ platí $|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot \varrho(x, y)$. Čili

$$f(y) - k \cdot \varrho(x, y) \leqq f(x) \leqq f(y) + k \cdot \varrho(x, y).$$

Toužíme najít rozšíření F, jež bude lipschitzovské na celém X. Zafixujeme-li $x \in X$ a vezmeme-li libovolné $y \in X$, mělo by platit

$$F(y) - k \cdot \varrho(x, y) \leqq F(x) \leqq F(y) + k \cdot \varrho(x, y).$$

Speciálně pro všechna $y \in A$ se nabývá $F(y) = f(y)$ a má být

$$f(y) - k \cdot \varrho(x, y) \leqq F(x) \leqq f(y) + k \cdot \varrho(x, y).$$

Nerovnost bude „snadno splnitelná“, jestliže

$$\sup\{f(y) - k \cdot \varrho(x, y), y \in A\} \leqq \inf\{f(y) + k \cdot \varrho(x, y), y \in A\}.$$

Skutečně tomu tak jest, pro spor předpokládejme opak. Pak bychom nalezli $a, b \in A$, které by ho dosvědčovaly:

$$f(a) - k \cdot \varrho(x, a) > f(b) + k \cdot \varrho(x, b).$$

Jenže z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá

$$k \cdot \varrho(a, b) \leqq k \cdot (\varrho(a, x) + \varrho(x, b)) < f(a) - f(b)$$

a spor s „lipschitzovskostí“ f. Nyní můžeme F definovat pro $x \in X$ kupříkladu jako $F(x) = \inf\{f(y) + k \cdot \varrho(x, y), y \in A\}$. Vezmeme-li $x \in A$, dostáváme $F(x) = f(x)$, jelikož nerovnost $\leqq$ vychází po „dosazení $y = x$ do infima“ a naopak $\geqq$ vyplývá jako dříve z požadavku „lipschitzovskosti“.

Na závěr si vezměme $x, y \in X$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme $F(x) \geqq F(y)$. Podle naší definice $F(y)$ pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $a \in A$, že

$$F(y) \leqq f(a) + k \cdot \varrho(y, a) < F(y) + \varepsilon.$$

Navíc též $F(x) \leqq f(a) + k \cdot \varrho(x, a)$. Z obou vztahů již vyplývá

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &< (f(a) + k \cdot \varrho(x, a)) - (f(a) + k \cdot \varrho(y, a) - \varepsilon) = \\ &= k \cdot (\varrho(x, a) - \varrho(a, y)) + \varepsilon \leqq k \cdot \varrho(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože ε bylo libovolné kladné číslo, platí $F(x) - F(y) \leqq k \cdot \varrho(x, y)$ a F je lipschitzovské s konstantou k. □

Tvrzení lze zobecnit taktéž na libovolná α-hölderovská zobrazení do $\mathbb{R}$. Než podobné tvrzení přesně vyřkneme, dokažme jeho podstatnou část.

Věta 2.23. *Pro metrický prostor (X, ϱ) a konstantu $\alpha \in [0, 1]$ definujme $\sigma : X \times X \to [0, \infty)$ jako $\sigma(x, y) = \varrho^{\alpha}(x, y)$, $x, y \in X$. Pak je σ rovněž metrikou*[5] *na X.*

Důkaz. První dvě vlastnostmi metriky získáváme „zadarmo“, neboť ϱ je také metrika. Se třetí si pro nulové α poradíme prostým dosazením a pro nenulové díky definici, konkávnosti (věta 2.12), trojúhelníkové nerovnosti a opět definici. Nechť x, y, z leží v X.

1. $\sigma(x, y) = \varrho^{\alpha}(x, y)$ je nezáporné a nulové pouze v případě $x = y$.
2. $\sigma(x, y) = \varrho^{\alpha}(x, y) = \varrho^{\alpha}(y, x) = \sigma(y, x)$, čímž nám vychází symetrie.
3. Pro $\alpha \in [0, 1]$ je funkce $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ přiřazující $z \mapsto z^{\alpha}$ konkávní (obraťme se k 2.12). Pak

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) + \sigma(y, z) &= \varrho^{\alpha}(x, y) + \varrho^{\alpha}(y, z) \geqq (\varrho(x, y) + \varrho(y, z))^{\alpha} \geqq \\ &\geqq \varrho^{\alpha}(x, z) = \sigma(x, z). \end{aligned}$$

□

[5] Domluvme se, že $0^0 = 0$, respektive $\sigma(x, y)$ je vždycky nulové pro $x = y$.

Věta 2.24. *Mějme dán metrický prostor (X, ϱ), A podmnožinu X a hölderovské zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$ stupně $\alpha \in [0,1]$ s konstantou $k > 0$. Pak existuje $F : X \to \mathbb{R}$, které rozšiřuje f $(F|_A = f)$ a je na X α-hölderovské s toutéž konstantou k.*

Důkaz. Definujme jako v předchozí větě $\sigma(x,y) = \varrho^\alpha(x,y)$, $x, y \in X$. Již víme, že σ je metrikou na X. Navíc $|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot \varrho^\alpha(x,y) = k \cdot \sigma(x,y)$ pro $x, y \in A$. Ekvivalentně můžeme říci, že $f : (A, \sigma) \to \mathbb{R}$ je lipschitzovské. Pro něj ale podle 2.22 existuje $F : (X, \sigma) \to \mathbb{R}$, které na A splývá s f a je lipschitzovské na X s konstantou k. To ale přesně vystihuje tvrzení naší věty. $\square$

2.4 Reálné hölderovské funkce na omezeném intervalu

V oddílu 2.2 jsme řešili problém hölderovských reálných funkcí na uzavřeném intervalu $[a,b]$, $a < b$. Nyní pohleďme na omezené polouzavřené intervaly $[a,b)$ a $(a,b]$, respektive na omezený otevřený (a,b). Z předešlé věty 2.24 lze hölderovskou funkci rozšířit na uzavřený interval $[a,b]$ se zachováním Hölderova vztahu. V levém krajním bodě opět můžeme předepsat libovolnou hodnotu, kupříkladu nulovou. Tím dostaneme funkce z prostoru $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$, pro něž víme určité vztahy z věty 2.21. Ty zobecníme na původní interval.

Definice 2.25. *(Prostor $\mathcal{H}_\alpha^I$, $\|\cdot\|_\alpha^I$.)* Nechť I je omezený interval s krajními body a a b, $a < b$. Pro $\alpha \in F[0,1]$ a α-hölderovské zobrazení $f : I \to \mathbb{R}$ položme $\tilde{f}$ její α-hölderovské rozšíření na $[a,b]$.[6] Za $\mathcal{H}_\alpha^I$ označme množinu všech α-hölderovských funkcí z I do $\mathbb{R}$ takových, že $\tilde{f} \in \mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$. Zobrazení $\|\cdot\|_\alpha^I : I \to [0, \infty)$ definujme předpisem

$$f \mapsto \inf\left\{k \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in I, x \neq y\right\}.$$

Věta 2.26. *Pro každý netriviální omezený interval I s krajními body a, b a jakékoliv $\alpha \in [0,1]$ je prostor $\mathcal{H}_\alpha^I$ úplný, není separabilní a je v sobě druhé kategorie. Dále $\mathcal{H}_\alpha^I \subsetneqq \mathcal{H}_\beta^I \subsetneqq \tilde{\mathcal{C}}^I \subsetneqq \mathcal{H}_0^I$, kdykoliv $1 \geqq \alpha > \beta > 0$ a $\tilde{\mathcal{C}}^I$ zastupuje*

[6] Toto rozšíření podle věty 2.24 existuje a ze stejnoměrné spojitosti dokázané větou 1.7 je pro nenulové α dokonce jednoznačně určené. Každé 0-hölderovské zobrazení můžeme případně dodefinovat nulou v a i b, protože i tak zůstane omezené.

spojité funkce na intervalu I s nulovou limitou v a. Při $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$ je $\mathcal{H}_\alpha^I$ množinou první kategorie v $\mathcal{H}_\beta^I$.

Důkaz. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost funkcí z $\left(\mathcal{H}_\alpha^I, \|\cdot\|_\alpha^I\right)$. Pak je $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v $\left(\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}, \|\cdot\|_\alpha^{[a,b]}\right)$. Podle 2.21 existuje $\tilde{f} \in \mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ jako limita $\tilde{f}_n$. Ale restrikce $\tilde{f}\Big|_I$ leží v $\mathcal{H}_\alpha^I$ a je limitou f_n. Tudíž $\mathcal{H}_\alpha^I$ je úplný.

Omezené funkce na intervalu nejsou separabilní. Pro $\alpha > 0$ plyne z jednoznačnosti přiřazení $f \mapsto \tilde{f}$ a neseparability $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ tatáž vlastnost pro $\mathcal{H}_\alpha^I$. Podle Baireovy věty je $\mathcal{H}_\alpha^I$ druhé kategorie v sobě.

Díky větě 2.21 můžeme stejně odůvodnit ostatní vztahy mezi jednotlivými prostory. □

Poznámka 2.27. Pro nenulové α jsou dokonce prostory $\mathcal{H}_\alpha^I$ a $\mathcal{H}_\alpha^{[a,b]}$ izometrické, neboť interval I je hustý v $[a,b]$ a reálná čísla tvoří úplný metrický prostor. Důkaz uvádíme později v obecnější formě ve větě 3.14.

2.5 Reálné hölderovské funkce na celé reálné přímce

Nyní se zastavíme nad hölderovskými funkcemi z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ukážeme, že vnoření jednotlivých prostorů do sebe „překvapivě“ zachována nebudou. Abychom co nejvíce dostáli analogie předchozím případům, měli bychom díky poznámce 2.4 definovat prostor těchto funkcí, kterým předepíšeme hodnotu v jednom bodě.

Definice 2.28. *(Prostor $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$, $\|\cdot\|_\alpha^\mathbb{R}$.)* Pro $\alpha \in [0,1]$ symbolem $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$ označíme všechna α-hölderovská zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ s nulovou funkční hodnotou v nule. Pro $f \in \mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$ píšeme

$$\|f\|_\alpha^\mathbb{R} = \inf\left\{k \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|^\alpha \text{ pro } \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y\right\}.$$

Identita na $\mathbb{R}$ je spojitou funkcí s nulovou funkční hodnotou v nule, ale není omezená a 0-hölderovská podle 1.6.

Věta 1.9 nám zaručovala vnoření $\mathcal{H}_\alpha \subsetneqq \mathcal{H}_\beta$ pro $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$. Jejím důležitým předpokladem byla omezenost „výchozího prostoru“. Reálná přímka není omezená a inkluze $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R} \subsetneqq \mathcal{H}_\beta^\mathbb{R}$ zachována nebude.

Věta 2.29. *Pro každou dvojici α, β různých čísel z intervalu $[0,1]$ existuje funkce $f \in \mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$, která neleží v $\mathcal{H}_\beta^\mathbb{R}$.*

Důkaz. Pokud $\alpha < \beta$, stačí na intervalu $[0,1]$ použít příklady z věty 2.13, jež můžeme díky tvrzení 2.24 α-hölderovsky rozšířit na celou reálnou přímku.

V opačném případě definujme $f(n) = n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Díky větě 2.12 nahlédneme, že je f funkcí α-hölderovskou na celých nezáporných číslech. Pro $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m > n$, je

$$\frac{|f(m) - f(n)|}{|m-n|^\alpha} = \frac{\left|m^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\right|}{|m-n|^\alpha} \leqq \frac{|m-n|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{|m-n|^\alpha} = \frac{1}{|m-n|^{\frac{\alpha-\beta}{2}}} \leqq 1.$$

S využitím věty 2.24 funkci f rozšíříme α-hölderovsky na celé $\mathbb{R}$. Ale f není β-hölderovská, jak vyplývá ze vztahu

$$\frac{|f(m) - f(0)|}{|m-0|^\beta} = \frac{m^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{m^\beta} = m^{\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

kdy se pro $m \to \infty$ výraz blíží k nekonečnu. □

Z věty 2.13 nám zůstane v platnosti jen jedna malá část.

Věta 2.30. *Pro $1 \geqq \alpha > 0$ je $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$ vnořeno do prostoru $\tilde{\mathcal{C}}^\mathbb{R}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ nulových v nule.*

Důkaz. Odvolejme se na tvrzení 1.7. Ve větě 2.13 jsme uvedli příklad pro ostrou inkluzi. Skrze 2.24 jej můžeme „hölderovsky" rozšířit na celé $\mathbb{R}$. □

Neseparabilita a úplnost nám zůstanou zachovány stejně jako v předcházejících oddílech.

Věta 2.31. *Prostor $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$ není separabilní pro žádné $\alpha \in [0,1]$.*

Důkaz. Podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní. Ale ani pro interval $[0,1]$ neexistuje díky větě 2.15 spočetná hustá podmnožina α-hölderovských funkcí nulových v nule a $\mathcal{H}_\alpha$ je retraktem $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$. Tudíž $\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}$ není separabilní. □

Věta 2.32. *Prostor $\left(\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}, \|\cdot\|_\alpha^\mathbb{R}\right)$ je úplný pro každé $\alpha \in [0,1]$.*

Důkaz. Mějme posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovskou v $\left(\mathcal{H}_\alpha^\mathbb{R}, \|\cdot\|_\alpha^\mathbb{R}\right)$. Takovou, aby pro každé $\varepsilon_1 > 0$ existovalo $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená

$m, n \geqq n_1$ a všechna různá $x, y \in \mathbb{R}$ bude

$$\frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \varepsilon_1.$$

Ukážeme, že pak musí být $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v každém bodě x vzhledem k absolutní hodnotě. Kdyby tomu tak nebylo, existovalo by nenulové[7] $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon_2 > 0$, že bychom pro každé $n_2 \in \mathbb{N}$ našli přirozená $m, n \geqq n_2$, pro která by $|f_n(x) - f_m(x)| \geqq \varepsilon_2$. Jenže položením $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{|x|^{\alpha}}$ a $n_2 = n_1$ docházíme pro vhodnou dvojici m, n ke sporu

$$\frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(0)|}{|x - 0|^{\alpha}} < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{|x|^{\alpha}} \leqq \frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{|x|^{\alpha}}.$$

Nyní zbývá definovat $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a postupovat totožně jako v druhé části důkazu věty 2.16 o úplnosti $\mathcal{H}_{\alpha}$ s jedinou výjimkou, že rozvažujeme všechna různá x, y ne jen z intervalu $[0, 1]$, ale z celé reálné přímky. □

Věta 2.33. *Pro $\alpha \in [0, 1]$ je $\mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}}$ v sobě druhé kategorie.*

Důkaz. Stejně jako na intervalu $[0, 1]$ využijme Baireovu větu, úplnost $\mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}}$ a nulovou funkci svědčící o neprázdnosti prostoru. □

Jak již víme, prostory $\mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{H}_{\beta}^{\mathbb{R}}$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha \neq \beta$, tentokrát do sebe nejsou nijak vnořeny, a tudíž pozbývá smyslu zabývat se „kategorizací“ pro různé parametry. Můžeme se ovšem podívat, co se stane, když je navzájem pronikneme.

Věta 2.34. *Jestliže $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$, pak je $\mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{H}_{\beta}^{\mathbb{R}}$ množinou první kategorie v $\mathcal{H}_{\beta}^{\mathbb{R}}$.*

Důkaz. Až na formální změny postupujme analogicky jako ve větě 2.18. Opět definujeme množiny $F_n = \left\{f \in \mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{H}_{\beta}^{\mathbb{R}}, \|f\|_{\alpha} \leqq n\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, které ve svém sjednocení vyplní $\mathcal{H}_{\alpha}^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{H}_{\beta}^{\mathbb{R}}$. Předpokládejme, že některá F_n není řídká. Proto musí existovat $f \in \operatorname{int}_{\beta} \overline{F_n}^{\beta}$ a $r > 0$, že $B(f, r) \subset \overline{F_n}^{\beta}$. Definujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqq 0, \\ f(x) + \frac{r}{2} \cdot x^{\beta}, & x > 0. \end{cases}$$

[7] Možnost $x = 0$ nám přímo vylučuje podmínka z definice $f_n(0) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Ta leží v $\mathcal{H}_\beta^{\mathbb{R}}$, neboť se jedná o součet dvou β-hölderovských funkcí,[8] které v počátku „dávají“ hodnotu nula. Víme, že $\|g-f\|_\beta = \frac{r}{2}$.

Nechť funkce h leží v $B\left(g, \frac{r}{4}\right)$. Pak

$$\begin{aligned}
\|h\|_\alpha &= \sup\left\{\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\alpha}, x, y \in \mathbb{R}, x \neq y\right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{\frac{|h(x)-h(0)|}{|x-0|^\alpha}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{-\frac{|h(x)-g(x)|}{x^\alpha} + \frac{|g(x)-f(x)|}{x^\alpha} - \frac{|f(x)|}{x^\alpha}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{-\frac{r}{4}\cdot x^{\beta-\alpha} + \frac{r}{2}\cdot x^{\beta-\alpha} - n, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\} = \infty.
\end{aligned}$$

Ale $h \notin F_n$, a tudíž $B\left(g, \frac{r}{4}\right) \cap F_n = \emptyset$. Každá F_n je řídká v $\mathcal{H}_\beta^{\mathbb{R}}$. $\square$

[8]O funkci $x \mapsto x^\beta$, $x > 0$, to známe z důkazu věty 2.13, v němž jsme se nemuseli omezit na interval $[0, 1]$.

Kapitola 3

Zobecnění výsledků

V předcházející části se nám jednotlivé vlastnosti prostorů prolínaly do postupných zobecnění. V čem tkví jejich platnost? Na čem nejvíce záleží? V nové kapitole se pokusíme výsledky co nejvíce zobecnit a odhalit nutné a postačující podmínky jednotlivých tvrzení.

3.1 Hölderovská zobrazení a hyperkonvexní prostory

Hned na začátku kapitoly o α-hölderovských reálných funkcích jsme jako „nezajímavé" vyškrtli ty případy, kdy $\alpha > 1$. Krátce jsme ve větě 2.2 ukázali, že tato zobrazení jsou již konstantní. Obecně toto tvrzení ale neplatí. Poznámky 1.4 a 1.5 nám napověděly, že problém nespočívá jen ve volbě $\alpha > 1$.

Uvažujme všechna α-hölderovská zobrazení z metrického prostoru (X, ϱ) do (Y, σ). Odhalíme, kdy budou pro $\alpha > 1$ nutně konstantní. Samozřejmě předpokládáme, že Y je alespoň dvoubodový. Jak víme, množina X musí být nekonečná a nesmí na ní být definovaná diskrétní metrika. Dokonce musí být (X, ϱ) *metricky souvislý*, což znamená, že pro všechna $x, y \in X$ a zadané $\varepsilon > 0$ existuje konečně mnoho bodů $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ takových, že $p_0 = x$, $p_n = y$ a $\varrho(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Věta 3.1. *Jsou-li (X, ϱ) a (Y, σ) dva metrické prostory, první není metricky souvislý a druhý je alespoň dvoubodový, pak pro libovolné $\alpha \geqq 0$ existuje nekonstantní α-hölderovské zobrazení $f\colon\ X \to Y$.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x \in X$ a označme jako K_x *komponentu metrické souvislosti* (maximální množinu, pro kterou je $\left(K, \varrho|_{K\times K}\right)$ souvislý), která obsahuje x. Z nesouvislosti víme, že $K \subsetneqq X$, a odhadneme vzdálenost[1] $\varrho\left(K_x, X \setminus K_x\right) > 0$. Stačí definovat

$$f(z) = \begin{cases} y_1, & z \in K_x, \\ y_2, & z \in X \setminus K_x, \end{cases}$$

jestliže y_1 a y_2 jsou dva různé prvky z Y. Pro $a \in K_x$ a $b \in X \setminus K_x$ je

$$\sigma\left(f(a), f(b)\right) = \frac{\sigma\left(y_1, y_2\right) \cdot \varrho^\alpha\left(K_x, X \setminus K_x\right)}{\varrho^\alpha\left(K_x, X \setminus K_x\right)} \leqq \frac{\sigma\left(y_1, y_2\right) \cdot \varrho^\alpha(a, b)}{\varrho^\alpha\left(K_x, X \setminus K_x\right)}.$$

Vidíme, že f není konstantní, ale je α-hölderovské pro každé $\alpha \geqq 0$ s konstantou $k = \frac{\sigma(y_1, y_2)}{\varrho^\alpha(K_x, X \setminus K_x)}$. $\square$

Když budeme mít povolené „dělení intervalů“ (stačí i „oslabené“) ve smyslu následující definice, obdržíme hledanou postačující podmínku.

Definice 3.2. *(Slabě 2-hyperkonvexní prostor, 2-hyperkonvexní prostor.)* Metrický prostor (X, ϱ) budeme nazývat *slabě 2-hyperkonvexním s konstantou* c, $c < 1$, pokud pro všechna $x, y \in X$ bude existovat $z \in X$ se vzdálenostmi $\varrho(x, z) \leqq c \cdot \varrho(x, y)$ a $\varrho(z, y) \leqq c \cdot \varrho(x, y)$. Pro případ $c = \frac{1}{2}$ hovoříme o *2-hyperkonvexním prostoru.*

Poznámka 3.3. Kvůli trojúhelníkové nerovnosti nesmí být konstanta[2] c menší než $\frac{1}{2}$. Každý slabě 2-hyperkonvexní prostor je metricky souvislý.

Poznámka 3.4. Slabě 2-hyperkonvexním je každý normovaný vektorový prostor $(X, \|\cdot\|)$ nad tělesem obsahujícím $\frac{1}{2} \leqq c < 1$, na němž uvažujeme metriku $\varrho(x, y) = \|y - x\|$, $x, y \in X$. Pro $x, y \in X$ hledejme bod $z \in X$ splňující požadovanou podmínku. Protože je X vektorovým prostorem, leží v něm i $(y - x)$, $c \cdot (y - x)$ a $z = x + c \cdot (y - x)$. Díky definici normy dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho(x, z) &= \|z - x\| = \|x + c \cdot (y - x) - x\| = \|c \cdot (y - x)\| = c \cdot \varrho(x, y), \\ \varrho(z, y) &= \|y - z\| = \|y - x - c \cdot (y - x)\| = (1 - c) \cdot \varrho(x, y). \end{aligned}$$

[1] Pro $A, B \subseteqq X$ definujeme $\varrho(A, B) = \inf\{\varrho(a, b), a \in A, b \in B\}$.

[2] „Nemá cenu“ ani zvlášť rozlišovat $c \geqq 1$. Pak by každý metrický prostor byl zároveň slabě 2-hyperkovexní s konstantou c. Stačilo by za hledané z z definice dosadit třeba x.

Příkladem 2-hyperkonvexního prostoru je *n-rozměrný eukleidovský prostor* $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ pro $n \in \mathbb{N}$ s metrikou

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x^{(i)} - y^{(i)}\right)^2}, \qquad x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n,$$
$$y = \left(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Bod z najdeme jako

$$z = \frac{x+y}{2} = \left(\frac{x^{(1)} + y^{(1)}}{2}, \frac{x^{(2)} + y^{(2)}}{2}, \ldots, \frac{x^{(n)} + y^{(n)}}{2}\right).$$

Věta 3.5. *Nechť $\alpha > 1$, (X, ϱ) a (Y, σ) jsou dva metrické prostory, přičemž X je slabě 2-hyperkonvexní s konstantou $c < \sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}}$. Každé α-hölderovské zobrazení $f:\ X \to Y$ je pak konstantní.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme existenci $a_0, b_0 \in X$ s různými funkčními hodnotami. Označme $r = \varrho(a_0, b_0)$ a $s = \sigma(f(a_0), f(b_0))$. Dále postupujme indukcí. Ať již máme pro $n \in \mathbb{N}$ definované body $a_n, b_n \in X$, že $\varrho(a_n, b_n) \leqq c^n \cdot r$ a $\sigma(f(a_n), f(b_n)) \geqq \frac{s}{2^n}$. Dle předpokladu existuje $x \in X$ „blízko středu úsečky $a_n b_n$“, přesněji takové, že $\varrho(x, a_n) \leqq c^{n+1} \cdot r$ a $\varrho(x, b_n) \leqq c^{n+1} \cdot r$. Z trojúhelníkové nerovnosti je $\sigma(f(x), f(a_n)) \geqq \frac{s}{2^{n+1}}$ nebo $\sigma(f(x), f(b_n)) \geqq \frac{s}{2^{n+1}}$. V prvním případě zbývá položit $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x$, ve druhém $a_{n+1} = x$, $b_{n+1} = b_n$. Toto „půlení intervalů“ opakujme neustále dokola. Jestliže je f funkcí α-hölderovskou, pak musí existovat konstanta $k > 0$, jež pro každé $n \in \mathbb{N}$ splní

$$\frac{s}{2^n} \leqq \sigma(f(a_n), f(b_n)) \leqq k \cdot \varrho^\alpha(a_n, b_n) \leqq k \cdot (c^n \cdot r)^\alpha.$$

Jenže po jednoduché úpravě vidíme, že se „vyplývající“ podmínka

$$\frac{s}{k \cdot r^\alpha} \leqq (2 \cdot c^\alpha)^n$$

poruší pro $n \to \infty$, protože v závorce napravo je výraz menší než 1. □

Přidejme ještě jedno tvrzení o úplném 2-hyperkonvexním prostoru. Neformálně můžeme říct, že vybereme-li z něj dva různé body, pak „mezi nimi existuje úsečka.“

Věta 3.6. *Nechť prostor* (X, ϱ) *je 2-hyperkonvexní a úplný. Potom pro všechny* $x, y \in X$ *existuje jeho podprostor* $\left(Y, \varrho|_{Y \times Y}\right)$*, který je izometrický s prostorem* $\left([0, \varrho(x,y)], \tau|_{[0,\varrho(x,y)]\times[0,\varrho(x,y)]}\right)$ *a v němž leží* x, y.

Důkaz. Nejprve „zařadíme" do Y prvky odpovídající *dyadicky racionálním číslům* $r \in [0,1]$, čili pro $r \in \left\{\frac{p}{2^n} \leqq 1, p, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$. Postupujme indukcí podle n. Označme $p_0^0 = x$ a $p_0^1 = y$ a „vložme" je do P_0. Ať již máme pro $n \in \mathbb{N}$ definované $P_n = \{p_n^i \in X, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqq 2^n\}$ s vlastnostmi $p_n^0 = x$, $p_n^{2^n} = y$ a $\varrho(p_n^i, p_n^j) = \frac{j-i}{2^n} \cdot \varrho(x,y)$ pro $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \leqq j \leqq 2^n$. „Následující" množina P_{n+1} bude soustřeďovat prvky p_{n+1}^i, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqq 2^{n+1}$: pro sudé $i = 2k$ dáme $p_{n+1}^{2k} = p_n^k$ a pro liché $i = 2k+1$ díky 2-hyperkonvexitě tak, aby

$$\varrho\left(p_n^k, p_{n+1}^{2k+1}\right) = \varrho\left(p_{n+1}^{2k+1}, p_n^{k+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \varrho\left(p_n^k, p_n^{k+1}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \varrho(x,y).$$

Z předchozí množiny jsme „zdědili" $p_{n+1}^0 = x$, $p_{n+1}^{2^{n+1}} = y$. Dostaneme-li $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \leqq j \leqq 2^{n+1}$, položíme i_s největší sudé číslo $i_s \leqq i$ a j_s nejmenší sudé $j_s \geqq j$. Díky trojúhelníkové nerovnosti a předpokladům

$$\begin{aligned}
\varrho\left(p_{n+1}^i, p_{n+1}^j\right) &\leqq \sum_{k=i}^{j-1} \varrho\left(p_{n+1}^k, p_{n+1}^{k+1}\right) = \sum_{k=i}^{j-1} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \varrho(x,y) = \frac{j-i}{2^{n+1}} \cdot \varrho(x,y), \\
\varrho\left(p_{n+1}^i, p_{n+1}^j\right) &\geqq \varrho\left(p_{n+1}^{i_s}, p_{n+1}^{j_s}\right) - \varrho\left(p_{n+1}^i, p_{n+1}^{i_s}\right) - \varrho\left(p_{n+1}^j, p_{n+1}^{j_s}\right) = \\
&= \frac{j-i}{2^{n+1}} \cdot \varrho(x,y).
\end{aligned}$$

Množina P_n je pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ podmnožinou P_{n+1}. Označme $Y' = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Pro každá $a, b \in Y'$ taková, že $\varrho(x,a) \leqq \varrho(x,b)$, jsme předchozím výpočtem zjistili $\varrho(x,a) + \varrho(a,b) = \varrho(x,b)$. Zároveň pro jakékoliv dyadicky racionální $r \in [0,1]$ existuje $z \in Y'$, že $\varrho(x,z) = r \cdot \varrho(x,y)$.

Nyní si zvolme jakékoliv reálné r z intervalu $[0,1]$. Pro něj existuje neklesající posloupnost $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dyadicky racionálních čísel (opět se omezme jen na požadovaný interval) konvergujících k r. Ty nám určí posloupnost bodů $z_n \in Y'$ s $\varrho(x, z_n) = r_n \cdot \varrho(x,y)$. Protože pro $m \leqq n$

$$\varrho(z_m, z_n) = \varrho(x, z_n) - \varrho(x, z_m) = (r_n - r_m) \cdot \varrho(x,y),$$

jedná se o cauchyovskou posloupnost. Díky úplnosti existuje $z \in X$, jež splní $\varrho(x,z) = r \cdot \varrho(x,y)$ i $\varrho(z,y) = (1-r) \cdot \varrho(x,y)$. Všechny tyto body spolu s prvky Y' „vložme" do Y. Zobrazení, jež „posílá" $z \in Y$ na $\varrho(x,z)$, potvrzuje izometrii. $\square$

Poznámka 3.7. Netvrdíme, že je podprostor Y určen jednoznačně. Třeba na jednotkové kružnici se středem v nule, kde vzdálenost dvou bodů K a L je definována jako velikost konvexního úhlu $K0L$, máme pro $[-1,0]$ a $[1,0]$ dvě možnosti: vzít oblouk v horní polorovině, respektive v dolní polorovině.

3.2 Prostor $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$

Na prostoru $\mathcal{H}_\alpha$, který obsahoval α-hölderovské funkce zobrazující interval $[0,1]$ do reálných čísel, jsme se snažili zavést metriku. Nejprve jsme museli ověřit, že se jedná o vektorový prostor, a v nule předepsat nulovou funkční hodnotu. Definici jsme přirozeně zobecňovali na omezené intervaly a později na celou reálnou přímku. Ze stejného postupu zkonstruujeme prostory hölderovských funkcí mezi obecnými prostory.

Definice 3.8. *(Prostor $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$.)* Buďte (X,ϱ) a (Y,σ) dva metrické prostory, přičemž ať je Y vektorovým prostorem nad tělesem T. Mějme $a \in X$ a nezápornou konstantu α. Soubor všech α-hölderovských zobrazení z X do Y, která mají v a nulovou funkční hodnotu, budeme značit symbolem $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$.

Věta 3.9. *Za předpokladů z předešlé definice tvoří $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ vektorový prostor nad tělesem T.*

Důkaz. Jestliže budeme značit na vektorovém prostoru V operaci sčítání symbolem $\overset{V}{+}$, násobení prvkem tělesa $\overset{V}{\cdot}$ a nulový prvek $\overset{V}{0}$, stačí definovat pro $f,g \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$, $x \in X$ a $r \in T$

$$\left(f \overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{+} g\right)(x) = f(x) \overset{Y}{+} g(x)\,, \qquad \left(r \overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{\cdot} f\right)(x) = r \overset{Y}{\cdot} f(x)\,,$$

$$\overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{0}(x) = \overset{Y}{0}\,.$$

Požadované vlastnosti se „přenesou" z prostoru Y na $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$. □

Úmluva 3.10. Napíšeme-li symbol $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$, „automaticky" předpokládáme splnění všech požadavků z definice. Konkrétně existenci metrických prostorů (X,ϱ) a (Y,σ), kde Y je vektorový prostor nad tělesem T, prvku

$a \in X$ a konstanty $\alpha \geqq 0$. $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ pak považujeme za vektorový prostor nad tělesem T s operacemi $\overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{+}$, $\overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{\cdot}$, $\overset{\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}}{0}$ (nadále je budeme značit bez symbolu příslušného prostoru $+$, $\cdot$ a 0).

Poznámka 3.11. V definici jsme uvedli, že všechna zobrazení z $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ mají v a nulovou funkční hodnotu. Jiná volba ani „nepřipadala v úvahu" vzhledem ke vlastnostem vektorového prostoru. Předepišme $f(a) = b$ pro všechna $f \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$. Pak i $(f+f)$ leží v $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ a

$$(f+f)(a) = f(a) + f(a) = b + b.$$

Aby $b + b = b$, musí skutečně být b nulové.

Definice 3.12. *($\|\cdot\|_\alpha$.)* Nechť zobrazení $\|\cdot\|_\alpha : \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y} \to \mathbb{R}$ přiřazuje k $f \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ hodnotu

$$\inf\left\{k \in \mathbb{R}, \sigma(f(x), f(y)) \leqq k \cdot \varrho^\alpha(x,y) \text{ pro } \forall x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

Věta 3.13. *Pro $f \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ platí*

$$\|f\|_\alpha = \sup\left\{\frac{\sigma(f(x), f(y))}{\varrho^\alpha(x,y)}, x, y \in X, x \neq y\right\}$$

a zobrazení $\|\cdot\|_\alpha$ je normou na $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$.

Důkaz. Odvolejme se na věty 2.7 a 2.10 a postupujme úplně analogicky s metrikami ϱ na X a σ na Y. $\square$

3.3 Izometrické prostory hölderovských zobrazení

Uveďme větu slíbenou v oddílu 2.4 a tvrzení, jež užijeme v dalších pasážích.

Věta 3.14. *Jestliže $\alpha \in (0,1]$, (Y,σ) je úplný, M hustý podprostor (X,ϱ) a leží v něm bod a, pak jsou prostory $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ a $\mathcal{H}_\alpha^{M(a),Y}$ izometrické.*

Důkaz. Izometrické zobrazení přirozeně definujeme tak, aby k $f \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ přiřadilo restrikci na M. Symbolem $\|\cdot\|_\alpha^X$ budeme značit normu na X a jako $\|\cdot\|_\alpha^M$ normu na Y. Jelikož je M podprostorem X, pak $\|\cdot\|_\alpha^M \leqq \|\cdot\|_\alpha^X$. Ze stejnoměrné spojitosti z věty 1.7 k zadanému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x, y \in X$, $\varrho(x,y) < \delta$, platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Na δ můžeme bez újmy na obecnosti přidat podmínku $\delta^\alpha \cdot \|f\|_\alpha^M < \varepsilon$. Mějme libovolná $x, y \in X$. Pro ně díky hustotě existují $x_M, y_M \in M$, pro která $\varrho(x, x_M) < \delta$ a $\varrho(y, y_M) < \delta$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti, definice normy a konkávnosti funkce $z \mapsto z^\alpha$, $z \geqq 0$, $\alpha \in [0,1]$ (věty 2.12), obdržíme

$$\begin{aligned}
\sigma(f(x), f(y)) &\leqq \sigma(f(x), f(x_M)) + \sigma(f(x_M), f(y_M)) + \\
&\quad + \sigma(f(y_M), f(y)) < \varepsilon + \|f\|_\alpha^M \cdot \varrho^\alpha(x_M, y_M) + \varepsilon \leqq \\
&\leqq \|f\|_\alpha^M \cdot (\varrho(x_M, x) + \varrho(x,y) + \varrho(y, y_M))^\alpha + 2\varepsilon < \\
&< \|f\|_\alpha^M \cdot (\delta^\alpha + \varrho^\alpha(x,y) + \delta^\alpha) + 2\varepsilon < \\
&< \|f\|_\alpha^M \cdot \varrho^\alpha(x,y) + 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vzhledem k libovolné volbě $\varepsilon > 0$ získáváme $\|\cdot\|_\alpha^X \leqq \|\cdot\|_\alpha^M$.

Zbývá ukázat, že je definované zobrazení surjektivní. Vezměme si libovolné α-hölderovské g s konstantou k, které leží v prostoru $\mathcal{H}_\alpha^{M(a),Y}$. Pro $x \in X$ existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z M konvergujících k x. Tedy k $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, aby pro $n \geqq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, bylo $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$. Položme $f(x)$ jako limitu $g(x_n)$. Posloupnost $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v úplném prostoru Y, vždyť pro $m \geqq n_0$, $n \geqq n_0$, $m, n \in \mathbb{N}$, platí

$$\sigma(g(x_n), g(x_m)) \leqq k \cdot \varrho^\alpha(x_n, x_m) \leqq k \cdot (\varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m))^\alpha < k \cdot (2\varepsilon)^\alpha .$$

Zároveň jsou-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ dvě posloupnosti konvergující k x, pak je i $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$ cauchyovská. Proto $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)$. Konečně $f \in \mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ (podobně jako u $\|\cdot\|_\alpha^X \leqq \|\cdot\|_\alpha^M$) a zobrazí se na g. $\square$

Věta 3.15. *Nechť jsou (X_1, ϱ_1), (X_2, ϱ_2) a (Y_1, σ_1), (Y_2, σ_2) dvojice izometrických prostorů a σ_2 je invariantní vůči posunutí (to znamená, že platí $\sigma_2(x,y) = \sigma_2(x+t, y+t)$, pokud $x, y, x+t, y+t \in Y_2$). Pak jsou $\mathcal{H}_\alpha^{X_1(a_1),Y_1}$ a $\mathcal{H}_\alpha^{X_2(a_2),Y_2}$ rovněž izometrické.*

Důkaz. Předpokládejme, že $g_X : X_1 \to X_2$ a $g_Y : Y_1 \to Y_2$ potvrzují obě izometrie. K $f_1 \in \mathcal{H}_\alpha^{X_1(a_1),Y_1}$ přiřadíme $f_2 : X_2 \to Y_2$ definované[3] jako $f_2(x) = t\left(g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(x)\right)\right)\right)$, $x \in X_2$, kde t „posílá“ $y \in Y_2$ na $y - g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(a_2)\right)\right)$. Díky tomu, že je Y_2 vektorovým prostorem, je tento přístup korektní. V bodě a_2 má f_2 nulovou funkční hodnotu. Navíc

$$\begin{aligned}
\sigma_2(f_2(x), f_2(y)) &= \sigma_2\left(t\left(g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(x)\right)\right)\right), t\left(g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(y)\right)\right)\right)\right) = \\
&= \sigma_2\left(g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(x)\right)\right), g_Y\left(f_1\left(g_X^{-1}(y)\right)\right)\right) = \\
&= \sigma_1\left(f_1\left(g_X^{-1}(x)\right), f_1\left(g_X^{-1}(y)\right)\right) \leqq \\
&\leqq \|f_1\|_\alpha^{(1)} \cdot \varrho_1^\alpha\left(g_X^{-1}(x), g_X^{-1}(y)\right) = \|f_1\|_\alpha^{(1)} \cdot \varrho_2^\alpha(x, y),
\end{aligned}$$

kdykoliv $x, y \in X_2$, $\|\cdot\|_\alpha^{(1)}$ značí normu na $\mathcal{H}_\alpha^{X_1(a_1),Y_1}$ a $\|\cdot\|_\alpha^{(2)}$ normu na $\mathcal{H}_\alpha^{X_2(a_2),Y_2}$. Odtud $f_2 \in \mathcal{H}_\alpha^{X_2(a_2),Y_2}$ a $\|\cdot\|_\alpha^{(2)} \leqq \|\cdot\|_\alpha^{(1)}$. Podobně vyjde i druhá nerovnost $\|\cdot\|_\alpha^{(2)} \geqq \|\cdot\|_\alpha^{(1)}$. Pro $x, y \in X_1$ platí

$$\begin{aligned}
\sigma_1(f_1(x), f_1(y)) &= \sigma_1\left(g_Y^{-1}\left(t^{-1}(f_2(g_X(x)))\right), g_Y^{-1}\left(t^{-1}(f_2(g_X(y)))\right)\right) = \\
&= \sigma_2\left(t^{-1}(f_2(g_X(x))), t^{-1}(f_2(g_X(y)))\right) = \\
&= \sigma_2(f_2(g_X(x)), f_2(g_X(y))) \leqq \\
&\leqq \|f_2\|_\alpha^{(2)} \cdot \varrho_2^\alpha(g_X(x), g_X(y)) = \|f_2\|_\alpha^{(2)} \cdot \varrho_1^\alpha(x, y).
\end{aligned}$$

Máme-li $f_2' \in \mathcal{H}_\alpha^{X_2(a_2),Y_2}$, definujme $f_1(x) = g_Y^{-1}(f_2'(g_X(x)))$ pro $x \in X_1$. Pak f_1 leží v $\mathcal{H}_\alpha^{X_1(a_1),Y_1}$ a zobrazí se podle předpisu ze začátku na $f_2 = f_2'$, jak ukazuje

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= t\left(g_Y\left(g_Y^{-1}\left(f_2'\left(g_X\left(g_X^{-1}(x)\right)\right)\right)\right)\right) = t(f_2'(x)) = \\
&= f_2'(x) - g_Y\left(g_Y^{-1}\left(f_2'\left(g_X\left(g_X^{-1}(a_2)\right)\right)\right)\right) = f_2'(x), \qquad x \in X_2.
\end{aligned}$$

□

3.4 Neseparabilita prostoru $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$

Věta 3.16. *Prostor $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ není separabilní pro $\alpha \in [0,1]$, pokud existují $X' \subseteqq X$ a $Y' \subseteqq Y$ tak, že $\left(X', \varrho|_{X' \times X'}\right)$ je izometrický s uzavřeným intervalem $[0, c]$ pro nějaké $c > 0$ a $\left(Y', \sigma|_{Y' \times Y'}\right)$ je izometrický s $[0, d]$ pro $d > 0$,*

[3] Izometrické zobrazení je podle definice na a z první vlastnosti metrických prostorů prosté. Má smysl uvažovat jeho inverzi.

a každé α-hölderovské $f: X' \to Y'$ lze rozšířit na α-hölderovské zobrazení $X \to Y$.

Důkaz. Ve větě 2.15 jsme zkonstruovali nespočetný diskrétní soubor nezáporných funkcí z $\mathcal{H}_\alpha$ s definičním oborem $[0,1]$ „nepřekračujících jedničku“. Díky 2.20 je na intervalu $[0,c]$ „převedeme“ na nespočetnou diskrétní množinu funkcí z $\mathcal{H}_\alpha^{[0,c]}$ s funkčními hodnotami v intervalu $[0,c^\alpha]$. Když je vynásobíme konstantou $\frac{d}{c^\alpha}$, „posune se“ obor hodnot do $[0,d]$. Ale

$$\begin{array}{ccc} & \left(X',\, \varrho|_{X'\times X'}\right) \text{ s } \left([0,c]\,,\, \tau|_{[0,c]\times[0,c]}\right) \\ \text{a} & \left(Y',\, \sigma|_{Y'\times Y'}\right) \text{ s } \left([0,d]\,,\, \tau|_{[0,d]\times[0,d]}\right) \end{array}$$

jsou izometrické. Díky 3.15 není prostor $\mathcal{H}_\alpha^{X_{x_1,x_2}(a),Y_{y_1,y_2}}$ separabilní, protože je separabilita topologickou (a metrickou) vlastností, kterou zachovávají homeomorfní (a speciálně izometrické) prostory. Diskrétní nespočetný systém zobrazení z X' můžeme „prodloužit“ na celé X, čímž se diskrétnost neporuší. A proto ani $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ není separabilní. $\square$

3.5 Úplnost prostoru $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$

Při dokazování úplnosti na části reálné přímky jsme pro cauchyovskou posloupnost funkcí bodově definovali „kandidáta na limitu“. Posléze jsme využili postupu z věty 2.16, který nám ověřil úplnost příslušného prostoru. Problém spočívá v nalezení bodové limity posloupnosti. V tom případě se zdá, že by měl být Y úplný.

Co by se stalo, kdyby nebyl? Kupříkladu prostor c_{00} všech posloupností, které mají až na konečný počet všechny členy nulové, spolu s normou

$$\|\cdot\|_{c_{00}}: \ x \mapsto \sup\left\{\left|x^{(n)}\right|, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad x = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots\right\} \in c_{00},$$

úplný není. Za X vezměme množinu $\{a, x\}$. Vzdálenost jejích bodů nařiďme rovnu jedné. Označme $0 = (0,0,0,\dots)$ a položme

$$f_n(a) = 0, \qquad f_n(x) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, neboť pro $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|f_m - f_n\|_\alpha = \frac{\|(f_m - f_n)(a) - (f_m - f_n)(x)\|_{c_{00}}}{1^\alpha} = \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}.$$

Každá funkce f z c_{00} musí obsahovat první nulový index $j \in \mathbb{N}$ (nenulových je pouze konečně mnoho). V bodě a máme povinnost předepsat 0. Jenže pro všechna $n \geqq j$ je

$$\|f - f_n\|_\alpha = \frac{\|(f - f_n)(a) - (f - f_n)(x)\|_{c_{00}}}{1^\alpha} \geqq \left| f(x)^{(j)} - f_n(x)^{(j)} \right| = \frac{1}{j}$$

a f nemůže být limitou $\{f_n\}_{n=1}^\infty$.

Věta 3.17. *Prostor $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ je úplný, když (Y, σ) je úplný a invariantní vůči posunutí.*

Důkaz. Mějme cauchyovskou posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ zobrazení z $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$. Pro každé $\varepsilon > 0$, různá $x, y \in X$ a přirozená m, n větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ (připusťme též rovnost) nám platí

$$\sigma\left((f_n - f_m)(x), (f_n - f_m)(y)\right) < \varepsilon \cdot \varrho^\alpha(x, y).$$

Speciálně pro $y = a$ a „zafixované“ $x \in X$

$$\sigma\left((f_n - f_m)(x), (f_n - f_m)(a)\right) = \sigma\left(f_n(x) - f_m(x), 0\right) < \varepsilon \cdot \varrho^\alpha(x, a).$$

Díky invarianci vůči posunutí je pro každé $\tilde{\varepsilon} > 0$ a $m, n \geqq n_0$ vzdálenost $\sigma\left(f_n(x), f_m(x)\right) < \tilde{\varepsilon}$ (stačí položit $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varrho^\alpha(x,y)}$). Protože je $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská vzhledem k σ a Y je úplný, má limitu, kterou označíme $f(x)$.

Pro libovolně zadané $\varepsilon > 0$ najdeme podle začátku důkazu příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$. Mějme libovolné $n \geqq n_0$. Pro něj

$$\|f_n\|_\alpha = \|f_n - f_{n_0} + f_{n_0}\|_\alpha \leqq \|f_n - f_{n_0}\|_\alpha + \|f_{n_0}\|_\alpha < \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\alpha.$$

Krátkou úpravou nám vyjde $\|f\|_\alpha \leqq \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\alpha$ a $\|f - f_n\|_\alpha \leqq \varepsilon \cdot \varrho^\alpha(x, y)$, zobrazení f leží v $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ a je limitou zadané posloupnosti. □

3.6 Prostory $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y}$ první a druhé kategorie

Věta 3.18. *Pro $1 \geqq \alpha > \beta \geqq 0$ je $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y} \cap \mathcal{H}_\beta^{X(a),Y}$ množinou první kategorie v $\mathcal{H}_\beta^{X(a),Y}$, jestliže je X izometrický s netriviálním intervalem I a Y izometrický s netriviálním intervalem J.*

Důkaz. Připomeňme si důkazy 2.18 a 2.34. Protože je metrika τ na reálných číslech invariantní vůči posunutí a I je izometrický s $(-I)$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že I a J obsahují nulu i nějaké $c > 0$ a bod $a \in X$ izometrické zobrazení z X na I „pošle“ na nulu. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme množiny $F_n = \left\{ f \in \mathcal{H}_\alpha^{I(0),J} \cap \mathcal{H}_\beta^{I(0),J}, \|f\|_\alpha \leqq n \right\}$ (zde značí $\|\cdot\|_\alpha$ normu na $\mathcal{H}_\alpha^{I(0),J}$). Pro $f \in \mathrm{int}_\beta \overline{F_n}^\beta$ a $r > 0$ položme

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqq 0, x \in I, \\ \max\left\{ \left(f(x) + \frac{r}{2} \cdot x^\beta \right), c \right\}, & x > 0, x \in I. \end{cases}$$

Tato funkce leží (s odvoláním na část důkazu 2.13 o „β-hölderovskosti“ zobrazení $x \mapsto x^\beta$, $x > 0$) v prostoru $\mathcal{H}_\beta^{I(0),J}$. Opět $\|g - f\|_\beta = \frac{r}{2}$. Pro $h \in B\left(g, \frac{r}{4}\right)$ zjistíme, že neleží v F_n. A tudíž bude každá F_n řídká v $\mathcal{H}_\beta^{I(0),J}$ a $\mathcal{H}_\alpha^{I(0),J} \cap \mathcal{H}_\beta^{I(0),J}$ první kategorie v $\mathcal{H}_\beta^{I(0),J}$. Protože se jedná o topologickou vlastnost a můžeme využít tvrzení 3.15, bude $\mathcal{H}_\alpha^{X(a),Y} \cap \mathcal{H}_\beta^{X(a),Y}$ první kategorie v $\mathcal{H}_\beta^{X(a),Y}$. Proto zbývá odhadnout $\|h\|_\alpha$. Před následnou sérií nerovností ještě označme $M = \left\{ x > 0, f(x) + \frac{r}{2} \cdot x^\beta \leqq c \right\}$. Vidíme

$$\begin{aligned}
\|h\|_\alpha &= \sup\left\{ \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha}, x, y \in I, x \neq y \right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{ \frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^\alpha}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{ -\frac{|h(x) - g(x)|}{x^\alpha} + \frac{|g(x) - f(x)|}{x^\alpha} - \frac{|f(x)|}{x^\alpha}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{ -\frac{r}{4} \cdot x^{\beta-\alpha} + \frac{|g(x) - f(x)|}{x^\alpha} - n, x \in M \right\} \geqq \\
&\geqq \sup\left\{ -\frac{r}{4} \cdot x^{\beta-\alpha} + \frac{r}{2} \cdot x^{\beta-\alpha} - n, x \in M \right\} = \infty.
\end{aligned}$$

□

Literatura

[1] Aronszajn, N.; Panitchpakdi, P.: *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, strany 405–439. Pacific J. Math. 6, 1956.

[2] Čech, Eduard: *Bodové množiny*, strany 41–131. Academia, Praha, 1966.

[3] Hušek, Miroslav: *Metrické struktury.* Přednáška na MFF UK, zimní semestr 2006–2007.

[4] Rudin, Walter: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, strany 115–116. Academia, Praha, 2003.

Téma práce, motivaci a základní poznatky přinesla přednáška [3]. Definice a věty o metrických prostorech nabízí kniha [2]. Důkaz Baireovy věty podává kupříkladu [4]. Pojem hyperkonvexních prostorů zavádí [1].