Referee's report on a doctoral thesis

Marta Bílková, Interpolation in Modal Logics

Faculty of Arts and Philosophy, October 2006

The thesis is devoted to *proof theory of modal logics;* more precisely, its concern are the most popular modal propositional systems K, T, K4, GL, S4, and S4Grz, their sequent (Gentzen) calculi and their properties, with an emphasis on cut elimination, proof search termination, uniform interpolation, and also feasible interpolation and feasible disjunction property.

The importance of phenomena like interpolability and implicit definability in classical propositional and predicate logic was recognized already in 1950s or earlier. Since about 1970 one can observe also a growing importance of non-classical logics. These logics are compared to the classical logic, their applications to meta-mathematics are investigated and they are analyzed from the point of view of theoretical computer science. Some results and methods, often semantical, are known, but M. Bílková in her thesis offers a treatment which is proof-theoretical and uniform.

Chapter 2 of the thesis defines *sequent calculi* for all the logics in question. As to the "reflexive" logics, i.e. T and S4Grz, it also defines variants of their calculi with sequents having three cedents—a device invented to ensure termination. Some of these calculi and treatment of rule admissibility is, as I understand, author's own contribution to the area.

The essential part of the thesis is contained in Chapters 3 and 4. The main results of Chapter 3 state that K, T, GL, and S4Grz satisfy *uniform interpolation.* Also the relation of uniform interpolation to *propositional quantification* is extensively discussed. These results are partly new and partly or even mostly known, but they are obtained by a new method, i.e. proof-theoretically, while other authors, like Visser and Kracht, use semantical methods. The proof-theoretical approach is less common in the literature. The proofs invented by the M. Bílková are difficult and highly technical; their advantage is a more or less parallel treatment of all the logics. The author's results are partly also contained in a paper already accepted for publication in *Studia Logica,* but the treatment contained in the present thesis is more extensive and more general. Since it is known that S4 does not have uniform interpolation, the author's observation that K4 does not have uniform interpolation nicely completes the picture.

The main results of Chapter 4 state that logics K, T, K4, GL, S4, and S4Grz satisfy *feasible disjunction property* (a proof of one of the formulas $\Box A$ and $\Box B$ can be constructed in polynomial time from a proof of $\Box A \vee \Box B$). A consequence if this fact is a feasible interpolation theorem. To prove the result, the author constructs a somewhat different calculi for all the logics, now with cedents treated as sets rather than multisets. This Chapter 4 also suggests how to define Harrop formulas in modal logics, discusses the (hardly plausible) hypothesis that all tautologies of some or all modal systems have polynomial-size proofs, and explains its connection to computational complexity.

The thesis is *well written.* Its global structure is transparent and a lot of explanation make it *readable.* On the other hand, the text does contain some typographical imperfection: minor things like line breaks, itemization and in some cases also typesetting of mathematical symbolism could be improved. That is however inessential for the quality of the thesis: while highly technical, the thesis is, as noted above, well readable.

I have found nothing that could be called a mistake; the obtained results are strong and attractive, and their proofs are correct. I would, however, like to list some *remarks* and *questions* or point out some places where I feel that more explanation would be useful.

- On p. 8, I doubt whether Grzegorczyk's axiom entails the schema 4. Of course I understand that this is not essential for the results of the thesis, but it does create some confusion: only somewhere on pp. 30–32 the reader finds out that Grzegorczyk's axiom is always accompanied with the schema T.

- The rules of the calculi constructed in Chapter 2, when used backwards, always remove a logical symbol (or move it to the third cedent); this is how termination is ensured. An alternative method of a termination proof, found elsewhere in the literature, is based on the notion of saturated sequents. Can the relation between these two methods be explained or at least commented on?

- As to the sequent with three cedents, can any semantics be developed for them? Are there some methods of proving their unprovability?

- On p. 30, it seems possible that both rules of the calculus Gm^{+}_{Grz} are applicable to some sequent. If it is so, which of the two rules takes precedence?

- On p. 34, is the orientation of the order symbols $<$ and $\leq$ correct? Is the orientation the same as in the definition of Kripke model on p. 9?

- It seems that a little confusion occurs in the explanation in the second paragraph of p. 37: does the existential propositional quantification correspond to conjunction or to disjunction? I would suspect that this may be something deeper than a misprint because *two* different methods of constructing a uniform interpolant are mentioned in the previous two paragraphs.

- In Lemma 3.1.3, the interpolant should probably be written as $I_{\dots}(q)$ instead of $I_{\dots}(p_1, p_2)$.

- On p. 47, it is not clear what "line 6" and line "line 7" refers to. In any case, I would need some more explanation about the (validity of the translation of the) Barcan formula.
- On p. 41, I think that the procedure reworks $\Box A_p(p, q; p)$ to $\Box\top$, not to $\Box(\neg q \vee \top)$. This is, of course, inessential since both formulas are equivalent.
- In the definition of the translation $*$ on p. 46, $A_p(C^*)$ should read $A_p(\emptyset, C^*)$.
- On p. 61, can "constructiveness" of a proof of existence of a fixed point mean better time or space performance? Or, does it simply mean a proof not containing an appeal to semantics?
- On p. 76, the explanation of Feasible Disjunction Property should contain some reference to polynomial time. The meaning, of course, is clear from other places in the thesis.
- On p. 90 in Theorem 4.3.1, I would need some explanation how does the statement relate to the normal (or uniform) interpolation.

To *summarize*, the thesis brings new results in a field which is lively and worked on in world most important research centers. The results are deep, technically difficult and carefully justified. The method, i.e. proof-theoretical considerations, is appropriate. The thesis significantly extends the knowledge about the best known or best applicable modal systems. Some of the results are accepted for publication in a respected journal of a world wide importance. But not only that, it is evident that some other publications will be based on the thesis in the near future. The thesis is well written; it itself or articles based on it will serve as an important source of information. It should be stressed that the new information relates to well known and very popular modal logics, where it is more difficult to obtain new results.

For these reasons, I without any doubt *recommend* the thesis as a basis for awarding the doctoral degree.

Vítězslav Švejdar

Praha, October 11th, 2006

RNDr Vítězslav Švejdar CSc

Marta Bílková, Interpolation in Modal Logics

(V. Švejdar, překlad oponentského posudku na doktorskou disertaci, říjen 2006)

Předložená disertace je věnována *teorii důkazů modálních logik*. Přesněji řečeno, zabývá se známými modálně-výrokovými systémy K, T, K4, GL, S4 a S4Grz, jejich sekventovými (gentzenovskými) kalkuly a jejich vlastnostmi, a klade důraz na eliminovatelnost řezů, algoritmické vyhledání důkazu daného sekventu (proof search), na uniformní interpolaci, a také na efektivní interpolaci a efektivní vlastnost disjunkce.

Důležitost takových vlastností klasické výrokové a predikátové logiky jako je interpolovatelnost nebo implicitní definovatelnost je známa už od padesátých let nebo déle. Zhruba od sedmdesátých let je patrný rostoucí význam neklasických logik. Tyto logiky jsou srovnávány s logikou klasickou, jsou zkoumány jejich aplikace v metamatematice a tyto logiky jsou zkoumány i z hlediska teoretické informatiky. Některé výsledky a metody, většinou spíš sémantické povahy, jsou známy. M. Bílková ale ve své disertaci důsledně používá důkazově teoretické metody, a to podobným způsobem pro všechny logiky, kterých se disertace týká.

V kapitole 2 jsou definovány sekventové kalkuly pro všechny logiky, kterými se práce zabývá. Pro "reflexivní" logiky, tj. T a S4Grz, jsou také definovány varianty těchto kalkulů, v nichž sekventy mají tři cedenty. Pro kalkuly s takovými sekventy lze totiž dokázat, že algoritmy pro vyhledání důkazu "konvergují", tj. vždy dospějí k výsledku. Předpokládám, že některé z těchto kalkulů a výsledky o přípustnosti odvozených pravidel jsou autorčiny vlastní.

Podstatné výsledky práce jsou obsaženy v kapitolách 3 a 4. Hlavní větou kapitoly 3 je tvrzení, že logiky K, T, GL a S4Grz mají *uniformní interpolaci*. V této kapitole je také podrobně diskutován vztah uniformní interpolace k *výrokovým kvantifikátorům*. Tyto výsledky z části a možná i z větší části již dokázány byly. V předložené disertaci jsou ale dokázány důkazově-teoreticky, kdežto ostatní autoři, například Visser nebo Kracht, obvykle používají sémantické metody. Důkazově-teoretický přístup, použitý v této disertaci, je v logické literatuře mnohem méně obvyklý. Důkazy, které M. Bílková nalezla, jsou obtížné a technicky náročné. Jejich výhodou je přitom současná či podobná aplikovatelnost na všechny logiky, které se v disertaci uvažují. Výsledky práce jsou částečně obsaženy v článku, který je přijat k publikaci v časopisu *Studia Logica*, avšak pojednání obsažené v této práci je obsažnější a o něco obecnější. Vzhledem k tomu, že logika S4 uniformní interpolaci nemá, autorčin výsledek, že ani K4 ji nemá, činí obrázek o uniformní interpolovatelnosti známých modálních logik kompletním.

Hlavní větou kapitoly 4 je tvrzení, že logiky K, T, K4, GL, S4 a S4Grz mají *efektivní vlastnost disjunkce* (důkaz některé z formulí $\Box A$ a $\Box B$ lze zkonstruovat v polynomiálním čase z důkazu disjunkce $\Box A \vee \Box B$). Důsledkem této věty je pak věta o efektivní interpolovatelnosti. K důkazům těchto výsledků autorka pro uvažované logiky konstruuje nové varianty kalkulů, v nichž jsou nyní cedenty množinami, nikoliv multimnožinami. Tato kapitola 4 také ukazuje, jak lze pro modální logiky definovat pojem Harropovy formule, je v ní diskutována (nepříliš plauzibilní) hypotéza, že všechny tautologie určité (nebo dokonce každé) modální logiky mají v oné logice důkazy polynomiální délky, a je objasněn vztah této hypotézy k předpokladům z výpočtové složitosti.

Předložená disertace je *velmi dobře napsaná*. Její struktura je jasná a průhledná, vzhledem k dostatečnému množství vysvětlujících komentářů je *dobře čitelná*. Na druhé straně, v práci se vyskytují určité typografické nedostatky: drobnosti jako jsou řádkové lomy, sazbu itemizací a v některých případech i sazbu matematického symbolismu by šlo vylepšit. Tyto maličkosti jsou ale nepodstatné pro kvalitu práce. Disertace, jak již bylo řečeno, je dobře čitelná, a to přesto, že se týká tématu technicky komplikovaného a na symbolismus náročného.

Nenalezl jsem v práci nic, co by šlo označit jako opravdovou závadu nebo chybu. Získané výsledky jsou silné a atraktivní, jejich důkazy jsou nápadité a korektní. Chtěl bych ale vyjmenovat několik *otázek* a *poznámek*, a ukázat na několik míst, kde bych byl uvítal podrobnější vysvětlení.

- Na str. 8 pochybuji, že z Grzegorczykova axiomu plyne schéma 4. Je ovšem zřejmé, že pokud ne, je to nepřesnost, která nemá žádný vliv na platnost výsledků práce, jde pouze o poznámku v úvodu. Je ale trochu matoucí, že až někde na str. 30–32 si čtenář uvědomí, že Grzegorczykův axiom se vždy uvažuje dohromady se schématem T.

- Když se některé pravidlo kalkulů z kapitoly 2 použije zpětně, vždy to znamená odstranění některého symbolu nebo jeho přesunutí do třetího cedentu. To je způsob, jak zajistit konvergenci. V některých zdrojích se vyskytuje ještě jiný způsob, jak zajistit konvergenci algoritmu, který je založen na pojmu saturovaného sekventu. Jaký je vztah těchto dvou metod?

- Lze pro sekventy se třemi cedenty navrhnout nějakou sémantiku? Jaké jsou možnosti, chceme-li dokázat nedokazatelnost takového sekventu?

- Na str. 30 předpokládám, že v některých situacích mohou pravidla kalkulu Gm^{+}_{Grz} být aplikovatelná obě současně. Pokud je tomu tak, kterému dává algoritmus přednost?

- Je na str. 34 správně orientace symbolů $<$ and $\leq$? A je stejná jako v definici kripkovského modelu na str. 9?

- Ve vysvětlení ve druhém odstavci na str. 37 je možná určitá nepřesnost: odpovídá existenční výroková kvantifikace konjunkci, nebo disjunkci? Předpokládám, že tato otázka má hlubší odpověď, než že konjunkce a disjunkce jsou omylem zaměněny, neboť v předchozích dvou odstavcích jsou zmíněny dvě různé metody pro nalezení uniformního interpolantu.

- Ve znění lemmatu 3.1.3 má interpolant pravděpodobně být psán $I_{\ldots}(q)$, nikoliv $I_{\ldots}(p_1, p_2)$.
- Na str. 47 není jasné, k čemu odkazuje "line 6" a "line 7". Platnost překladu Barcanovy formule by myslím měla být vysvětlena podrobněji.
- Na str. 41 se domnívám, že procedura přepracuje $\Box A_p(p, q; p)$ na $\Box\top$, nikoliv na $\Box(\neg q \vee \top)$. Pro fungování procedury je to ovšem lhostejné, obě formule jsou ekvivalentní.
- V definici překladu $*$ na str. 46 má být $A_p(\emptyset, C^*)$, nikoliv $A_p(C^*)$.
- Má "constructiveness" na str. 61 být chápána jako nižší časové nebo prostorové nároky, nebo to pouze znamená, že důkaz se obejde bez jakéhokoliv odkazu k sémantice?
- Na str. 76 ve vysvětlení, co je efektivní vlastnost disjunkce, chybí nějaká zmínka o polynomiálním času. Opět jde o nepodstatnou závadu, význam pojmu je zřejmý z jiného místa v disertaci.
- Na str. 90 ve větě 4.3.1 bych uvítal podrobnější vysvětlení. Jak se znění věty vztahuje k dříve diskutované obyčejné nebo uniformní interpolaci?

Shrnuji, že v předložené disertaci jsou prezentovány nové výsledky, a to v oblasti, která je živá a na které se pracuje ve světově nejvýznamnějších výzkumných pracovištích. Dosažené výsledky jsou hluboké, technicky obtížné a pečlivě dokázané. Použitá metoda, tj. důkazově teoretický přístup, je přiměřená a vhodná. Disertace významně rozšiřuje naši znalost o často zmiňovaných a dobře aplikovatelných modálních systémech. Některé z výsledků budou publikovány v článku, který je přijat k publikaci v respektovaném a celosvětově důležitém časopisu. Navíc je zřejmé, že po tomto článku budou brzy následovat další články rovněž založené na předložené disertaci. Práce je dobře napsaná, ona sama i články na ní založené budou jistě sloužit jako důležitý zdroj informací. Jde přitom o informace, které se vztahují ke známým a populárním logikách, kde získání nových výsledků je obecně obtížnější.

Z těchto důvodů nemám žádnou pochybnost o kvalitě práce a jednoznačně *doporučuji,* aby byla přijata jako základ pro udělení doktorského titulu PhD.

Vítězslav Švejdar

V Praze 11.10.2006 RNDr Vítězslav Švejdar CSc