Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Interpretace výpočtů u slovních úloh – hledání otázky

Interpretation of calculations in word problems – looking for a question

Tereza Legová

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	N M

Praha 2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Interpretace výpočtů u slovních úloh - hledání otázky potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Čisovicích dne 12. července 2021

. . . .

Podpis autorky

Chtěla bych touto cestou poděkovat učitelům, kteří byli ochotni podílet se na výzkumu. Děkuji též vedoucí mé práce, prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za náměty, podnětné připomínky a rady.

Název práce: Interpretace výpočtů u slovních úloh – hledání otázky

Autor: Tereza Legová

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá explorativní studií zavedení modifikovaného zadání slovních úloh do výuky matematiky. Modifikace klasického zadání spočívá v uvedení kontextu slovní úlohy a výpočtu. Úkolem žáků, je zjistit, co daným výpočtem získáme, resp. na jakou otázku výpočet odpovídá a svoje tvrzení odůvodnit. Cílem práce bylo popsat, jakým způsobem žáci uvažují při řešení tohoto typu úloh. Konkrétně bylo zjišťováno, jaké strategie žáci volí a jaké obtíže se při řešení objevují. Součástí teoretické části práce je rešerše odborné literatury k tématu řešení slovních úloh a jejich možné implementace do výuky. Praktická část je rozdělena na dvě fáze. Žákům byl dán test sestávající ze tří kontextů úloh, kde ke každému kontextu měli určit význam tří daných výpočtů. Před řešením testu byl se žáky probrán vzorový příklad. V první fázi byly se šesti žáky vedeny rozhovory nad jejich řešeními. V druhé fázi byly analyzovány písemné práce 86 žáků z 8. a 9. ročníků. Nejúspěšnější strategie řešení v první fázi výzkumu byla metoda pokus – ověření – korekce. Žáci dále využívali strategie rozdělení výpočtu na dvě části a analogie se vzorovým příkladem. Tento typ slovních úloh je pro žáky velmi náročný. Při hodině matematiky bych proto doporučila pracovat s menším množstvím úloh a zaměřit se na skupinovou diskuzi.

Klíčová slova: řešení slovní úlohy, problem posing, poměr, přímá úměrnost, vytváření otázek k daným výpočtům

Title: Interpretation of calculations in word problems – looking for a question

Author: Tereza Legová

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., Department of Mathematics and Mathematical Education

Abstract: This thesis deals with an exploratory study of the introduction of modified word problems into the teaching of mathematics. The modification of the classical word problem consists in setting the context of the word problem and calculation. The task of pupils is to find out what we get by the given calculation, what question the calculation answers and substantiate their claims. The aim of the thesis was to describe how pupils think in solving this type of problem. Specifically, it investigated what strategies pupils elect and what difficulties arise in solving. The theoretical part of the thesis is a search of literature on the topic of solving word problems and their possible implementation in teaching. The practical part is divided into two phases. A test consisting of three problem contexts was given to pupils. The aim was to determine the meaning of the three given calculations for the each context. Before solving the test, a sample problem was discussed with the pupils. In the first phase, interviews were conducted with six pupils over their solutions. In the second phase, the test of 86 pupils from 8th and 9th grades were analyzed. The most successful solution strategy in the first phase of the research was the experiment – verification – correction method. Pupils also used strategies of dividing the calculation into two parts and analogy with the sample problem. This type of word problem is very challenging for pupils. In a math class, I would therefore recommend working with fewer problems and focusing on group discussion.

Keywords: solving word problems, problem posing, ratio, direct proportion, creating questions about the given calculations

Obsah

Úvod

Inspirací k tvorbě diplomové práce mi byla přednáška doktorky Slavíčkové na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2021. Její příspěvek se věnoval modifikaci klasického zadání slovní úlohy.

Modifikace klasického zadání spočívá v uvedení kontextu slovní úlohy a výpočtu. Úkolem žáků je zjistit, co daným výpočtem získáme, resp. na jakou otázku výpočet odpovídá, a svoje tvrzení odůvodnit. Vytvořila jsem tři takto modifikované úlohy. Zaměřila jsem se na téma poměru a přímé úměrnosti.

Argumentace a interpretace matematického zápisu patří mezi kompetence, které si mají žáci při hodinách matematiky rozvíjet. Uvedená modifikace klasického zadání přispívá k hledání souvislostí a hlubšímu přemýšlení nad zadaným problémem. U takto zadaných slovních úloh si musí žáci uvědomit mnoho souvislostí, např. převody jednotek, zlomek v roli operátoru (jako jiný zápis dělení) a důležitost pořadí čísel ve vzájemném poměru. Tvorbou hledaných otázek mohou žáci rozvíjet kreativitu a schopnost argumentovat o správnosti řešení.

Cílem práce je popsat, jakým způsobem žáci uvažují při řešení tohoto typu úloh. Konkrétně bude zjišťováno, jaké strategie žáci volí a jaké obtíže se při řešení objevují.

V teoretické části se nejprve věnuji parametrům obtížnosti slovních úloh, z kterých jsem vycházela při vlastní tvorbě úloh. Ve vytvořených úlohách jsem použila obrázek, nadbytečnou informaci a číslo v roli operátoru a antisignálu. V druhém oddílu popisuji řešení slovních úloh. Procesy, fáze a strategie řešení mi jsou podkladem pro analýzu žákovských řešení.

Se slovními úlohami lze ve třídě pracovat různým způsobem. Ve třetím oddílu popisuji implementace slovních úloh pomocí klasického zadání, *Concept Cartoons, problem posing* a zadání *od konce* použitého v této práci.

Ve čtvrtém oddílu teoretické části se věnuji ukotvení zkoumaného matematického obsahu v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání. Přímá úměrnost se běžně probírá v sedmém ročníku ZŠ, výzkumný vzorek proto tvoří žáci 7.–9. ročníků.

V praktické části se nejprve věnuji tvorbě úloh a jejich didaktické analýze. Vytvořené úlohy jsem testovala v pilotní studii. Na základě zjištěných výsledků a poznámek probandů a vedoucí práce jsem úlohy upravila do finální podoby a rozhodla se s žáky nejprve projít vzorový příklad.

Následují části věnované metodologii výzkumu, v nichž si definuji cíle, formuluji dílčí výzkumné otázky a popisuji sběr a analýzu dat. Dílčí výzkumné otázky jsou inspirované parametry obtížnosti slovních úloh, fázemi řešení slovních úloh a strategiemi řešení:

1. Porozuměl žák textu slovní úlohy? Je mu popisovaný kontext slovní úlohy blízký?
2. Jaký situační model si žák vytvořil? Jakým způsobem si udělal zápis podstatných informací? Dokázal žák přiřadit k jednotlivým číslům jejich význam ze zadání úlohy?
3. Jak žák reagoval na obrázek v úloze Měna?
4. Jak pracoval žák s číselným výrazem? Upravoval ho?
5. Jakou strategii řešení žák použil?
6. Jak žák tvořil požadovanou otázku? Byl si jistý?
7. Jak provedl žák zkoušku správnosti hledaného významu? Jak reagoval na chybu?

V první fázi výzkumu byly se šesti žáky vedeny rozhovory nad jejich řešeními zadaných slovních úloh. Rozhovory byly následně přepsány a analyzovány, aby bylo možné odpovědět na dílčí otázky výzkumu. Souhrnné výsledky jsou uvedeny v tabulce 2.

V druhé fázi výzkumu jsem tytéž úlohy nechala zadat 86 žákům při výuce matematiky k písemnému vypracování. Na základě písemných prací jsem sledovala obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení, odpovědi (a jejich četnost) na některé z dílčích otázek výzkumu a obtíže a přínosy zavedení takovýchto úloh do výuky. Souhrnné výsledky písemných prací jsou v příloze 1.

V druhé fázi výzkumu nebyla se žáky vedena diskuze nad jejich řešením, vycházela jsem proto pouze z jejich písemných prací. Mnoho odpovědí k daným výpočtům bylo jazykově nepřesných. Ukázku takovýchto řešení uvádím v příloze 2.

V závěru shrnuji zjištěné výsledky, porovnávám je s relevantními studiemi a uvádím důsledky mého zkoumání pro výuku matematiky.

Diplomová práce byla zpracována v rámci projektu TAČR TL03000469 Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol.

1 Teoretická část

Teoretická část je rozdělena do pěti oddílů. První oddíl se věnuje parametrům obtížnosti slovních úloh a souvisejícím výzkumům, ze kterých jsem vycházela při vlastní tvorbě úloh. V úlohách jsem použila obrázek, nadbytečnou informaci a číslo v roli operátoru a antisignálu.

V druhém oddílu jsem popsala řešení slovních úloh. Fáze a strategie řešení jsem ilustrovala na testovaných úlohách. Procesy, fáze a strategie řešení mi byly podkladem pro analýzu žákovských řešení.

Třetí oddíl se zaobírá implementací slovních úloh v hodinách matematiky. Podrobněji v něm popisuji klasické zadání slovní úlohy, *Concept Cartoons*, *problem posing* a zadání *od konce* použité v této práci.

Ve čtvrtém oddílu se věnuji ukotvení zkoumaného matematického obsahu v RVP. A na závěr shrnuji teoretická východiska pro praktickou část.

1.1 Slovní úlohy

V souladu s Vondrovou et al. (2019: s. 15, modifikováno) budu v této práci za slovní úlohu považovat *takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (…) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů (...), které lze splnit za pomoci těchto numerických údajů, vztahů mezi nimi (…) a znalostí a zkušeností žáka.* Slovní úlohy jsou vhodným prostředkem k rozvoji čtení s porozuměním, pomáhají zlepšovat schopnost vybírat z textu podstatné informace, aktivují matematické znalosti a dovednosti a pomáhají žákům při poznávání a s porozuměním pojmům a metodám matematiky.

Slovní úlohy můžeme kategorizovat mnoha způsoby, např. dle matematického modelu (metody řešení) či situačního kontextu. V této práci jsou použity tři úlohy na přímou úměrnost. Úlohy na úměrnost se řadí mezi tzv. *typové úlohy.* To znamená, že k jejich řešení existuje formální algoritmus. V případě úměrnosti se jedná o trojčlenku (více v oddílu 1.2.3). Dalším příkladem typových úloh jsou *úlohy o pohybu, o společné práci* apod. (Vondrová, 2019).

Specifickou kategorii slovních úloh tvoří úlohy *neúplně vymezené*. Mareš (2013: s. 375) mezi ně řadí úlohy:

- *s chybějící otázkou*
- *s nadbytečným či matoucím údajem*
- *s chybějícím údajem, který žák musí zjistit*
- *s některými údaji navíc a s jinými chybějícími*
- *s variací znaků, které vzniknou pomocí otázky: Co když?*

V této práci jsou použity úlohy s chybějící otázkou, které ovšem obsahují řešení (výpočet). Úkolem žáků je tedy přijít na chybějící otázku, resp. význam výpočtu.

1.1.1 Parametry obtížnosti a související výzkumy

Během let 2015–2018 byl na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy uskutečněn rozsáhlý výzkum (propojující odborníky z oblasti didaktiky matematiky, didaktiky českého jazyka a psychologie) zaměřený na parametry, které negativně ovlivňují obtížnost matematických slovních úloh (Vondrová et al., 2019).

Základní obtíže žáků při řešení slovních úloh lze shrnout do tří bodů (Vondrová et al., 2020):

- Žák **nerozumí kontextu** úlohy nebo nevidí souvislost mezi kontextem a řešením slovní úlohy.
- Žák z různých důvodů (např. délka textu, použitý jazyk, velký počet zadávaných informací, obtíže číst text s porozuměním) **neuspěje při získávání informací** o struktuře slovní úlohy ze zadání.
- Žák získá potřebné informace ze zadání, ale **neumí** najít **vhodný matematický model**, nebo model najde, ale neumí ho vyřešit.

Parametry obtížnosti slovních úloh přispívají k žákovskému selhání ve výše popsaných bodech. V této práci jsou v zadání testovaných úlohách použity tyto parametry obtížnosti, vycházející z práce Vondrové et al. (2020):

- zkušenostní kontext (týkající se jak obsahu, tak formy úloh)
- nadbytečná informace
- obrázek
- proporční situace
- číslo v roli operátoru a antisignálu

Zkušenostní kontext

Podle Smetáčkové (2017) propojení skutečného života a slovní úlohy může mít přinejmenším dva různé efekty: motivační a poznávací. To znamená, že žáci mohou být motivovaní řešit slovní úlohy, které se podobají jejich životním zkušenostem. Zároveň jim zkušenosti pomáhají najít nejlepší postup řešení a zkontrolovat výsledky. Z analýzy Smetáčkové vyplynulo, že zkušenosti žáků se liší a pozitivně ovlivňují úspěšnost řešení slovních úloh. Tato korelace však nebyla zjištěna ve všech věkových skupinách.

Kontext má vliv i z hlediska motivace. Doprovodné šetření výzkumu zabývajícího se parametry obtížnosti slovních úloh naznačilo, že žáci dávají přednost úlohám z prostředí běžného života a jejich specifických zájmů (Vondrová et al., 2020).

Vlivu kontextu na úspěšnost řešení se věnovala i meta-studie (Hembree, 1992). Ukázalo se v ní, že největší vliv na úspěšnost řešení měla obeznámenost s typy slovních úloh (př. slovní úlohy na přímou úměrnost). Menší vliv pak měly kontexty, které se týkaly osobních zájmů či preferencí žáků a studentů.

Pokud žáci neporozumí kontextu úlohy, tak ji ani nebudou chtít řešit či v řešení budou neúspěšní. To mě vedlo k zasazení situačního kontextu úloh do reálné situace. V úlohách se věnuji tématům směny peněz, ceny za váhu a práci s měřítkem mapy.

Obrázek a nadbytečná informace

Z výzkumu (Vondrová, 2019) vyplývá, že úlohy s nadbytečnými numerickými údaji byly pro žáky obtížnější hlavně v případech, kdy se nadbytečný údaj dal z pohledu žáka smysluplně využít při řešení úlohy a byl zadán na začátku úlohy.

Obrázek ve slovní úloze může žáky mást, nebo jim pomoci, pokud plní roli náčrtku. Metastudie (Hembree, 1992) ukázala, že používání náčrtů mělo velký vliv na úspěšnost. Výuka zaměřená na správné používání náčrtů při řešení úloh měla větší vliv než jen samotné procvičování řešení slovních úloh. Dle Vondrové et al. (2020) je tvorba situačního modelu a použití nákresů stěžejní pro úspěšné řešení slovních úloh.

Proporční situace

Proporční situací se rozumí situace, jejíž struktura je multiplikativní. To znamená, že objekty v zadání jsou svázány poměrem a matematický model je založený na násobení či dělení (Vondrová et al., 2020).

Úlohy použity v tomto výzkumu jsou všechny na poměr a přímou úměrnost. Standardním řešením přímé úměrnosti je použití trojčlenky. Nebezpečí tohoto algoritmu spočívá v jeho automatickém používání bez porozumění hloubkové struktury úlohy (Vondrová et al., 2020).

Všechny mnou vytvořené úlohy jsou proporční. Atypická forma zadání slovních úloh v tomto výzkumu by automatickému využití trojčlenky měla zabránit a vést tak k hlubšímu zamyšlení. Žáci totiž neznají otázku a mají interpretovat výpočet.

Číslo v roli operátoru a antisignálu

S číslem v tzv. roli operátoru se setkáváme v běžných slovních úlohách na porovnání. Multiplikativní operátor navádí na násobení či dělení (Vondrová et al., 2020). Jestliže operátor navádí k jiné operaci, než která je nutná pro správné řešení úlohy, hovoříme o tzv. *antisignálu* (Hejný, 2014).

Příkladem slovní úlohy s antisignálem je úloha (Vondrová, 2019: s. 70): *Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Nedělní výlet byl 1,5krát kratší než sobotní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?* Slova *1,5krát kratší* jsou ve funkci antisignálu, navádějí totiž k dělení, ale správná operace je zde násobení.

Dle Vondrové (et al., 2019: s. 261) *slovní úlohy s antisignálem bývají považovány za velmi náročné, neboť odhalení antisignálu vyžaduje dobré porozumění jazykové vrstvě slovní úlohy a dobrou představu popisované situace. Na základě dostupných výsledků a analýz žákovských řešení jsou hlavní příčiny potíží s antisignálem:*

- *upřednostňování používání strategie signálních slov před strategií založenou na vytvoření situačního modelu úlohy*
- *povrchní porozumění základním aritmetickým operacím*
- *problém s chápáním inverze*
- *problémy v jazykové rovině*

1.2 Řešení slovních úloh

1.2.1 Proces a fáze řešení slovních úloh

Proces řešení slovních úloh lze rozdělit do několika etap podle kognitivní aktivity žáka. Polya (2016: s. 7–8) rozděluje řešení matematické úlohy do následujících etap:

- Porozumění úloze. Pochopení problému. (Co známe? Co se hledá? …)
- Vytvoření plánu řešení. (Jaký je vztah mezi údaji? Znám podobnou úlohu, metodu řešení?)
- Realizace plánu.
- Pohled zpět. Kontrola výsledku a rozbor.

Proces řešení slovní úlohy je dále dělen na jednotlivé fáze ideálního postupu. Fáze řešení slovní úlohy se nejčastěji dělí dle Reussera (1985: s. 13 –14) na:

- Zpracování a **porozumění textu** z jazykového hlediska.
- Vytvoření **situačního modelu –** stanovení problému a jeho **zápis** (či znázornění obrázkem).
- Zkonstruování matematického modelu **– matematizace** problému do výpočtové strategie.
- **Provedení výpočtu** včetně numerické **zkoušky**.
- **Vytvoření odpovědi** a **sémantická zkouška** (interpretace v kontextu zadané situace).

Výše popsaný postup řešení slovní úlohy by mohl budit dojem, že je *lineární*, tzn. jedna fáze navazuje na druhou. Žák se ovšem může k jednotlivým fázím vracet, či některé vynechat (Vondrová et al., 2020).

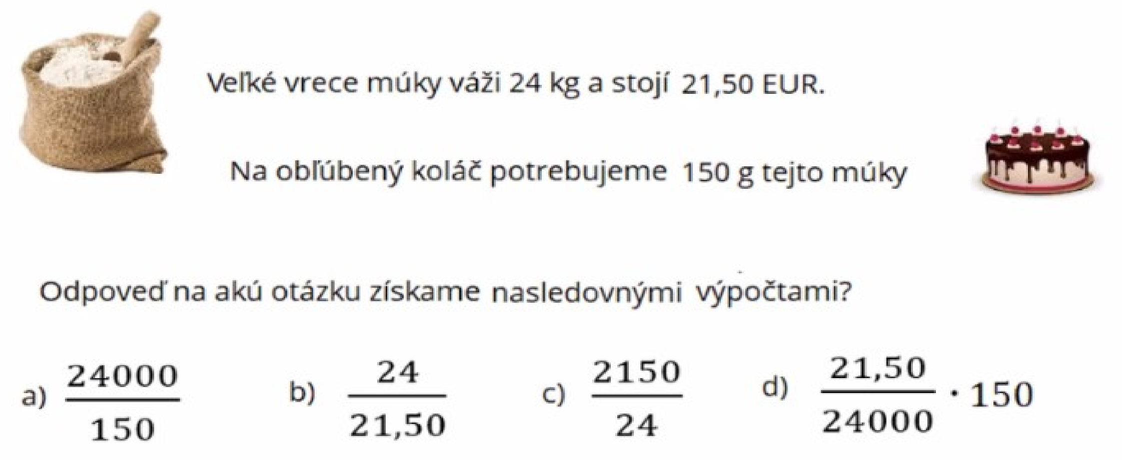
Z výzkumu GA ČR: *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům* a následného zpracování žákovských odpovědí ze zadaných dotazníků zabývajících se žákovskými postupy řešení slovních úloh se ukázalo (Vítkovcová 2020: s. 47–48, cit. podle Vondrová et al., 2020: s. 14):

- Zápis používá 71 % respondentů, a méně než polovina si podstatné údaje podtrhává.
- Nákres při řešení slovní úlohy používá 80 % žáků posledních ročníků a okolo 60 % žáků nižších ročníků.

Při analýze žákovských řešení však bylo zjištěno, že téměř žádný žák si nákres neudělal (Vondrová et al., 2019). V praktické části této práce se zaměřím na jednotlivé fáze žákovských řešení a řešitelské strategie. Dále podrobněji popíši jednotlivé fáze řešení na typ slovních úloh použitých v této práci.

1.2.2 Jednotlivé fáze řešení aplikované na testované úlohy

K ilustraci jednotlivých fází řešení využiji úlohu (obrázek 1), kterou doktorka Slavíčková prezentovala na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2021.



Obrázek 1: Ukázka úlohy od konce (Slavíčková, 2021. Inspirované Steward, 2015)

V první fázi si žák přečte kontext slovní úlohy a přijde na to, že místo otázek jsou dány výpočty. Úkolem žáka je přiřadit k výpočtům odpovídající význam na základě kontextu úlohy a zkonstruovat otázku, na kterou daný výpočet odpovídá.

Po přečtení následuje identifikace podstatných informací, vztahů mezi nimi. To vede ke konkrétní představě problému a stanovení situačního modelu. Situační model je do velké míry individualizovaný, může tak mít podobu zápisku, obrázku, tabulky či nákresu.

Výpočet je již za žáky udělán a žáci mají zjistit jeho význam. Vhodnou strategií je identifikace významu jednotlivých čísel použitých ve výpočtu a uvědomění si vztahu mezi nimi. K tomu je mimo jiné potřeba aplikovat převod jednotek. Vhodné je si také uvědomit, jak se zadanými výpočty můžeme pracovat. Žák si může klást návodné otázky: Můžu daný výpočet rozložit na více částí? Dokáži určit význam jednotlivých částí výpočtu? Jestliže nedokáži určit význam daného zlomku, dokázal bych určit význam převráceného zlomku?

Čtvrtá fáze by se dala přeformulovat v hledání významu jednotlivých výpočtů včetně numerické zkoušky správnosti.

V poslední fázi zkonstruujeme z významu výpočtu otázku, na kterou výpočet odpovídá a ověříme její (sémantickou a gramatickou) správnost.

1.2.3 Typy strategií řešení slovních úloh

Možné třídění strategií řešení slovních úloh přináší práce Novotné, Eisenmanna a Přibyla (2015):

- ***Pokus* –** Motivace žáka je pouze vnější za účelem vyřešit problém bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení.
- ***Přímý způsob*** – Žák aplikuje naučené znalosti, použije známý algoritmus.
- ***Heuristická strategie*** – Žák nedokáže úlohu řešit přímým způsobem, protože nemá nebo neumí použít požadované znalosti, ale je motivovaný úlohu řešit alternativním způsobem.

Za ***pokus*** budeme považovat při řešení úloh tipování významu daného výpočtu bez snahy o ověření správnosti. Vzhledem k tomu, že žáci mají hledat otázku, se domnívám, že je nepravděpodobné, že žáci budou tuto strategii využívat.

Přímý způsob vede při aplikaci známého procesu řešení ke správnému výsledku. Ve vztahu k mnou použitým úlohám se jedná o uvědomění si, co které číslo ve výpočtu znamená, i o aplikaci algoritmu při práci s danými výpočty.

Algoritmem se označuje daný sled kroků, které vedou k řešení všech úloh určitého typu. Žák dokáže pomocí algoritmu úlohu vyřešit, aniž by musel chápat jeho podstatu (Vondrová et al., 2020). Pro úlohy na úměrnosti se používaný algoritmus nazývá *trojčlenka*. Pomocí tří zadaných údajů hledáme čtvrtý údaj na základě rovnosti poměrů.

Výpočty v úloze na obrázku 1 se skládají ze dvou či tří čísel. Pro použití *trojčlenky* potřebujeme znát tři údaje, můžeme ji tedy aplikovat pouze na výpočet za d).

Při přímém způsobu řešení žák výpočet nejprve upraví na trojčlenku a každému jejímu členu, včetně *x*, přiřadí význam. Tím zjistí význam výpočtu.

$$x = \frac{21{,}50}{24\,000} \cdot 150$$

$$\frac{x}{21{,}50} = \frac{150}{24\,000}$$

$$\begin{aligned} x \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 150 \text{ g} \\ 21{,}50 \text{ EUR} \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24\,000 \text{ g} \end{aligned}$$

Po úpravě získáme zadaný výpočet, takže hledané *x* znamená: Cena 150 g mouky v eurech.

Přímý způsob řešení může spočívat i v úpravě zlomku na dvě části. Žák si určí význam části složené ze dvou čísel a poté provede operaci se zbývajícím číslem ve výpočtu a následnou úpravu celkového významu výpočtu.

Výpočet za d) úlohy na obrázku 1 lze rozdělit dvěma způsoby:

i) $\frac{21{,}50}{24\,000} \cdot 150$ ii) $21{,}50 \cdot \frac{150}{24\,000}$

U prvního způsobu část výpočtu $\frac{21{,}50}{24\,000}$ vyjadřuje poměr ceny v eurech ku gramům mouky. Tedy cenu 1 g mouky v eurech. To následně násobíme 150, takže hledaný význam celého výpočtu je: Jaká je cena 150 g mouky v eurech?

U druhého způsobu rozložení výpočtu využijeme krácení zlomku a z $\frac{150}{24\,000}$ dostaneme číslo $\frac{1}{160}$, které vyjadřuje, jakou část pytle potřebujeme k výrobě koláče.

Následným vynásobením ceny celého pytle opět dostaneme cenu 150 g mouky v eurech.

Trojčlenka se běžně probírá v 7. ročníku během učiva o poměru. Pracovat s rovnicemi se ovšem žáci učí až o rok později. Úpravu trojčlenky tedy mají leckdy naučenou pouze formálně, bez pochopení. U testovaných úloh jim je ovšem zadán kontext a výpočet. Žáci si tedy musí nejprve uvědomit, že výpočet vyjadřuje finální krok v trojčlence.

Heuristické strategie, které je možné využít při řešení testovaných úloh, zahrnují strategie: *analogie*, *pokus – ověření – korekce* a *zavedení pomocného prvku*.

Analogie spočívá v aplikaci řešení obdobného problému. Jestliže známe řešení podobného problému, můžeme metodu řešení použít i při řešení zadaného problému (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015).

Jestliže například víme, že význam výpočtu d) úlohy na obrázku 1 je cena 150 g mouky v eurech, můžeme analogicky odvodit význam výpočtu za c). Pozor si ovšem musíme dát na jednotky jednotlivých čísel ve výpočtu. Výsledný význam výpočtu za c) tedy bude: Cena 1 kg mouky v centech.

Pokus – ověření – korekce je strategie přibližování se výsledku úlohy sestávající ze tří kroků. V prvním kroku žák provede volbu. V druhém kroku ověří její správnost a ve třetím kroku provede korekci, která vygeneruje nový pokus (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015).

Při hledání významu jednotlivých výpočtů testovaných úloh touto strategií žák v prvním kroku zvolí náhodnou otázku, na kterou se má smysl ptát. V druhém kroku na ni sám odpoví a provede srovnání výpočtu s výpočtem v zadání. Na základě zjištění v druhém kroku provede korekci hledané otázky a znovu ji ověří.

Při hledání významů výpočtu b) úlohy na obrázku 1 se tak například na základě jednotek jednotlivých čísel ve výpočtu můžeme ptát: Jaká je cena 1 kg mouky? Při řešení této otázky dojdeme k závěru, že daná čísla ve výpočtu by musela být obráceně, jako je to ve výpočtu za c). Otázku tedy poupravíme: Kolik kg mouky si můžeme koupit za 1 euro? A následně ověříme.

Zavedením pomocného prvku se stane řešení úlohy pro žáka dosažitelnější. Pomocný prvek je objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje. Žák ho použije při řešení s nadějí, že mu pomůže vyřešit zadanou úlohu (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015).

V úloze na obrázku 1 si tak například žák může nejprve spočítat cenu 1 kg mouky v eurech a na základě porovnání s danými výpočty hledaný význam výpočtu modifikovat.

Při popisu žákovských řešení se zaměřím nejen na použité strategie řešení, ale i na způsob, jakým byly použity. Novotná, Eisenmann a Přibyl (2015) hovoří v tomto smyslu o třech tzv. *cestách* k řešení:

- aritmetické – číselný způsob řešení bez zavedení neznámé
- algebraické – zavedení jedné či více neznámých
- grafické – opírá se o obrázek

Žáci při řešeních slovních úloh mohou uvedené strategie a cesty k řešení libovolně kombinovat a přecházet z jedné do druhé. Za grafické způsoby řešení můžeme považovat náčrtek i využití schémat. Využití schémat při řešení úloh na úměrnosti se věnuje výzkum např. Jitendra et al. (2011).

Autoři se věnují tzv. *scheme based instruction,* v textu dále značeno SBI. Dle Kalyugy (2016, cit. podle Jitendra et al., 2011) jsou schémata kognitivní znalostní struktury uchované v dlouhodobé paměti, které nám umožňují zacházet s více provázanými informacemi najednou. Ačkoli prvotní používání schémat vyžaduje prostředky pracovní paměti, s dostatečnou praxí se použití schémat zautomatizuje. SBI vychází z teorie schémat, která je založena na představě, že pro úspěšné řešení problému je zásadní pochopit základní strukturu problému.

Použití schematických reprezentací je prostředkem nejen k identifikaci základní struktury problému, ale také k modelování myšlenek a zobrazení matematických vztahů mezi zadanými veličinami (Steele, 2005).

Podstatou programu SBI bylo ve studii Jitendra et al. (2011) zdůraznit základní matematickou strukturu problému pomocí schematických diagramů a zaměřit se na DISC – čtyř krokový postup pro podporu a monitorování řešení problému. Uvědomováním si vlastního postupu řešení docházelo u žáků k rozvoji metakognitivních dovedností. Ony čtyři kroky DISC k řešení problému byly:

- Zjisti druh úlohy (*D – discover the problem type*).
- Najdi informace v úloze pro tvorbu diagramu (*I – Identify information in the problem to represent in a diagram*).
- Vyřeš úlohu (*S – Solve the problem*).
- Zkontroluj řešení (*C – Check the solution*).

Každý krok DISC byl doplněn konkrétními otázkami vztahujícími se k reflexi řešení problému. Otázky byly zaměřené na:

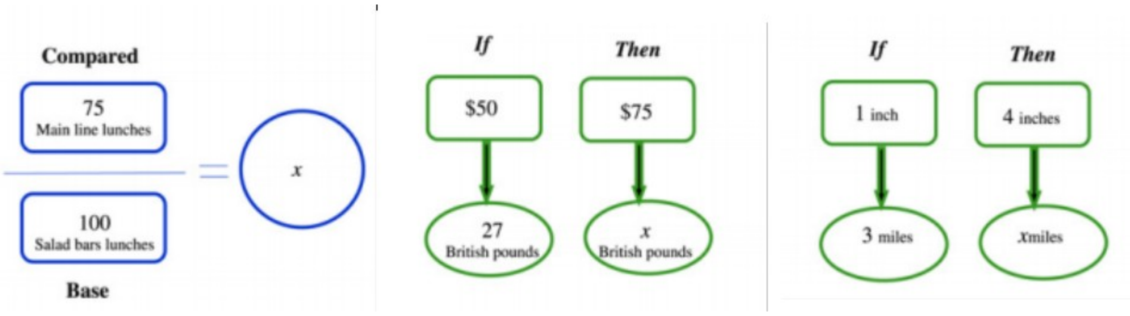
a) porozumění problému – např. V čem je tato úloha podobná a v čem se liší od úloh, které jsem dosud řešil?

b) znázornění problému – např. Jaký schematický diagram mi může pomoci znázornit vztahy mezi zadanými informacemi?

c) plánování – např. Jakou strategii řešení mohu použít?

d) řešení problému – např. Dává odpověď smysl? Jak ji mohu ověřit?

Jitendra et al. (2011) ilustrují ve své práci několik schémat pro znázornění struktury slovních úloh na úměrnost. Zmíním zde jen ta, která se dají použít při řešení mnou zkoumaných úloh. Jedná se o poměr (*ratio*), přímou úměrnost (*proportion*) a měřítko (*scale drawing*). Obrázek 2 ilustruje uvedená schémata zleva doprava.



Obrázek 2: Ilustrace diagramů použitých pro slovní úlohy typu poměr (vlevo), přímá úměrnost (uprostřed) a měřítko (vpravo) (Jitendra et al., 2011: s. 737)

Úlohy, ke kterým jsou ilustrovaná schémata vytvořena, jsem přeložila ze studie Jitendry et al. (2011: s. 737) následovně:

Schéma vlevo ukazuje strukturu úlohy na poměr: *Ve čtvrtek v kafetérii Osseo Middle School prodali: 42 koktejlů, 75 obědů, 80 sušenek, 51 sáčků brambůrků, 100 salátů a 26 snídaní. Jaký je ve čtvrtek poměr počtu prodaných obědů ku počtu prodaných salátů?*

Schéma uprostřed znázorňuje strukturu úlohy na přímou úměrnost: *Rodina Frankova z Minnesoty v USA jede na letní dovolenou do Británie. Koupili si 50 dolarů za 27 britských liber. Kolik britských liber mohou dostat za 75 dolarů při stejném kurzu?*

Schéma vpravo odpovídá struktuře úlohy na měřítko mapy: *Jeden palec (inch) na mapě Disney parku reprezentuje 3 míle ve skutečnosti. Jaké je skutečná vzdálenost mezi Kouzelným královstvím a Zvířecím královstvím, jestliže to jsou 4 palce na mapě?*

Výzkum (Jitendra et al., 2011) prokázal výrazně lepší výsledky žáků v experimentální skupině (učené metodou SBI) v řešení úloh v post-testu. Po delší době už ovšem k výrazným rozdílům ve výsledcích testů mezi skupinami nedošlo. Žáci z experimentální skupiny nedokázali provést transfer použití schémat na novou situaci. Autoři konstatují, že použití schémat je při řešení slovních úloh pro žáky užitečné, ale je potřeba k němu vést žáky dlouhodobě a při různých typech úloh.

1.2.4 Kognitivní náročnost řešení slovních úloh

Řešení slovních úloh klade na žáky kromě matematických znalostí velké nároky na pozornost, pracovní paměť a autoregulaci (Vondrová et al., 2020: s. 10).

Pozornost definujeme jako *psychickou činnost, která umožňuje výběrové zaměření a koncentraci vědomí (...) na určité podněty a jevy. Existují dva základní druhy pozornosti: neúmyslná (*bezděčná*) a úmyslná (*záměrná*). Úmyslná pozornost je vědomě zaměřená a řízená.* (Lokšová, Dobal, Koubská, 1999: s. 54 a 56, modifikováno)

Pracovní paměť je typ krátkodobé paměti, která zpracovává různé úkoly. Její aktivita je nezbytná pro řešení všech komplexních úloh, jež vyžadují manipulaci s různými druhy informací a registraci průběžných řešení dílčích částí úkolu (Valenta et al., 2020: s. 35). Pracovní paměť je omezená, proto platí: Čím více obsahu v pracovní paměti máme, tím méně kapacity zbývá na řešení úkolu. Čím je žák nezkušenější a problém složitější, tím více je zatížena jeho pracovní paměť. Pracovní paměť může být až tak zatížena, že nezbývá kapacita na konceptualizaci *objevu*. Zdůvodnění poskytuje teorie kognitivního zatížení (Sweller, 1994).

Autoregulací rozumíme proces řízení sebe sama, s jehož pomocí žáci převádějí své mentální schopnosti do dovedností potřebných pro řešení problémů. Autoregulace se podílí na záměrné pozornosti, plánování, kontrole činnosti, reflexi jednání atd. Rozvinutá autoregulace je důležitá pro následování určitého plánu činnosti, a to i přes neúspěch (Hrbáčková, 2010).

V procesu řešení slovních úloh žáci často přeskakují fázi tvorby situačního modelu, a využívají tak povrchovou strategii řešení. Riziko tohoto postupu je, že žáci řeší úlohu bez porozumění, někdy i úspěšně, a učitel se tak může mylně domnívat, že zadanému problému žáci rozumí. Pravděpodobné důvody tohoto zkratkovitého postupu jsou (Vondrová et al., 2020):

- Žák se domnívá, že tvorba situačního modelu není potřeba a zbytečně zdržuje.

- Obtížnost úlohy je pro žáka (pro jeho pracovní paměť) natolik vysoká, že tvorba situačního modelu není aktuálně možná.
- Věcné neporozumění slovní úloze. Žák si tak situační model vůbec nevytvoří nebo ho vytvoří chybně.

Úlohy, které používám ve svém výzkumu, byly modifikovány tak, aby podpořily žákovské myšlení a eliminovaly povrchové řešení. Žáci mohou například řešit některé úkoly pomocí trojčlenky, ale nejprve ji ve výpočtu musejí rozpoznat a analyzovat její jednotlivé části. Úkolem žáků je zjistit, co daným výpočtem získají, resp. na jakou otázku výpočet odpovídá, a svoje tvrzení odůvodnit. Zdůvodňování tvrzení je kognitivně jeden z nejkomplexnější cílů dle Bloomovy taxonomie (Bloom et al., 1956).

Tabulka 1: Bloomova taxonomie kognitivních cílů (upraveno podle Petty, 2013: s. 396)

1) Znalosti	Umět vyjmenovat, reprodukovat.
2) Porozumění	Umět vysvětlit, popsat důvody.
3) Aplikace	Umět použít, sestavit, vyřešit.
4) Analýza	Umět rozlišit a vyjmenovat části celku.
5) Syntéza	Umět shrnout, dokázat, vysvětlit důvody.
6) Hodnocení	Umět vyhodnotit a podrobit kritice.

1.3 Implementace slovních úloh v hodinách matematiky

Slovní úlohy a jejich řešení jsou základním obsahem vyučování matematice. Propojují totiž matematické poznatky s praxí a naplňují vzdělávací a výchovné cíle předmětu (viz oddíl 1.4). Řešení slovních úloh rozvíjí u žáků matematické, kognitivní a komunikační schopnosti. Klíčové k řešení slovních úloh je také porozumění textu úlohy, plán řešení a schopnost argumentace (Krpec, 2006). Komplexnost slovních úloh z nich dělá jedno z kritických míst matematiky na 2. stupni základní školy (Rendl et al., 2013).

Slovní úlohy mohou během vzdělávacího procesu plnit několik funkcí (Krpec, 2006: s. 94): *motivace nového učiva, ilustrace výkladu, získávání nových poznatků, procvičování a upevňování poznatků, prověřování zvládnutého učiva.*

V této práci se zaměřuji na prověřování zvládnutého učiva, konkrétně poměru a přímé úměrnosti.

Realizace slovních úloh ve výuce může nabývat rozličných podob dle aktivity žáka. Výsledky TIMSS Video Study 1999 (Hiebert et al., 2003) ukázaly, že rozdílná implementace slovních úloh v hodinách matematiky je jedním z důvodů rozličných výsledků žáků.

V nadcházejícím oddílu popíši některé typy implementací slovních úloh při výuce. Nejdříve se zaměřím na klasické zadání slovní úlohy a poté na jeho modifikace, které přispívají k podnětnější výuce.

Klasickým zadáním slovní úlohy mám na mysli zadání, u kterého žák hledá odpovědi na dané otázky. V metodě *Concept Cartoons* je úkolem žáků porovnávat rozdílné strategie řešení fiktivních žáků. *Problem posing* představuje metodu, kde se žáci spolupodílejí na tvorbě či přeformulování problému a jeho řešení. Poslední metodou, kterou zmíním, jsou slovní úlohy zadané *od konce*. V těchto úlohách je úkolem žáka na základě daného kontextu přijít na význam předloženého výpočtu. Z tohoto konceptu vycházejí i úlohy testované v této práci. Dále rozvedu jednotlivé metody podrobněji.

1.3.1 Klasické zadání slovní úlohy

Klasickým zadáním slovní úlohy mám na mysli běžnou slovní úlohu vyskytující se v učebnicích matematiky. Takováto úloha zpravidla obsahuje veškeré informace potřebné k řešení a otázku, na kterou žáci hledají odpověď.

Vondrová a Žalská v práci Rendla et al. (2013: s. 105 a 106) poukazují na žákovská přesvědčení týkající se řešení (klasických) slovních úloh, která je vedou k tomu, že nepoužijí zkušenosti z každodenního života. Žáci mají např. přesvědčení, že: *všechny úlohy mají řešení, všechny úlohy dokáží řešit, výsledkem je jedno číslo, k řešení úlohy* *stačí jen to, co je v ní napsáno, úvahy o věcech, o kterých se explicitně nemluví, se používat nemají a školní matematika nemusí být konzistentní s životem mimo školu.*

Slovní úloha Rýže použita v této práci by v klasickém zadání zněla takto:

Na tržišti si horolezci koupili 5kilový pytel rýže za 150 BOB. Na jednu porci počítají s 125 g rýže.

a) Kolik porcí rýže je v pytli?

b) Kolik BOB stojí jedna porce?

c) Kolik gramů rýže si mohou koupit za 1 BOB?

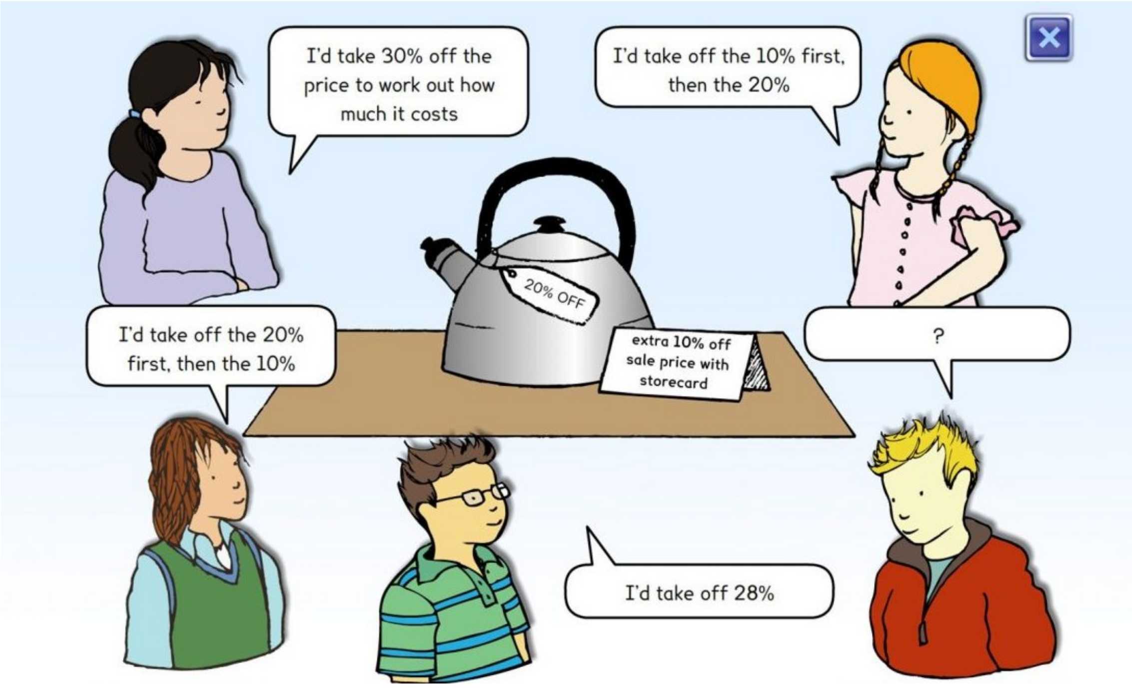
1.3.2 Concept cartoons

Concept Cartoons vznikl jako podpůrný vzdělávací nástroj pro přírodovědné vzdělávání na prvním a druhém stupni základní školy ve Velké Británii v 90. letech (Keogh, Naylor, 1993, cit. podle Samková, 2020: s. 64). Z přírodovědných předmětů se jeho používání rozšířilo i do matematiky (Dabell, Keogh, Naylor, 2008).

Jedná se o obrázek zobrazující určitou situaci s několika diskutujícími hypotetickými žáky. Komentáře jsou napsané ve formě komiksu a mohou být správné, špatné nebo neúplné. Prezentovaná chybná řešení ukazují nejpravděpodobnější chyby. Doporučené čtení komentářů hypotetických žáků je z levého horního rohu po směru hodinových ručiček. Jeden hypotetický žák může mít prázdnou bublinu, která indikuje nevyřčený komentář, a nechává tak prostor čtenáři pro jeho vlastní vyjádření. Úkolem žáka pracujícího s *Concept Cartoons* je rozhodnout, který z hypotetických žáků má pravdu a proč (Samková, 2020).

Keoght, Naylor a jejich kolegové vedli několik výzkumů, které potvrdily motivační roli *Concept Cartoons, a* ukázali, jak pomocí tohoto nástroje podpořit diskuzi ve třídě (Samková, 2020). Autoři *Concept Cartoons* (Keogh a Naylor) založili nakladatelství Millgate House zaměřující se na originální vzdělávací materiály, mimo jiné i na

Concept Cartoons. V originále (viz obrázek 3) nejsou hypotetičtí žáci na obrázku pojmenovaní, ale pro lepší orientaci v diskuzi doporučuje Samková je pojmenovat.



Obrázek 3: Ukázka Concept Cartoons: úloha na procenta (millgatehouse.co.uk)

Obrázek 3 ilustruje ukázku *Concept Cartoons* v jejím originálním znění. Uprostřed obrázku je zadán kontext problému a každý z vyobrazených žáků nám říká, jak by problém řešil. Kluk v červené mikině dává prostor žákovi vyjádřit svůj vlastní postup.

Výhoda *Concept Cartoons* je, že prezentuje řešení hypotetických žáků. Žáci jsou tak zbaveni obavy z prezentace vlastního řešení, se kterým si nemusí být jistí. Zároveň mají žáci před sebou různé strategie řešení k porovnání najednou, což je účinnější, než kdyby porovnávali strategie postupně (např. Durkin, Star, Rittle-Johnson, 2017, viz Vondrová et al., 2020, s. 97). V českém prostředí se touto problematikou zabývá Samková (2020), která se zaměřuje na využití *Concept Cartoons* v profesní přípravě budoucích učitelů prvního stupně základní školy.

1.3.3 Problem posing

Jako první představil pojem *problem posing education* Paolo Friere ve své knize *Pedagogy of the Oppresed*. Podstatou tohoto přístupu je, že žáci jsou v dialogu s učitelem a spolupodílejí se na tvorbě či přeformulování problému a jeho řešení (Fiere, 2005).

Několik autorů poukazuje na to, že existuje pozitivní vztah mezi schopností tvořit problémy a schopností je řešit. Žáci, kteří dokáží na základě daných podmínek předkládat problémy, je většinou dokáží i řešit. Opačná implikace ovšem platit nemusí (Martinez, Blanco, 2021).

Drew (2019) ve svém článku shrnuje základní myšlenky z knihy *Pedagogy of the Oppresed* (Fiere, 2005): Mezi výhody vzdělávání metodou *problem posing* patří především to, že se žáci učí spíše aktivním objevováním a zkoumáním nových znalostí než pasivním přijímáním informací. Vytváření a formulování nových problémů umožňuje žákům zkoumat vztahy mezi zadanými údaji a ovlivňovat vlastní učení. Žáci rozvíjejí své kreativní a kritické myšlení a dovednosti v oblasti řešení problémů. Diskuze a spolupráce ve třídě při řešení úloh metodou *problem posing* pomáhá k rozvoji komunikace a sociálního učení. Nevýhodou vzdělávání metodou *problem posing* může být vysoká kognitivní náročnost, která vyžaduje aktivní žáky.

Implementací *problem posing* v hodinách matematiky (v Thajsku) se zabývá práce Leunga (2013). Leung rozlišuje čtyři charakteristiky tvorby problémů v matematice (*problem posing*). Jednotlivé charakteristiky budu ilustrovat na otázkách, které si žáci mohli položit k řešení úlohy s tímto kontextem: Ve třídě je 10 chlapců a 20 dívek. (Leung, 2013)

- Práce s danými informacemi
  - Kolik dětí je ve třídě celkem?
  - Jaký je poměr chlapců k dívkám?
- Uvažování nad problémem

    - Jak se změní poměr chlapců k dívkám, jestliže celkový počet žáků ve třídě zůstane stejný, ale chlapců bude 11?
- Tvorba problému může nastat před, po či při řešení jiného problému
    - Po výpočtu všech žáků ve třídě, může vzniknout nová otázka. Např. Jaké je procento chlapců ve třídě?
- Problém není dostatečně specifikovaný, či je nemožný
    - Pokud bylo 25 lahví rozděleno mezi 10 chlapců a 20 dívek a každý žák dostane jednu, kolik lahví zbývá?

V českém prostředí se problematikou *problem posing* zabývají Tichá a Hošpesová (2013), které se zaměřují na výuku budoucích učitelů prvního stupně základní školy. *Problem posing* v jejich práci představuje především vhodný způsob, jak seznámit učitele základní školy s výukou matematiky. Ve svém výzkumu došly k závěrům, že *problem posing* podporuje hlubší zkoumání matematického obsahu. Během *problem posing* se studenti naučili identifikovat důležité matematické ideje a plánovat, jak reagovat na návrhy žáků. Během společné reflexe získali studenti hlubší porozumění a přehled možných přístupů, reprezentací a interpretací daného kontextu.

Martinez a Blanco (2021) zkoumali pomocí *problem posing* znalosti různých významů zlomků u 11 až 12letých žáků. K adekvátnímu porozumění zlomkům je totiž důležité porozumět jeho rozličným grafickým reprezentacím a významům v různých kontextech.

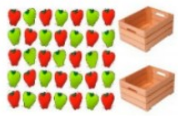
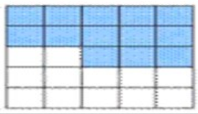
Martinez a Blanco (2021) rozlišili pět hlavních významů zlomků:

- **část celku**
    - se spojitou jednotkou: Jedná se o nejzákladnější a nejčastější význam zlomku. Odkazuje na celek rozdělený na stejné části a označuje vztah mezi částmi a celkem. Např: Pepa snědl jednu osminu pizzy.
    - s oddělenými jednotkami – část sady: Jedná se o sadu předmětů rozdělených do částí se stejným počtem položek. Např. 2/6 pastelek je modrých.

- **podíl (quotient)**
    - Tento význam se používá v kontextech distribuce, kdy je celek rozdělen na několik částí.
    - dělení dvou čísel: Celek a části mají rozdílné jednotky. Např: Rozdělení dvou tabulek čokolády mezi tři děti.
    - racionální číslo: Celek a části mají stejné jednotky. Např: Padesát litrů moštu je rozlito do láhví o objemu ¾ litru.
- **poměr (ratio):** Jedná se o porovnání dvou různých nebo stejných veličin. Pro mnoho žáků představuje tento význam problém, protože se obvykle zobrazuje jako výpočet odpovídajícího algoritmu bez grafického znázornění. Např: Porovnej množství penálů a tužek.
- **Operátor:** V tomto významu působí zlomek na množství prostřednictvím dělení a násobení. Často bývá vnímán jako algoritmus bez porozumění. Např: Otesánek snědl ¾ z 12 koláčů.
- **Míra:** Tento význam vyplývá z porovnání množství ku množství daném konkrétním modelem. Např: Láhev je naplněna do dvou třetin svého objemu.

Na základě teorie významů zlomků vytvořili tvůrci několik grafických reprezentací, ke kterým žáci měli vytvářet úlohy *(problem posing)*. Ukázka těchto grafických reprezentací je znázorněna v obrázku 4. Grafické prostředky reprezentovaly interpretace a význam zlomků například pomocí modelu pizzy, čokolády, osy a výpočtu.

Martinez a Blanco (2021) dospěli k závěru, že k přibližně polovině předložených grafických prostředků byl správně vytvořen požadovaný problém. Většina problémů byla vytvořena s významem zlomku **část celku**, i když předkládané grafické prostředky naznačovaly jiný význam. Většina (70 %) žáků správně vyřešila problém, který si stanovila (Martinez, Blanco, 2021).

Reference Given	Type of Reference	Type of Problem Expected
	Visual reference: image	Part-set
	Visual reference: image	Division of two numbers
	Visual reference: image	Rational number
	Visual reference: graphic representation	Part-whole

Obrázek 4: Ukázka reprezentací, ke kterým měli žáci vymyslet úlohu (Martinez, Blanco, 2021)

V mém výzkumu měli žáci také vymýšlet význam k danému výpočtu, ale na základě kontextu zadané slovní úlohy. Jedná se tedy vlastně o *problem posing* s daným kontextem, který podrobně popíšu v následujícím oddílu.

1.3.4 Slovní úlohy *od konce*

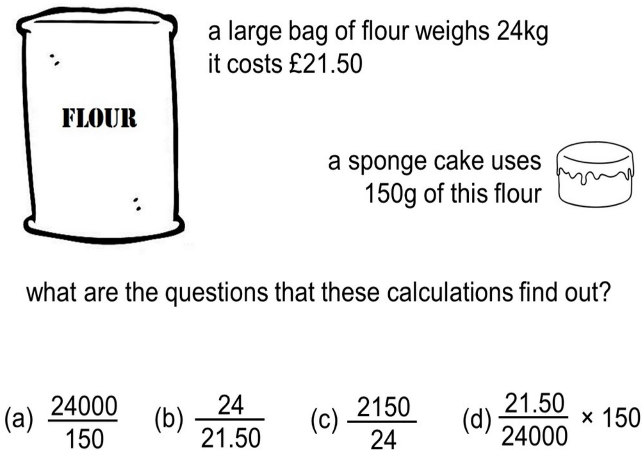
Argumentace a interpretace matematického zápisu patří mezi kompetence, které mají žáci při hodinách matematiky rozvíjet. Uvedená modifikace klasického zadání (obrázek 1) přispívá k hledání souvislostí a hlubšímu přemýšlení nad zadaným problémem.

Modifikace klasického zadání spočívá v uvedení kontextu slovní úlohy a řešení (výpočtu). Úkolem žáků je zjistit, co daným výpočtem získáme, resp. na jakou otázku výpočet odpovídá. Při rozhovorech se žáky je kladen důraz na argumentaci a zdůvodňování (Slavíčková, 2021). Pro tento typ úloh používá Slavíčková termín zadání *od konce*.

Slavíčková ve svém příspěvku na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2021 představila dvě ukázky takovýchto úloh (obrázek 1) a shrnula důvody, proč by se s nimi budoucí učitelé měli seznámit. Výzkum zabývající se aplikací těchto úloh do výuky jsem žádný nenašla, tuto práci lze tedy považovat za explorativní.

Pro tuto práci byla stěžejní slovní úloha zmíněná na obrázku 1, která mě inspirovala k tvorbě a zkoumání obdobných úloh v praxi. V obrázku 5 uvádím její originální znění. Takto zadaná slovní úloha je mnohem náročnější než klasická slovní úloha. K jejímu úspěšnému řešení je potřeba si uvědomit několik souvislostí, například roli zlomku jako operátoru (tzn. jiné vyjádření dělení), převod jednotek a význam pořadí čísel ve vzájemném poměru.

Daný výpočet eliminuje chyby vzniklé matematizací problému a žáci jsou nuceni se zamyslet nad vztahem mezi čísly ve výpočtu. Při tvorbě otázek se rovněž rozvijí kreativita a argumentace o správnosti řešení a schopnost diskuze možných interpretací. Důraz je tedy více kladen na proces vymýšlení významu výpočtu než na jeho výsledek.



Obrázek 5: Mouka, ukázka úlohy zadané od konce (Steward, 2015)

1.4 Ukotvení v RVP

Rámcový vzdělávací plán vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace je rozdělen do několika tematických okruhů. Slovní úlohy na poměr spadají do tematického okruhu Číslo a proměnná, kde si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách (MŠMT, 2021: s. 30):

- *dovednost provádět operaci*
- *algoritmické porozumění* (důvod daného postupu)
- *významové porozumění* (propojení operace s reálnou situací)

Mezi klíčové kompetence dané oblasti patří mimo jiné: využívání matematických poznatků v praxi, srozumitelná a věcná argumentace a rozbor problému a plán řešení (MŠMT, 2021: s. 30 a 31).

Otázka je, nakolik jsou všechny tři složky aritmetických operací a klíčové kompetence naplněny. Ze žákovských řešeních testovaných úloh zaměřených na poměr a přímou úměrnost můžeme například zjistit, jak rozumějí dané problematice, jak po algoritmické tak významové stránce. Testované úlohy totiž obsahují kontext a početní řešení. Úkolem žáků je zjistit, co daným výpočtem získáme. Žáci si také rozvíjejí schopnost argumentovat, když mají své řešení zdůvodnit.

Práce s poměrem a měřítky map je zahrnuta v očekávaných výstupech v devátém ročníku ZŠ. Učivo o poměru zahrnuje měřítko, úměru a trojčlenku (MŠMT, 2021). Očekává tedy, že trojčlenka bude patřit mezi použité strategie řešení. Přímá úměrnost se běžně probírá v sedmém ročníku ZŠ.

1.5 Shrnutí teoretických východisek

Při tvorbě úloh jsem vycházela z parametrů obtížnosti slovních úloh a souvisejících výzkumů. Zaměřila jsem se na parametr nadbytečné informace v obrázku a číslo v roli operátoru a antisignálu.

K řešení slovní úlohy vedou různé cesty: aritmetické, algebraické či grafické. Mezi grafické způsoby řešení patří i využívání schémat struktury slovní úlohy. Procesy, fáze a strategie řešení mi jsou podkladem pro analýzu žákovských řešení.

Typy strategií řešení slovních úloh můžeme shrnout takto: pokus, přímý způsob a heuristické strategie. Mezi přímý způsob řešení řadím použití algoritmu (trojčlenky) a rozložení výpočtu na dvě části. Heuristické strategie, které je možné využít při řešení testovaných úloh, zahrnují strategie: analogie, pokus – ověření – korekce a zavedení pomocného prvku.

Se slovními úlohami lze ve třídě pracovat různým způsobem. V oddílu 1.3 popisuji implementace slovních úloh pomocí: klasického zadání, C*oncept Cartoons, problem posing* a zadání *od konce* použitého v této práci.

Úloha zadaná *od konce* je náročnější než úloha zadaná pomocí klasického zadání. Modifikace klasického zadání spočívá v uvedení kontextu slovní úlohy a výpočtu. Úkolem žáků je zjistit, co daným výpočtem získáme, resp. na jakou otázku výpočet odpovídá, a své tvrzení odůvodnit.

Zdůvodňování významu výpočtu je kognitivně jeden z nejkomplexnějších cílů dle Bloomovy taxonomie. Při hledání významu výpočtu je potřeba jak porozumění matematickému výpočtu, tak analýza a syntéza informací. Tvorbou hledaných otázek mohou žáci rozvíjet kreativitu, schopnost argumentovat o správnosti řešení a schopnost diskutovat o možných interpretacích.

Argumentace a interpretace matematického zápisu patří mezi kompetence, které mají žáci při hodinách matematiky rozvíjet. Uvedená modifikace klasického zadání přispívá k hledání souvislostí a hlubšímu přemýšlení nad zadaným problémem. U takto zadaných slovních úloh si musí žáci uvědomit mnoho souvislostí, např. převody jednotek, zlomek v roli operátoru (jako jiný zápis dělení) a pořadí čísel ve vzájemném poměru. V úlohách pracuji s poměrem a přímou úměrností. Přímá úměrnost se běžně učí v 7. ročníku a je v očekávaných výstupech RVP, výzkumný vzorek proto tvoří žáci 7.– 9. ročníku.

2 Praktická část

Cílem výzkumu je popsat, jakým způsobem žáci uvažují při řešení specifického typu úloh (viz oddíl 1.3.4). Konkrétně bude zjišťováno, jaké strategie žáci volí a jaké obtíže se při řešení objevují.

V první fázi budou se žáky vedeny rozhovory nad jejich řešením zadaných slovních úloh. Rozhovory budou následně přepsány a analyzovány pomocí dílčích otázek výzkumu vycházejících z teorie fází a strategií řešení slovních úloh.

V druhé fázi výzkumu budou tytéž úlohy zadány žákům při výuce matematiky k písemnému vypracování. Na základě jejich prací budu sledovat:

I. obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení

II. odpovědi na některé z dílčích otázek výzkumu a jejich četnost

Na základě výsledků z obou fází zformuluji možné obtíže a přínosy zavedení podobných úloh do výuky matematiky.

2.1 Tvorba úloh a pilotní studie

Test se skládá ze tří nezávislých úloh, kde každá úloha má tři různé výpočty, ke kterým je potřeba nalézt požadované otázky (viz oddíl 1.3.4). Nezávislostí úloh mám na mysli, že není potřeba vyřešit předchozí úlohu, abychom mohli řešit jinou.

Obsahově se jedná o úlohy na poměr a přímou úměrnost. Předpokládanou znalostí a dovedností žáků je práce s přímou úměrností a poměrem. Formulace úloh klade důraz na uvědomění si souvislostí, jako je např. převod jednotek, zlomek v roli operátoru (jako jiný zápis dělení) a pořadí čísel ve vzájemném poměru. Z devíti zadaných výpočtů lze trojčlenku aplikovat jen u dvou, zbylé se ptají na porozumění vztahu mezi zadanými údaji.

Aplikaci poměru a přímé úměrnosti jsem se snažila zasadit do situace inspirované skutečností, a přiblížit tak kontext těchto slovních úloh žákům. Celý test je zarámovaný příběhem horolezců, kteří jedou na expedici do Bolívie. Postupně čelí třem problémům. Nejdříve si mění peníze (úloha Měna). Poté nakupují na tržišti pytel rýže (úloha Rýže) a na závěr se potýkají s mapou bez měřítka (úloha Mapa). V každé úloze jsou tři výpočty *a* až *c*, které jsou postupně gradované (první úkol je nejsnadnější). Na jednotlivé výpočty se v textu odkazuji podle pořadí úlohy, např. 1c odpovídá třetímu výpočtu v úloze Měna. Pořadí úloh v testu je dáno příběhem.

Při tvorbě testu jsem nejprve vytvořila kontext jednotlivých slovních úloh. Na ten jsem vymyslela několik vhodných otázek s výpočty a následně vybrala ke každé úloze jen tři výpočty, ke kterým žáci měli zjistit význam. Na závěr jsem seřadila výpočty v úlohách dle subjektivní obtížnosti.

Jako první z testových úloh vznikla úloha Rýže. Strukturou je totožná s úlohou Mouka (viz oddíl 1.3.4). Zadání je strohé bez informací navíc, mělo by se tak jednat o nejsnadnější úlohu. Úlohy Mapa a Měna by se daly považovat za úlohy s chybějícím údajem, který je však možné dopočítat. V úloze Měna není vztah korun k BOBům přímo definován, ale ze zadaných poměrů daných měn k dolaru ho lze odvodit. V úloze Mapa není uvedeno měřítko mapy, ale jen potřebný poměr vzdáleností.

Další úlohy jsem tvořila s přidaným parametrem zvyšujícím obtížnost úlohy. Chtěla jsem využít antisignálu, obrázku a informace navíc. Nejvíce jsem se zamýšlela nad využitím obrázku. V úloze Měna by plnil funkci zopakování důležité informace ze zadání a zároveň zobrazení informace navíc, zatímco v úloze Mapa by zobrazoval rozmístění jednotlivých míst. Obrázek jsem nakonec použila v úloze Měna. V úloze Mapa jsem se rozhodla sledovat, zda si žáci sami udělají schéma situace s rozmístěním daných míst na mapě.

Při výběru jednotlivých výpočtů jsem se zaměřila na *převrácený* poměr, něž je obvyklé. Sleduji tím, zda si žáci uvědomí rozdíl v pořadí údajů, které mají mezi sebou vydělit, např. u výpočtu 1a vyjde žákům, že BOB tvoří sedminu dolaru.

Obtížnost a řešitelnost opačného procesu, tzn. tvorby otázky k výpočtům jsem nejprve testovala na čtyřech kamarádech a bratrovi, který chodí do 3. ročníku osmiletého gymnázia. Pilotní rozhovory jsem nenahrávala, ale psala jsem si při nich poznámky.

S bratrem jsme komunikovali on-line, což se ukázalo jako nevyhovující. Při on-line rozhovoru totiž nevidím, co žák píše do papírového zadání, a bratr psal význam výpočtů rovnou do počítače, čímž se ochudil o možnost grafického znázornění. Psaní myšlenek a mezivýpočtů rukou je důležité, protože poskytuje širokou škálu grafického vyjádření, které je na počítači omezené.

Až na závěr této pilotní studie jsem si uvědomila, že složení probandů nebylo nejvhodnější. Všichni byli totiž seznámeni s horolezeckou tematikou a zkratka BC jim nebyla cizí. Na základě této pilotní studie a připomínek vedoucí práce jsem upravila test do finální podoby.

Především jsem poupravila zadání úlohy Měna a Mapa a každou úlohu jsem dala na samostatnou stránku, aby žáci měli dostatek místa na poznámky. V původním znění chyběl v úloze Měna obrázek a informace navíc byla zapsána do textu. Zároveň jsem si uvědomila chybu ve významu výpočtu 1c, kde jsem měla v otázce obrácený poměr.

V úloze Mapa došlo ve finální verzi k nahrazení zkratky BC (Base Camp) názvem města a k doplnění úvodní věty: *Cílem expedice je vylézt na nejvyšší horu Bolívie, Sajamu.*

Na základě pilotní studie jsem se rozhodla před zadáváním testu projít se žáky vzorový příklad sestávající z převrácených zlomků. Mělo by jim to pomoci si uvědomit význam obou poměrů. Zadání vzorového příkladu znělo takto:

Pět čokolád stojí 100 Kč. Na jakou otázku by byla odpověď $\frac{100}{5}$ a $\frac{5}{100}$?

$\frac{100}{5}$ cena/množství $\rightarrow$ **Jaká je cena jedné čokolády?**

$\frac{5}{100}$ množství/cena →**Kolik (jakou část) čokolád si můžeme koupit za 1 Kč?**

Při řešení testovaných úloh se tak mohli žáci analogicky vracet k významu jednotlivých tvarů zlomků nebo se rozpomenout, co je podstatné při řešení úloh o kurzu měny či při práci s mapou.

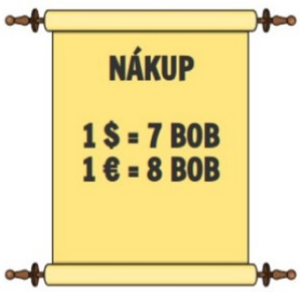
Dále popíši didaktickou analýzu jednotlivých úloh. U každé úlohy uvádím její zadání, záměr, vzorové řešení, správnou odpověď a očekávanou chybu žáků.

2.2 Didaktická analýza úloh

1) MĚNA

Horolezci jedou na expedici do Bolívie. V Bolívii nelze směnit české koruny za bolivijský BOB, proto si horolezci v ČR koupili 500 dolarů za 10 500 Kč.

Za 100 dolarů ve směnárně dostali 700 BOB.



Odpověď na jakou otázku získáme následnými výpočty?

a) $\frac{100}{700}$ b) $\frac{10\,500 \cdot 100}{500}$ c) $\frac{10\,500 \cdot 100}{500 \cdot 700}$

Obrázek 6: Zadání úlohy Měna

Úloha Měna je zaměřena na práci se směnným kurzem. Obrázek má zde dvojí roli. Na jednu stranu zdůrazňuje podstatnou informaci ze zadání, na druhou stranu obrázek znázorňuje i nepodstatnou informaci navíc. Touto úlohou sleduji, zda si žáci dokáží vybrat podstatné informace ze zadání a zda rozumí směnným kurzům. Předpokládám, že si žáci vypíší podstatné informace ze zadání a zamyslí se nad tím, že by bylo dobré zjistit např. kurz jednotlivých měn.

Za pomocný prvek v úloze Měna budu považovat výpočet počtu korun v dolaru. Tohoto pomocného prvku mohou žáci využít při strategii rozložení výpočtu 1b a 1c na dvě části.

Vzorové řešení úlohy Měna

Zápis z kontextu úlohy:

500 $ …… 10 500 Kč $\quad$ *1 $ =* $\frac{10\,500}{500}$ *= 21 Kč*

100 $ …… 700 BOB $\quad$ *1 $ =* $\frac{700}{100}$ *= 7 BOB (tento údaj je i v obrázku)*

Na základě údajů ze zadání jsme získali směnný kurz: *1 $ = 21 Kč = 7 BOB.*

1a Zlomek vyjadřuje poměr dolaru ku BOBům. V pilotní studii většina probandů odpověděla, že se jedná o směnný kurz BOBů a dolarů. Když jsem se jich zeptala *Kurz čeho ku čemu?*, *d*okázali po chvíli přemýšlení zdůvodnit správný význam daného výpočtu.

Hledaná otázka proto zní: **Kolik dolarů je 1 BOB?** Alternativní znění otázky se stejným významem může být např. Jakou část dolaru tvoří jeden BOB?

Za chybnou odpověď považuji: Kolik BOBů je dolar? Na základě pilotní studie usuzuji, že právě tyto „převrácené“ zlomky budou dělat žákům problém. Bratr například odpověděl: *1a) 100/700 Kolik BOB se rovná jednomu dolaru? -> 1dolar = 7BOB*

1b $\frac{10500 \cdot 100}{500}$ Tento výpočet je klíčový k nalezení významu k výpočtu 1c.

První způsob řešení vychází z použití trojčlenky. K aplikaci trojčlenky je potřeba si nejdříve uvědomit význam třech čísel ve výpočtu a fakt, že kurz dvou měn je neměnný.

Při přímém způsobu řešení žák výpočet nejprve upraví na trojčlenku a každému jejímu členu včetně *x* přiřadí význam. Tím zjistí význam výpočtu.

Výpočet 1b lze do trojčlenky upravit dvěma způsoby: $x = \frac{10\,500 \cdot 100}{500}$

$$\frac{x}{100} = \frac{10\,500}{500} \quad \text{nebo} \quad \frac{x}{10\,500} = \frac{100}{500}$$

x	………	*10 500 Kč*	*x*	………	*100 dolarů*
100 dolarů	………	*500 dolarů*	*10 500 Kč*	………	*500 dolarů*

Z obou zápisů trojčlenky plyne, že hledané *x* znamená počet Kč za 100 dolarů. Hledaná otázka by tedy zněla: **Kolik korun jen 100 dolarů?** Ze zadání víme, že 100 dolarů je 700 BOBů. Takže se můžeme také zeptat: Kolik korun je 700 BOBů?

Další přímý způsob řešení vychází z rozložení výpočtu na dvě části. Nejprve si určíme význam části složené ze dvou čísel a poté provedeme operaci se zbývajícím číslem ve výpočtu. Daný výpočet lze rozdělit třemi způsoby:

i) $\frac{10\,500}{500} \cdot 100$ ii) $10\,500 \cdot \frac{100}{500}$ iii) $(10\,500 \cdot 100) \div 500$

U prvního způsobu rozložení si určíme nejprve význam poměru $\frac{10\,500}{500}$.

To vyjadřuje poměr korun ku dolarům, tedy cenu jednoho dolaru. Poté násobíme 100, takže hledaný význam celého výpočtu je: Jaká je cena (v Kč) za 100 dolarů?

U druhého způsobu rozložení $\frac{100}{500}$ vyjadřuje 100 dolarů děleno 500 dolary. Jednotky (dolary) jsou stejné, tedy stačí zlomek zkrátit. Uvědomíme-li si, že 10 500 je cena v Kč za 500 dolarů, vidíme že vynásobením 1/5 získáme cenu za 100 dolarů.

Třetí způsob rozdělení výpočtu na dvě části vychází se součinu čísel v čitateli. To nám určí cenu 50 000 dolarů v korunách. Po vydělení číslem 500 opět dojdeme k požadovanému významu ceny 100 dolarů v korunách.

1c $\frac{10500 \cdot 100}{500 \cdot 700}$ Klíčové je si uvědomit, jak se tento výpočet liší od výpočtu 1b.

Jestliže toto žák neudělá, ale přesto rozpozná, co jaké číslo znamená, tak by měl dojít k závěru, že tento číselný výraz vyjadřuje poměr korun ku BOBům. Respektive: **Kolik korun je 1 BOB?**

Očekávám, že právě větší výskyt čísel ve výpočtu bude pro žáky matoucí. Touto úlohou sleduji, zda žáci umí pracovat s úpravou zlomků a trojčlenky a zda si uvědomí, v jakých jednotkách jim vyjde výsledek.

2) RÝŽE

Na tržišti si horolezci koupili 5kilový pytel rýže za 150 BOB. Na jednu porci počítají s 125 g rýže.

Odpověď na jakou otázku získáme následnými výpočty?

a) $\frac{5\,000}{125}$ b) $\frac{150 \cdot 125}{5\,000}$ c) $\frac{5\,000}{150}$

Obrázek 7: Zadání úlohy Rýže

Cílem úlohy je zjistit, zda žáci rozumí vztahům mezi čísly v zadání a zda dokáží pracovat s poměrem a trojčlenkou.

Vzorové řešení úlohy Rýže

2a Klíčové je si uvědomit převod jednotek, tzn. že 5 kg = 5 000 g.

Otázka je pak přímočará: **Kolik porcí rýže je v pytli?**

2b Tři čísla ve zlomku a vztah přímé úměrnosti mezi cenou a váhou by měl žáky navést na použití trojčlenky. K tomu je dovede i zápis podstatných informací ze zadání:

5 kg = 5 000 g ……… 150 BOBů

125 g ……… x BOBů

Po vyjádření *x* získáme požadovaný výpočet. Hledaný údaj je cena za 125 g, což je hmotnost porce. Otázka tedy zní: **Kolik BOBů stojí jedna porce?**

I bez použití trojčlenky lze dojít k závěru, že údaj, který nám v zadání chybí, je cena jedné porce.

2c $\frac{5\,000}{150}$ Vyjadřuje váhu ku ceně. Tedy: **Kolik gramů rýže si můžeme koupit za 1 BOB?**

3) MAPA

Cílem expedice je vylézt na nejvyšší horu Bolívie, Sajamu. Na tržišti v La Paz sehnali horolezci dokonce i papírovou mapu oblasti, ve které se Sajama nachází. Mapa ovšem byla bez měřítka. Věděli, že vzdálenost vzdušnou čarou z La Paz do Patacamaya je 50 km, což odpovídalo 25 cm na mapě. Patacamaya je vzdušnou čarou od La Paz pětkrát dále než vrchol Sajamy od Patacamaya.

Odpověď na jakou otázku získáme následnými výpočty?

a) $\frac{5\,000\,000}{25}$ b) $\frac{25}{5}$ c) $\frac{25}{50}$

Obrázek 8: Zadání úlohy Mapa

V této úloze sleduji, zda žáci umí pracovat s měřítkem mapy a zda si vytvoří situační plán úlohy. Výpočet 3a míří přímo na pochopení měřítka. V úloze Mapa není přímo zadáno měřítko mapy, ale jen údaje k němu vedoucí.

Cizí názvy měst a dlouhé zadání dělají text obtížnější. V poslední větě je použit multiplikativní operátor v roli antisignálu: … *La Paz od Patacamaya ... odpovídá 25 cm na mapě … což je pětkrát dále než Sajama od Patacamaya.* V tomto případě se jedná o antisignál, protože „pětkrát dále“ evokuje opačnou operaci (násobení), než by měla být provedena v řešení úlohy.

Při popisu žákovských řešení se zaměřím nejen na použité strategie řešení, ale i na způsob, jakým byly použity. V úloze Mapa by byl příhodný obrázek vyjadřující situaci rozložení jednotlivých míst, ale nechávám na žákovi, zda si ho na základě textu sám vytvoří.

Za pomocný prvek tedy budu považovat vyjádření měřítka mapy na základě výpočtu 3a či údajů ze zadání a jeho využití při kontrole významu výpočtu 3c. Očekávám, že obtíže bude dělat poslední výpočet, který vyjadřuje obrácený poměr, než je zvykem, a k tomu čísla s různými jednotkami.

Vzorové řešení úlohy Mapa

Zápis z kontextu úlohy:

La Paz – Patacamaya	……………….	*50 km*
50 km (vzdušnou čarou)	……………….	*25 cm (na mapě)*
Patacamaya – La Paz	*je 5krát dále než*	*Sajama – Patacamaya*

3a $\frac{5\,000\,000}{25}$ Znamená cm ve skutečnosti ku cm na mapě.

Otázka tedy zní: **Kolika cm ve skutečnosti odpovídá 1 cm na mapě?**

Na základě pilotní studie považuji za problematickou otázku: Jaké je měřítko mapy? Při rozhovoru se případně žáků můžu doptat, jak takové měřítko vypadá v porovnání s výpočtem. Měřítko mapy se totiž udává v tomto poměru: vzdálenost na mapě ku skutečné vzdálenosti, oba údaje ve stejných jednotkách. Při rozhovorech jsme si tuto nejasnost mohli se žáky objasnit, ale při písemných odpovědích nelze zjistit, zda žák vnímá rozdíl v pořadí čísel v poměru.

3b $\frac{25}{5}$ Vzdálenost 25 cm na mapě dělíme 5.

Jmenovatel zlomku není přímo napsán v zadání a může proto žáky zmást. Jeho přepis je skryt za … *pětkrát dále než*… daný zlomek tedy vyjadřuje vzdálenost Sajamy od Patacamaya. Respektive: **Jak daleko na mapě v cm je vrchol Sajamy od Patacamaya?**

K pochopení situačního modelu je vhodné si udělat náčrtek situace rozložení zmíněných míst na mapě. V kontextu úlohy není přímo řečeno, zda se se La Paz, Patacamaya a Sajama nacházejí v jedné přímce, ale k řešení úlohy to není podstatné.

Předpokládám, že většina chybných řešení bude vycházet z práce s výsledkem daného výpočtu bez ohledu na význam čísel, z kterých vychází. Tzn. žáci budou hledat význam čísla 5, což je může navézt na *Patacamaya je od La Paz pětkrát dále.* Pochybuji, že z tohoto významu budou schopni vytvořit hledanou otázku.

3c $\frac{25}{50}$ Tento zlomek vyjadřuje poměr cm na mapě ku km ve skutečnosti.

Kolika cm na mapě odpovídá 1 km ve skutečnosti?

Běžná otázka typových úloh zní: Kolik km ve skutečnosti představuje 1 cm na mapě? Myslím si proto, že tento převrácený poměr bude dělat žákům problém. Jestliže žáci nalezli význam výpočtu 3a, mají již měřítko mapy, podle kterého si mohou význam výpočtu 3c zkontrolovat.

Podle rozdělení významů zlomků dle (Martinez, Blanco, 2021) se v mnou vytvořených úlohách vyskytuje šest výpočtů (1a, 2a, 2c, 3a, 3b, 3c), které vyjadřují převážně poměr dvou čísel o různých jednotkách. Výpočet 2a vyjadřuje podíl čísel o stejných jednotkách (gramech), můžeme ho tedy považovat za význam zlomku jako racionálního čísla. Výpočet 3b vyjadřuje část celku, což ovšem ze zadání úlohy není tak zřejmé. Na ostatní výpočty, které jsou ve významu poměru, by se dalo nahlížet i jako na dělení dvou čísel.

U všech úloh je klíčové si udělat zápis podstatných informací a představit si, o co v dané situaci jde. Provádění zkoušky je u těchto úloh zcela na místě, protože vytváření postupu výpočtu k již známé otázce je snadnější než opačný proces, který po žácích požaduji.

Mezi nejčastější strategie řešení v pilotní studii patřilo přiřazení významu jednotlivým číslům a následné nalezení výsledku výpočtu. Bratr například u všech výpočtů zjistil jejich výsledek, ale ani to mu nezabránilo udělat chybu v prohození poměru zadaných čísel (viz výpočet 1a).

Při pilotní studii se ukázalo, že takovéto úlohy vyžadují velkou kognitivní práci a prohlubují zájem o zadaný problém. Probandi o úlohách vášnivě diskutovali i po skončení pilotáže.

Až při opravě písemných prací jsem si uvědomila, že úlohy v testu nejsou psány v jednotném čase. Některé slovní úlohy jsou v přítomném čase, jiné v minulém. Měnit zadání už ale nemělo smysl a myslím si, že na žákovská řešení to nemělo vliv.

2.3 Průběh výzkumu a sběr dat

Po pilotní studii, která proběhla během dubna, jsem se rozhodla vést rozhovory se žáky primárně osobně. Osobní rozhovor nad řešením psaným rukou nemůže být plně nahrazen on-line rozhovorem. Vzhledem k epidemiologické situaci jsem k testování využila žáky, se kterými jsem byla v přímém kontaktu i z jiného důvodu. Se všemi testovanými žáky, se kterými proběhl přímý rozhovor, se znám již delší dobu.

V průběhu května jsem vedla rozhovory nad řešením s Filipem, Luckou, Petrem a Klárou ze 7. ročníku a s Eliškou a Filipem z 9. ročníku ZŠ. Rozhovory byly nahrány a následně přepsány (místo jmen jsou v přepisu použity iniciály). Písemné řešení žáků jsem si ponechala k pozdější analýze.

Žáci byli vybídnuti, ať okomentují svá řešení až budou chtít. Bylo tedy na nich, zda se nejprve pokusí vyřešit všechny úlohy, či jestli se mnou budou sdílet svůj postup průběžně během řešení.

Všichni, až na Lucku, komentovali svůj postup během řešení úloh. Vysvětluji si to tím, že se tak ubezpečovali, že jsou na správné cestě. Během rozhovoru se tak jejich strategie řešení měnila dle dotazů, které jsem jim kladla. Z počátku si například nekontrolovali své odpovědi, ale postupem času prováděli kontrolu hledaného významu bez vyzvání.

Během rozhovoru si zřejmě uvědomili i některé dříve opomenuté souvislosti, a vraceli se tak k již vyřešeným výpočtům.

Žáci měli dostatek času k řešení. Všechny nahrané rozhovory trvaly hodinu až hodinu a půl. Někteří žáci (Eliška s Markem) si po skončení testování přáli vysvětlit jimi nepochopenou problematiku úlohy Mapa.

Rozhovor s Klárou a Petrem jsem nahrávala zároveň. Úlohy totiž řešili samostatně ve stejný čas a na stejném místě. Mohla jsem tak využít jejich rozdílných postupů a výsledků ke vzájemné diskuzi.

S žákyní Luckou jsem komunikovala on-line. Sice psala řešení rukou do vytištěného zadání, ale používala mazací pero, což jsem zjistila až při rozhovoru. Svoje chyby totiž místo škrtnutí mazala. Nemohla se z nich tedy poučit ona, ani nic vyčíst já.

V druhé části výzkumu (konec května) jsem poskytla úlohy učiteli na šestiletém gymnáziu, aby je dle mých pokynů zadal žákům v odpovídajících ročnících. Učitel nechtěl se žáky vést diskuzi nad jejich řešením, ale poskytl mi alespoň žákovská řešení k analýze.

Všichni žáci mohli řešit úlohy v libovolném pořadí a jak dlouho potřebovali. K dispozici měli jen tužku a papír se zadáním. Po instrukcích jim byl vysvětlen vzorový příklad (viz oddíl 2.1), který byl ponechán na tabuli i se vzorovými otázkami, významem výpočtů.

Kvůli zachování soukromí testovaných žáků jsou jejich jména pozměněna. Pohlaví a ročník je ovšem zachován. Zákonní zástupci žáků, se kterými jsem vedla rozhovory, písemně souhlasili se zpracováním dat.

2.4 Analýza dat

V první fázi výzkumu byly s vybranými žáky nad jejich řešeními vedeny rozhovory, které byly nahrávány. Při analýze rozhovorů a písemných odpovědí žáků jsem se nejprve zaměřila na následující dílčí otázky inspirované parametry obtížnosti slovních úloh (oddíl 1.1.1), fázemi řešení slovních úloh dle Reussera (1985) a strategiemi řešení popsanými v oddílu 1.2:

1. Porozuměl žák textu slovní úlohy? Je mu popisovaný kontext slovní úlohy blízký?
2. Jaký situační model si žák vytvořil? Jakým způsobem si udělal zápis podstatných informací? Dokázal žák přiřadit k jednotlivým číslům jejich význam ze zadání úlohy?
3. Jak žák reagoval na obrázek v úloze Měna?
4. Jak pracoval žák s číselným výrazem? Upravoval ho?
5. Jakou strategii řešení žák použil?
6. Jak žák tvořil požadovanou otázku? Byl si jistý?
7. Jak provedl žák zkoušku správnosti hledaného významu? Jak reagoval na chybu?

Na závěr jsem se žáků ptala, jaká slovní úloha byla pro ně nejobtížnější, nejsnadnější a zda je něco překvapilo.

V druhé fázi výzkumu jsem se zaměřila na kvantitativní jevy vyskytující se v písemných pracích žáků. Na základě jejich písemných prací jsem sledovala:

I. obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení
II. odpovědi na některé (2.–7.) z dílčích otázek výzkumu a jejich četnost

Na základě výsledků z obou fází zformuluji možné obtíže a přínosy zavedení podobných úloh do výuky matematiky. Rozhovory jsou ovlivněny mým subjektivním pohledem. Snažila jsem se být objektivní, ale dokáži vnímat jen část reality, které přisuzuji určitou důležitost na základě svých zkušeností a znalostí. Mohlo se tedy stát, že jsem žáka navedla na stěžejní myšlenku tím, že jsem zopakovala jejich myšlenkové pochody jinými slovy.

2.5 Výsledky

Zjištěné výsledky z analýzy dat (oddíl 2.3) jsou strukturovány do dvou částí. V první části jsem se zaměřila na výsledky rozhovorů a v druhé části uvedu výsledky písemných prací.

Přehled celkových výsledků rozhovorů je uveden v tabulce 2 a celkové výsledky písemných prací se nacházejí v příloze 1. V obou částech výzkumu jsem v souhrnných tabulkách znázornila:

- správnost hledaného významu
- použití zápisu podstatných informací ze zadání
- vyznačení jednotek jednotlivých čísel ve výpočtu
- zapsání výsledku výpočtu
- charakter chybně vytvořené otázky (sémantickou a gramatickou správnost)
    - otázka na údaj ze zadání
    - otázka na opačný poměr
    - jazykově nekorektní otázka

Otázka na údaj ze zadání je taková otázka, na kterou lze odpovědět údajem napsaným přímo v zadání úlohy. Například na otázku *Za kolik dolarů dostali 700 BOBŮ?* můžeme přímo odpovědět údajem v poslední větě kontextu úlohy Měna: Za 100 dolarů ve směnárně dostali 700 BOB.

Otázka na opačný poměr je otázka, na kterou by byl odpovědí převrácený zlomek, než je ve výpočtu.

Jazykově nekorektní otázka je gramaticky či sémanticky špatně např. *Kolikrát je vzdušnou čarou vzdálenější La Paz od Patacamáji?*.

2.5.1 Výsledky rozhovorů

Přehled výsledků rozhovorů je znázorněn v tabulce 2, která mi je podkladem pro další analýzu.

Tabulka 2: Přehled výsledků rozhovorů

žák/yně		Eliška									Filip								
úloha		Měna			Rýže			Mapa			Měna			Rýže			Mapa		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
zápis	podstatné údaje	x	x	x															
	jednotky ve výpočtu			x		x				x	x	x	x				x	x	x
	výsledek výpočtu	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x
strategie	pokus					x	x												
	rozložení na části		x	x								x	x						
	analogie	x									x				x	x			
	pokus-ověření-korekce	x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	pomocný prvek		x	x								x	x						
otázka	údaj ze zadání																		
	opačný poměr															x			
	jazykově nekorektní							x	x								x		

žák/yně		Klára									Lucka								
úloha		Měna			Rýže			Mapa			Měna			Rýže			Mapa		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
zápis	podstatné údaje	x	x	x	x	x	x												
	jednotky ve výpočtu																		
	výsledek výpočtu										x			x		x	x	x	x
strategie	pokus	x	x		x						x	x	x	x	x	x	x	x	x
	rozložení na části																		
	analogie																		
	pokus-ověření-korekce																		
	pomocný prvek																		
otázka	údaj ze zadání	x									x	x	x		x	x	x		x
	opačný poměr																x		
	jazykově nekorektní											x	x					x	

žák/yně		Marek									Petr								
úloha		Měna			Rýže			Mapa			Měna			Rýže			Mapa		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
zápis	podstatné údaje										x	x	x	x	x	x			
	jednotky ve výpočtu																		
	výsledek výpočtu	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x			x	
strategie	pokus										x	x	x	x	x	x		x	
	rozložení na části					x													
	analogie	x			x	x													
	pokus-ověření-korekce	x	x	x	x	x	x	x	x	x									
	pomocný prvek																		
otázka	údaj ze zadání											x	x	x					
	opačný poměr																		
	jazykově nekorektní			x				x	x	x									

Zelená barva značí, že žák měl hledaný význam správně. Červenou barvou jsou vyznačeny chybné odpovědi a bíle jsou úlohy, které žák vynechal. Při rozhovorech docházelo k uvědomění žáků, že některé hledané významy nemají správně, a pokoušeli se je tedy opravit. Výsledná úspěšnost tedy není směrodatná, protože na základě rozhovorů docházelo ke zkoušce jednotlivých odpovědí a následné opravě. Důvod vyznačení správnosti odpovědi je tedy ten, že společně s použitými strategiemi a prací se zadáním můžeme vypozorovat efektivnost jednotlivých postupů a charakter chyby v hledaném významu výpočtu.

První otázka, na kterou jsem se v analýze rozhovorů zaměřila, se věnovala porozumění textu slovní úlohy. **Porozuměl žák textu slovní úlohy? Je mu popisovaný kontext slovní úlohy blízký?**

Z rozhovorů vyplynulo, že nejproblematičtější kontext měla úloha Mapa. Cizí názvy měst nedělaly žákům problém, spíše celkový kontext práce s měřítkem mapy. Jediný žák, kterému nebyla práce s měřítkem mapy cizí, byl Filip. Eliška s Markem sice rozpoznali, že se jedná o úlohu na měřítko mapy, ale neuměli s ním dostatečně dobře pracovat, aby úlohu vyřešili.

Eliška se dokonce po přečtení úlohy Mapa zděsila:

E: NÉ, to je měřítko!

Lucka považovala úlohu Mapa za nejsnadnější (přestože neměla správně vyřešený ani jeden význam výpočtu).

Petr s Klárou po povrchním přečtení poslední úlohu raději zcela vynechali.

T: Tak, co s tou mapou?

P: Vůbec ji nechápu.

T: Vy jste nedělali úlohy s mapou ve škole?

P: Ne.

T: A ani úlohy na poměr?

P: My jsme měli zrovna na supl učitele, kterej nás zrovna za ten půl rok nic nenaučil, takže – My se tomu věnujeme –

K: Jako jednu hodinu, ani ne.

P: No a tu jednu hodinu to bylo takový, že nám doslova nic neřekl.

K: Toho jsme měli na supl půl roku a on byl hroznej.

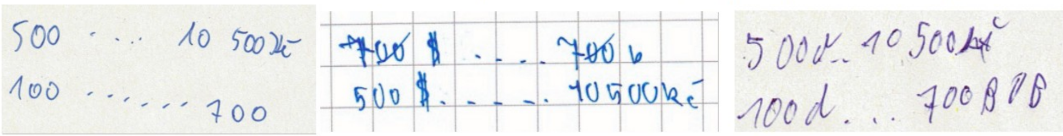
P: Nic nás nenaučil, no.

Od Petra jsem očekávala větší zapálení do řešení a poté, co jsem ho pobídla, ať to i přesto zkusí, tak se pokusil úlohu Mapa vyřešit.

Z rozhovorů je těžké zjistit, zda žák nepochopil celé zadání nebo si nedovedl představit jen jeho část. Úlohy jsou inspirované skutečností, aby si daný kontext dokázali žáci lépe představit. Každý žák má jiné zkušenosti (s výměnou peněz, měřítkem mapy …) a ne každý si dokázal pod kontextem úlohy představit danou situaci. Na souvislost testových úloh s realitou se ptala i Klára: T*y boby jsou reálný?*

V druhé otázce jsem se zaobírala tím, zda si žáci nějakým způsobem vyjádřili podstatné informace ze zadání. **Jaký situační model si žák vytvořil? Jakým způsobem si udělal zápis podstatných informací? Dokázal žák přiřadit k jednotlivým číslům jejich význam ze zadání úlohy?**

Překvapilo mě, že nikdo z nahrávaných žáků si neudělal zápis podstatných informací u všech úloh. Nejvíce žáků (všichni kromě Filipa s Luckou) si udělali zápis u úlohy Měna (obrázek 9).



Obrázek 9: Zápis podstatných informací z úlohy Měna (dílo Elišky, Marka a Petra)

Všichni sice dokázali i z ostatních kontextů úloh vybrat podstatné informace, ale nikam si je nepoznamenali.

Zaujalo mě, že Klára s Petrem měli sice zápis i u úlohy Rýže, ale očividně s ním moc nepracovali. Když jsem se jich ptala na důvod, proč si dělají zápis podstatných informací, tak mi odpověděli:

K: Já nevím, většinou ten zápis dělám jako první za ty body.

T: Vy dostáváte body za zápis?

K: Ano.

T: To (dělání si zápisů) asi má nějaký důvod.

P: Já si tam ty – teďka jsme dělali ty procenta a já si ty zápisy, já jsem vlastně udělal ten zápis a nějak jsem podle toho ani vlastně nijak nepočítal.

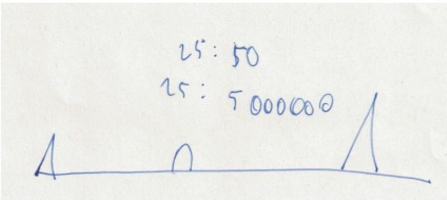
K: Taky ne.

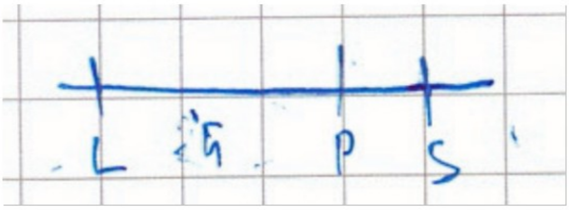
P: Jsem tam prostě udělal zápis a dostal jsem za to body a byl jsem spokojenej.

K: Nebo nám dávali body za to, že jsme měli náčrt, kterej nebyl míň než 1 cm.

Klára s Petrem tedy očividně dělají zápis podstatných údajů ze zadání úlohy, protože jsou tak naučeni, ale nevidí význam svého konání. Jak už jsem popisovala v oddílu 1.3.1, žáci mohou mít přesvědčení, že školní matematika nemusí být konzistentní s životem mimo školu. Přitom vytvoření si situačního modelu (zápisu) a určení *co vím?* a *co mám udělat?* je klíčové k řešení jakéhokoliv problému.

U úlohy Mapa bych očekávala, že si žáci načrtnout rozložení daných míst, ale jen Marek s Eliškou si po upozornění danou situaci načrtli (obrázek 10). Marek dokonce psal na čtverečkovaný papír, ale nevyužil jeho potenciálu. Myslím si, že ani jednomu žákovi daný náčrtek moc nepomohl.





Obrázek 10: Náčrtek rozložení míst v úloze Mapa Elišky (vlevo) a Marka (vpravo)

S přiřazením významu jednotlivým číslům ve výpočtech neměli žáci problém. Jen u výpočtu 3b je zarazilo číslo 5 ve jmenovateli, ale po opětovném přečtení zadání na jeho význam přišli.

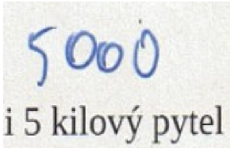
Za povšimnutí stojí **převod jednotek** potřebný v úloze Mapa a Rýže. Pro Kláru to byl kámen úrazu.

> *K: Já se nepamatuju většinou ty převody jednotek, jestli to mám jako správně, nebo ne.*

Komentář Lucky ukazuje, jak si zapisuje převody jednotek, aby to měla pak správně.

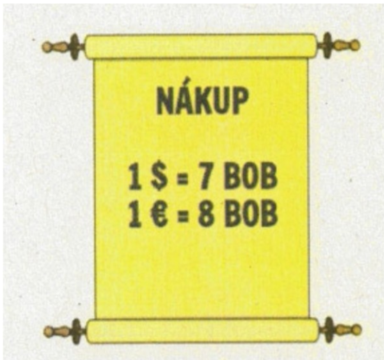
> *L: U tý rýže jsem si vlastně musela ujasnit nějaký věci, který mě ve škole furt učili, jako třeba – My víme, že jeden kilometr je tisíc metrů, tak jsem si vlastně napsala takovou pomůcku, že jeden kilometr se rovná tisíc metrů nebo jeden kilogram se rovná tisíc gramů.*

Totožný postup s převodem jednotek zvolila i Eliška, která si daný počet zapsala do zadání (obrázek 11).



Obrázek 11: Elišky poznámka u zadání Rýže

Třetí otázka se zaměřuje na efekt obrázku v úloze Měna (obrázek 12). Sleduji tím, zda žáci využili zopakování podstatné informace ze zadání, či jestli je zmátl přebytečný údaj. **Jak žák reagoval na obrázek v úloze Měna?**



Obrázek 12: Obrázek v úloze Měna

Elišku, Kláru a Marka obrázek, respektive údaj v něm navíc, zmátl a s podstatným údajem v obrázku nepracovali.

E: A proč tady mám eura? To není euro?

T: Je to euro.

E: A proč? To s tím nesouvisí?

T: A ty potřebuješ počítat nějaká eura?

E: No právě ne, mě to zmátlo.

M: Ale pak ještě nechápu, proč tady pod tím dolarem je ještě to jedno euro? – Jakože kolik by to vyšlo jakože eur? By byla ňák tak otázka? – Nebo, že tam není žádný, jako že to – mate?

Je vidět, že tito žáci nemají s úlohami obsahujícími nadbytečné údaje ze školy zkušenosti.

Obrázek byl přínosný pro Lucku a Petra. Přestože v obrázku jsou použity zkratky měn, uvědomili si díky němu, že v jednom dolaru je 7 BOBů a nenechali se zmást přebytečným údajem.

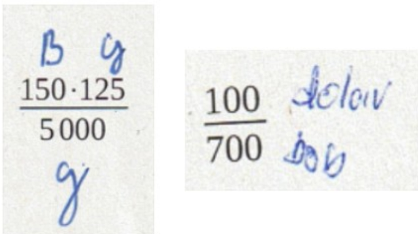
L: Jo! Kolik bobů dostanu za jeden dolar.

Na Filipa použitý obrázek neměl žádný efekt, prostě ho ignoroval.

F: Jsem se na něj tak jednou kouknul a prostě jsem si řekl – no obrázek – no nevim.

Čtvrtá otázka se zaobírala upravováním výpočtů. **Jak pracoval žák s číselným výrazem? Upravoval ho?**

Všichni žáci rozpoznali význam jednotlivých čísel ve výpočtech, ale jen Eliška s Filipem si zapsali jednotky do výpočtu (obrázek 13). To jim pomohlo si uvědomit jednotky výsledku.



Obrázek 13: Poznámky ve výpočtech Elišky (vlevo) a Filipa (vpravo)

Lucka k daným výpočtům měla komentář, z kterého je jasné, že vnímá zlomek jako dělení.

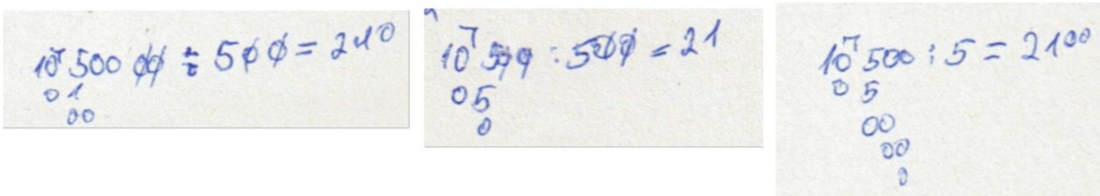
L: Totiž nám dneska matikářka říkala, že zlomková čára může být i jako děleno.

Eliška si nebyla jistá, kdy může výpočet upravit, vzhledem k tomu, že se v něm vyskytovalo více jednotek.

E: Můžu to zkrátit?

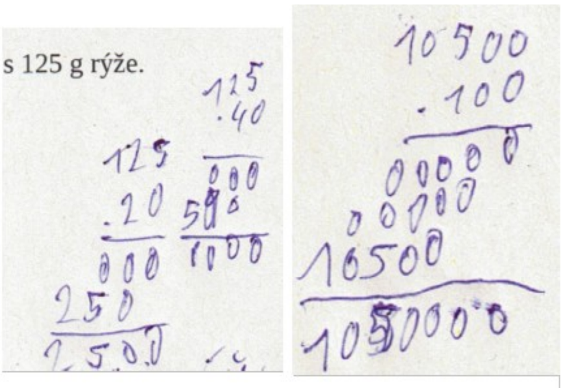
E: A kdybych věděla ten výsledek, tak mi to k něčemu pomůže?

Zjistila, že jí to pomůže, ale zlomek dělila písemně. Ostatně jako všichni žáci kromě Marka. Filip dokonce počítal jeden výpočet několikrát, vždy s jiným počtem nul (obrázek 14), aby se ujistil o správnosti výpočtu.



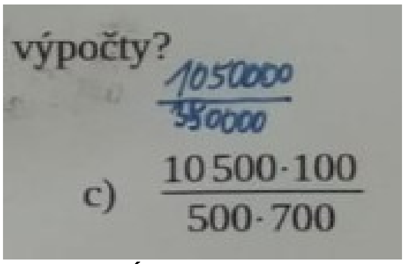
Obrázek 14: Filipův výpočet výsledky 1b

Překvapilo mě, že i jednoduché výpočty či úpravy dělal Petr písemně (obrázek 15). Obecně dával Petr přednost násobení před dělením a spíše odhadl výsledek dělení, který si pak násobením zkontroloval.



Obrázek 15: Petrovy mezivýpočty

S výpočtem výsledků daných výpočtů neměli žáci většinou problém. Z tabulky 2 lze vypozorovat, že Lucce chybí výsledky u výpočtů 1b, 1c a 2b. To je zřejmě způsobeno složitostí výpočtu, který obsahuje více jak dvě čísla. Na obrázku 16 je vidět, že daná čísla Lucka vynásobila, ale pak už výpočet nedokončila. Jak už bylo zmíněno, všichni žáci až na Marka dělili písemně, a nevyužili tedy zjednodušení výpočtu krácením zlomku.



Obrázek 16: Úprava ve výpočtu Lucky

Elišce výsledek (menší než jedna) převráceného zlomku dělal problém. Konkrétně mám na mysli úpravu výpočtu 1a a 3c. Čísla nejprve dělila v opačném poměru a poté, co si uvědomila, že jí má vyjít výsledek menší než jedna, tak měla problém s jeho vyjádřením, jak ilustruji na ukázce z rozhovoru nad řešením výpočtu 3c.

E: A 25 děleno 50 je 2.

T: 25 děleno 50 je 2?

E: Ne, to je 0 celá hnusný číslo.

T: Ne, to je celkem hezký číslo.

E: 25 + 25 je 50 a to je 2.

T: Ano, 25 krát 2 je 50, ale ne 25 děleno 50.

E: Cože, teď jsem úplně mimo.

T: Že 50 děleno 25 je 2 –

E: No právě, ale že 25 děleno 50 není 2?

T: No to není, když 25 je méně jak 50.

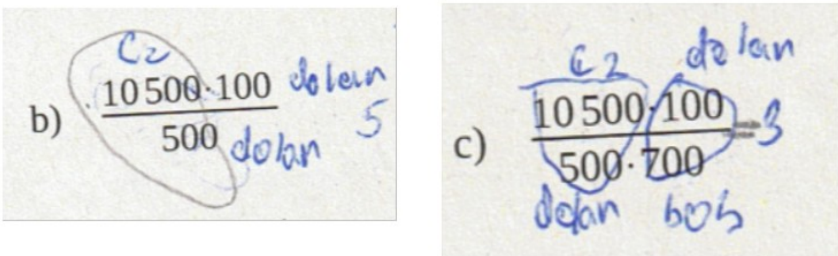
E: No a to je právě hnusný, není? –

E: Ok, takže 0,2?

T: Opravdu?

E: Tak to je jedna polovina.

Filip rozdělil výpočty v úloze Měna na dvě části (obrázek 17). Uvědomit si, co jednotlivé části znamenají, mu dalo práci, ale přišel na to. Větší problém pak měl při pokusu spojit dvě části do jednoho významu ve výpočtu 1c.



Obrázek 17: Filipovo rozdělení výpočtů na dvě části

T: Proč jsi si to takhle zakroužkoval dohromady?

F: No protože, jako za todle dostaneš todle a za todle todle.

T: Jako, že za 10 500 korun dostaneš – ?

F: 500 dolarů.

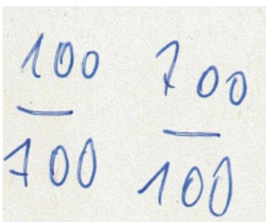
T: A to ti vyjadřuje co teda?

F: Ee vlastně cenu 500 dolarů.

T: No, cena 500 dolarů je 10 500 korun. Ale co dostanu tím výpočtem 10 500 děleno 500?

F (přemýšlí)*: Dostal bych vlastně cenu jednoho dolaru.*

Jako poslední manipulaci s výpočtem zmíním převrácení zlomku (obrázek 18). K této strategii se žáci uchylovali, pokud dokázali přijít na *přirozenější* tvar zlomku a uvědomili si analogii se vzorovým příkladem.



Obrázek 18: Převrácené zlomky Elišky

E: Tak já bych vydělila 100 děleno 700 – ne, to ne – Kolik je 1 bob dolarů? Nebo kolik je dolar bobů? [...]

E: Že bych ty boby měla za ty dolary, jako kolik bobů je těch dolarů, ale to tady mám napsaný. 700 bobů je 100 dolarů, to je 7. Takže 1 dolar je 7 bobů.

Přitakala jsem.

E: Takže bych to dělila jakoby 700 děleno 100 je to tak? Kdybych chtěla vědět kolik je 1 dolar bobů?

Přitakala jsem.

E: Takže bych to – na to se mě neptaj, ale obráceně to je blbost, protože v 1dolaru – to ne. 700 bobů je 100 dolarů. – 100 děleno 700 tak to jo – Já vůbec nevím, to je těžký! [...]

E: Ale výsledek je 0 celá – [...]

E: Kolik je dolarů v jednom bobu?

Jakou strategii řešení žák použil? Touto pátou otázkou se odkazuji na strategie vysvětlené v oddílu 1.2.3. Jak lze vyčíst z tabulky 2, Eliška, Filip a Marek použili k řešení úloh více strategií. To se také pozitivně odrazilo na jejich úspěšnosti. Na druhou stranu Klára s Luckou a Petrem řešili úlohy pouze pokusem, jehož platnost si neověřovali.

Petr mi svůj postup nacházení významu výpočtů shrnul následovně:

P: Nevím – no já jsem tam napsal něco, co jsem si prostě myslel, jsem se k tomu ani nějak nedostal.

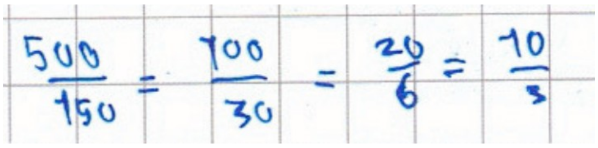
Rozložení na části je vidět v obrázku 17. Eliška si výpočet v úloze1c rozložila na případ za 1b děleno 700.

Vyšlo jí tedy $\frac{2100}{700}$ = 3, z čehož už se jí výsledný význam hledal snadno.

E: Jo jasně. Tady je 21 a s tímhle je to 2 100 a 2 100 děleno 700 je –

E: Takže 2 100 děleno – Ano! Takže kolik korun je v bobu?

Marek jako jediný při hledání významu výpočtu 2c využil jeho rozložení na dvě části a ***analogie*** s převrácením zlomku. Krácením zlomku 2c dospěl k výsledku $\frac{100}{3}$. Na papír si ovšem napsal zápis z obrázku 19 a vysvětlil:



Obrázek 19: Markovo krácení zlomků

M: Tak já můžu z části ***vyjít z toho béčka****, protože to je vlastně jiná rovnice, ale naopak a ještě to vydělím těma 125 – takže – takže bych si, to je 3/10 to béčko, kdybych takhle, bez tý 125, tak to jsou 3/10 a opačně to je jakože 10/3.*

Po dlouhé debatě dospěl Marek k závěru:

M: No to dostanu ty 3/10 potom, takže, jakože – [...]

M: Tak to bude jakože – Kolik stojí gram rýže bobů? – [...]

M: A převrácený by to bylo, to c. – [...]

M: Kolik gramů rýže dostanou za jeden bob?

Žáci, kteří použili při řešení ***analogii***, připodobňovali postup buď k již vyřešené úloze, nebo ke vzorovému příkladu. Při řešení tak využívali převrácení zlomků a hledání nejprve významu jim bližšího tvaru poměru. Klára s Luckou a Petrem se vzorovou úlohou vůbec nenechali ovlivnit.

Strategie pokus – ověření – korekce spočívá v práci s chybou. Většinou takto žáci hledali požadovaný tvar poměru, jak dokazuje komentář Filipa.

*F: A vlastně, tady (*Rýže*) c to bude vlastně – ehh – Kolik stojí jeden gram rýže?*

*F: A vlastně, jak se dělá výpočet (*potichu*) 5 000 děleno 150.*

*F: Takže 500 děleno 15, což je zase todle – (*Počítá si písemně a komentuje.*)*

F: Nebo počkej NE! To není tohle, to bude – by bylo naopak – vlastně by bylo 150 děleno 5 000 –

F: Joo. To je kolik gramů rýže dostanu za jeden bob.

Jindy žáci odhadli hledanou otázku, a pokud si ji následně ověřili a upravili, počítala jsem to také za tuto strategii.

Poslední použitou heuristickou strategií bylo *zavedení pomocného prvku*. Eliška nejprve odhadla, kolik korun by mohl být dolar, a následně podle toho určila význam mezivýpočtu $\frac{10\,500}{500}$.

E: Kdybych si je převedla – Ale jak se převáděj dolary na český?

T: A kdybys věděla ten kurz, tak to umíš převést?

E: Já se obávám, že ne.

T: Kdybys třeba věděla – Kolik českých korun je 1 dolar –

E: Jo, to je nějakých 27 nebo 25.

T: No možná něco takového doopravdy je, ale jinak se to dá vyčíst z toho zadání.

E: No, když vím tak – Ano jasně! Kolik je 1 dolar v českých korunách?

T: A to je význam čeho?

E: No, jako když víme, že za 500 dolarů je 10 500 korun, tak se to nějak dá –

E: Já bych to nějak vydělila.

E: 21 – Takže by to už šlo!

T: A co je těch 21?

E: No to je ten kurz.

T: A jaký?

E: Kolik je česká koruna v dolarech?

T: No, to tedy není.

E: Ne? Jakože 21 Korun je 1 dolar, je to tak?

T: Ano.

Mnou předpokládané využití měřítka pro kontrolu významu v úloze 3c nikdo nevyužil.

Šestá dílčí otázka výzkumu se zaobírala tvorbou otázky na hledaný význam. **Jak žák tvořil požadovanou otázku? Byl si jistý?** U většiny výpočtů si žáci nebyli jisti svými odpověďmi. Přitom jen Eliška, Filip a Marek si svoje odpovědi kontrolovali.

Eliška si nejprve zjistila význam jednotlivých čísel ve výpočtu a na základě toho se snažila uhádnout otázku, kterou si následně ve většině případů zkontrolovala a úlohu tak vyřešila.

Filip tvořil otázky obdobně. Nejprve ovšem určil význam zlomku a pak se z toho pokoušel vytvořit otázku. Když si významem stanoveným na základě čísel a jednotek nebyl jistý, tak si vypočítal výsledek daného výpočtu. Pomocí výsledku výpočtu si tak kontroloval smysluplnost zvoleného významu.

Lucka u úlohy 3a dokázala správně určit význam výpočtu, ale nedokázala formulovat patřičnou otázku. U ostatních úloh mám dojem, že spíše tipovala. Lucka vypočítala, že výsledek výpočtu 3a je 200 000, a napsala otázku: *Jaké je měřítko mapy?*

T: Jaká by byla odpověď na tu tvoji otázku?

*L: Jakoby jedna to 200 000. (*Tím asi myslela 1 ku 200 000.*)*

T: A co tedy znamená těch 200 000?

L: 200 000 cm ve skutečnosti.

T: Sedí ti tedy ta otázka k výpočtu či bys ji chtěla nějak přeformulovat?

L: No, mě jenom napadá, jaké je měřítko mapy –

L: No já jsem právě nevěděla, jak to mám vlastně zformulovat do jedné věty.

Někteří žáci při hledání významu výpočtu v úloze 3b hledali význam výsledku bez ohledu na čísla, z kterých vznikl.

L: Kolikrát je vzdušnou čarou vzdálenější La Paz od Patacamáji?

Lucka pracovala tedy s výsledkem 5, a ne s výpočtem samotným. Lucka si také zprvu neuvědomila jazykovou nekorektnost vzniklé otázky.

T: V té otázce: Kolikrát je něco vzdálenější? Tak by to mělo být: než něco jiného.

L: Jo, to je vlastně pravda.

Petr tvořil otázku k výpočtu 2a zvláštním způsobem a Klára si nebyla jistá, i když to měla správně.

T: Oba dva máte 2a, tak co tam máte napsaného?

P: Já mám: Kolik by na 40 porcí rýže potřebovali gramů rýže?

K: Co?

T: To je zajímavý a co tam máš ty (Kláro)*?*

K: Já radši nic. – Já se na to potřebuju podívat, jestli to dává smysl

P: A ještě tu mám: Za kolik gramů rýže by udělali jednu porci rýže? Což jsem vymazal.

T: Proč jsi to vymazal?

P: Protože za 5 000 gramů rýže by neudělali jednu porci.

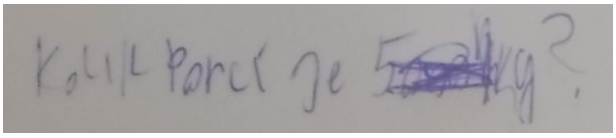
T: To ne no, protože by udělali víc porcí.

P: No právě.

T: A co jsi tam měla ty (Kláro)*?*

*T (*pokoušela jsem se to přečíst*): Kolik porcí...? – Proč to máš škrtlé?*

K: No, já jsem si myslela, že to je ono, ale jak tam je to převádění, tak jsem si vůbec – jestli 5 000 gramů nebo 5 kg.



Obrázek 20: Kláry odpověď k výpočtu 2a

Petr tedy vypočítal výsledek výpočtu, ale odpověď na jeho otázku se s tím neshoduje. Vzhledem k tomu, že si Petr neudělal zkoušku, tak mu to nepřišlo divné.

Klára s Petrem se o řešení poslední úlohy Mapa ani nepokusili. Odradilo je povrchní přečtení kontextu úlohy. Měřítko mapy, prý neumí, tak se o řešení nebudou ani pokoušet. Petr se nakonec s mojí pomocí o řešení pokusil. V tabulce 2 jsou úlohy, které žáci vyřešili s mojí výraznou pomocí, vyznačeny bíle.

Poslední otázky týkající se žákovských řešení stanovené v oddílu 2.3 jsou: **Jak provedl žák zkoušku správnosti hledaného významu? Jak reagoval na chybu?**

Během rozhovorů jsem se ptala, jestli si žáci svoje odpovědi zkontrolovali. Většina žáků sama od sebe kontrolu neprovedla a začali se jí věnovat až během rozhovoru. Filip si tak během rozhovoru své odpovědi opravil.

Zkoušku můžeme rozdělit na dvě části: matematickou a sémantickou. Matematickou zkouškou je myšlena úprava výpočtu a sémantická zkouška zohledňuje kontext úlohy a gramatickou složku.

V tabulce 2 jsou znázorněny tři druhy chyb hledaných otázek: na údaj ze zadání, opačný poměr a jazykově nekorektní odpověď. Matematická zkouška by měla odhalit chybu spočívající v opačném poměru, zatímco sémantická zkouška zbylé dva druhy chyb.

Většina chybných otázek Lucky se ptá přímo na údaj ze zadání (např. *Za kolik dolarů dostali 700 bobů?)* či je jazykově nekorektních (např. *Kolikrát je vzdušnou čarou vzdálenější La Paz od Patacamáji?)* a přitom si prý své odpovědi kontrolovala: *U tý Měny jsem to moc nekontrolovala, ale u tý Rýže a Mapy jsem to celkem kontrolovala*. Na její způsob provedení kontroly jsem se bohužel zapomněla zeptat.

Nesprávné odpovědi si Lucka vygumovala, nemohly jsme se z nich tedy poučit. Když jsme narazily na chybný význam výpočtu, neprojevovala Lucka ochotu si ho opravit či se nad tím aspoň znova zamyslet. Přitom některé její otázky (např. k výpočtu 1c) nedávají smysl: *Kolik by koupili dolarů?*

S převráceným zlomkem žáci pracovali, když řešili úlohy analogií. Většinou se tedy dobrali ke správnému významu výpočtu. Výjimku tvoří Lucka, která u úlohy 3a dokázala správně určit význam výpočtu, ale nedokázala formulovat patřičnou otázku jinak než: *Jaké je měřítko mapy?*

Při rozhovorech tvořili žáci spoustu jazykově nekorektních otázek, ale než je zapsali jako hledaný význam, tak je většinou zvládli upravit. Markovy chybné otázky jsou všechny jazykově nekorektní. Při rozhovoru jsem zjistila, že Marek měl s tvorbou otázek problém a tvořil je velmi ztěžka, spíše metodou pokus omyl. Když jsem ho vyzvala ke kontrole, Marek si zkontroloval správnost odpovědi výpočtem, případně se snažil najít odpověď jinou. Při rozhovoru jsem se snažila jím nabízené otázky přeformulovat do srozumitelnějšího jazyka. Přesto s níže uvedenými otázkami k výpočtům (v závorce) zapsanými do testu byl spokojený:

*M: (*1c*) Kolik bob je v korunách?*

*M: (*3c) *O kolik je vzdálenost na mapě Sajamy od Patacamaya?*

Vzhledem k tomu, že Petr řešil výpočty přes násobení, tak si tím i zkontroloval správnost výsledku. Sémantickou kontrolu napsaných otázek ovšem neudělal. Petra jsem se vyptávala společně s Klárou, a mohli jsme tedy společně diskutovat nad rozdílnými významy výpočtů. Ukázalo se ovšem, že kontrola správnosti hledaného významu byla pro Petra s Klárou náročná. Petr to okomentoval slovy: *Furt jsem se v tom ztrácel.*

Eliška měla sama potřebu kontroly hledaného významu. Řešení úlohy 2b komentovala slovy:

E: A jak se dozvíme, že to je správně?

T: Třeba zkouškou?

E: Neee, nemám ráda zkoušky.

Zkoušku nakonec neprovedla a zdůvodnila to slovy: *No, já myslím, že to tak je*.

V následující úloze (2c) provedla Eliška zkoušku výpočtem výsledku.

E: To je 5 kilo – Víme, že za pytel rýže zaplatíme 150 bobů. Kolik by stálo 1 kilo?

Zkoušku provedla výpočtem, zda výsledek je smysluplný, a došla k závěru: *Takže by jsme měli, že by jsme vypočítali, že by kilo stálo 33,333… bobů.*

To, že 5 kg má stát 150 BOBů, a tím pádem to nevychází takto provedenou kontrolou, nezjistila.

Na závěr jsem zjišťovala, jaká slovní úloha byla pro žáky nejobtížnější, nejsnadnější a zda je něco překvapilo.

Z výsledků v tabulce 2 vyplynulo, že nejsnadnější byla úloha 1a, která se ptá na počet porcí v pytli. To koresponduje s odpověďmi žáků, kteří určili úlohu Rýže za nejsnadnější. Jediná Lucka určila za nejsnadnější úlohu Mapa.

Za nejobtížnější určil stejný počet žáků úlohu Mapa i Měna. Z tabulky 2 vyplývá, že nejhorší úspěšnosti dosáhli žáci v úloze Mapa, a to jak při srovnání poměru počtu správných ku chybným odpovědím, tak správných odpovědí ku zodpovězeným.

Klára s Petrem se nemohli rozhodnout, která úloha byla pro ně nejobtížnější.

K: Já bych chtěla říct, že tohleto (Měna), ale to je to první, takže my nevíme, co tam máme dělat.

T: Proto jsem s vámi nejprve udělala tu vzorovou úlohu.

P: Asi nic z toho nebylo úplně jednoduchý.

K: Vše stejně špatný, i když já se nepamatuju většinou ty převody jednotek, jestli to mám jako správně nebo ne.

P: Všechno bylo divný, jako kdybych to měřítko dřív nějak dělal, tak bych to snad zvládl asi, ale jako bylo to hodně těžký.

Úlohu Měna tedy mohli žáci považovat za obtížnou, protože byla první v testu a ve srovnání se vzorovou úlohou byla komplexnější (obsahuje více čísel). Na druhou stranu úloha Mapa Elišku překvapila a Marka zmátla.

T: A co tě tam překvapilo na tady těch úlohách?

E: Asi to měřítko, to mě úplně dostalo!

M: Matoucí mi potom přišla ta poslední úloha (Mapa), jak tady bylo napsaný, jako ty daný počty, tak jako já jsem si myslel, že to by mi pak nevycházelo jenom z tady těch odpovědí, protože tam to bylo nějak napsaný.

Tímto komentářem myslel Marek druhý výpočet v úloze Mapa, kde není číslo 5 přímo zapsáno, ale vychází z kontextu *...pětkrát dále...*.

Za nejobtížnější na úlohách Marek považoval: *No, jakože potom, jakože potom vymyslet tu danou odpověď – jakože tu otázku k tý úloze a potom jestli mi to tam vychází ten výsledek.*

Myslím si, že kontrola správnosti hledaného významu a argumentace svého tvrzení byla pro všechny žáky obtížná. Překvapující byla pro ně především forma zadání úloh a následný důraz na argumentaci a zdůvodňování jejich tvrzení. Filip se s takto zadanými úlohami nikdy před tím nesetkal a myslím si, že ostatní na tom byli podobně (i když mi to neřekli).

2.5.2 Výsledky písemného testu

Písemný test psalo 86 žáků ze šesti tříd (osmé a deváté ročníky) pod dohledem stejného učitele. Opravu testu provedl učitel a následně jsem zpracovala nesrovnalosti s mými výsledky (viz oddíl 2.1). Souhrnné výsledky písemného testu jsou znázorněny v tabulkách v příloze 1. Jména žáků jsem zakódovala. D1A1 tak například značí dívku z 1. A a H1A1 chlapce ze stejné třídy. Žákům, jejichž ukázky práce jsem použila, jsem dala fiktivní křestní jména.

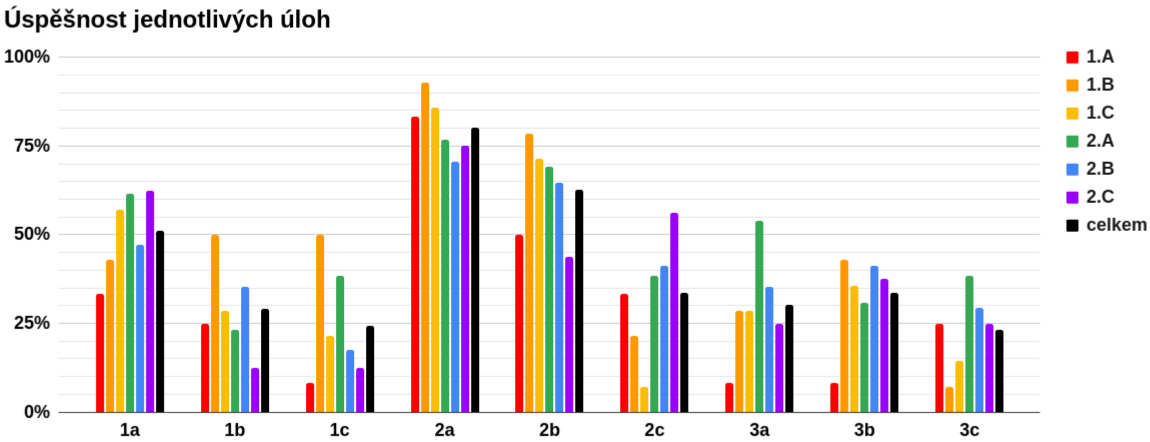
Na rozdíl od tabulky výsledků rozhovorů jsem výsledky jednotlivých úloh doplnila jevy, které se daly vyčíst z písemných odpovědí žáků. Tyto jevy jsou podstatné pro druhou část analýzy výsledků.

Výsledky písemného testu jsem rozdělila do tří částí na základě analýzy stanovené v oddílu 2.4. V první části jsem se zaměřila na obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení. V druhé části se věnuji některým z dílčích otázek výzkumu a ve třetí části jsem se zaměřila na přínosy a obtíže zavedení takovýchto úloh do výuky.

OBTÍŽNOST JEDNOTLIVÝCH ÚLOH A ÚSPĚŠNOST ŽÁKŮ PŘI JEJICH ŘEŠENÍ

Obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení jsem zobrazila dvěma grafy, které jsou sestrojené na základě výsledků prezentovaných v příloze 1. V prvním grafu (obrázek 21) jsem se zaměřila na relativní četnost správně určených významů. Žákovské odpovědi jsem hodnotila po třídách i celkově. Zvolila jsem relativní četnost, protože v každé třídě psal test jiný počet žáků.

V druhém grafu (obrázek 22) jsem zobrazila relativní četnost vynechaných úloh. Předpokládám totiž, že žáci úlohy vynechali, protože si s nimi vůbec nevěděli rady. Jan místo hledaného významu dokonce napsal *IDK*, což je zkratka pro *I don't know – Já nevím.* Žáci měli na vypracování tolik času, kolik potřebovali. Vynechání odpovědi z nedostatku času by tedy nemělo nastat. Žáci většinou odevzdali test (zcela vyčerpáni) do 30 minut.



Obrázek 21: Graf zobrazující relativní četnost správných odpovědí

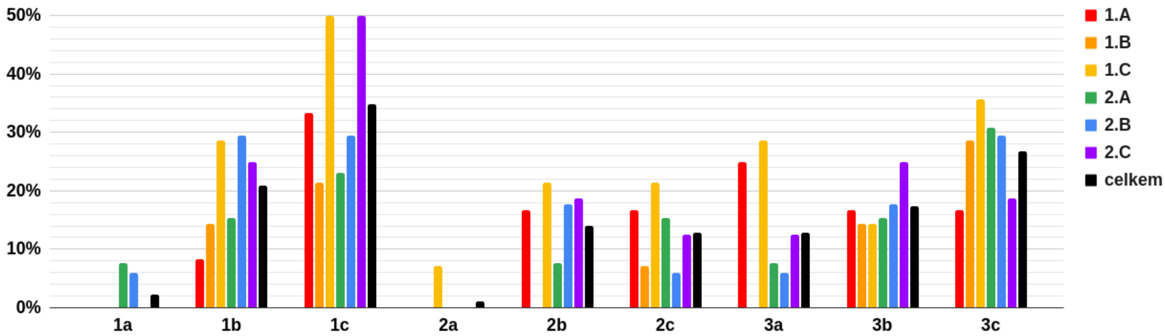
Z obrázku 21 je patrné, že žáci byli nejúspěšnější při hledání významu výpočtu 2a, což je úloha Rýže a výpočet počtu porcí v pytli. Celkově správný význam určilo 80,2 % žáků. I celkově dosáhli žáci v úloze Rýže největší úspěšnosti. Tím se mi potvrdilo zjištění z rozhovorů, že úloha Rýže je nejsnadnější.

Nejméně žáků (23,0 %) určilo správný význam k výpočtu 3c, tzn. význam k $\frac{25}{50}$ v úloze Mapa. Ve třídě 1.B správný význam této úlohy určil pouze jeden jediný žák.

Předpokládala jsem, že nejobtížnější bude pro žáky nalézt význam výpočtu 1c, protože obsahuje nejvíce čísel. Správný význam výpočtu nalezlo pouze 24,4 % testovaných žáků. Pro 1.A, 2.B a 2.C se jednalo o výpočet s nejmenším počtem správných odpovědí. Ve třídě 1.A určil správný význam výpočtu 1c, 3a a 3b vždy pouze jeden žák.

Nejmenší počet žáků z 2.A a 2.C určil správně význam výpočtu 1b. Význam výpočtu 2c dělal největší problém pouze ve třídě 1.C, kde jeho správný význam určil pouze jeden žák.

Celkové seřazení úloh dle počtu správně určených významů výpočtů je: Rýže (58,9 %), Měna (34,9 %) a Mapa (29,1 %).



Obrázek 22: Graf zobrazující vynechané úlohy

Obrázek 22 zobrazuje graf relativní četnosti vynechaných úloh. Celkově žáci nenapsali žádný význam k 15,9 % výpočtům. Když srovnáme oba dva grafy, tak četnost vynechaných úloh koresponduje s obtížností úloh (1c, 2a, 3c).

Nejvíce žáků (34,9 %) nenapsalo žádný význam k výpočtu 1c. Hlavní příčinou neúspěchu žáků při hledání významu k výpočtu 1c je právě vynechání této úlohy. Ze třídy 1.C a 2.C to byla polovina žáků.

Žádný význam k výpočtu 3c nenašlo 26,7 % žáků. Všichni žáci, až po jednom ze tříd 2.A, 2.B a 1.C, se pokusili najít význam k výpočtům 1a a 2a, což se odrazilo i na úspěšnosti řešení těchto úloh.

Zajímavé je podívat se na vynechané úlohy z pohledu celé třídy. Jak je patrné z výsledků v příloze 1 i z obrázku 22, nejvíce významů daných výpočtů neurčili žáci z 1. C., k 23 % výpočtů nenapsali žádný význam.

Nikdo z testovaných žáků neurčil všech devět hledaných významů výpočtů správně. Osm z hledaných devíti významů určili správně jen tři žáci a jeden žák neurčil ani jeden význam správně.

ODPOVĚDI NA NĚKTERÉ Z DÍLČÍCH OTÁZEK VÝZKUMU

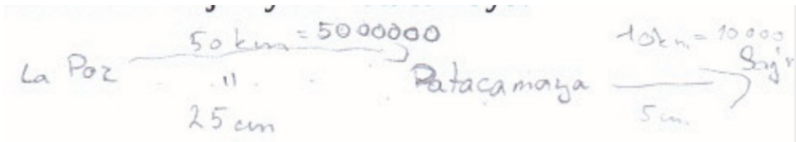
Při analýze rozhovorů jsem se zaměřila na sedm dílčích otázek výzkumu (oddíl 2.3). Na základě písemných odpovědí žáků nemá smysl zjišťovat odpovědi na dílčí otázky 1) a

5). Reakci na obrázek (otázka 3) v úloze Měna bychom jedině zaznamenali, kdyby se promítla do žákovské odpovědi.

Jaký situační model si žák vytvořil? Jakým způsobem si udělal zápis podstatných informací? Dokázal žák přiřadit k jednotlivým číslům jejich význam ze zadání úlohy?

Jestliže si žák nějak vyznačil podstatné informace ze zadání, znázornila jsem to v tabulkách v příloze 1 tučným písmem. Při opravě písemných prací jsem za vyznačení podstatných informací považovala podtržení či jiné vyznačení v textu, zápis, schéma či náčrtek dané situace. Jen u 24, 4 % úloh si žáci vyjádřili podstatné informace.

Náčrtek či schéma použilo v úloze Mapa jen 14,0 % žáků. Správný význam výpočtu 3b určilo na základě správného náčrtu (obrázek 23) jen 8,1 % z nich.



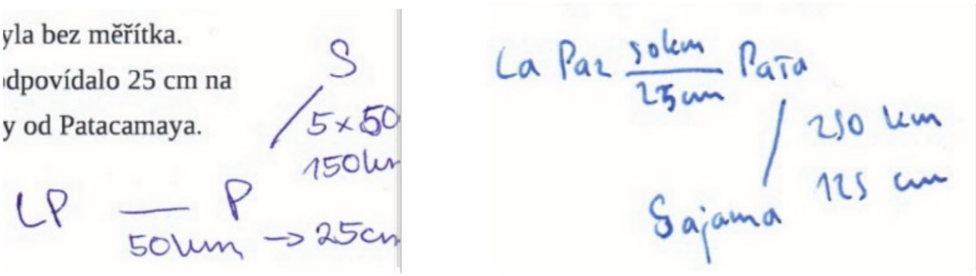
Obrázek 23: Aleny náčrtek k výpočtu 3b

V textu není řečeno, zda se Sajama nalézá mezi La Paz a Patacamaya, ale většina žáků daná místa rozmístila jako v obrázku 23.

Boris sice udělal náčrt správně (obrázek 24), ale význam výpočtu z něho zjistit nedokázal. Význam výpočtu 3b napsal: *Vzdálenost Sajamy od La Pazu na mapě.* Zatímco k výpočtu 3c určil význam: *Vzdálenost Sajamy od Patacamaya.* Obdobný význam k výpočtu 3b napsala i Dana, ale na rozdíl od Borise vycházela ze špatného náčrtu. Význam k výpočtu 3b určila: *Kolik odpovídá cm čára od La Paz do Sajamy?*

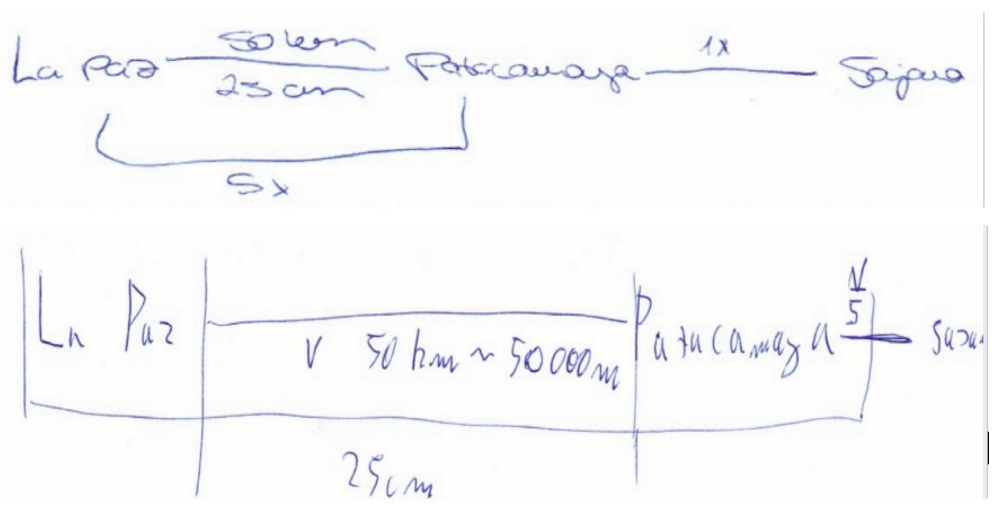
Obrázek 24: Náčrtek k výpočtu 3b Borise (vlevo) a Dany (vpravo)

Denisa kupodivu určila správný význam výpočtu 3b, i když náčrt situace měla špatně (obrázek 25). Stejně jako Monika se nechala zmást antisignálem a zobrazila Sajamu pětkrát dále od Patacamaya, než je La Paz. Nevím, jak Monika určila význam výpočtu pomocí svého náčrtku, ale napsala: *Kolik je půlka trasy z La Paz do Patacamaya děleno dvěma?*



Obrázek 25: Náčrtek k výpočtu 3b Denisy (vlevo) a Moniky (vpravo)

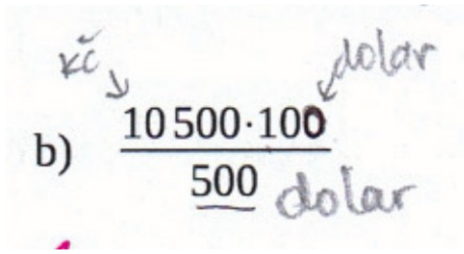
Jediná Bára se Standou využili k řešení algebraickou cestu (oddíl 1.2.3). K výpočtu 3b si udělali schéma s neznámou (obrázek 26). Bára si písmenem *x* označila vzdálenost mezi Patacamaya a Sajamou, zatímco Standa si písmenem *v* označil vzdálenost z La Paz do Patacamaya. Bára k výpočtu 3b určila ze schématu význam: *Jak je od Patacamaya vzdálená Sajama?* Standa zapsal význam výpočtu 3b zcela správně.



Obrázek 26: Schéma k výpočtu 3b Báry (nahoře) a Standy (dole)

Jen 10,5 % žáků si udělalo zápis ze všech úloh. Nejméně žáků si zvýraznilo podstatné informace v úloze Rýže. Pravděpodobně tak učinili proto, že kontext úlohy Rýže je nejméně komplikovaný.

Během rozhovorů zapisovali někteří žáci jednotky (význam) čísla přímo do zadání (obrázek 13 a 27). Obdobnou strategii jsem očekávala i v písemných pracích, ale jen necelých 2,1 % výpočtů bylo takto označeno.



Obrázek 27: Poznámky k výpočtu Dany

Lili s Danou správně přiřadily jednotky k výpočtu 1b. Lili to navedlo, že ve významu tedy budou hrát roli Kč a dolary. Zkusila napsat *Kolik Kč bude dolarů?*, ale s vytvořenou otázkou nebyla spokojená, a tak ji škrtla. Dana naopak nevyvodila ze zapsaných jednotek, v čem by měl vyjít výsledek, a napsala otázku: *Kolik bob získají za 500 dolarů?* Přitom žádné BOBy ve výpočtu nemá (obrázek 27).

Hanka správně určila význam výpočtu 1a, ale jakmile ve výpočtu bylo více čísel, tak se ztrácela. Její významy k výpočtům 1b a 1c nedávají v kontextu úlohy smysl, protože koruny za BOBy přímo směnit nelze: *Kolik korun nesměnili ve směnárně? Kolik by dostali bobů za všechny koruny?* U významu k výpočtu 1c má alespoň správně jednotky.

Jana určila všechny významy správně, jen u výpočtu 3c si nevěděla rady. Napsala si tedy jednotky jednotlivých čísel ve výpočtu a i výsledek výpočtu. Význam 3c nakonec určila jako *Kolikrát je mapa menší než skutečnost?,* což je význam spíše výpočtu 3a.

V tabulce v příloze 1 jsem vyznačila chyby v **převodu jednotek.** Zapsané jednotky (kg, mm...) znázorňují, co zapsali žáci chybně. Jednalo se o významy k výpočtům 2c (20,9 % odpovědí) a 3a (7,0 % odpovědí). K výpočtu 2c tak žáci například psali: *Kolik* *kilogramů si můžeme koupit za 1 bob?* A u výpočtu 3a převáděli 5 000 000 na kilometry či milimetry. Převod na milimetry bych ještě pochopila, protože by to tak platilo pro 5 km, ale ty kilometry nedávají smysl. Štěpánka například k výpočtu 3a napsala: *Kolik km se rovná 1 cm na mapě?*

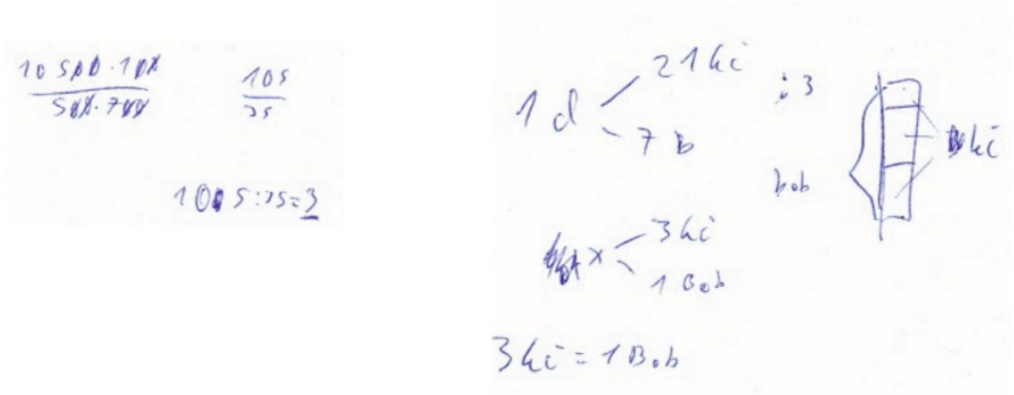
Jediná Zorka se nechala zmást obrázkem v úloze Měna a jako význam výpočtu 1a určila: *Kolik eur je 1 bob?*

Jak pracoval žák s číselným výrazem? Upravoval ho?

Jen u 6,2 % výpočtů spočítali a zapsali žáci výsledek. Natálka (a nebyla jediná) napsala výsledek výpočtu 1a tzn. $\frac{100}{700} = 0{,}7$. K tomu určila správný význam: *1 bob je 0,7 dolaru → Kolik dolaru je 1 bob?* Špatný výpočet výsledku ji tedy nezabránil určit správný význam výpočtu.

Žáci, kteří dělili písemně, se většinou nedopočítali k výsledku u výpočtu 1c a 2b, protože nevyužili krácení ve zlomku.

Čtyři žáci vypočítali výsledek a i si zapsali jednotky čísel ve výpočtu. Jenom Anežka z toho ovšem dokázala určit správný význam výpočtu. Na obrázku 28 je její řešení k výpočtu 1c. Písmenem *x* si označila výsledek výpočtu.



Obrázek 28: Řešení výpočtu 1c od Anežky

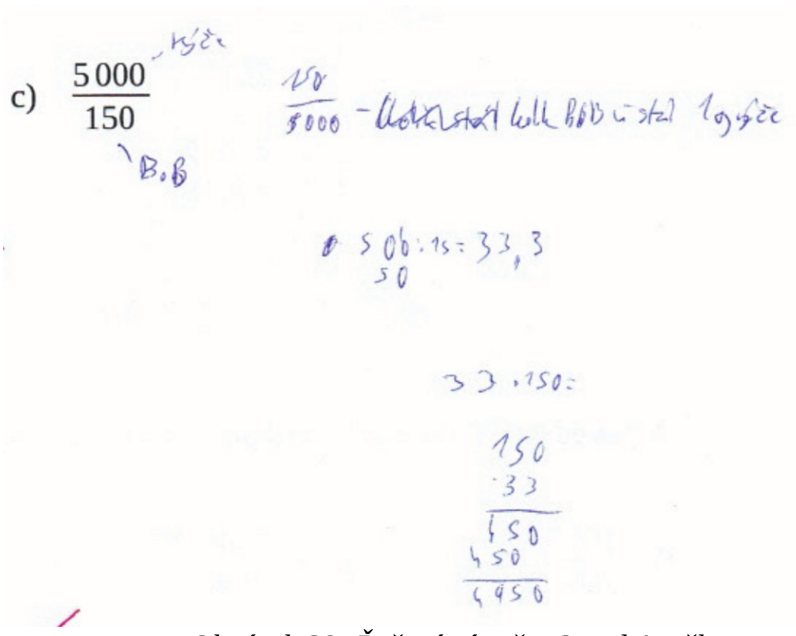
Anežka byla jedna z mála, která manipulovala s čísly ve výpočtu. Na základě zvoleného významu *dolar je 21 Kč* usuzuji, že i jiní žáci si výpočet 1b rozložili na dvě části. Šest žáků to pak ovšem zapomnělo vynásobit ještě 100. V tabulce v příloze 1 jsem tento jev označila K.

Jev R vyznačený v tabulkách v příloze 1 se také týká rozložení výpočtu 1b. Pět žáků pouze vynásobilo čísla v čitateli a jmenovatelem se vůbec nezabývalo. Jako význam výpočtu napsali: *Kolik dolarů získali za 1 050 000 Kč?* nebo *Kolik dolarů by museli směnit, aby měli 100krát víc?*

Jenom u Anežky jsem si všimla, že prováděla zkoušku výpočtu. K nalezení významu výpočtu 2c použila i převrácení zlomku (obrázek 29).

Jak žák tvořil požadovanou otázku? Byl si jistý? Opravoval ji?

Těmito třemi otázkami jsem spojila šestou a sedmou dílčí otázku výzkumu. Zda si žák výpočtem výsledku kontroloval význam otázky či s jeho pomocí k otázce přicházel, z písemných prací nelze zjistit.



Obrázek 29: Řešení výpočtu 2c od Anežky

V tabulkách v příloze 1 jsem barevně vyznačila charakteristické chyby vzniklých otázek. Při opravování prací se některé chybné významy opakovaly a pakliže zvolené charakteristiky byly pro popis chyby nedostatečné, použila jsem pro chybu kód ve formě písmene. Písmeno X tak například značí význam ve smyslu: *Jakou část pytle si lze koupit za 1 dolar?* S částí celku se žáci zřejmě inspirovali ve vzorové úloze.

Písmeny P a S je také označeno, zda si žák zapsanou otázku přepisoval či ji jenom škrtl. Takovéto počínání naznačuje, že se nad zapsanou otázkou znova zamyslel a provedl kontrolu správnosti, která odhalila, že prvotní zvolený význam výpočtu byl chybný. Ze 42 takto přepsaných (chybných) otázek bylo 16 zdárně opraveno.

Chybné významy výpočtu 1b jsem označila kódem K nebo R, pokud se jednalo o rozložení výpočtu na dvě části. Kód D, taktéž u výpočtu 1b, značí význam na základě chybějícího poměru měn, tzn. *počet bobů za 500 dolarů (nebo 10 500 Kč).* Tento význam zvolilo 12 žáků (14,0 %). Překvapující je, že 4 žáci si k číslům ve výpočtu napsali jejich význam (jednotky), a přesto došli k závěru, že ve významu výpočtu budou hrát roli BOBy (obrázek 27).

Nejčastější chyba žáků spočívala v určení významu výpočtu, ve kterém by byla čísla v **opačném poměru**. Ve výpočtech 1a, 2c a 3a jsem cíleně použila opačné poměry čísel, než je zvykem, a sledovala tím, zda si žáci uvědomí rozdílný význam.

Nejvíce žáků (33,7 %) napsalo význam opačného poměru čísel ve výpočtu 1a. Jejich odpovědi tedy zněly: *Kolik bobů je jeden dolar?* Přitom kdyby si dobře přečetli zadání, tak v obrázku je přímo napsáno, že 1 dolar je 7 BOBů.

Více žáků (24 oproti 20) určilo význam výpočtu 3a jako *měřítko mapy*, než jeho správné znění (viz oddíl 2.1). Dva žáci určili jako *měřítko mapy* výpočet 3c, kterému význam opačného poměru čísel přiřadilo 12 žáků. Jana určila význam výpočtu 3c takto: *Kolikrát je mapa menší než skutečnost?* Tento význam bych jí uznala k výpočtu 3a.

K výpočtu 2c určilo 26,7 % žáků význam převráceného zlomku, než je v zadání. Jejich vytvořená otázka byla *Kolik bobů stojí jeden gram rýže?, c*ož v kontextu úlohy nedává smysl. Tito žáci si očividně nekontrolovali své napsané významy daných výpočtů, stejně jako 32,6 % žáků, jejichž otázky se ptaly na **údaj přímo zmíněný v kontextu úlohy**.

Mezi takovéto výpočty patří především 1b, 3b a 3c. U výpočtu 1b psali žáci například otázku: *Kolik dolarů získali za 10 500 Kč?* K výpočtu 3b napsalo 8 žáků význam na základě údaje „pětkrát dále“, ptali se tedy *Kolikrát…?*. Pracovali s výsledkem výpočtu bez ohledu na čísla, ze kterých vznikl. Sedm žáků určilo význam výpočtu 3c následovně: *Kolik centimetrů na kilometry je na mapě vzdálenost z La Paz do Patacamaya?* Zohlednili tedy význam jednotlivých čísel ve výpočtu, ale ne jejich vztah daný výpočtem.

Oranžově jsem v příloze 1 označila **otázky, které nebyly jazykově správně.** Žáci měli největší problém s tvořením otázek v úloze Mapa, především u výpočtu 3b (16,3 % žáků) a 3c (15,1 % žáků). Jazyková obtíž tvorby otázky jim znemožnila správně určit význam daného výpočtu. S žáky jsem v této fázi výzkumu rozhovory nevedla, a nemohla jsem se jich tedy doptat, co těmito otázkami měli na mysli.

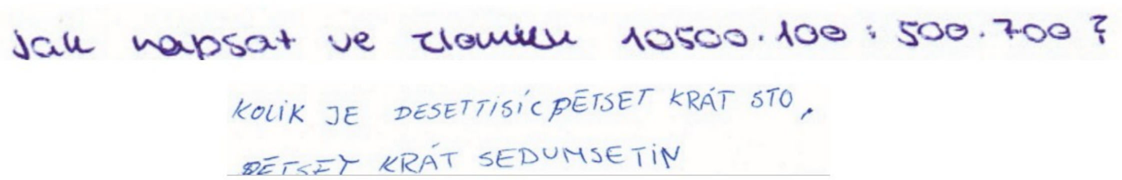
Když například k výpočtu 3b napsali *Jak daleko je Sajama od Patacamaya?*, tak nevíme, zda se jedná o vzdálenost na mapě, nebo ve skutečnosti. Vzhledem k tomu, že významem měla být vzdálenost na mapě, tak jsem jim tuto odpověď neuznávala. Ukázku dalších takovýchto otázek uvádím v příloze 2.

Přestože žáci byli v úloze Rýže nejúspěšnější při hledání významu k daným výpočtům, vyskytlo se v písemných pracích několik zajímavých otázek.

K výpočtu 2a napsali tři žáci otázky, na které nelze odpovědět jen pomocí informací z kontextu úlohy. Jednalo se o otázky: *Pro kolik lidí postačí jedna porce rýže?*, *Pro kolik lidí vystačí jeden pytel rýže?* a *Kolik lidí se dokáže nakrmit?* Vytvořili tedy problémy, které nejsou dostatečně specifikované (oddíl 1.3.3).

Dvě žákyně vytvořily otázky, na jejichž odpovědi není potřeba znát kontext úlohy. Anička k výpočtu 3c napsala: *Jaký je rozdíl mezi mapou a reálným světem?* Na jednu stranu poměr dvou čísel zaměnila za jejich rozdíl, na druhou stranu odpověď na tuto otázku není pouze číslem vyjádřitelná. Karolína určila výsledek výpočtu 1c, ale přesto k němu napsala tuto otázku: *Je stejná hodnota bobu a dolaru?* Na tuto otázku lze odpovědět bez znalosti výsledku výpočtu buď ano, nebo ne. Očividně si to tedy po sobě nezkontrolovala.

Pět žáků, kteří byli převážně z 2.C, nedokázalo přijít na jiný význam výpočtu 1c než jeho doslovný přepis (obrázek 30).



Obrázek 30: Doslovný přepis výpočtu 1c Petry (nahoře) a Marie (dole)

2.5.3 Shrnutí výsledků výzkumu

Přehled výsledků rozhovorů je uveden v tabulce 2 a souhrnné výsledky písemných prací jsou v příloze 1. Dále stručně shrnu zjištěné výsledky dílčích otázek obou částí výzkumu.

V druhé části výzkumu se ukázalo, že jen u 24,4 % úloh si žáci vyjádřili podstatné informace a jen 9,3 % žáků si udělalo **zápis podstatných informací** ze všech úloh. V první části výzkumu si zápis podstatných informací udělala pouze Eliška v úloze Měna a Klára s Petrem. Klára s Petrem sice udělali zápis u všech úloh, které se pokusili vyřešit, ale dále s ním nepracovali. Z rozhovoru vyplynulo, že nechápou význam a smysl zápisu a dělají ho jen proto, že jsou k tomu ve škole vedeni.

Náčrtek k výpočtu 3b obsahovalo 14,0 % písemných prací a pouze 8,1 % žáků určilo správný význam výpočtu 3b na základě správného náčrtku. Přitom správný význam k výpočtu 3b určilo celkem 33,7 % žáků z druhé části výzkumu. Bára a Standa přicházeli k významu výpočtu 3b dokonce algebraickou cestou, protože v jejich písemných pracích se v náčrtku objevovala neznámá.

Tři žáky, s kterými jsem vedla rozhovory, **nadbytečný údaj v obrázku** zmátl a s klíčovým údajem nepracovali. Pro dva žáky v první části výzkumu byl zopakovaný klíčový údaj v obrázku přínosný a nadbytečným údajem se nenechali zmást.

Zatímco v první části výzkumu si žáci u 68,5 % výpočtů napsali i jeho **výsledek**, v druhé části výzkumu tak učinili jen u 6,2 % výpočtů. Eliška s Filipem si do výpočtů zapsali i **jednotky**, ale v písemných pracích bylo jen 2,1 % výpočtů takto označeno. **Převod jednotek** byl potřeba k určení významu výpočtů 2c a 3a. U výpočtu 2c nepřevedlo v písemných pracích 20,9 % žáků kilogramy na gramy a u výpočtu 3a bylo 7,0 % významů určeno na základě chybného převodu jednotek.

Žáci použili všechny **strategie** řešení popsané v oddílu 1.2.3 až na trojčlenku a schémata. V písemných pracích 12,8 % žáků **rozdělilo výpočet na dvě části**, ale pak určilo význam celého výpočtu jen pomocí jedné z nich. Nejvíce významů k výpočtům bylo v první části výzkumu vyřešeno metodou *pokus – ověření – korekce*. Další strategií, která ve většině případů vedla ke správným významům výpočtů, bylo *rozdělení výpočtu na dvě části* a *analogie* se vzorovým příkladem. Strategie metodou *pokus* vedla ke správnému výsledku výpočtu jen ojediněle

S **tvorbou otázky** mělo mnoho žáků problém. V písemných pracích k výpočtu 1b určilo 14,0 % žáků význam na základě chybějícího poměru měn v kontextu úlohy. Překvapující je, že více jak polovina z nich si do výpočtu zapsala i správné jednotky, a přesto došli k závěru, že ve významu výpočtu budou hrát roli BOBy. Význam k výpočtu 3b byl v 9,3 % písemných prací určen na základě signálních slov „pětkrát dále“.

V písemných pracích bylo 5,4 % významů přepsáno či škrtnuto a 38,1% z nich bylo zdárně opraveno, což poukazuje na to, že alespoň tito žáci provedli **kontrolu**. Z výsledků písemných prací totiž vyplývá, že 58,2 % žáků napsalo alespoň jeden význam daného výpočtu buď jazykově nekorektně, anebo se ptalo na údaj ze zadání. V 72,1 % písemných pracích se vyskytoval alespoň jeden význam k opačnému poměru, než bylo v zadaném výpočtu.

Nejvíce žáků v druhé části výzkumu (80,2 %) určilo význam výpočtu 2a. I z rozhovorů se žáky vyplynulo, že úloha Rýže byla nejsnadnější. Největší problémy dělala žákům úloha Mapa. V první části výzkumu jediný Filip uměl pracovat s měřítkem mapy. Petr s Klárou po povrchním přečtení úlohu Mapa raději zcela vynechali.

V druhé části výzkumu více žáků (24 oproti 20) určilo význam výpočtu 3a jako *měřítko mapy*, což je význam převráceného zlomku, než je v zadání. Po jazykové stránce měli žáci největší problém s tvořením požadované otázky k výpočtům 3b (16,3 % žáků) a 3c (15,1 % žáků). U výpočtu 3b určilo 15,1 % žáků, že se jedná o část vzdálenosti, ale nenapsali, jestli na mapě či ve skutečnosti. Význam výpočtu 3b určilo na základě antisignálu „pětkrát dále“ 9,3 % žáků. Význam výpočtu 3c určilo celkově nejméně žáků, jen 23,0 %.

3 Diskuze, omezení a důsledky pro výuku

Tento oddíl rozdělím na tři části. Nejprve porovnám vlastní výsledky výzkumu v kontextu relevantních studií. V druhé části se zaměřím na polemiku nad vlastními výsledky a postupy. Kriticky se zamyslím nad tím, co by se stalo, kdybych začala znovu, ale se současnými zkušenostmi a vědomostmi. Ve třetí části popíši možné obtíže a přínosy zavedení podobných úloh do výuky matematiky.

Cílem výzkumu bylo popsat, jakým způsobem žáci uvažují při řešení specifického typu úloh (oddíl 1.3.4). Konkrétně bylo zjišťováno, jaké strategie žáci volí a jaké obtíže se při řešení objevují.

K naplnění cíle jsem nejprve nastudovala potřebnou teorii zabývající se především řešením slovních úloh a jejich možnou implementací do hodin matematiky.

Výzkum jsem následně rozdělila na dvě fáze. V obou fázích dostali žáci test, který obsahoval tři kontexty úloh, kde ke každému měli určit význam tří daných výpočtů. Před zadáním testu byl se žáky probrán vzorový příklad a na řešení úloh měli tolik času, kolik potřebovali.

V první části výzkumu jsem se zaměřila na analýzu rozhovorů nad řešením šesti vybraných žáků. Analýzu přepsaných rozhovorů jsem rozdělila do sedmi dílčích otázek výzkumu (oddíl 2.4). Diskuze nad žákovským řešením mi poskytla náhled na použité strategie řešení a uvědomila jsem si, jak je argumentace vlastního tvrzení pro žáky náročná.

V druhé části výzkumu jsem nechala jedním učitelem zadat písemný test 86 žákům. Žákovské písemné řešení jsem následně analyzovala dle vybraných dílčích otázek výzkumu. Sledovala jsem obtížnost jednotlivých úloh a úspěšnost žáků při jejich řešení.

Souhrnné výsledky výzkumu jsou popsány v oddíle 2.5.3 a dále je porovnám s relevantními studiemi zmíněnými v teoretické části.

3.1 Porovnání vlastních výsledků výzkumu s relevantními studiemi

V rozhovorech se žáky jsem se ptala, zda úloze rozumí a zda jim je kontext úlohy blízký. Největší problémy dělala žákům úloha Mapa. Jediný žák uměl pracovat s měřítkem mapy, a dokázal tak určit význam všech tří výpočtů. Dva žáci sice rozpoznali, že se jedná o úlohu na měřítko mapy, ale neuměli s ním dostatečně dobře pracovat, aby úlohu vyřešili. Jiní dva žáci tuto úlohu po povrchním přečtení zcela vynechali. Výsledky mého výzkumu tedy byly v souladu se studií (Hembree, 1992), která ukázala, že největší vliv na úspěšnost řešení měla obeznámenost s typy slovních úloh.

V úloze Mapa jsem použila multiplikativní operátor v roli antisignálu. V druhé části výzkumu určilo význam výpočtu 3b na základě signálních slov 9,3 % žáků. Mezi hlavní příčiny potíží s antisignálem patří dle Vondrové et al. (2019) upřednostňování používání strategie signálních slov před strategií založenou na vytvoření situačního modelu úlohy.

Z písemných řešení nelze s jistotou u všech žáků usoudit na to, zda si vytvořili situační model výuky a zda byl správný. Zjišťovala jsem pouze, zda si žáci udělali zápis podstatných informací, což je dle Vondrové et al. (2020) jeden z možných předpokladů tvorby situačního modelu. Zjistila jsem, že zápis si udělalo 9,3 % žáků. Souvislost mezi tvorbou zápisu a úspěšností řešení jsem však nezjišťovala.

Vondrová a Žalská v práci Rendla et al. (2013: s. 105) upozorňují na to, že někteří žáci mohou přijímat fakt, že školní matematika nemusí být vždy konzistentní s životem mimo školu. V mém výzkumu se to projevilo v tom, že někteří žáci podle svých slov udělali zápis jen proto, že jsou k tomu ve škole vedeni. Pro vlastní řešení zápis nevyužili. To je ukázka formalismu školního vyučování.

Z výzkumu (Vondrová, 2019) vyplývá, že úlohy s nadbytečnými numerickými údaji byly pro žáky obtížnější hlavně v případech, kdy byl nadbytečný údaj zadán na začátek úlohy a dal se z pohledu žáka smysluplně využít při řešení. V úloze Měna jsem použila obrázek s nadbytečným údajem. Přesto, že se čísla zmíněná v obrázku ve výpočtech nevyskytují, byli z nadbytečného údaje tři žáci během rozhovoru zmatení. Usuzuji tedy, že tito žáci nemají s úlohami obsahujícími nadbytečné údaje ze školy zkušenosti.

Dle práce Novotné, Eisenmanna a Přibyla (2015) heuristická strategie *pokus – ověření – korekce* byla žáky volena spontánně a téměř vždy v ní byli úspěšní ještě před zahájením experimentu. To se také ukázalo v první části mého výzkumu, kdy strategie *pokus – ověření – korekce* byla žáky nejvíce používaná a 79,2 % takto řešených významů výpočtů bylo určeno správně.

Před tím, než byly žákům zadány úlohy k řešení, byl s nimi probrán vzorový příklad s jednoduššími čísly. V práci Novotné, Eisenmanna a Přibyla (2015) žáci oceňovali strategii *analogie* proto, že na úloze s jednoduššími čísly pochopili, jak vypočítat původní úlohu. Vzorový příklad jsem zavedla na základě poznatků z pilotní studie, kdy se ukázala potřeba s žáky projít princip řešení tohoto specifického zadání úloh. Tři žáci, s kterými byly vedeny rozhovory, využili k řešení zadaných úloh *analogii* se vzorovým příkladem. Z písemných prací nelze vždy jednoznačně vyčíst, zda žáci postupovali strategií *pokus – ověření – korekce* či zda cíleně využívali *analogie* se vzorovým příkladem. Každopádně jeho představení žákům před řešením úloh vnímám přínosně.

Z výsledků písemných prací vyplývá, že žáci neprovedli dostatečnou kontrolu svého řešení. Význam k alespoň jednomu převrácenému zlomku ze zadání určilo 72,1 % žáků, tito žáci tedy neprovedli numerickou kontrolu daného výpočtu. Sémantickou zkoušku určeného významu neudělalo 58,2 % žáků, kteří napsali alespoň jeden význam daného výpočtu buď jazykově nekorektně, anebo se ptali na údaj ze zadání.

Zajímavé je se na úspěšnost určování významu výpočtu podívat z hlediska rozdělení významů zlomků dle Martineze a Blanca (2021). Podle jejich rozdělení významů zlomků (viz oddíl 1.3.3) se v mnou vytvořených úlohách vyskytuje šest výpočtů (1a, 2a, 2c, 3a, 3b, 3c), které ve čtyřech případech vyjadřují *poměr dvou veličin*. Martinez a Blanco (2021) význam zlomku ve smyslu *poměru dvou veličin* vynechali. Zdůvodňují to tím, že pro mnoho žáků je tento význam problematický, protože ho vnímají jako součást výpočtu algoritmu bez dostatečné podpory grafickou reprezentací. A zároveň je mimo dosah chápání 11 až 12letých žáků, na kterých byl prováděn výzkum.

V mém výzkumu byli žáci nejúspěšnější při určování významu výpočtu 2a (80,2 % správných odpovědí), který vyjadřuje *podíl čísel o stejných jednotkách.* U určování významu výpočtu 3b, který vyjadřuje *část celku,* byla úspěšnost jen 33,7 %. Většina úloh předkládaných ve studii (Martinez a Blanco, 2021) byla vytvořena s významem zlomku *část celku*, i když předkládané grafické prostředky naznačovaly jiný význam. Myslím si, že nižší úspěšnost v úloze 3b je dána komplikovaností kontextu úlohy Mapa.

Autoři se shodují na tom (např. Martinez, Blanco, 2021), že žáci, kteří dokáží na základě daných podmínek předkládat problémy, je většinou dokáží i řešit. Na základě písemných prací nemohu jednoznačně určit, jestli žáci dokáží vyřešit otázky, které si napsali k významům daných výpočtů. Mohu tak pouze předpokládat na základě zapsaných výsledků výpočtů či přepsání zvoleného významu, který naznačuje, že žák si zvolený význam zkontroloval.

3.2 Polemika s vlastními výsledky a postupy

Výsledky mého výzkumu se nedají zobecňovat, protože jsem zkoumala pouze malý počet žáků. Tento výzkum je spíše explorativní a přináší prvotní vhled do této problematiky.

Úspěšnosti řešení v obou fázích výzkumu nejsou srovnatelné. Při rozhovorech totiž odrážejí ochotu žáků zkontrolovat si nalezené významy výpočtů a případnou snahu o jejich korekci. Zatímco v druhé fázi výzkumu jsou stanoveny pouze na základě písemných prací.

Na výkonnost žáků mají velký vliv mimo jiné i jejich psychické stavy a motivace. To se pozitivně odrazilo zejména v řešení Elišky a Filipa, kteří se urputně snažili vyřešit zadané úlohy.

Původně jsem chtěla dělat pouze rozhovory s jednotlivými žáky, ale vzhledem k epidemické situaci jsem jich neměla dostatek. Poprosila jsem tedy několik učitelů o spolupráci. Úlohy se jim líbily, ale pouze jeden učitel svolil k otestování žáků, a to jen pomocí písemných prací bez následného nahrávání diskuze. Písemné práce jsem tak využila ke kvantitativní analýze jevů vyskytujících se během první fáze výzkumu.

Kdybych měla výzkum dělat znova od začátku s vědomostmi a zkušenostmi, které mám teď, tak bych ho udělala jinak. Především bych věnovala větší pozornost vzorovému příkladu, na kterém bych se žáky prošla jednotlivé fáze řešení. Zdůraznila bych zdůvodnění hledaného významu daného výpočtu a jeho kontrolu. Tím by si snad žáci odnesli inspiraci pro řešení zadaných úloh.

Při rozhovorech se žáky bych je nechala nejdříve určit význam výpočtu a připravit si jeho zdůvodnění. To by vedlo k tomu, že by si žáci svoje odpovědi nejprve rozmysleli a vzájemný rozhovor by byl pro obě strany přínosnější. Sama bych se příště na rozhovory také lépe připravila a předem si stanovila, do jaké míry budu zasahovat do žákovských řešení.

3.3 Obtíže a přínosy zavedení úloh *od konce* do výuky

S ohlédnutím na obě části výzkumu shrnu možné obtíže a přínosy zavedení specifického typu úloh (viz oddíl 1.3.4) do výuky. Důraz při řešení těchto úloh by měl být kladen především na proces zjišťování významu výpočtu a argumentaci žákovského tvrzení než na výsledek samotný.

Práce (Leung, 2013) a (Martínez, Blanco, 2021) zdůrazňují význam zavedení *problem posing* do hodin matematiky, protože zvyšuje matematickou kompetenci žáků. Absence otázky totiž nutí žáky hledat vztahy mezi čísly ve výpočtu a jeho celkový význam a případné numerické chyby jim nemusí zabránit v nalezení správného významu výpočtu (viz případ Natálky na straně 73).

Při řešení úloh nemohou žáci spoléhat pouze na naučené postupy, ale jsou nuceni se nad řešením zamyslet a případně použít netradiční (heuristické) strategie řešení. Ne ke všem problémům vede přímá cesta řešení a tyto úlohy jsou ukázkou, jak takovéto problémy řešit. K jejich řešení si totiž žáci museli uvědomit několik souvislostí např. práci s poměrem, převod jednotek a úpravu zlomků.

Při rozhovorech se žáky jsem si uvědomila, že argumentace a zdůvodňování vlastního tvrzení jim dělá problém. Pomocí těchto úloh by se tedy žáci mohli v těchto klíčových kompetencích zdokonalit. Diskuze s celou třídou ovšem nemusí být snadnou záležitostí, čemuž jsem se v této práci nevěnovala.

Písemné práce ukázaly kreativitu žáků při tvorbě otázek. K výpočtu 1a například odpovídali *„Kolik může být nejvíce porcí?“* či *„Kolik porcí můžou uvařit?“*. Jako hlavní obtíž úloh tohoto typu vnímám jejich časovou náročnost na opravu, pokud by byly zadány písemnou formou.

V obou částech výzkumu se ukázalo, že proces tvorby hledané otázky byl pro některé žáky, i když dokázali přijít na význam výpočtu, velmi náročný (viz případ Lucky na straně 62). Práce s textem, ať už čtení s porozuměním či tvorba otázek, je v těchto úlohách klíčová.

Na základě zkušenosti učitele, který zadával žákům tyto úlohy, usuzuji, že pro žáky s poruchou autistického spektra není toto zadání vhodné. Žák s poruchou autistického spektra, který se v jedné třídě nacházel, byl ze zadání úloh zcela zoufalý a nedokázal přijít ani na jeden význam výpočtu. Blíže jsem se ovšem tomu, jak úlohy od konce působí na různé typy žáků, v práci nevěnovala a jedná se o téma otevřené dalšímu zkoumání.

Během výzkumu jsem zadala žákům tři úlohy a s vybranými jedinci jsem diskutovala o jejich řešení. Ukázalo se, že tyto činnosti byly pro žáky velice kognitivně a časově náročné. V druhé části výzkumu jen u 40,8 % výpočtů byl správně určen jejich význam a k 15,9 % výpočtům žáci nic nenapsali. Při hodině matematiky bych proto doporučila pracovat s menším množstvím úloh a zaměřit se na skupinovou diskuzi.

Cílem diskuze by bylo porovnání významů daných výpočtů a strategií řešení takovýchto úloh. Tím by se žáci seznámili s rozdílnými heuristickými strategiemi řešení problémů (oddíl 1.2.3). Během diskuze by se žáci jednak mohli zdokonalovat v argumentaci a zároveň by učitel mohl na jejím základě posoudit žákovské konceptuální pochopení daného učiva.

Vhodné by bylo se žáky předem projít jednotlivé fáze řešení slovní úlohy (1.2.1), a tím jim pomoci se s tímto netypickým zadáním vypořádat. Výzkum (Jitendra et al., 2011) prokázal, že zaměření se na čtyřkrokový postup pro podporu a monitorování řešení problému a využití schémat výrazně zlepšilo výsledky žáků v řešení slovních úloh. Důraz by měl být v první řadě kladen na kontrolu vytvořené otázky.

3.4 Závěr

Během práce na výzkumu jsem se naučila zpracovat velké množství informací a přehledně je prezentovat. Při rozhovorech jsem si uvědomila, jak je podstatné vést žáky k argumentaci a zdůvodňování vlastního tvrzení. V praxi bych ráda použila různé implementace slovních úloh do hodin matematiky a vedla žáky k tomu, aby se nad řešením zamýšleli a nespoléhali se pouze na naučené postupy.

Seznam použitých zkratek a symbolů

BOB	bolivijský boliviano (měna v Bolívii)
DISC	čtyř krokový postup pro podporu a monitorování řešení problému
$	dolar
€	euro
GA ČR	Grantová agentura České republiky
IDK	zkratka pro „I don‘t know.“
Kč	koruna česká
RVP	Rámcový vzdělávací program
SBI	scheme based instruction
TAČR	Technologická agentura ČR
ZŠ	základní škola

Seznam použité literatury

BLOOM B., ENGLEHART M. FURST E., HILL W., KRATHWOHL D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals.* Handbook I: Cognitive domain. New York, Toronto: Longmans, Green.

DREW C. (2019). [online]. *Problem Posing Education – 6 Key Charakteristics.* [cit. 17.06.2021]. Dostupné z: https://helpfulprofessor.com/problem-posing-education/#Definition_of_Problem_Posing_Education

DABELL J., KEOGHT B., NAYLOR S. (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education.* Sandbach: Millgate House Education, Hatfield.

FREIRE P. (2005). *Pedagogy of the oppressed.* 30. edice. The Continuum International Publishing Group Inc, New York. Dostupné z: https://envs.ucsc.edu/internships/internship-readings/freire-pedagogy-of-the oppressed.pdf

HEJNÝ M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

HEMBREE R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242–273. https://doi.org/10.2307/749120

HIEBERT J., GALLIMORE R., GARNIER H., GIVVIN K. B., HOLLINGSWORTH H., JACOBS J., CHUI A. M.-Y., WEARNE D., SMITH M., KERSTING N., MANASTER A., TSENG E., ETTERBEEK W., MANASTER C., GONZALES P., STIGLER J. National Center for Education Statistics, E. W. D. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study*. NCES, Washington, DC

HRBÁČKOVÁ K. (2010). *Kognitivní a nonkognitivní determinanty rozvoje autoregulace učení studentů*. Brno: Paido. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:4d815a60-1003-11e9-a03f-5ef3fc9bb22f

JITENDRA A.K.., STAR J.R., RODRIQUEZ M., LINDELL M., SOMEK, F. (2011). Improving student‘s proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction*, 21(6), 731–745. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.04.002

KALYUGA S. (2006). Rapid cognitive assessment of learners' knowledge structures. *Learning and Instruction*, 16, 1–11. doi:10.1016/j.learninstruc.2005.12.002

KEOGHT B., NAYLOR S. (1993). Learning in science: another way in. *Primary Science Review,* 26(2), 22–23.

KRPEC R. (2006). *Didaktika matematiky pro střední školy*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:6ee2c5b0-b35f-11e7-91d5-005056825209

LEUNG Sk.S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics* 83, 103–116 . https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4

LOKŠOVÁ I., DOBAL J., KOUBSKÁ P., LOKŠA J. (1999). *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:356be9d0-7d15-11e8-bb44-5ef3fc9ae867

MAREŠ J. (2013). *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál.

MARTINEZ S., BLANCO V. (2021). Analysis of Problem Posing Using Different Fractions Meanings. *Education Sciences,* 11, 65. https://doi.org/10.3390/educsci11020065

MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha. Dostupné také z: http://www.nuv.cz/file/4983/

NOVOTNÁ J., EISENMANN P., PŘIBYL J. (2015). Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In Sborník dva dny s didaktikou matematiky. Praha: PedF UK. s. 9-22.

PETTY G. (2013). *Moderní vyučování*. Praha: Portál

POLYA G. (2016). *Jak to řešit?: Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod.* Praha: MatfyzPress MFF UK

RENDL M., VONDROVÁ N., HŘÍBKOVÁ L., JIROTKOVÁ D., KLOBOUČKOVÁ J., KVASZ L., PÁCHOVÁ A., PAVELKOVÁ I., SMETÁČKOVÁ I., TAUCHMANOVÁ E., ŽALSKÁ J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

REUSSER K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving „situation problems".* Technical report no. 143. University of Colorado: Institute of Cognitive Science.

SAMKOVÁ L. (2020). Zkoumání znalostí obsahu a didaktických znalostí obsahu v matematice metodou Concept Cartoons. *Scientia in Educatione, 10*(2), 62–79. https://doi.org/10.14712/18047106.1548

SLAVÍČKOVÁ M. (2021). Preformulujme úlohu, zistime viac. In *Dva dny s didaktikou matematiky: 11.-12. 2. 2021.* Praha: Katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

SMETÁČKOVÁ I. (2017). Reality in math: Barrier or help? In *8th ICEEPSY 2017 International Conference on Education & Educational Psychology*. s. 430–439 http://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2017.10.40

STEELE D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics*, 105, 142–154. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18048.x

STEWARD D. (2015). MEDIAN *Don Steward mathematics teaching: What's the question?* Dostupné také z: https://donsteward.blogspot.com/2015/03/whats-question.html?fbclid=IwAR3LPUDobSNgEDHTvFHLb3G3BqY_wGMaWojUMkkIO_2jkL-2TJBafYqevr8

SWELLER J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4(4), 295–312. htttps://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90003-5

TICHÁ M., HOŠPESOVÁ A. (2013). Developing teachers’ subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

VALENTA M., KREJČOVÁ L., HLEBOVÁ B. (2020). *Znevýhodněný žák: deficity dílčích funkcí a oslabení kognitivního výkonu*. Praha: Grada. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:d4f4cb6c-100c-4c3c-863b-5ce7a98095ca

VÍTOVCOVÁ T. (2020). *Postoje žáků základní školy k matematice*. [Závěrečná práce. Vedoucí práce N. Vondrová.] Praha: PedF UK.

VONDROVÁ N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

VONDROVÁ N., HAVLÍČKOVÁ R., HIRSCHOVÁ M., CHVÁL M., NOVOTNÁ J., PÁCHOVÁ A., SMETÁČKOVÁ I., ŠMEJKALOVÁ M., TŮMOVÁ V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Nakladatelství Karolinum.

VONDROVÁ N., ŠMEJKALOVÁ M., NOVOTNÁ J., HAVLÍČKOVÁ R., PÁCHOVÁ A., SMETÁČKOVÁ I., SIGMUNDOVÁ A., HIRSCHOVÁ M., CHVÁL M. (2020). *Slovní úlohy ve výuce matematiky a českého jazyka.* Metodický materiál pro učitele. Praha: Univerzita Karlova, Pegagogická fakulta.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha 1: Tabulky výsledků písemných prací jednotlivých tříd

Příloha 2: Výčet jazykově nekorektních otázek

Příloha 1

Výsledky písemných prací jednotlivých tříd

1	správná odpověď	S	škrtlé	X	jakou část pytle si lze koupi za 1 dolar
0	chybná odpověď	P	oprava významu	K	dolar je 21 Kč
tučně je zápis		V	výsledek výpočtu	R	100 krat vic
	nevyplněno	J	jednotky ve výpočtu	D	pocet bobu za 500 dolaru (nebo 10500Kč)
	údaj ze zadání				
	opačný poměr	kg mm km	chyba v převodu		
	jazyková nekorektnost	a b c	význam jiného výpočtu		

Obrázek P1: Legenda k tabulkám výsledků

Tabulka P1: Výsledky 1.A

1.A	**Měna**						**Rýže**						**Mapa**						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
D1A1	**1**	**P**	**0**		**0**		0		0		0		0		0		0		1
Monika	**1**	**V**	**0**		**0**		**0**		**0**		**0**		**0**		**0**		**0**		1
H1A1	0		0		0		1	P	0	P	1		0		0	P	0		2
H1A2	0		0	P	0		1		0		0		0		0		0		1
D1A3	**0**		**0**	**D**	**0**		**1**		**1**		**0**	**kg**	**0**		**0**		**0**		2
Boris	0		0	V	0		1		0	V	0		**1**		**0**		**0**		2
D1A4	0		1		0		1		0		0		0		0		0		2
Dan	0		0		0		1		1		0	P	0		0		0		2
D1A5	**0**	**P**	**0**	**R**	**0**		**1**		**1**		**1**		**0**		**1**		**1**		5
H1A5	1		0		0		1		1		0		0		0		0		3
D1A6	0		1		0		1		1		1		**0**		**0**	**P**	**1**		5
H1A6	1		1	V	1	V	1		1		1		0		0		1		7
12	4		3		1		10		6		4		1		1		3		33

Tabulka P2: Výsledky 1.B

1.B	Měna						Rýže						Mapa						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
Anička	1		1	P	1		1		1		0		0		1	P	0		6
D1B2	0		0	PD	1		1		1		0	kg	1		0		0		4
D1B3	1		0	D	1	J	1		1		0	kg	0		1		0		5
H1B1	0		1		1		1		1		1		0		0		0		5
Lili	0		0	SJ	0		1		1		0		0		0		0		2
H1B2	1		0	D	0		1		1		0	kg	1		0		0		4
Dana	0	P	0	PJD	0		1		1	P	0	kg	0	PJ	0		0	PJ	2
H1B3	0		1	V	0		0		1	V	0		0		0		0		2
H1B4	0	S	0		0		1		1		0		1	P	0		0		3
H1B5	1		1		1		1		0	c	0	X	1	P	1		1		7
H1B6	1		1		1		1		0	c	0	b	0	mm	1		0		5
H1B7	0		1		0		1		0	c	1		0	mm	0	P	0	P	3
D1B6	0		0	K	0		1		1		0	X	0	P	1		0	a	3
Anežka	1	V	1	V	1	V	1		1		1	VJ	0		1		0	V	7
14	6		7		7		13		11		3		4		6		1		58

Tabulka P3: Výsledky 1.C

1.C	Měna						Rýže						Mapa						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
D1C1	1		1	V	0		1		1		0	a	0		1		0		5
Natálka	1	V	1	V	1	V	1		1		1		1		0	P	0		7
H1C1	1		0	V	0		1		1		0	kg	1	P	0		1		5
H1C2	0	P	0		0		1		0		0	kg	0		0		0		1
H1C3	0		0	S	0		1		1		0	kg	0		0		0		2
D1C3	1	P	0	P	0		1		1		0	kg	0	c	0		0		3
D1C4	1		1		0		1		1		0	kg	0		0		0		4
Štěpánka	0		0		0		0		0		0		0	km	1		0	S	1
D1C6	1		0		0		1		1		0		0		1		0		4
D1C7	1	JP	0	JD	0		0		0	S	0		0		0		0		1
H1C4	0		0		0		1		1		0		0	km	0		0	b	2
H1C5	1		0	PK	1	J	1		1		0		1	V	1	V	1	V	7
D1C8	0		1		1		1		1		0	kg	1	P	1		0		6
D1C9	0	P	0		0		1	P	0		0		0		0		0		1
14	8		4		3		12		10		1		4		5		2		49

Tabulka P4: Výsledky 2.A

2.A	**Měna**						**Rýže**						**Mapa**						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
Hanka	1	V	0		0		1		0		1		1		0		0	P	4
H2A1	0		0		0		1		0	P	0	c	0		0		0		1
H2A2	0		0		0		0		0		0	V	0		0		0		0
H2A3	1		0	K	1		1		1		0	a	0		0		0		4
H2A4	1	V	0	KV	1	V	1		1		0	kg	1	V	0	V	1	V	6
H2A5	1		1		1		1		1		1		0		1		1		8
D2A2	1		1		0		1	P	1		0		1		0		1		6
D2A3	0		0		1		1		1		1		0		0		1		5
H2A6	1		1		1		1		1		1		0		1		0		7
Bára	0		0		0		1		1		0	kg	**1**		**0**		**0**		3
D2A5	0		0		0		1		1		1		**1**		**1**		**1**		6
Zorka	**0**		**0**	**VD**	**0**		**0**	**J**	**0**	**Ja**	**0**		**1**	**V**	**0**		**0**	**V**	1
D2A7	**1**		**0**	**R**	**0**		**0**		**1**		**0**		1	J	1		0		4
13	7		3		5		10		9		5		7		4		5		55

Tabulka P5: Výsledky 2.B

2.B	**Měna**						**Rýže**						**Mapa**						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
D2B1	0		1	V	0	V	1		1		1		1		0		0		5
H2B1	0		1		0		1		1		0		0		1		0		4
Standa	1		1	K	0		1		1		0		**1**	**J**	**1**		**1**	**V**	7
H2B3	1		1		0		1		1		1		1		0		1	P	7
H2B4	0		0		0		1		0		0	kg	**1**		**0**		**0**		2
Petra	1	P	0		0		1		1		1		0		0		0		4
D2B3	1		1		0	V	1		1		1		0	P	0		0	P	5
H2B5	0		0		0		1		0		0	kg	1		1		1		4
H2B6	1		1		1		1		1		1		0	mm	1		1	P	8
H2B7	1		0	VJD	1		0		1		1		**0**		**1**		**0**		5
Marie	1		0		0		1		1		1	X	0		1		1		6
D2B5	**1**		**0**	**P**	**1**		**1**		**1**		**0**	**kg**	**1**		**1**		**0**		6
D2B6	0		0		0		1		1		0	kg	0		0		0		2
D2B7	0		0		0		1		0		0		0		0		0		1
Jana	1		1		1		1		1		1		1		1		0	JVa	8
D2B9	**0**		**1**	**V**	**1**	**V**	1		1		1		1		0		0		6
Alena	**0**	**V**	**0**		**1**		**1**		**1**		**0**		**0**		**1**		**0**		4
17	8		6		3		12		11		7		6		7		5		84

Tabulka P6: Výsledky 2.C

2.C	**Měna**						**Rýže**						**Mapa**						
	a		b		c		a		b		c		a		b		c		celkem
D2C1	0		0	R	0		1		0		0		0		0		0		1
H2C1	1	P	0	VR	0		1		0	V	1		**0**	**J**	**1**		**1**		5
D2C2	1		0	K	1		1		1	P	0		0		0		0		4
Denisa	**1**		**1**		**1**		1		1		0		**1**		**1**		**0**		7
D2C4	**1**		**0**		**0**		1		1		1	V	0		0		0		4
D2C5	1		0	JVD	0		1		0		1		**0**	**b**	**1**		**1**		5
H2C2	1		0	VD	0	V	1	V	0	V	1	V	**1**		**0**		**1**		5
D2C6	0		0	D	0		1		1		1		1		1		0		5
D2C7	1	P	0	R	0		1		0		0		0		0		0		2
H2C3	1		0		0		1		1		1		0		1		1		6
H2C4	1		1		0		0	b	1		1		0		0		0		4
H2C5	1		0		0		1		1		1		1	P	1		0	a	6
H2C6	0		0		0		1		0		1		0	m	0		0		2
Jan	1		0		0		1		1		0	kg	1		1		1		6
H2C8	1		0	K	1		1		1		1		1		0		1		7
D2C8	0		0	D	0		1		0		1		0		1		1		4
16	10		2		2		12		7		9		4		6		4		73

Příloha 2

Mezi **jazykově nekorektní** významy k výpočtům jsem započítala například tyto otázky:

- *Kolik 1 dolar může koupit bob? (1a)*
- *Jaký je rozdíl v ceně kč na boby? (1c)*
- *Kolik dolarů v českých by bylo bobů? (1c)*
- *1 cm na mapě na m? (3a)*
- *Jaký je rozdíl měřítka na mapě? (3a)*
- *Kolik je to cm v realitě, kdyby měřítko bylo 5krát menší? (3b)*
- *Jak daleko je Sajama na mapě? (3b)*
- *O kolik je dál vrchol Sajamy od Patacamaya? (3b)*
- *Jak daleko na mapě se nachází? (3b)*
- *Jaká část cesty Sajamy je cesta do Sajamy?(3b)*
- *Kolik má jeden kilometr ve skutečnosti? (3c)*
- *Kolik cm je 1 m na mapě? (3c)*
- *Kolik je 1 cm kilometrů? (3c)*
- *Kolik odpovídá jeden cm ve skutečnosti, kdybychom nepřeváděli. (3c, Hanka)*