Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aleš Holub

# Aditivní funkce

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
Studijní program: obecná matematika

2008

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Prof. RNDr. Luďku Zajíčkovi, DrSc. za jeho vedení, cenné rady a připomínky, které mi velmi pomohly při vypracování této práce.
Děkuji také rodičům, kteří mi při studiu poskytují tolik potřebné zázemí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. května 2008 Aleš Holub

# Obsah

Název práce: Aditivní funkce
Autor: Aleš Holub
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
e-mail vedoucího: zajicek@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vlastnosti funkcí splňujících Cauchyovu funkcionální rovnici $f(x) + f(y) = f(x + y)$. Řešení budeme hledat mezi reálnými funkcemi reálné proměnné. Nejprve uvedeme v práci použité matematické pojmy a tvrzení, například pojem Hamelovy báze. Pomocí těchto základů pak ukážeme některé ekvivalentní podmínky pro spojitost řešení a také některá tvrzení o vlastnostech řešení nespojitých. Budeme zkoumat meřitelnost, vlastnosti grafu a Baireovu vlastnost. Také ukážeme, jak vypadají funkce splňující zadanou funkcionální rovnici pouze na reziduální podmnožině $\mathbb{R}$, resp. skoro všude v $\mathbb{R}$. V poslední kapitole se krátce zmíníme o některých funkcionálních rovnicích, jejichž řešení se dá převést na řešení zkoumané rovnice.

Klíčová slova: aditivní funkce, funkcionální rovnice, Cauchyova funkcionální rovnice

Title: Additive functions
Author: Aleš Holub
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
Supervisor's e-mail address: zajicek@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study properties of functions satisfying Cauchy's functional equation $f(x) + f(y) = f(x + y)$. We search only solutions among real functions of real variable. At the beginning we explain mathematical terms and theorems used later in the work, e.g. Hamel basis. With this fundamentals we prove some conditions equivalent to continuity of solutions and also some properties of discontinuous solutions, such as measurability, graph description and Baire property. Functions satisfying Cauchy's functional equation only on residual subset of $\mathbb{R}$, or almost everywhere in $\mathbb{R}$, are also discussed. In last chapter we shortly mention some other functional equations that can be solved with the aid of additive functions.

Keywords: additive functions, functional equation, Cauchy's functional equation

# Úvod

Námi zkoumaná Cauchyova funkcionální rovnice[1] je jednou z nejjednodušeji zapsatelných funkcionálních rovnic, což ovšem neznamená, že i její řešení jsou jednoduchá. Už v roce 1821 Louis Augustin Cauchy ukázal, že všechna spojitá řešení této rovnice jsou právě lineární funkce (bez absolutního členu) a rovnice díky němu dostala své jméno. V roce 1905 dále Georg Hamel s využitím axiomu výběru dokázal, že existují i nespojitá řešení, tato řešení už ovšem nejdou jednoduše popsat a mají řadu zajímavých vlastností.

V této práci budeme hledat řešení pouze mezi reálnými funkcemi reálné proměnné. Formulovat tvrzení pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ by někde vyžadovalo techničtější přístup, ideově by však zobecnění většinou nic nového nepřineslo.

V Kapitole 1 je připomenut používaný matematický aparát, případně upřesněno značení některých základních pojmů, pokud se literatura v tomto ohledu různí. Jde o pojmy jako je lineární obal, uzávěr, vnitřek množiny, atd. Stěžejní je důkaz existence báze libovolného lineárního prostoru, který je velmi těsně svázán s Axiomem výběru, resp. jemu ekvivalentním Zornovým lemmatem.

Kapitola 2 již obsahuje první tvrzení o vlastnostech aditivních funkcí, ačkoliv zatím se jedná pouze o řešení spojité. Důkazy vět a tvrzení v této kapitole jsou více či méně založeny na návodech uvedených v [1].

K zajímavějším výsledkům se dospívá až v Kapitole 3, kde už je na základě existence Hamelovy báze odvozena existence nespojité aditivní funkce. Důkaz neměřitelnosti takové funkce je opět vystavěn z idey ze skript [1], zatímco další tvrzení a věty už používají jako hlavní zdroj [2] (hlavně Věta 3.7 a některá další pomocná tvrzení týkající se Baireovy vlasntosti), případně jsou vystavěny jen pomocí postupů již použitých v jiných důkazech (např. Věta 3.12).

Na závěr je v Kapitole 4 uvedeno několik přikladů dalších funkcionálních rovnic, jejichž řešení jsou nějakým způsobem svázána s aditivními funkcemi. Hlavním zdrojem zde použitým je opět kniha [2].

[1] takto bývá v literatuře nazývána celá skupina rovnic, viz. Kapitola 4

# Kapitola 1

# Použité definice a tvrzení

V této kapitole uvedeme definice některých používaných pojmů a také některá související tvrzení, která později využijeme ke studiu aditivních funkcí. Některé definice mají spíše za cíl vymezit přesný význam všeobecně známého objektu, popřípadě zavést značení, používané dále v tomto textu.

**Definice 1.1.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq \mathbb{R}$. Potom říkáme, že funkce $f$ je aditivní na $M$, pokud splňuje na $M$ Cauchyovu funkcionální rovnici, tj.*

$$(\forall x, y \in M)\,(f(x+y) = f(x) + f(y))\,.$$

## 1.1 Algebra

**Definice 1.2.** *Nechť $X$ je lineární prostor nad tělesem $T$. Potom:*

- *Množinu $A \subset X$ nazveme lineárně nezávislou (LN), pokud $A \neq \emptyset$ a pokud pro každou $B \subseteq A$ neprázdnou konečnou a pro libovolný soubor $\{\alpha_b \in T\colon b \in B\}$ platí*

$$\sum_{b \in B} \alpha_b b = 0 \Rightarrow (\alpha_b = 0 \text{ pro všechna } b \in B)\,.$$

- *Lineární obal neprázdné množiny $A \subset X$ definujeme jako*

$$\operatorname{Span}(A) = \left\{ x \in X\colon x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \alpha_i \in T, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- *Množinu $B$ nazveme bází prostoru $X$, pokud $B$ je lineárně nezávislá a* $\mathrm{Span}(B) = X$.

**Tvrzení 1.3.** *Nechť $X$ je lineární prostor nad tělesem $T$ a $A \subset X$ je lineárně nezávislá množina. Potom pro každý prvek $x \in \mathrm{Span}(A)$ existuje jednoznačně určená konečná podmnožina $B \subseteq A$ a ke každému $a \in A$ existuje jednoznačně určený koeficient $\alpha_a \in T, \alpha_a \neq 0 \Leftrightarrow a \in B$ a platí*

$$x = \sum_{a \in A} \alpha_a a = \sum_{b \in B} \alpha_b b.$$

**Poznámka 1.4.** *Suma přes prvky množiny $A$ je korektně definovaná, protože pouze konečně mnoho z koeficientů $\alpha_a$ je různých od nuly.*

*Důkaz.* Volme $x \in \mathrm{Span}(A)$ libovolně. Z definice lineárního obalu musí nutně $x$ být nějakou lineární kombinací prvků z $A$, zbývá tedy dokázat jednoznačnost. Předpokládejme, že existují konečné množiny $C, D \subseteq A$ a odpovídající koeficienty $\gamma_c, \delta_d \in T$ (nenulové na $C$, resp. $D$) tak, že

$$\sum_{c \in C} \gamma_c c = x = \sum_{d \in D} \delta_d d.$$

Potom množina $E = C \cup D \subseteq A$ je konečná a platí

$$\sum_{e \in E} \gamma_e e = x = \sum_{e \in E} \delta_e e.$$

Tedy dostáváme

$$0 = x - x = \sum_{e \in E} \gamma_e e - \sum_{e \in E} \delta_e e = \sum_{e \in E} (\gamma_e - \delta_e)\, e.$$

Ale množina $E$ je lineárně nezávislá, proto musí být $\gamma_e - \delta_e = 0$. Z definice množiny $E$ vyplývá, že pro každé $e \in E$ alespoň jeden z koeficientů $\gamma_e, \delta_e$ musí být nenulový. Protože jsme dostali, že $\gamma_e = \delta_e$, tak jsou nenulové oba a $E = C = D$ a tedy vyjádření prvku $x \in \mathrm{Span}(A)$ jako lineární kombinace prvků z $A$ je jednoznačně určeno. $\square$

**Tvrzení 1.5.** *Nechť $X$ je netriviální lineární prostor nad tělesem $T$. Potom existuje báze $X$.*

*Důkaz.* Potřebujeme ukázat, že existuje lineárně nezávislá množina $N \subset X$ taková, že $\mathrm{Span}(N) = X$. Označme $\mathcal{M} = \{M \subset X\colon M \text{ je LN}\}$. Potom $\mathcal{M}$ je neprázdný systém (pro $x \in X \setminus \{0\}$ je $\{x\} \in \mathcal{M}$) a $(\mathcal{M}, \subseteq)$ je částečně uspořádaná množina. Nechť $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ je libovolný řetězec (lineárně uspořádaná podmnožina). Vezměme $P = \bigcup\{R\colon R \in \mathcal{R}\}$. Ukážeme, že $P \in \mathcal{M}$.
Pro spor předpokládejme, že $P \notin \mathcal{M}$. Existuje tedy konečná lineárně závislá podmnožina množiny $P$, tedy prvky $y_1, \ldots, y_n \in P$ a $r_1, \ldots, r_n \in T \setminus \{0\}$ tak, že $0 = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i$. Protože ale množina $P$ je definována jako sjednocení všech množin řetězce $\mathcal{R}$, tak existují množiny

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \mathcal{R} \text{ tak, že } y_i \in Y_i, i = 1, \ldots, n.$$

$\mathcal{R}$ je ale řetezec, tedy existuje permutace $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ taková, že $Y_{\pi(1)} \subseteq Y_{\pi(2)} \subseteq \cdots \subseteq Y_{\pi(n)}$. Potom ale $y_1, \ldots, y_n \in Y_{\pi(n)}$ a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří lineárně závislou konečnou podmnožinu $Y_{\pi(n)}$, což je spor s $Y_{\pi(n)} \in \mathcal{M}$.
Tedy libovolný řetězec $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ má v $\mathcal{M}$ horní závoru a podle Zornova lemmatu tedy ke každé množině $N_0 \in \mathcal{M}$ existuje množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že $N$ je maximální prvek $(\mathcal{M}, \subseteq)$ a že $N_0 \subseteq N$.

Zvolme tedy nějaké takové $N_0$ a pro odpovídající množinu $N$ nyní ukážeme, že $\mathrm{Span}(N) = X$. Předpokládejme existenci prvku $z \in X \setminus \mathrm{Span}(N)$. Označme $N_z = N \cup \{z\}$. Potom $N_z$ je lineárně nezávislá množina, protože všechny konečné podmnožiny množiny $N_z$ neobsahující $z$ jsou lineárně nezávislé z definice množiny $N$, konečné podmnožiny obsahující $z$ jsou také linéárně nezávislé, jinak by $z$ bylo lineární kombinací zbylých prvků takovéto podmnožiny a tedy $z \in \mathrm{Span}(N)$. Tedy $N_z \in \mathcal{M}$ a $N \subset N_z$, což je spor s maximalitou $N$ v $\mathcal{M}$. Tedy dostáváme $\mathrm{Span}(N) = X$. ☐

**Definice 1.6** (Hamelova báze)**.** *Uvažujme* $\mathbb{R}$ *jako lineární prostor nad tělesem* $\mathbb{Q}$. *Nechť* $B \subset \mathbb{R}$ *je báze* $\mathbb{R}$. *Potom* $B$ *se nazývá Hamelova báze.*

**Značení 1.7.** *Buď* $(X, +)$ *Abelovská grupa,* $A, B \subseteq X, c \in X$. *Potom označme:*

- $A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\}$
- $c + A = \{c + a\colon a \in A\}$

## 1.2 Topologie

**Definice 1.8.** *Nechť* $X$ *je topologický prostor,* $A \subseteq X$. *Potom definujeme:*

- *Uzávěr množiny $A$ jako* $\overline{A} = \bigcap \{F; A \subseteq F, F$ *uzavřená*$\}$ .
- *Vnitřek množiny $A$ jako* $\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{G; G \subseteq A, G$ *otevřená*$\}$ .

**Definice 1.9.** *Nechť $X$ je topologický prostor. Podmnožina $A \subseteq X$ se nazývá:*

- *Řídká, pokud* $\mathrm{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$.
- *Hustá v $B \subseteq X$, pokud $\overline{A} = B$.*
- *Množinou první kategorie, je-li spočetným sjednocením řídkých množin.*
- *Množinou druhé kategorie, pokud není množinou první kategorie.*

**Věta 1.10** (Baire)**.** *Úplný metrický prostor není první kategorie.*

**Definice 1.11.** *Nechť $X$ je topologický prostor, $M \subseteq X$. Potom $M$ má Baireovu vlastnost, pokud existují množiny $G, P, Q \subset X$ tak, že platí*

$$M = (G \cup P) \setminus Q,$$

*kde množina $G$ je otevřená a $P, Q$ jsou první kategorie.*

**Definice 1.12.** *Nechť $X, Y$ jsou topologické prostory, $f\colon X \to Y$ funkce. Potom $f$ má Baireovu vlastnost, pokud $f$ je měřitelná vzhledem k $\sigma$-algebře množin s Baireovou vlastností, tj. pokud $f^{-1}[B]$ má Baireovu vlastnost pro každou borelovskou $B \subseteq Y$.*

**Poznámka 1.13.** *Fakt, že množiny s Baireovou vlastností tvoří $\sigma$-algebru, se dá vcelku snadno ukázat ověřením definice (viz například [2], strana 30-31, THEOREM 1).*

## 1.3 Teorie míry

**Značení 1.14.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je měřitelná. Potom $\lambda(A)$ značí jednorozměrnou Lebesgueovu míru množiny $A$.*

**Věta 1.15** (transformace Lebesgueovy míry při lineárním zobrazení)**.** *Nechť $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineární funkce $l(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{R},$ kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}$. Potom pro každou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ platí*

$$\lambda(l(A)) = \lambda(aA + b) = |a|\,\lambda(A)\,.$$

**Poznámka 1.16.** *Tato věta plyne z Věty o substituci pro Lebesgueův integrál, kde $|a|$ je právě hodnota jakobiánu funkce $l$.*

# Kapitola 2

# Spojité aditivní funkce

## 2.1 Základní vlastnosti

Nyní přejdeme k samotnému tématu práce. Ukážeme některé základní vlastnosti aditivních funkcí, které pak budeme využívat v dalším zkoumání.

**Tvrzení 2.1.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je aditivní funkce na* $\mathbb{R}$. *Potom* $f$ *má tyto vlastnosti:*

*(i)* $\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}\colon f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

*(ii)* $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(-x) = -f(x)$, *speciálně* $f(0) = 0$.

*(iii)* $\forall k \in \mathbb{Z}\colon f(kx) = kf(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

*(iv)* $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\colon f(x/k) = f(x)/k, \quad x \in \mathbb{R}$.

*(v)* $\forall q \in \mathbb{Q}\colon f(qx) = qf(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

*Důkaz.* (i) Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. V indukčním kroku předpokládejme, že (i) platí pro $n = k$, pro $n = k + 1$ tedy dostáváme:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + f\left(x_{k+1}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{k} f\left(x_i\right) + f\left(x_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k+1} f\left(x_i\right).$$

Tvrzení tedy platí i pro $n = k + 1$ a tudíž pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Z vlastnosti (i) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dostáváme, že

$$f(x) = f(x + x - x) = f(x) + f(x) + f(-x) = 2f(x) + f(-x).$$

Odečtením výrazu $2f(x)$ od obou stran vidíme, že $-f(x) = f(-x)$. Funkce $f$ je tedy lichá a pro $x = 0$ je $f(0) = 0$.

(iii) Pomocí vlastnosti (ii) dostáváme $f(kx) = (\operatorname{sgn} k) f(|k|\, x)$. Z téže vlastnosti také plyne tvrzení pro $k = 0$. Pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ využijeme vlastnosti (i). Položíme $n = |k|$ a

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$$

a dostaneme:

$$f(kx) = (\operatorname{sgn} k) f(|k|\, x) = (\operatorname{sgn} k) f\left(\sum\nolimits_{i=1}^{|k|} x\right) = (\operatorname{sgn} k) \sum\nolimits_{i=1}^{|k|} f(x) =$$

$$= (\operatorname{sgn} k)\, |k|\, f(x) = kf(x).$$

(iv) Z bodu (iii) dostáváme

$$\frac{f(x)}{k} = \frac{f\left(k\left(\frac{x}{k}\right)\right)}{k} = \frac{kf\left(\frac{x}{k}\right)}{k} = f\left(\frac{x}{k}\right).$$

(v) Volme $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ tak, že $q = a/b$. Potom s využitím bodů (iii) a (iv) dostáváme:

$$f(qx) = f\left(\frac{a}{b}x\right) = f\left(\frac{ax}{b}\right) = \frac{f(ax)}{b} = \frac{af(x)}{b} = \frac{a}{b} f(x) = qf(x).$$

$\square$

**Tvrzení 2.2.** *Nechť $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce aditivní na $\mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g, rf, f - g$ jsou aditivní na $\mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) =$$

$$= (f + g)(x) + (f + g)(y).$$

$$(rf)(x + y) = r(f(x + y)) = r(f(x)) + r(f(y)) = (rf)(x) + (rf)(y)$$

Dosazením $r = -1$ dostáváme, že funkce $-g$ je aditivní, potom $f - g = f + (-g)$ je součet dvou aditivních funkcí a ten je aditivní podle předchozího. $\square$

**Tvrzení 2.3.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je aditivní na $\mathbb{R}$. Potom existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = ax, x \in \mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Nechť $f$ je funkce splňující předpoklady tvrzení. Označme $a = f(1)$. Pokud je $x \in \mathbb{Q}$, pak podle Tvrzení 2.1, části (v) platí, že

$$f(x) = f(1 \cdot x) = xf(1) = ax.$$

Nechť je tedy $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zvolme libovolně posloupnost racionálních čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Protože racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$, taková posloupnost existuje. Potom

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} aq_n = a \lim_{n\to\infty} q_n = ax,$$

což musí být nutně rovno hodnotě $f(x)$ z Heineho definice spojitosti. □

## 2.2 Spojitost — ekvivalentní podmínky

Nyní již víme, že všechny spojité funkce aditivní na $\mathbb{R}$ jsou nutně lineární. Otázkou zůstává, zda pro spojitost řešení nestačí nějaký slabší předpoklad, než je linearita. V této části proto ukážeme další ekvivalentní podmínky spojitosti aditivních funkcí. Nejprve se ale podívejme na několik pomocných tvrzení:

**Lemma 2.4.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivní funkce na $\mathbb{R}$ a nechť existují $a, b \in (0, \infty), a < b$ tak, že $f$ je shora omezená na $(a, b)$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in (0, \infty)$ je $f(x) \leq cx$ a pro všechna $x \in (-\infty, 0)$ je $f(x) \geq cx$.*

*Důkaz.* Položme $M_0 = \sup\{f(x)\colon x \in (a, b)\}$. Z omezenosti funkce $f$ shora na intervalu $(a, b)$ je $M_0 < \infty$. Označme $M = \max\{0, M_0\}$. Nejdříve ukážeme, že pro $x \in (0, \infty)$ je $f(x) \leq Mx/b$. Pro spor předpokládejme, že existuje $y \in (0, \infty)$ takové, že $f(y) = L > My/b$. Pokud $M \neq 0$, pak obě strany nerovnosti jsou kladné a platí $1/L < b/My$, z čehož dostáváme přenásobením nezáporným číslem $M$

$$\frac{M}{L} < \frac{b}{y}. \tag{2.1}$$

Pro $M = 0$ platí (2.1) triviálně. Zároveň z $a < b$ plyne

$$\frac{a}{y} < \frac{b}{y}. \tag{2.2}$$

Volme nyní $q \in \mathbb{Q} \cap (\max\{M/L, a/y\}, b/y)$. Z (2.1) a (2.2) vyplývá, že interval $(\max\{M/L, a/y\}, b/y)$ je neprázdný, a protože je otevřený, lze volit takové $q$ racionální. Potom platí:

$$a = \frac{a}{y}y < qy < \frac{b}{y}y = b \text{ a tedy } qy \in (a, b).$$

Zároveň ale

$$f(qy) = qf(y) > \frac{M}{L}f(y) = \frac{M}{L}L = M,$$

což je spor s tím, že $f$ je na $(a, b)$ menší než M. Tedy

$$f(x) \leq \frac{M}{b}x \text{ pro } x \in (0, \infty).$$

Za využití vlastnosti (ii) z Tvrzení 2.1 pro $x \in (-\infty, 0)$ dostáváme

$$-f(x) = f(-x) \leq \frac{M}{b}(-x) = -\frac{M}{b}x.$$

Po přenásobení obou stran nerovnosti $-1$ tedy vidíme, že

$$f(x) \geq \frac{M}{b}x.$$

Našli jsme tedy hledanou konstantu $c = M/b$. □

**Lemma 2.5.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je aditivní funkce na* $\mathbb{R}$ *a nechť existují* $a, b \in (0, \infty), a < b$ *tak, že* $f$ *je shora omezená na* $(a, b)$. *Potom* $f$ *je lipschitzovská na* $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že $f$ je shora omezená nejen na intervalu $(a, b)$, ale i na intervalu $J = (-a/2, -a/4) \subset (-\infty, 0)$. Pro spor předpokládejme, že $f$ na $J$ není shora omezená. Tedy

$$(\forall R \in \mathbb{R})\, (\exists x \in J)\, (f(x) > R)\, .$$

Volme bod $z \in (a, b)$ libovolně. Funkce $f$ splňuje předpoklady Lemmatu 2.4, existuje tedy konstanta $c_1 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $z \in (0, \infty)$ je $f(z) \leq c_1 z$. Označme $K = c_1 z - f(z)$. Zřejmě $K \geq 0$. Díky předpokladu neomezenosti $f$ na $J$ shora můžeme zvolit další bod $w \in J$ tak, aby $f(w) > c_1 w + K + 1$. Platí

$$a < z < b,$$

$$-\frac{a}{2} < w < -\frac{a}{4}.$$

Součtem obou nerovností dostáváme

$$a/2 < z + w < b - a/4 \text{ a tedy } z + w \in (a/2, b - a/4) \subset (0, \infty).$$

Dále $f(z+w) = f(z)+f(w) > c_1 z - K + c_1 w + K + 1 = c_1(z+w)+1$. Zároveň ale $c_1$ je omezující konstanta z Lemmatu 2.4 a dostáváme $f(z+w) \leq c_1(z+w)$. Odtud plyne, že $c_1(z+w)+1 < f(z+w) \leq c_1(z+w)$, což je spor s předpokladem, že $f$ není na $J$ shora omezená.

Tedy $f$ je shora omezená na intervalu $(-a/2, -a/4)$. Funkce $g(x) = f(-x)$ tudíž splňuje předpoklady Lemmatu 2.4 na intervalu $(a/4, a/2)$ a tedy existuje konstanta $c_2 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in (0, \infty)$ je $g(x) \leq c_2 x$ a pro všechna $x \in (-\infty, 0)$ je $g(x) \geq c_2 x$. Pro funkci $f$ proto platí, že pro všechna $x \in (-\infty, 0)$ je $f(x) \leq -c_2 x$ a pro všechna $x \in (0, \infty)$ je $f(x) \geq -c_2 x$. Označíme-li $c = \max(|c_1|, |c_2|)$, potom z předchozího pro všechna $y \in \mathbb{R}$ vyplývá, že

$$|f(y)| \leq c\,|y|.$$

Dostáváme tedy pro všechna $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, že

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq c\,|y_1 - y_2|,$$

což znamená, že funkce $f$ je $c$-lipschitzovská na $\mathbb{R}$. □

A nyní se už můžeme vrhnout na slibované ekvivalentní podmínky spojitosti aditivní funkce.

**Věta 2.6.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivní funkce na $\mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) f je lipschitzovská na $\mathbb{R}$,*

*(ii) f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$,*

*(iii) f je spojitá na $\mathbb{R}$,*

*(iv) f je spojitá v alespoň jednom bodě $\mathbb{R}$,*

*(v) f je omezená na nějakém otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$,*

*(vi) f je zdola omezená na nějakém otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$,*

*(vii) f je shora omezená na nějakém otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$,*

*(viii) existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = ax$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme implikaci $(i) \Rightarrow (ii)$. Víme, že $f$ je lipschitzovská na $\mathbb{R}$, tj.

$$(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)\, (\forall x, y \in \mathbb{R})\, (|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)\,.$$

Funkce f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall x, y \in \mathbb{R})\, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Stačí nám tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta = \varepsilon/K$. Potom dostáváme

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \leq K\delta = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

a podmínka stejnoměrné spojitosti je splněna pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Implikace $(ii) \Rightarrow (iii)$ a $(iii) \Rightarrow (iv)$ plynou jednoduše z definice.

Předpokládejme, že $f$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Podle definice spojitosti v bodě platí

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall x \in \mathbb{R})\, (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Fixujme tedy $\varepsilon > 0$ a pro odpovídající $\delta$ uvažujme otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$. Potom pro všechna $x \in (a - \delta, a + \delta)$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ a tedy

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon,$$

což znamená, že $f$ je na otevřeném intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ omezená. Dokázali jsme tedy implikaci $(iv) \Rightarrow (v)$.

Je-li $f$ omezená na nějakém otevřeném intervalu, je na tomto intervalu omezená i zdola, tedy implikace $(v) \Rightarrow (vi)$ platí.

Předpokládejme nyní, že $f$ je zdola omezená na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tj.

$$(\exists M \in \mathbb{R})\, (\forall x \in (a, b))\, (f(x) > M)\,.$$

Volme libovolně $y \in (-b, -a)$. Potom $-y \in (a, b)$ a pro $y$ s využitím vlastnosti (ii) z Tvrzení 2.1 dostáváme $f(y) = -f(-y) < -M$. Protože ale $y$ bylo voleno libovolně, platí nerovnost pro všechna $y \in (-b, -a)$, tudíž $f$ je na otevřeném intervalu $(-b, -a)$ omezená shora a implikace $(vi) \Rightarrow (vii)$ platí.

V důkazu $(vii) \Rightarrow (i)$ využijeme již dokázaného Lemmatu 2.5. Pro splnění předpokladů tohoto Lemmatu potřebujeme funkci omezenou shora na nějakém otevřeném podintervalu kladné reálné poloosy.
Nechť $J = (c, d)$ je otevřený interval, na kterém je $f$ shora omezená.
Pokud $J \cap (0, \infty) \neq \emptyset$, potom lze volit otevřený interval $K \subset J \cap (0, \infty)$. Zřejmě $f$ je na intervalu $K$ také shora omezená. Můžeme tedy použít Lemma 2.5 a funkce $f$ je tedy lipschitzovská na $\mathbb{R}$.
Pokud $J \cap (0, \infty) = \emptyset$, tj. $J \subset (-\infty, 0)$, přejdeme k funkci $g(x) = f(-x)$, která je podle Tvrzení 2.2 také aditivní na $\mathbb{R}$ a zároveň $g$ je zřejmě shora omezená na intervalu $(-d, -c) \subset (0, \infty)$. Opět využijeme Lemma 2.5 a dostáváme lipschitzovskost funkce $g$ na $\mathbb{R}$, tj.

$$(\exists C \in (0, \infty)) \, (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}) \, (|g(z_1) - g(z_2)| \leq C \, |z_1 - z_2|) \, .$$

Ale z definice funkce $g$ (a s využitím vlastnosti (ii) z Tvrzení 2.1) dostáváme pro libovolné $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| = |-f(z_1) + f(z_2)| = |f(-z_1) - f(-z_2)| = |g(z_1) - g(z_2)| \leq \\ \leq C \, |z_1 - z_2| \, . \end{aligned}$$

Což znamená, že i funkce $f$ je lipschitzovská na $\mathbb{R}$.

Implikaci $(iii) \Rightarrow (viii)$ jsme již dokázáli v Tvrzení 2.3 a protože zřejmě každá funkce tvaru $f(x) = ax$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ je spojitá, platí i implikace $(viii) \Rightarrow (iii)$. $\square$

# Kapitola 3

# Nespojité aditivní funkce

V následující kapitole dokážeme existenci nespojitých aditivních funkcí (na $\mathbb{R}$) a budeme studovat vlastnosti těchto funkcí.

## 3.1 Existence

**Věta 3.1.** *Nechť $H$ je Hamelova báze a nechť $g\colon H \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom existuje právě jedna funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivní na $\mathbb{R}$ taková, že $f \restriction H = g$.*

*Důkaz.* Volme $x \in \mathbb{R}$. Potom podle Tvrzení 1.3 existuje jednoznačně určená konečná podmnožina $B_x \subseteq H$ a ke každému $h \in H$ existuje jednoznačně určený koeficient $\alpha_h \in \mathbb{Q}, \alpha_h \neq 0 \Leftrightarrow h \in B_x$ tak, že

$$x = \sum_{b \in B_x} \alpha_b b.$$

Definujme nyní hodnotu funkce $f$ v bodě $x$ jako

$$f(x) = \sum_{b \in B_x} \alpha_b g(b).$$

Funkce $f$ je korektně definovaná díky jednoznačnosti množiny $B_x$ a koeficientů $\alpha_b$. Ukážeme, že pokud takto definujeme funkci $f$ ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, potom $f$ je aditivní. Volme proto libovolně $u, v \in \mathbb{R}$, z Tvrzení 1.3 dostaneme odpovídající množiny $B_u$, resp. $B_v$ a koeficienty $\alpha_b$, resp. $\beta_c$. Počítejme:

$$u + v = \sum_{b \in B_u} \alpha_b b + \sum_{c \in B_v} \beta_c c = \sum_{d \in B_u \cup B_v} (\alpha_d + \beta_d)\, d.$$

Pokud $B_{u+v}$ je množina odpovídající prvku $u+v$ z Tvrzení 1.3, pak z jednoznačnosti musí nutně platit, že $B_{u+v} \subseteq B_u \cup B_v$ a pokud $\gamma_d, d \in \mathbb{Q}$ jsou odpovídající koeficienty pro prvek $u+v$ z téhož tvrzení, pak taktéž z jednoznačnosti musí být $\gamma_d = \alpha_d + \beta_d$. Tudíž platí

$$\begin{aligned} f(u) + f(v) &= \sum_{b \in B_u} \alpha_b g(b) + \sum_{c \in B_v} \beta_c g(c) = \sum_{d \in B_u \cup B_v} (\alpha_d + \beta_d) g(d) = \\ &= \sum_{d \in B_u \cup B_v} \gamma_d g(d) = f(u+v) \end{aligned}$$

dle konstrukce $f$. Tedy námi definovaná funkce $f$ je hledaným aditivním rozšířením $g$. Navíc jednoznačnost již máme zajištěnou díky Tvrzení 2.1 (kombinaci bodu (i) a (v)) a jednoznačnosti rozvoje každého prvku z $\mathbb{R}$ z Tvrzení 1.3.

$\square$

**Věta 3.2.** *Existuje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivní funkce na $\mathbb{R}$, která je nespojitá.*

*Důkaz.* Buď $H$ Hamelova báze. Volme libovolně $h_0 \in H$. Položme $f(h_0) = 1$ a $f(h) = 0$ pro $h \in H \setminus \{h_0\}$. Díky Větě 3.1 můžeme tuto funkci jednoznačně aditivně rozšířit na celou reálnou osu. Pokud by výsledná funkce $f$ měla být spojitá, musela by nutně podle Věty 2.6 mít tvar $f(x) = ax$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$. Pro všechna $h \in H \setminus \{h_0\}$ víme, že $f(h) = 0$, tedy muselo by být $a = 0$. Což ale zřejmě neplatí, protože pro námi zvolené $h_0 \neq 0$ je $f(h_0) \neq 0$. Zkonstruovaná funkce je tedy nespojitá. $\square$

## 3.2 Měřitelnost

**Věta 3.3.** *Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nespojitá funkce aditivní na $\mathbb{R}$. Potom $f$ je lebesgueovsky neměřitelná.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že $f$ je nespojitá a měřitelná. Protože $f$ je nespojitá, je podle Věty 2.6 neomezená shora na libovolném otevřeném intervalu, tedy například na intervalu $(-1, 1)$. Díky neomezenosti $f$ můžeme nyní zkonstruovat posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-1, 1)$ tak, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $f(x_{n+1}) \geq \max(n, f(x_n))$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $d > 0$ označme

$$M_n^g(d) = \{x \in [x_n - d, x_n + d], f(x) \geq f(x_n)\},$$

$$M_n^l(d) = \{x \in [x_n - d, x_n + d], f(x) \leq f(x_n)\}.$$

Fixujme libovolně $m \in \mathbb{N}, d > 0$. Ukážeme, že množiny $M_m^g(d)$ a $M_m^l(d)$ jsou souměrné podle bodu $x_m$, tj. že platí $y \in M_m^g(d) \Leftrightarrow 2x_m - y \in M_m^l(d)$. Zřejmě $y \in [x_m - d, x_m + d] \Leftrightarrow 2x_m - y \in [x_m - d, x_m + d]$. A pro $y \in M_m^g(d)$, tj. $f(y) \geq f(x_m)$ s využitím aditivity dostáváme

$$f(2x_m - y) = 2f(x_m) - f(y) \leq f(x_m),$$

tedy $2x_m - y \in M_m^l(d)$. Opačná impikace: pro $f(2x_m - y) \in M_m^l(d)$, tj. $f(2x_m - y) \leq f(x_m)$ analogicky platí

$$f(y) = f(2x_m - (2x_m - y)) = 2f(x_m) - f(2x_m - y) \geq f(x_m),$$

tedy $y \in M_m^g(d)$. Protože

$$M_m^g(d) = f^{-1}[f(x_m), +\infty) \cap [x_m - d, x_m + d],$$

$$M_m^l(d) = f^{-1}(-\infty, f(x_m)] \cap [x_m - d, x_m + d],$$

tak množiny $M_m^g(d)$ a $M_m^l(d)$ jsou podle předpokladu měřitelnosti funkce $f$ měřitelné. Protože jsme již dokázali, že množiny $M_m^g(d)$ a $M_m^l(d)$ jsou souměrné, tak díky Větě 1.15 platí

$$\lambda(M_m^g(d)) = \lambda(2x_m - M_m^g(d)) = \lambda\left(M_m^l(d)\right).$$

Dále $M_m^g(d) \cup M_m^l(d) = [x_m - d, x_m + d]$, tedy díky subaditivitě (Leb.) míry je

$$\begin{aligned} 2d = \lambda([x_m - d, x_m + d]) = \lambda\left(M_m^g(d) \cup M_m^l(d)\right) \leq \\ \leq \lambda(M_m^g(d)) + \lambda\left(M_m^l(d)\right) = 2\lambda(M_m^g(d)). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že $\lambda(M_m^g(d)) = \lambda\left(M_m^l(d)\right) \geq d$.
Nyní označme $N_n = M_n^g(3) \cap [-2, 2]$. Zřejmě $\lambda(N_n) \leq \lambda([-2, 2]) = 4$. Zároveň

$$\lambda(N_n) = \lambda(M_n^g(3) \cap [-2, 2]) \geq \lambda(M_n^g(1) \cap [-2, 2]) = \lambda(M_n^g(1)) \geq 1,$$

tj. $4 \geq \lambda(N_n) \geq 1$.
Pro každý prvek $x \in M_n^g$ platí, že $x \in M_i^g$ pro všechna $i \in \mathbb{N}, i \leq n$, protože

$$f(x) \geq f(x_n) \geq f(x_{n-1}) \geq \cdots \geq f(x_1).$$

Z toho plyne, že $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \cdots$.
Můžeme tedy označit $O_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_k$. Pro posloupnost množin $N_n$ z vlastností (Lebesgueovy) míry platí, že

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda(N_n) = \lambda(O_\infty).$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $4 \geq \lambda(N_n) \geq 1$, tak i $\lambda(O_\infty) \geq 1$. Tudíž množina $O_\infty$ je kladné míry a musí nutně obsahovat nějaké body. Díky konstrukci posloupnosti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ale víme, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Z toho vyplývá, že množina $O_\infty = \{x \in [-2,2], f(x) = +\infty\}$ je prázdná, což je spor s předpokladem měřitelnosti funkce $f$. $\square$

## 3.3 Topologické vlastnosti

**Věta 3.4.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nespojitá funkce aditivní na $\mathbb{R}$. Potom graf funkce $f$ (množina $\mathrm{Graf}\, f = \{[x, f(x)] : x \in \mathbb{R}\}$ ) je hustý v $\mathbb{R}^2$.*

*Důkaz.* Zvolme libovolně $-\infty < a < b < \infty, -\infty < c < d < \infty$. Stačí ukázat, že $\mathrm{Graf}\, f \cap ((a,b) \times (c,d)) \neq \emptyset$. Podle Věty 2.6 víme, že $f$ není na žádném otevřeném intervalu shora ani zdola omezená. Speciálně není zdola omezená na intervalu $(a,b)$. Můžeme tedy zvolit bod $a_1 \in (a,b)$ tak, aby $f(a_1) < c$. Také není shora omezená na intervalu $(a_1,b)$, zvolíme tedy $a_2 \in (a_1,b)$ tak, aby $f(a_2) > d$. Zřejmě platí $f(a_1) < c < d < f(a_2)$. Z této nerovnosti dále dostáváme, že

$$0 < \frac{c - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)} < \frac{d - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)} < 1.$$

Můžeme tedy vzít $p \in \mathbb{Q}$ tak, aby

$$\frac{c - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)} < p < \frac{d - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)}.$$

Označme $z = (1-p)a_1 + pa_2 = p(a_2 - a_1) + a_1$. Zvolili jsme $a_1, a_2$ tak, aby $a_1 < a_2$, dostáváme tedy:

$$z = p(a_2 - a_1) + a_1 < 1 \cdot (a_2 - a_1) + a_1 = a_2 < b,$$

$$z = p(a_2 - a_1) + a_1 > 0 \cdot (a_2 - a_1) + a_1 = a_1 > a,$$

$$f(z) = f(p(a_2 - a_1) + a_1) = p(f(a_2) - f(a_1)) + f(a_1).$$

Platí:

$$f(z) < \frac{d - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)}(f(a_2) - f(a_1)) + f(a_1) = d - f(a_1) + f(a_1) = d,$$

$$f(z) > \frac{c - f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)}(f(a_2) - f(a_1)) + f(a_1) = c - f(a_1) + f(a_1) = c.$$

Takže $[z, f(z)] \in (a,b) \times (c,d)$ a množina $\mathrm{Graf}\, f$ je tedy hustá v $\mathbb{R}^2$. $\square$

**Lemma 3.5.** *Nechť* $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je lineární funkce* $l(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{R},$ *kde* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ b \in \mathbb{R}$*. Potom pro každou* $A \subset \mathbb{R}$ *množinu první kategorie je množina* $l\,(A) = aA + b$ *první kategorie.*

*Důkaz.* Množinu první kategorie lze podle definice (1.9) napsat jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin. Nechť tedy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, kde pro všechny $n \in \mathbb{N}$ je $T_n$ řídká množina. Volme $i \in \mathbb{N}$ libovolně. K důkazu lemmatu potom stačí ukázat, že $l(T_i)$ je také řídká, tj. dle definice $\operatorname{Int}\left(\overline{l(T_i)}\right) = \emptyset$.
Funkce $l$ je bijekce, a proto k ní existuje inverzní funkce, která má zřejmě tvar $l^{-1}\,(x) = (x - b)\,/a$. Zároveň jsou obě funkce spojité, tedy v kontextu topologických prostorů pro ně platí, že vzory otevřených množin jsou otevřené množiny (duálně: vzory uzavřených množin jsou uzavřené množiny).
Pro potřeby důkazu využijeme následujících faktů:

(i) Pro každou $B \subset \mathbb{R}$ platí $\overline{l\,(B)} \subseteq l\left(\overline{B}\right)$.
Množina $\overline{l\,(B)}$ je definována jako průnik všech uzavřených množin obsahujících $l\,(B)$. Množina $l\left(\overline{B}\right)$ je ale vzorem uzavřené množiny $\overline{B}$ pro spojitou funkci $l^{-1}$, je tedy uzavřená a jistě je $l\left(\overline{B}\right) \supseteq l\,(B)$, takže tvrzení platí.

(ii) Pro každou $C \subset \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Int}\,(l\,(C)) \subseteq l\,(\operatorname{Int}\,(C))$.
Volme $x \in \operatorname{Int}\,(l\,(C))$ libovolně. Pak $l^{-1}\,(x) \in l^{-1}\,(\operatorname{Int}\,(l\,(C)))$ a z vlastnosti vnitřku množiny $\operatorname{Int}\,(l\,(C)) \subseteq l\,(C)$ dostáváme
$$l^{-1}\,(x) \in l^{-1}\,(\operatorname{Int}\,(l\,(C))) \subseteq l^{-1}\,(l\,(C)) = C.$$
Ale množina $l^{-1}\,(\operatorname{Int}\,(l\,(C)))$ je otevřená (vzor otevřené pro funkci $l$) a tudíž dokonce $l^{-1}\,(x) \in l^{-1}\,(\operatorname{Int}\,(l\,(C))) \subseteq \operatorname{Int}\,(C)\,$. Takže $x \in l\,(\operatorname{Int}\,(C))$ a tvrzení platí.

S využitím práve dokázaných faktů dostáváme:
$$\operatorname{Int}\left(\overline{l(T_i)}\right) \overset{(i)}{\subseteq} \operatorname{Int}\left(l\left(\overline{T_i}\right)\right) \overset{(ii)}{\subseteq} l\left(\operatorname{Int}\left(\overline{T_i}\right)\right) = l\,(\emptyset) = \emptyset.$$
Množiny $l\,(T_i)$ jsou tedy řídké pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a důkaz je tedy hotov. $\square$

Nyní si připravíme několik pomocných tvrzení, které pak využijeme pro zkoumání Baireovy vlastnosti u nespojitých aditivních funkcí.

**Lemma 3.6.** *Každý neprázdný otevřený interval* $I \subset \mathbb{R}$ *je druhé kategorie.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že existuje otevřený interval $\emptyset \neq J \subset \mathbb{R}$, který je první kategorie. Potom podle Lemmatu 3.5 je pro všechna $q \in \mathbb{Q}$ i množina $q + J$ první kategorie. Zřejmě ale platí, že

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in Q} (q + J)\,.$$

Protože spočetné sjednocení množin první kategorie je zřejmě také první kategorie, dostáváme spor s tím, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor a podle Věty 1.10 musí být druhé kategorie.

□

Následující věta je jistou analogií Steinhausovy věty v topologickém kontextu.

**Věta 3.7** (S. Piccard)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je množina druhé kategorie s Baireovou vlastností. Potom $A + A$ obsahuje otevřený interval.*

*Důkaz.* Množina $A$ má Baireovu vlastnost, existují tedy množiny $G, P, R \subset \mathbb{R}$ tak, že množina $G$ je otevřená a $P, R,$ jsou množiny první kategorie a platí

$$A = (G \cup P) \setminus R.$$

Protože $A$ je druhé kategorie, musí být $G$ neprázdná. V opačném případě by totiž platilo $A = (\emptyset \cup P) \setminus R \subset P$, tedy $A$ by musela být první kategorie. Pevně zvolme $g \in G$ a zaveďme následující označení:

$$\begin{aligned} A_{sh} &= -g + A, \\ G_{sh} &= -g + G, \\ G_t &= G_{sh} \cap (t - G_{sh}) \text{ pro } t \in G_{sh}. \end{aligned}$$

Z De Morganových pravidel dostáváme, že

$$G_t \subseteq (G_t \setminus A_{sh}) \cup (G_t \setminus (t - A_{sh})) \cup (A_{sh} \cap (t - A_{sh}))\,. \tag{3.1}$$

Množina

$$\begin{aligned} G_t \setminus A_{sh} = (G_{sh} \cap (t - G_{sh})) \setminus A_{sh} \subset G_{sh} \setminus A_{sh} = \\ = (-g + G) \setminus (-g + A) = -g + (G \setminus A) \subseteq \\ \subseteq -g + R \end{aligned}$$

je podle Lemmatu 3.5 první kategorie, protože je podmnožinou množiny $-g+R$ (množina $R$ je první kategorie). Dále množina

$$\begin{aligned} G_t \setminus (t - A_{sh}) &= (G_{sh} \cap (t - G_{sh})) \setminus (t - A_{sh}) \subset (t - G_{sh}) \setminus (t - A_{sh}) = \\ &= t - (G_{sh} \setminus A_{sh}) = t - (-g + G \setminus A) \subset \\ &\subset t + g - R \end{aligned}$$

je zřejmě také první kategorie. Nyní se podívejme na množinu $G_t$. Protože $g \in G$, tak $0 \in G_{sh}$. Tedy množina $G_t$ je neprázdná (obsahuje zřejmě $t$) a otevřená (je průnikem dvou otevřených). Obsahuje tedy otevřený interval a proto je podle Lemmatu 3.6 množinou druhé kategorie. Zároveň ale z (3.1) vidíme, že množina $G_t$ je podmnožinou sjednocení dvou množin první kategorie a množiny $A_{sh} \cap (t - A_{sh})$. Nutně tedy musí být $A_{sh} \cap (t - A_{sh})$ množinou druhé kategorie a tudíž musí být mimo jiné neprázdná. Pro všechna $t \in G_{sh}$ tedy existuje nějaké $s \in A_{sh} \cap (t - A_{sh})$. Zřejmě $s, t - s \in A_{sh}$ a $s + (t - s) = t \in G_{sh}$. Tedy $G_{sh} \subset A_{sh} + A_{sh}$ a přechodem zpět k původním množinám dostáváme $-g + G \subset -g + A - g + A$ a tedy $g + G \subset A + A$. Našli jsme tedy otevřenou neprázdnou podmnožinu $A+A$, tedy $A+A$ musí nutně obsahovat nějaký neprázdný otevřený interval. $\square$

**Definice 3.8.** *Nechť $X$ je topologický prostor. Řekneme, že množina $A \subset X$ má vlastnost ($\bigstar$), pokud pro každou $B \subseteq A$ s Baireovou vlastností platí, že $B$ je první kategorie.*

**Lemma 3.9.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce aditivní na $\mathbb{R}$, nechť $T \subset \mathbb{R}$ a nechť $f$ je omezená na $T$. Pokud $T$ obsahuje množinu druhé kategorie s Baireovou vlastností, potom $f$ je spojitá na $\mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Volme $A \subseteq T$ množinu druhé kategorie s Baireovou vlastností. Podle Věty 3.7 platí: existuje otevřený interval $I \subset A + A \subseteq T + T$.
Volme $x \in I$ libovolně. Protože $I \subset T+T$, existují $t_1, t_2 \in T$ tak, že $x = t_1 + t_2$. Z omezenosti $f$ na $T$ dostáváme:

$$(\exists M > 0)\,(\forall t \in T)\,(|f(t)| \leq M)\,.$$

Pro bod $x$ tudíž platí

$$|f(x)| = |f(t_1 + t_2)| = |f(t_1) + f(t_2)| \leq |f(t_1)| + |f(t_2)| \leq 2M.$$

Bod $x \in I$ jsme volili libovolně, tudíž $f$ je omezená na otevřeném intervalu $I$ a z Věty 2.6 plyne, že $f$ je spojitá na $\mathbb{R}$. $\square$

**Důsledek 3.10.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je nespojitá funkce aditivní na* $\mathbb{R}$ *a nechť* $-\infty < a < b < \infty$*. Potom množina* $f^{-1}[a,b]$ *má vlastnosti* (★).

*Důkaz.* Označme $V = f^{-1}[a,b]$. Pro spor předpokládejme, že $V$ nemá vlastnost (★), tj. existuje $U \subseteq V$ množina druhé kategorie s Baireovou vlastností. Funkce $f$ je ale na množině $V$ omezená shora konstantou $b$ a zdola $a$. Množina $V$ tedy splňuje předpoklady Lemmatu 3.9, tudíž $f$ musí být spojitá a to je spor. □

**Věta 3.11.** *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je nespojitá funkce aditivní na* $\mathbb{R}$*. Potom* $f$ *nemá Baireovu vlastnost.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že $f$ má Baireovu vlastnost. Tedy speciálně množiny $D_k = f^{-1}[k,k+1]\,, k \in \mathbb{Z}$ mají Baireovu vlastnost. Podle Důsledku 3.10 mají množiny $D_k$ vlastnost (★). To ale znamená, že $D_k$ jsou první kategorie. Zároveň ale

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}[k,k+1] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R},$$

tudíž dostáváme úplný metrický prostor $\mathbb{R}$ jako sjednocení spočetně mnoha množin první kategorie (které je první kategorie), což podle Věty 1.10 nelze. □

## 3.4 Další vlastnosti

Nyní se podíváme, jak bude vypadat funkce, která bude aditivní na $\mathbb{R}$ až na nějakou „malou“ množinu (ve smyslu topologie, resp. teorie míry).

**Věta 3.12.** *Nechť* $N \subset \mathbb{R}$ *je množina nulové Lebesgueovy míry, resp. první kategorie a nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkce aditivní na* $\mathbb{R} \setminus N$*. Potom* $f$ *je aditivní na* $\mathbb{R}$.

*Důkaz.* Platí:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus N)\,(f(x+y) = f(x) + f(y))\,.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ označme

$$M_x = \{x - y\colon y \in N\}\,, \qquad H_x = \mathbb{R} \setminus (N \cup M_x)\,.$$

Potom pro libovolné $z \in \mathbb{R}$ je množina $M_z$ zřejmě nulové míry díky Větě 1.15, resp. první kategorie podle Lemmatu 3.5 a tedy $N \cup M_z$ je také množina nulové míry, resp. první kategorie. To tedy znamená, že její doplněk $H_z$ je kladné míry, resp. druhé kategorie a tedy neprázdný. Pro $u \in H_z$ zřejmě platí $u \notin N, u \notin M_z$. Potom $x - u \notin M_z$ a pro $v = z - u$ je $v \notin N$ (jinak by $u = z - v \in M_x$). Tedy platí

$$u \in H_z \Rightarrow u, z - u \notin N. \tag{3.2}$$

Ověříme platnost Cauchyovy funkcionální rovnice pro libovolnou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$. Volme

$$c \in H_x \text{ a } d \in (H_y \cap H_{c+y}) \setminus (-x + c + N) .$$

To můžeme, protože množina

$$\begin{aligned} &(H_y \cap H_{c+y}) \setminus (-x + c + N) = \\ &= ((\mathbb{R} \setminus (N \cup M_y)) \cap (\mathbb{R} \setminus (N \cup M_{c+y}))) \setminus (-x + c + N) = \\ &= (\mathbb{R} \setminus (N \cup M_y \cup N \cup M_{c+y})) \setminus (-x + c + N) = \\ &= (\mathbb{R} \setminus (N \cup M_y \cup M_{c+y} \cup (-x + c + N))) \end{aligned}$$

je určitě neprázdná, neboť je doplňkem konečného sjednocení množin nulové míry, resp. první kategorie (pro množinu $-x + c + N$ opět využijeme Větu 1.15, resp. Lemma 3.5) v prostoru s kladnou mírou, resp. druhé kategorie. Z vlastnosti 3.2 vyplývá:

- $c \in H_x$, tedy $c, x - c \notin N$,
- $d \in H_y$, tedy $d, y - d \notin N$,
- $d \in H_{c+y}$, tedy $d, c + y - d \notin N$,
- $d \notin -x + c + N$, tedy $x - c + d \notin N$.

Pro $f(x)$ a $f(y)$ tudíž dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(c) + f(x - c) + f(d) + f(y - d) = \\ &= f(x - c + d) + f(c + y - d) = \\ &= f(x + y) . \end{aligned}$$

Funkce $f$ tedy splňuje Cauchyovu funkcionální rovnici pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, tj. je aditivní na $\mathbb{R}$. $\square$

# Kapitola 4

# Další funkcionální rovnice

## 4.1 Cauchyovy rovnice

Kromě rovnice uvedené v Definici 1.1 se jako Cauchovy funkcionální rovnice[1] označují také rovnice

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)\,, \tag{4.1}$$
$$f(xy) = f(x) + f(y)\,, \tag{4.2}$$
$$f(xy) = f(x)\, f(y)\,. \tag{4.3}$$

V kontextu této práce budeme uvažovat řešení těchto rovnic pouze jako funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukážeme, že řešení se dá za určitých podmínek snadno charakterizovat pomocí pojmu aditivní funkce. Rovnicí (4.3) se v tomto textu nebudeme dále zabývat.

**Poznámka 4.1.** *Funkce $f \equiv 0$ zřejmě řeší rovnici* (4.1).

**Věta 4.2.** *Necht' $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $f \not\equiv 0$. Potom funkce $f$ splňuje rovnici* (4.1) *pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, právě když funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje $f = \exp g$, je aditivní na $\mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Volme $x \in \mathbb{R}$ libovolně, $y = 0$ a dosad'me do rovnice (4.1):

$$f(x) = f(x)\, f(0)\,.$$

To je splněno, pokud $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, nebo $f(0) = 1$. Případ $f \equiv 0$ máme ale vyloučen v předpokladech věty.

[1] převzato z [2], strana 307

Pokud $f(0) = 1$, dostáváme pro libovolné $x \in \mathbb{R}$

$$1 = f(0) = f\left(x + (-x)\right) = f(x)f(-x),$$

tedy $f(x) \neq 0$. Ale zároveň

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2,$$

což musí být nutně kladné (díky nenulovosti $f(x)$). Funkce $f$ je tedy kladná a můžeme položit $g = \log f$. Potom pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ s využitím vlastností logaritmu platí

$$\begin{aligned} g\left(x+y\right) &= \log\left(f\left(x+y\right)\right) = \log\left(f\left(x\right)f\left(y\right)\right) = \log f\left(x\right) + \log f\left(y\right) = \\ &= g\left(x\right) + g\left(y\right), \end{aligned}$$

takže funkce $g$ je aditivní na $\mathbb{R}$.

Zbývá ještě dokázat obrácenou implikaci: Nechť tedy $g$ je aditivní na $\mathbb{R}$, tj. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Pro $f = \exp g$ tedy dostáváme

$$f(x+y) = \exp\left(g(x+y)\right) = \exp\left(g(x) + g(y)\right) = \exp g(x) \exp g(y) = f(x)f(y).$$

Funkce $f$ tedy splňuje rovnici (4.1) pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. □

Díky Poznámce 4.1 a Větě 4.2 tedy vidíme, že řešení rovnice (4.1) je buď identicky nulové, nebo má tvar $\exp \circ f$, kde $f$ je funkce aditivní na $\mathbb{R}$. Nyní se podíváme na rovnici (4.2).

**Lemma 4.3.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici* (4.2) *pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Potom $f \equiv 0$.*

*Důkaz.* V rovnici (4.2) položme $x = 0$. Pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ potom platí

$$f\left(0y\right) = f\left(0\right) + f\left(y\right).$$

Tedy nutně $f(y) = 0$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. □

Funkcionální rovnice, jejímž řešením je pouze nulová funkce, není příliš zajímavá. Další řešení se ale dají získat vypuštěním bodu $0$ z definičního oboru funkce $f$.

**Věta 4.4.** *Funkce* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *splňuje rovnici* (4.2) *pro všechna* $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, právě když existuje funkce* $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *aditivní na* $\mathbb{R}$ *taková, že pro všechna* $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *je* $f(z)=g(\log|z|)$.

*Důkaz.* Položme $g=f\circ\exp$. Potom pro libovolné $x,y\in\mathbb{R}$ platí

$$g(x+y)=f(\exp(x+y))=f(\exp(x)\exp(y))=f(\exp(x))+f(\exp(y))=\\ =g(x)+g(y),$$

tedy $g$ je aditivní na $\mathbb{R}$. Zbývá dokázat, že $f(z)=g(\log|z|)$ pro všechna $z$ nenulová reálná. Z rovnice (4.2) pro $x\neq 0$ dostáváme

$$f(x)=f((-1)(-x))=f(-1)+f(-x)=f(-1)+f((-1)x)=\\ =2f(-1)+f(x),$$

z čehož dostáváme, že $f(-1)=0$ a také $f(x)=f(-x)$. Můžeme tedy pro libovolné $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ počítat:

$$f(z)=f(-z)=f(|z|)=f(\exp(\log|z|))=g(\log|z|),$$

takže důkaz jedné implikace hotov.

Naopak nechť $g$ je aditivní na $\mathbb{R}$. Pro $f(z)=g(\log|z|)$ dostáváme pro všechna $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f(xy)=g(\log|xy|)=g(\log|x|\,|y|)=g(\log|x|+\log|y|)=\\ =g(\log|x|)+g(\log|y|)=f(x)+f(y),$$

tedy $f$ splňuje Cauchyovu funkcionální rovnici (4.2). ☐

Díky Větám 4.2 a 4.4 lze pro rovnice (4.1) a (4.2) snadno vyslovit věty o vlastnostech (spojitost, měřitelnost ...) řešení díky převodu na věty o odpovídajících vlastnostech příslušných aditivních funkcí.

## 4.2 Pexiderovy rovnice

Řešení následujících funkcionálních rovnic, nazvaných[2] podle českého matematika Jana Viléma Pexidera (1874-1914), se dá také převést na řešení Cauchyových

[2] převzato z knihy [2], strana 316

rovnic (tedy speciálně i na rovnici, studovanou v této práci):

$$f\,(x+y) = g\,(x) + h\,(y)\,, \tag{4.4}$$

$$f\,(x+y) = g\,(x)\,h\,(y)\,, \tag{4.5}$$

$$f\,(xy) = g\,(x) + h\,(y)\,, \tag{4.6}$$

$$f\,(xy) = g\,(x)\,h\,(y)\,, \tag{4.7}$$

kde opět $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. My však ukážeme jen nalezení řešení rovnice (4.4) pomocí aditivních funkcí.

**Věta 4.5.** *Funkce* $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňují rovnici* (4.4) *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$, *právě když existuje funkce* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *aditivní na* $\mathbb{R}$ *a konstanty* $a, b \in \mathbb{R}$ *tak, že pro všechna* $z \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f(z) = \varphi(z) + a + b, \tag{4.8a}$$

$$g(z) = \varphi(z) + a, \tag{4.8b}$$

$$h(z) = \varphi(z) + b. \tag{4.8c}$$

*Důkaz.* V rovnici (4.4) volme nejprve $x = 0, y \in \mathbb{R}$ libovolně, pak $x \in \mathbb{R}$ libovolně a $y = 0$:

$$f(0+y) = g(0) + h(y), \tag{4.9a}$$

$$f(x+0) = g(x) + h(0). \tag{4.9b}$$

Položme $a = g(0), b = h(0)$ a $\varphi(z) = f(z) - a - b$, tzn. $f(z) = \varphi(z) + a + b$. Po dosazení do rovnic (4.9) dostáváme

$$\varphi(z) + a + b = a + h(z),$$
$$\varphi(z) + a + b = g(z) + b.$$

Tudíž

$$h(z) = \varphi(z) + b,$$
$$g(z) = \varphi(z) + a.$$

Zbývá ověřit, že sestrojená funkce $\varphi$ je opravdu aditivní. To uděláme jednoduše dosazením do původní Pexiderovy rovnice:

$$\varphi(x+y) + a + b = \varphi(x) + a + \varphi(y) + b.$$

Odečteme $a + b$ od obou stran rovnice a dostáváme

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Nedostaneme tedy nic jiného, než Cauchyovu rovnici a funkce $\varphi$ je tedy aditivní na $\mathbb{R}$.

Zároveň je vidět, že pro zadanou funkci $\varphi$ aditivní na $\mathbb{R}$ a čísla $a, b \in \mathbb{R}$ dostaneme funkce $f, g, h$ definované vztahy (4.8) tak, že splňují rovnici (4.4). $\square$

# Literatura

[1] J. Lukeš a kol.: *Problémy z matematické analýzy*, Univerzita Karlova 1972, 135–144.

[2] M. Kuczma: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equations and Jensen's Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Uniwersytet Śląski 1985