Oponentský posudek bakalářské práce

Aleš Holub: „Aditivní funkce“

Předložená práce se zabývá aditivními funkcemi, tj. funkcemi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$. V první kapitole jsou shrnuty některé z používaných výsledků z lineární algebry, topologie a teorie míry. Ve druhé kapitole je dokázán Cauchyův výsledek, že spojitá aditivní funkce je lineární, a slabší postačující podmínky pro spojitost aditivní funkce (například omezenost shora na nějakém intervalu). Ve třetí kapitole je ukázána existence nespojitých aditivních funkcí a studovány jejich vlastnosti. Čtvrtá kapitola obsahuje řešení některých dalších funkcionálních rovnic pomocí aditivních funkcí.

Práce má kompilační charakter, je vcelku dobře napsaná, vážnější nedostatky jsem nenašel. Samozřejmě se najdou překlepy a nešikovné formulace, z nichž většina je velmi snadno odstranitelná, jen dva mohou způsobit čtenáři nepříjemnosti:

(i) Na straně 25 na třetím řádku se vyskytuje dvakrát x. Přitom žádné x není definováno ani zvoleno. Zřejmě tam má být z – pak to dává dobrý smysl.

(ii) Formulace Věty 4.2 na straně 26 je podivná. Správná formulace je „..., právě když existuje aditivní funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $f = \exp \circ g$.“ (Důvodem je, že kladnost funkce f je součástí tvrzení, nikoli předpokladů věty. Pokud by funkce f byla záporná, pak žádná taková g neexistuje, a tudíž každá taková g je aditivní.)

Dále uvádím seznam drobných nedostatků.

- Tvrzení 1.3, předposlední řádka: „že platí“ je lepší než „a platí“.
- Definice 1.9, hustá množina: Množina $A \subset X$ se obvykle nazývá hustou v $B \subset X$, pokud $A \subset B$ a $\overline{A} \supset B$. Definice uvedená v práci je zvláštní, protože apriori požaduje uzavřenost množiny B.
- Strana 12: Odvození (2.1) je zbytečně komplikované. Není třeba dělit na dva případy. Víme-li, že $L > My/b$, pak nerovnost vynásobíme kladným číslem $b/(Ly)$ a dostaneme ihned (2.1).
- Strana 13, poslední odstavec: Lepší by bylo prohodit věty. Nejprve říci, že existuje c_1 takové, že pro všechna z cosi platí, a pak teprve zvolit z (z se používá střídavě ve dvou významech).
- Strana 14, řádky 6-7: Nejde o spor s předpokladem, ale prostě o spor (s vlastnostmi uspořádání na $\mathbb{R}$). A z toho sporu plyne, že předpoklad není splněn.
- Strana 16, od definice funkce g: Z Tvrzení 2.1(ii) plyne, že $g = -f$. A je jasné, že f je lipschitzovská, právě když $-f$ je lipschitzovská.
- Strana 19, řádek 6 zdola: Chybí parametr 3 pro M_n^g. Přitom právě zde se používá, že bylo zvoleno právě číslo 3.
- Strana 19, řádek 2 zdola: Spíše „plyne“ než „platí“.
- Strana 20, řádek 3: Místo „x_n“ má být „$f(x_n)$“.
- Strana 26, za rovnicí (4.3): Ta věta není pravdivá, protože Věta 4.4 se zabývá jiným případem.

Práce je psána velmi pečlivě, což je jistě k prospěchu věci. Nicméně některé velmi jednoduché věci jsou dokazovány až přehnaně formálně, což v některých případech zastírá jejich jednoduchost. Jako nejvýraznější případ uvádím Lemma 3.5. Funkce l je bijekce, je spojitá a l^{-1} je také spojitá. Je to tedy homeomorfismus $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. A homeomorfismus zachovává všechny topologické vlastnosti a operace, tedy například uzávěr, vnitřek, řídkost množiny atp. Proto platí $l(\overline{B}) = \overline{l(B)}$, $l(\operatorname{Int} C) = \operatorname{Int} l(C)$, nejen uvedené inkluze. (Chceme-li to přeci jen formalizovat, použijeme fakt, že U je otevřená, právě když $l(U)$ je otevřená (a stejně pro uzavřené množiny).)

Závěr: Práce jednoznačně splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci. Navrhuji hodnotit ji známkou **výborně**.

V Praze dne 9. 6. 2008