Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce Tomáš Jakubec
Název práce Realization of refinement monoids
Rok odevzdání 2021
Studijní program Matematika **Studijní obor** Matematické struktury

Autor posudku Jan Trlifaj **Role** oponent
Pracoviště KA MFF UK

Text posudku:

Jedním z otevřených problémů teorie reprezentací monoidů je problém charakterizace těch zjemňujících monoidů, které jsou realizovatelné jako monoidy $V(R)$ tříd izomorfismů konečně generovaných projektivních modulů nad von Neumannovsky regulárními okruhy R. Tento problém byl formulován K. R. Goodearlem už v roce 1994, ale je stále otevřený i pro spočetné konické zjemňující monoidy.

V roce 2020 Ara, Bosa a Pardo [2] dokázali větu, že každý konečně generovaný konický zjemňující monoid je realizovatelný. Tento výsledek je kulminujícím bodem dlouholeté práce barcelonské algebraické školy v teorii reprezentací: navazuje bezprostředně na několik desítek prací autorů z této školy, ale i Brookfielda, Goodearla a dalších, publikovaných v posledních dvaceti letech. Diplomová práce Tomáše Jakubce si klade nelehký úkol do 50 stran zkompilovat důkaz této věty, ale také některých klíčových předchozích výsledků.

Původní idea použít jako výchozí strukturu pro realizaci monoidy tzv. separovaných grafů z článku Ary a Goodearla z J. Reine Angew. Math. 669(2012) se ukázala jako nedostatečná. V článku [1] Ary, Bosy a Parda proto autoři zúžili uvažovanou třídu grafů na tzv. adaptovatelné separované grafy. Pro takové grafy G dokázali, že jim odpovídající monoidy $M(G)$ jsou prvogenerované konické zjemňující monoidy, a naopak, každý takový monoid je izomorfní s $M(G)$ pro nějaký adaptovatelný separovaný graf G. Důkaz tohoto výsledku je velmi podrobně prezentován v kapitole 2 diplomové práce, a to včetně dalších potřebných pojmů a lemmat, převzatých z předchozích článků týchž autorů v Algebra Repres. Theory 10(2007), Israel J. Math. 214(2016) a J. Algebra 480(2017). Kapitola 2 proto tvoří téměř polovinu celé diplomové práce.

Kapitola 3 je věnována přechodu od adaptovatelných separovaných grafů G k von Neumannovsky regulárním K-algebrám $R(G)$: pomocí G se nejprve definuje jistá K-algebra s involucí $S(G)$, samotná K-algebra $R(G)$ je pak definována ve dvou krocích, s využitím univerzálních lokalizací a jejich vlastností dokázaných v článku Ary a Brustengy z J. Algebra 309(2007). Závěrem kapitoly 3 je bez důkazu prezentován rozklad algebry $R(G)$ na direkní součet K-podprostorů, z něhož snadno plyne existence vnoření svazu dolních podmnožin posetu $I(G)$ asociovaného s G do svazu ideálů K-algebry $R(G)$.

Kapitola 4 je věnována adaptovatelným separovaným grafům G splňujicím podmínku (F), která zaručuje, že poset $I(G)$ je les (forest). Je tu dokázáno tvrzení, že pro každé G existuje $\bar{G}$ splňují podmínku (F) a "pokrývající" G. Pro adaptovatelné grafy splňující podmínku (F) a takové, že $I(G)$ je strom, je tu pak prezentován důkaz z [2], že monoid $V(R(G))$ je izomorfní s monoidem $M(G)$.

Závěr důkazu je už prezentován stručněji, v kapitole 5. Klíčovým faktem je, že v důkazu výše zmíněného tvrzení se přechod od $\bar{G} = G_0$ ke $G = G_n$ odehrává v konečném počtu kroků, přičemž v každém kroku je (G_i, G_{i+1}) $(i < n)$ tzv. korunovaný pár grafů, což implikuje, že $M(G_{i+1})$ je speciálním („korunovaným") pushoutem monoidu $M(G_i)$. Pro dokončení důkazu pak zbývá dokázat tvrzení, že je-li $M(G_{i+1})$ „korunovaným" pushoutem monoidu $M(G_i)$ a $V(R(G_i))$ je izomorfní s $M(G_i)$, pak také $V(R(G_{i+1}))$ je izomorfní s $M(G_{i+1})$. Toto tvrzení, jehož důkaz zabírá čtyři strany závěrečné sekce článku [2], a využívá mj. rozklad algebry $R(G)$ na K-podprostory zmíněný výše, je v zavěru diplomové práce uvedeno bez důkazu.

Je zřejmé, že k sepsání své diplomové práce musel Tomáš Jakubec podrobně prostudovat několik technicky velmi náročných článků obsahujících špičkové výsledky současné teorie reprezentací monoidů. Po matematické stránce je práce na výborné úrovni, částečně samozřejmě proto, že řada důkazu je téměř identická s důkazy prezentovanými v článcích [1] a [2]. I když je v práci jasně dán kredit za výsledky autorům článků [1] a [2], občas by neškodilo uvést přesnější citace dalších zdrojů. Například tvrzení na str. 14, že $M(E, C)$ má zjemňovací vlastnost, je Proposition 4.4. z článku Ary, Moreny a Parda „Nonstable K-theory for graph algebras" v Algebra and Repres. Theory 10(2007), a Lemma 5 je Lemma 5.1 z článku Ary a Pardo „Representing finitely generated refinement monoids as graph monoids" v J. Algebra 480(2017). Nedostatkem práce je absence jakýchkoliv příkladů, které by pomohly ilustrovat použité netriviální konstrukce.

Seznam publikací na konci práce má velmi neobvyklý formát: bez očíslování či jiné obvyklé identifikace jsou tu pro každý článek uvedena jen jména autorů, název článku a rok vydání, chybí název a číslo časopisu i čísla stránek. Článek [1] je paradoxně citován jako Ara et al. [2019a], ačkoliv byl publikován v roce 2020.

Na rozdíl od matematické úrovně je jazyková úroveň práce nízká: téměř na každé stránce jsou chyby v angličtině, a to jak gramatické, tak překlepy ve slovech. Ty by jistě při použití spell checkeru nebylo problém odstranit (např. termín „graph" se na str. 50 vyskytuje ještě ve variantě „grpah" a „grah"). Práce na konci obsahuje zbytečné prázné strany označené „List of Figures" a „List of Abbreviations".

Odkazy:

[1] Pere Ara, Joan Bosa, Enrique Pardo: *Refinement monoids and adaptable separated graphs*, Semigroup Forum 101(2020), no. 1, 19-36.

[2] Pere Ara, Joan Bosa, Enrique Pardo: *The realization problem for finitely generated refinement monoids*, Selecta Math. (N.S.) 26(2020), no. 3, Paper no. 33, 63 pp.

Práci doporučuji k obhajobě.

Práci nenavrhuji na zvláštní ocenění.

V Praze dne 4. 9. 2021

Podpis: