Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Formální poznatky v matematice diagnostikované u žákyně s výborným prospěchem

Mechanical Knowledge in Mathematical Cognition of an A Student

Bc. Tereza Friesingerová

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy, anglický jazyk – matematika

2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Formální poznatky v matematice diagnostikované u žákyně s výborným prospěchem potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 12. července 2021

Tereza Friesingerová

Ráda bych poděkovala vedoucí této diplomové práce prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za její čas, odborné vedení a cenné připomínky. Dále paní profesorce děkuji i za to, že to byla právě ona, kdo mě k psaní diplomové práce na KMDM motivoval.

Rovněž bych také ráda poděkovala žákyni Kristýně, bez níž by tato práce nemohla vzniknout, a popřála jí do jejího (nejen studijního) života hodně chuti a sil do přeměňování *informací* ve *znalosti*.

V neposlední řadě bych na tomto místě chtěla poděkovat svojí rodině za jejich nekonečnou podporu, které se mi vždy dostávalo a nadále dostává.

Abstrakt

Formální poznání je považováno za největší problém, kterému v současné době čelí didaktika matematiky. Cílem této diplomové práce je zaprvé diagnostikovat případné formalismy v poznatkové struktuře žákyně, která má v matematice výborné výsledky, a zadruhé diskutovat možné příčiny vzniku těchto formalismů.

Práce je rozdělena do dvou částí. V první části, tedy části teoretické, jsou postupně vymezeny nejdůležitější pojmy, které jsou nezbytné pro zpracování části praktické. Stěžejní oddíly teoretické části práce jsou tak věnovány představení teorie generického modelu a formálních poznatků, u kterých je kladen důraz zejména na diskusi příčin jejich vzniku a možností jejich diagnostiky, reedukace a prevence.

V praktické části práce je popsána provedená případová studie, ve které bylo u žákyně druhého stupně základní školy na základě analýzy diagnostických rozhovorů a výukových materiálů odhaleno množství formálních poznatků napříč různými matematickými oblastmi. Za nejpravděpodobnější hlavní příčinu vzniku identifikovaných formalismů je označen transmisivní edukační styl, ve kterém je kladen důraz především na pamětné uchování definic a vzorců a na mechanický nácvik algoritmů a procedur.

Klíčová slova formální poznatky, diagnostika, kritická místa matematiky, případová studie, žák s výborným prospěchem

Abstract

Mechanical knowledge is presently considered to be the major problem in didactics of mathematics. The aim of this diploma thesis is first, to diagnose possible instances of mechanical knowledge in cognition of an A student, i.e. a student with excellent results in mathematics, and second, to provide a discussion of their probable causes.

The thesis consists of two parts. In the first part, i.e. the theoretical one, the concepts which are essential for the empirical part are introduced. The pivotal sections of the theoretical part of this thesis are therefore devoted to the introduction to the theory of generic models and mechanical knowledge. In case of mechanical knowledge, the emphasis is put on a discussion of its possible causes, as well as ways of their diagnostics, reeducation and prevention.

The empirical part of the thesis is dedicated to a case study which was conducted. In this study, a number of examples of mechanical knowledge in various branches of mathematics were identified in cognition of a lower-secondary student, based on the analysis of in-depth interviews and teaching materials. It is concluded that the most probable cause of the identified instances of mechanical knowledge is the transmissive education style, in which the priority is placed on remembering definitions and formulas and drilling algorithms and procedures.

Keywords mechanical knowledge, diagnostics, problematic mathematical topics, case study, A student

Obsah

Úvod

Rozhodování žáka, zda se bude učit vzorečky a nacvičovat procedury, nebo se bude snažit matematice porozumět, má vážnější dopad. Rozhoduje o tom, zda se tento žák ochotně podřídí autoritě, nebo zda bude intelektuálně autonomní. Nejen v matematice.

– Hejný (2019)

Fenomén formálních poznatků, který velmi úzce souvisí s tématem porozumění v matematice, je považován za nejvážnější problém v současném vyučování, a v didakticko-matematické literatuře je mu proto v posledních letech věnována zvýšená pozornost. A není divu – ukazuje se totiž, že negativní důsledky formalismu nejsou omezeny pouze na oblast matematiky, nýbrž pronikají také do rozhodovacích strategií v běžném životě, a potenciálně tak mohou mít dopad na celou společnost.

Nejčastěji jsou formální poznatky diskutovány v souvislosti s průměrnými nebo slabými žáky, ovšem jen okrajově se výzkum formalismů věnuje žákům s výborným prospěchem. Otázkou proto zůstává, zda, a případně v jaké míře, je možné formální poznatky diagnostikovat právě u těchto žáků, kteří jsou běžně považováni za žáky bezproblémové.

V tomto směru se mi jedinečná šance naskytla na jaře roku 2020 v průběhu uzavření škol v důsledku pandemie, kdy jsem se v rámci distančního plnění oborové praxe na ZŠ dostala k možnosti individuálně pracovat se čtrnáctiletou gymnazistkou, o které jsem věděla, že je v matematice „premiantkou“ třídy. Bylo proto nemilým překvapením, když jsem u ní vypozorovala nedostatečné porozumění u základních poznatků v oblasti míry v geometrii. Na návrh vedoucí této práce jsem se tak rozhodla, že budu s žákyní v práci na zkoumání kvality porozumění pokračovat také v dalších oblastech matematiky.

Cílem této diplomové práce je tedy diagnostikovat případné formalismy v poznatkové struktuře žákyně, která má z matematiky výborné výsledky, a následně diskutovat možné příčiny jejich vzniku. Jako výzkumná strategie k zodpovězení nastolených otázek byla zvolena kvalitativně zaměřená případová studie, založená primárně na analýze diagnostických rozhovorů.

Struktura této diplomové práce je následující. Práce se skládá ze dvou kapitol, které jsou vzájemně provázány. První kapitola, která tvoří teoretickou část práce, je věnována pojmům teorie generického modelu (viz 1.1), formální poznání (1.2), kritická místa matematiky druhého stupně základní školy (1.3) a případová studie (1.4). Tyto pojmy jsou následně klíčové v druhé kapitole práce, jejíž zaměření je ryze praktické a v níž je popsána provedená případová studie. Tato kapitola postupně sestává ze stručného popisu metodologie výzkumu (viz 2.1), po kterém následují výsledky analýzy hloubkových rozhovorů (2.2) a shrnutí identifikovaných formálních poznatků (2.3). Posledním oddílem praktické části práce je diskuse (2.4), ve které jsou uvedeny možné příčiny vzniku identifikovaných formalismů a didaktické důsledky provedeného výzkumu. Současně jsou také nastíněna jeho omezení. Důležitou součástí práce jsou její přílohy, ve kterých jsou mimo jiné obsaženy pracovní listy s úlohami (viz přílohy A–D), které lze použít jako diagnostický nástroj při odhalování formalismů.

1 Teoretická část

V teoretické části práce jsou vymezeny nejdůležitější pojmy, o které se opírá argumentace v části praktické. V oddílu 1.1 je nejprve popsána teorie generického modelu, jež je při diskusi formálních poznatků neopomenutelná. Formálním poznatkům je věnován oddíl 1.2, v jehož úvodu je tento pojem nejdříve vysvětlen (1.2.1). Dále je věnována pozornost příčinám vzniku formálního poznání (1.2.2) a jeho diagnostikování (1.2.3) a rovněž jsou stručně nastíněny možnosti jeho reedukace a prevence (1.2.4). V oddílu 1.3 jsou shrnuty vybrané výsledky výzkumu kritických míst v matematice na 2. stupni základní školy, které motivovaly volbu témat pro rozhovory vedené v rámci uskutečněného výzkumu. Závěrečný oddíl (1.4) je věnován teoretickému vymezení pojmu případové studie.

1.1 Matematické poznání v kontextu teorie generického modelu

Formální poznatky, jimž je tato práce věnována, jsou jedním z ústředních pojmů teorie generického modelu. Než tedy bude možné přikročit k vymezení formálních poznatků jako takových, je nejprve nutné se s touto teorií obeznámit. V tomto oddílu je proto nastíněn proces jejího vzniku od úplných zárodků v polovině 20. století, přes změny, kterých postupem času dostála, až po její současné rozpracování, jehož autorem je M. Hejný.

1.1.1 Historie vzniku

U základů teorie, dnes známé jako teorie generického modelu, stála otázka, kterou si již ve 40. letech minulého století položil slovenský pedagog a matematik Vít Hejný.

Proč se tolik žáků snaží zvládnout matematiku pamětně, aniž by se pokoušelo o hlubší porozumění?

Cílem V. Hejného přitom nebylo pouze nalezení příčin tohoto mechanického učení v matematice, nýbrž také způsobu, jakým by bylo možné tento nežádoucí stav zvrátit. Hlavním úkolem se proto stalo především hledání konkrétních návodů na zkvalitnění výukového procesu (Hejný & Hejný, 1978, s. 85).

Klíčové pro vznik teorie generického modelu bylo přesvědčení V. Hejného, že vyšší efektivita ve vyučování matematice ze strany učitelů je podmíněna znalostí mechanismu poznávacího procesu – tedy zákonitostí, kterými se v matematice poznávací proces řídí (Hejný, 2014, s. 39). Sám V. Hejný přitom zdůrazňoval důležitost zkoumání tohoto mechanismu u dětí ve věku 5 až 7 let.

V prvním schématu poznávacího procesu, které V. Hejný zformuloval, nejprve vymezil následující tři etapy:

$$\textit{motivace} \rightarrow \textit{separované modely} \rightarrow \textit{univerzální model(y),}$$

přičemž separovaným modelem je v jeho terminologii myšlen konkrétní poznatek a univerzálním modelem poznatek obecný (viz dále).

Podrobněji pak byla tato etapizace rozpracována v 70. letech, kdy se již na budování teorie podílel i syn V. Hejného Milan. Tehdy byla teorie také poprvé publikována, a to v práci (Hejný & Hejný, 1978), v níž byly dvě ze tří stávajících etap přejmenovány a zároveň byly doplněny tři etapy nové:

$$\textit{stimulace} \rightarrow \textit{etapa jednotlivých modelů} \rightarrow \textit{etapa univerzálních modelů} \rightarrow$$
$$\rightarrow \textit{abstrakční zdvih} \rightarrow \textit{domestikace/krystalizace} \rightarrow \textit{automatizace}[1].$$

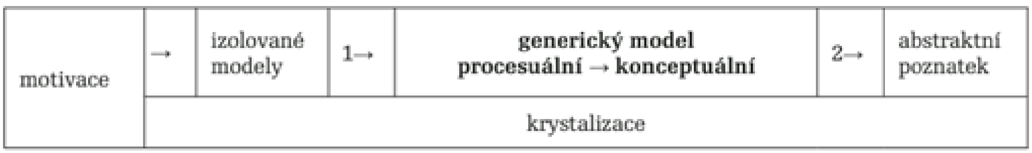
V průběhu posledních čtyř desetiletí byla teorie několikrát rozšířena a dále zpřesněna, a to zejména zásluhou M. Hejného a jeho rozsáhlého experimentu, který započal v roce 1975 v 5. ročníku základní školy s cílem nalézt takový způsob výuky matematiky, který by přispíval k rozvoji žákovského porozumění. Vedle přepracování etapizace došlo také k (zatím) finální úpravě terminologie, která je důsledkem překladu teorie do anglického jazyka (Hejný, 2014, s. 40). Namísto *jednotlivých* modelů užíváme proto označení modely *izolované*; namísto modelů *univerzálních* modely *generické*. Zároveň je dnes první etapa poznávacího procesu znovu označována jako etapa *motivace*, nikoliv *stimulace* jako v (Hejný & Hejný, 1978); termín *stimulace* je sice v současném rozpracování použit rovněž, nicméně v odlišném významu (viz s. 13).

[1] Již ve zmiňované práci autoři upozorňují, že závěrečná etapa, tedy etapa automatizace, není přímou součástí poznávacího procesu, nicméně je potřebná pro řešení složitějších úloh. Ve skutečnosti se tak jedná pouze o pětietapové schéma.

1.1.2 Současné rozpracování teorie

V tomto oddílu je popsána aktuální podoba teorie generického modelu, která tak od počátku nevznikala jako teorie, nýbrž jako „soubor myšlenek zaměřených na zkvalitnění vyučovacího procesu“ (Hejný, 2004, s. 23). Nelze vyloučit, že i toto její rozpracování bude časem dále poupraveno a doplněno. Výzkum mechanismu poznávacího procesu, který byl V. Hejným započat, totiž stále pokračuje a v této době je soustředěn na katedře matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy (Hejný, 2014, s. 40).

Nejúplněji je současná podoba teorie generického modelu prezentována v publikaci (Hejný, 2014, s. 39–79). Podle jejího aktuálního rozpracování je poznávací proces v matematice rozdělen do celkem pěti etap[2], kterými jsou: *motivace, izolované modely, generický model, abstraktní poznatek* a *krystalizace*. Rozklad mechanismu poznávacího procesu lze znázornit pomocí grafického schématu na obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Grafické schéma mechanismu poznávacího procesu (Hejný, 2014, s. 73)

Kromě zmíněných pěti etap jsou ve schématu pomocí šipek naznačeny také dva přechody mezi jednotlivými etapami, a to konkrétně mezi etapami izolovaných modelů a generického modelu a dále pak mezi etapami generického modelu a abstraktního poznatku. Tyto přechody, které jsou souhrnně označovány jako tzv. *zdvihy*, přitom reprezentují dva důležité kognitivní posuny při tvorbě poznatků. Zdvih mezi etapami izolovaných modelů a generického modelu, který je ve schématu označen číslicí 1, je nazýván *zobecněním*; zdvih mezi etapami generického modelu a abstraktního poznatku, označený číslicí 2, je tzv. *abstrakcí* (ibid., s. 40).

V následujícím textu jsou jednotlivé etapy teorie generického modelu popsány podrobněji a pro názornost jsou zároveň ilustrovány, a to na příkladu početní operace sčítání na malých přirozených číslech, obdobně jako v (Hejný & Kuřina, 2015, s. 128).

[2] V literatuře se vedle označení „etapa“ můžeme setkat také s označením „hladina“, viz např. (Hejný, 2004).

Motivace

Etapa motivace je v poznávacím procesu dle Hejného[3] (2014, s. 42) klíčová, jelikož skutečná vnitřní potřeba poznávat je nutnou podmínkou pro konstrukci hlubších, komplexnějších a kvalitnějších znalostí.[4] Motivace je u žáka důsledkem rozporu mezi stavem nevědomosti, ale zároveň potřebou vědět, která je, obzvlášť u dětí předškolního věku, velmi silná.[5] S nástupem do školy však touha po poznání rychle klesá a motivace poznávat je ve školním prostředí často nahrazena tzv. *stimulací.* O té hovoříme v situaci, kdy je žák k poznávání nucen: žák je stimulován např. tehdy, kdy je jeho poznávání hnáno snahou vyhovět dospělým (obvykle učiteli nebo rodičům), případně snahou získat dobrou známku či se vyhnout známce špatné.

Stěžejní v první etapě poznávacího procesu je proto nalézt odpovědi na otázku, jakým způsobem je možné žáky ve školním prostředí motivovat.[6] Dle Hejného (ibid., s. 44) je klíčovým nástrojem motivace zejména vytvoření podnětného prostředí, ve kterém jsou žákům předkládány přiměřeně náročné[7] úlohy a ve kterém je žákům umožněn rozvoj jejich intelektuální autonomie. Dále je vhodné zasadit úlohy do atraktivního kontextu, případně použít ve výuce prvek hry či soutěže. V každém případě je nutné věnovat dostatečnou pozornost problému individualizace výuky, která však může být často velmi náročná.

Teprve jsou-li žáci dostatečně motivováni, je možné přestoupit do druhé etapy poznávacího procesu, tedy k izolovaným modelům.

[3]V následujícím textu odkazuje příjmení Hejný vždy k Milanovi Hejnému. V příležitostných odkazech k jeho otci Vítovi je vždy použito počáteční písmeno jeho křestního jména, tedy je uvedeno V. Hejný.

[4]Hejný a Hejný (1978, s. 88), kteří ve své práci doplňují ontogenetický pohled na genezi matematického myšlení také o pohled fylogenetický, zdůrazňují v oblasti motivace z hlediska fylogeneze zejména roli tří klasických problémů – duplicity krychle, trisekce úhlu a kvadratury kruhu. Přestože je již dnes dokázáno, že se jedná o problémy nevyřešitelné, právě touhou tyto problémy rozlousknout byla motivována většina objevů helénské matematiky.

[5]Hejný (2004, s. 27–28) a Hejný a Stehlíková (1999, s. 27) udávají jako příklad této zvídavosti množství otázek typu „proč má pes ocas,“ které je schopno položit tříleté dítě. Podobný zájem projevují předškolní děti i o oblast počtů.

[6]Ve školním prostředí hovoříme nejčastěji o motivaci poznávací, výkonové či sociální, přičemž v Hejného pojetí motivace je zásadní její poznávací složka. V rámci výkonové motivace rozlišujeme dvě navzájem nezávislé potřeby – potřebu úspěšného výkonu a potřebu vyhnutí se neúspěchu (Pavelková & Škaloudová, 2008, s. 1).

[7]Přiměřeně náročnou úlohou je myšlena taková úloha, která je pro daného žáka dostatečně snadná na to, aby ji správně vyřešil, ale zároveň dostatečně náročná na to, aby měl z jejího vyřešení radost.

Izolované modely

Izolovaným modelem rozumíme „konkrétní případ příští znalosti“ (Hejný, 2014, s. 47).

Ukázkou takového konkrétního případu příští znalosti může být například situace, ve které předškolní dítě manipulativně sečte tři jablka a dvě jablka a určí správný výsledek. Pokud však bude toto dítě požádáno o sečtení tří a dvou hrušek, bude muset s hruškami stejnou manipulaci zopakovat, neboť nebude schopné přenést daný výpočet z jednoho kontextu do druhého. Jednotlivé zkušenosti jsou totiž v jeho vědomí oddělené.

Etapu izolovaných modelů, která tedy spočívá zejména ve sběru konkrétních zkušeností, lze rozdělit do následujících čtyř stádií (Hejný, 2014, s. 48):

1. Ve vědomí se usadí první konkrétní zkušenost – zárodek příštího poznání.
2. Postupný příchod dalších izolovaných modelů, které zatím nejsou propojeny. Mohou se objevit i modely zdánlivé a být odmítnuty modely překvapivé.[8]
3. Některé modely začnou na sebe poukazovat a shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká tušení, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“.
4. Zjištění podstaty oné „stejnosti“ vede k vytvoření komunity modelů.

Obecně je pro žáky nejobtížnější přechod do třetího stádia. Zatímco první dvě stádia jsou totiž do jisté míry rutinní, pro přechod do stádia třetího je nutné učinit objevitelský krok. Žák však tohoto objevu nemusí být ihned schopen, pokud společnou podstatu série izolovaných modelů nedokáže nahlédnout. V této situaci pak často nastupuje snaha netrpělivého edukátora, který chce žáka na tuto „stejnost“ upozornit. Jak však varuje Hejný (ibid., s. 48–50), tato snaha může být kontraproduktivní, jelikož nerespektuje potřebu spontánní tvorby rozsáhlé zásoby izolovaných modelů. Žáka, který do třetího stádia není schopen postoupit, je však možné nasměrovat pomocí vhodné úlohy, která ho k potřebnému objevu navede.

Izolované modely a zejména vazba mezi nimi jsou v poznávacím procesu rovněž zásadní (Hejný & Kuřina, 2015, s. 131). Právě na základě bohaté komunity izolovaných modelů je totiž prvním abstrakčním zdvihem, tedy zobecněním,

[8] Zdánlivými modely rozumíme takové modely, které se jeví jako izolované modely daného poznatku, ale ve skutečnosti jimi nejsou. U modelů překvapivých je situace opačná – zdá se, že se o izolovaný model daného poznatku nejedná, daný model přitom modelem izolovaným skutečně je.

zkonstruován model generický. Pro tento proces zobecnění je také charakteristická radost, která náhlé uzření nových skutečností, tedy tzv. AHA-efekt, provází (Hejný, 2014, s. 51).

Generický model

Etapa generického modelu následuje po čtvrtém stádiu etapy izolovaných modelů, nebo s ní často přímo splývá (Hejný, 2014, s. 51).

Generický model, který lze dále rozdělit na generický model procesuální a konceptuální, je dle Hejného (ibid., s. 40) ústředním pojmem celé teorie a představuje „poznání toho, co všechny dřívější jednotlivé zkušenosti, izolované modely, spojuje".

Generickými modely pro operaci sčítání na malých přirozených číslech jsou nejčastěji prsty nebo počítadlo. Používá-li dítě k sečtení čísel tři a dva prsty a uvědomuje-li si, že tři věci a dvě věci je vždy pět věcí, nehledě na sémantický kontext, uvažuje již na úrovni generického modelu. Generický model tak představuje určitého reprezentanta pro celou třídu izolovaných modelů, a je tedy „prototypem každého jedince této komunity, a to nejen těch izolovaných modelů, z nichž byl vyvozen, ale všech dalších zatím neevidovaných" (ibid., s. 53).

Generický model rovněž hraje nezastupitelnou roli při diagnostikování kvality žákovského poznání – dle Hejného totiž „kvalitu matematických znalostí žáka určuje přítomnost/absence příslušných generických modelů" (ibid., s. 54).[9]

Abstraktní poznatek

Abstraktní poznatek představuje nejvyšší úroveň poznatků (Hejný, 2014, s. 73) a vzniká druhým abstrakčním zdvihem, tj. abstrakcí, z generického modelu. Abstrakce je přitom obvykle doprovázena změnou jazyka.

Žák, který se seznamuje se sčítáním malých přirozených čísel, do etapy abstraktního poznatku přechází tehdy, kdy je schopen vyjádřit již mnohokrát zmiňovaný součet s využitím matematické symboliky. Abstraktním poznatkem je tedy pro takového žáka rovnost $3 + 2 = 5$.

Abstraktní poznatky jsou důležité také z tohoto důvodu: později se mohou stát izolovanými nebo generickými modely v dalších poznávacích procesech (Hejný & Kuřina, 2015, s. 136).

[9] Rozsáhlý soubor možných generických modelů, které může žák u daného poznatku ovládat, lze dobře ilustrovat na příkladu zlomků, kde se mezi generické modely řadí např. úsečka, tyč, čokoláda či koláč.

Krystalizace

Krystalizaci definuje Hejný (2014, s. 73) jako „proces uhnízdění nového poznatku ve vědomí žáka“. Krystalizace spočívá v propojování daného poznatku na znalosti, které žák získal již dříve, a v hledání nových souvislostí mezi nimi, přičemž jejím cílem je „vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi jednotlivými poznatky“ (ibid., s. 73). V průběhu etapy krystalizace může také docházet k určité restrukturalizaci části kognitivní struktury (Hejný & Kuřina, 2015, s. 138).

Z časového hlediska je krystalizace dlouhodobý proces. Ještě donedávna bylo navíc její umístění ve schématu poznávacího procesu poněkud nepřesné. Před publikováním práce (Hejný, 2014) byla totiž etapa krystalizace označována za chronologicky poslední, pátou etapu poznávacího procesu, začínající v okamžiku, kdy má již žák zkonstruovaný abstraktní poznatek (viz obr. 1.2).

motivace	→	izolované modely	1→	**generický model procesuální → konceptuální**	2→	abstraktní poznatek	→	krystalizace

Obrázek 1.2: Grafické schéma mechanismu poznávacího procesu před změnou umístění etapy krystalizace (Hejný, 2014, s. 40)

Proces krystalizace však může být zahájen již dříve, a to nejčastěji s objevením generického modelu.[10] V nejnovějším rozpracování teorie generického modelu (jehož schéma bylo naznačeno na obr. 1.1) proto na etapu krystalizace nahlížíme jako na prostupující celým poznávacím procesem (vyjma úvodní etapy motivace).

Posledním procesem, který je v literatuře často zmiňován, je *automatizace*, tedy „nácvik známého“ (Hejný, 2004, s. 29). Jak již bylo ovšem zmiňováno, automatizace nepředstavuje přímou součást poznávacího procesu; pro úspěšnou práci v matematice je nicméně u některých poznatků nezbytná.[11]

Závěrem tohoto oddílu je pro úplnost nutno dodat, že teorie generického modelu jistě není jedinou teorií, která popisuje mechanismus poznávacího procesu. Sám Hejný (ibid., s. 29) uvádí, že je tuto teorii vhodné doplňovat také

[10] Ani to však nemusí být pravidlem: počátky etapy krystalizace někdy splývají již s etapou modelů izolovaných.

[11] (Hejný & Hejný, 1978) ilustrují důležitost automatizace v matematice pomocí analogie s automatizací při nácviku čtení – teprve tehdy, kdy si žák zautomatizuje čtení, může uvolnit kognitivní kapacity potřebné k tomu, aby se soustředil také na obsah čteného. V matematice funguje automatizace na obdobném principu.

o další přístupy osvětlující pojmotvorné jevy v matematice.[12] O toto doplnění se však v této práci pokoušet nebudeme, neboť vzhledem k jejím cílům není příliš relevantní.

1.2 Formální poznatky

> *Nemoc formalismu je, podle našeho přesvědčení, nejvážnější didaktický problém současného vyučování matematice. Úlohou výzkumu je odhalovat příčiny této nemoci a hledat prevenci i reedukační postupy.*
>
> – Hejný a Stehlíková (1999, s. 29)

1.2.1 Vymezení pojmu

V publikaci (Hejný, 2016, s. 54) je formální poznatek definován pomocí pojmů *informace* a *znalost* následovně:

> *Poznatek* je každý prvek nebo klastr prvků (= shluk prvků, které mohou být různě propojeny) dlouhodobé paměti člověka.
> *Informace* je poznatek, který do paměti vstoupil zvenčí a oporu v již existujících izolovaných modelech a generických modelech si teprve musí hledat; mnohdy ale k tomuto hledání ani nedochází.
> *Znalost* je poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů.
> *Formální poznatek* (mechanical knowledge) je informace, která mohla být znalostí.

Jelikož mezi jednotlivými publikacemi z didaktiky matematiky nepanuje na vymezení některých pojmů bezvýhradná shoda[13], termínům uvedeným v citaci výše budeme rozumět ve smyslu této citace. Pro úplnost dodejme, že v následujícím textu práce jsou jako synonyma používány pojmy „formální poznání“, „formální poznatky“ a „formalismy“.

[12] Z dalších nástrojů výzkumu zmiňuje Hejný (2014, s. 29) například teorii reifikace (Sfard, 1991), teorii proceptu (Gray & Tall, 1994) či APOS-teorii (Dubinsky, 1991); Vondrová (2019, s. 29) dále uvádí také teorii „abstrakce v kontextu“ (Hershowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001).

[13] V práci (Hejný & Kuřina, 2015, s. 149) je například místo termínu formální poznatek použit termín *formální znalost*, přičemž tato je charakterizována jako znalost, jež postrádá oporu v izolovaných a generických modelech a jež je uchována pouze pamětně. Dle citovaného Hejného vymezení se však v takovém případě o znalost nejedná.

Z Hejného vymezení plyne, že formální poznatky jsou takové poznatky, které nevznikly vlastní postupnou konstrukcí v souladu se zásadami mechanismu poznávacího procesu v matematice, nýbrž byly do žákovy kognice dodány zvenčí. Takové poznatky tedy nejsou opřeny o generický model a mnohdy ani o žádné modely izolované.

Pro čtenářovu lepší představu uveďme příklady poznatků, které jsou ve vědomích žáků často formální. Podle Hejného (2016, s. 54) jde o poznatky typu „mínus krát mínus dává plus“, „když je před závorkou mínus, znaménka v závorce se mění“, „když číslo převádíme na druhou stranu rovnice, měníme znaménko“ apod. U těchto (a také celé řady dalších) poznatků se často jedná pouze o pamětně osvojené poučky, kterým však žák ve skutečnosti nerozumí.[14]

Formální poznatky jsou obecně charakteristické tím, že žákovi dobře slouží při řešení standardních úloh, ve kterých je třeba imitovat naučený postup nebo odříkat pamětně uloženou definici či vzorec. Zároveň ale takové poznatky nejsou schopny dalšího rozvoje a jsou často rychle zapomenuty. Dle Hejného a Stehlíkové (1999, s. 28) proto nemůžeme hovořit o skutečném poznání, nýbrž pouze o jeho „protéze“; obdobně Hejný a Kuřina (2015, s. 195) označují formální poznání za „pseudopoznání“.

Také je nezbytné uvést, že pomocí termínů formální a neformální poznatek jsou většinou označovány dva extrémy, ale ve skutečnosti se jedná o kontinuum. Z tohoto důvodu je u daného poznatku možno hovořit spíše o míře jeho formálnosti (Hejný & Kuřina, 2015, s. 149).

Rovněž není pravidlem, že v kognici žáka zatěžují formalismy nutně všechny oblasti matematiky. Nejenom pro tyto účely rozlišují Hejný a Stehlíková (1999, s. 28–30), kteří na formální poznání metaforicky nahlíží jako na „nemoc kognitivní struktury“, následující tři stádia formálního poznání:

1. U žáků, kteří se nacházejí v prvním stádiu formalismu, je možné formální poznatky identifikovat pouze v několika málo matematických oblastech. Důležité je, že žáci si jsou formalismů ve své kognici vědomi a vítají pomoc při jejich odstraňování.

[14] Je nezbytné vyjasnit, jakým způsobem chápeme v práci porozumění v matematice, s nímž formální poznatky velmi úzce souvisí. Dle Vondrové (2019, s. 19) je totiž možné na koncept porozumění v didaktice matematiky nahlížet různě. Pro potřeby této práce se přidržíme Skempova (1976, s. 20) pojetí porozumění, ve kterém je rozlišováno porozumění *relační* (‚*relational*‘) a *instrumentální* (‚*instrumental*‘) Zatímco relační je takové porozumění, při kterém žák nejenom ví, co má udělat, ale také zná důvod proč, u porozumění instrumentálního mluvíme pouze o „pravidlech bez důvodu“ (‚*rules without reasons*‘). Skemp však uvádí pochybnosti, zda je v případě pravidel bez důvodu vůbec možné termín porozumění používat. Mluvíme-li tedy v této práci o porozumění, máme na mysli porozumění relační.

2. Druhé stádium formalismu je autory označováno jako „kritické období“. V tomto období, ve kterém je formálními poznatky zasažena rozsáhlejší část poznatkové struktury, totiž dochází k rozhodování žáka, zda se bude snažit formalismů zbavovat, či zda se smíří s tím, že se bude matematiku učit pamětně a bez porozumění.

3. Třetí stádium formalismu je nejzávažnější. V tomto stádiu žák nabývá dojmu, že jeho kognitivní schopnosti jsou pro porozumění v matematice nedostačující, a za „přirozený a jedině možný“ způsob učení se postupů, vzorců a definic považuje pamětné osvojování.

Hejný a Stehlíková také upozorňují na klíčový aspekt choroby formalismu, kterou je její závažnost, jež zdaleka přesahuje didaktiku matematiky. Podle autorů tato choroba není omezena na žákovy matematické vědomosti a schopnosti, nýbrž „proniká až do osobnostní sféry, do hodnotového systému, do sebehodnocení, do metakognice a následně potom i do oblasti životních strategií“ (ibid., s. 28). Žák důsledkem formalismu ztrácí intelektuální sebedůvěru a stává se „intelektuálním příživníkem“ společnosti. Tento termín nejlépe ilustruje následující citát:

> Člověk bez schopnosti vlastního posouzení jevů se stává vazalem těch, kteří mají dar sugestivního přesvědčování. Nemá schopnost poznat podstatu myšlenky, je odkázán rozhodovat se na základě dojmů, kterými na něj prezentace té či oné myšlenky zapůsobí. Takové rozhodování může mít pro něj velmi žalostné následky. Společnost, ve které popsaným nedostatkem trpí početná část jedinců, není zralá na demokracii. Hrozí jí, že sugestivní demagog se pomocí regulérního volebního procesu stane uzurpátorem moci.
>
> (Hejný a Stehlíková, 1999, s. 29)

Metaforické nahlížení na formalismus jako na chorobu rovněž umožňuje zabývat se otázkou, jak je možné ji diagnostikovat, léčit či jak jí předcházet. V případě formálního poznání nabízí odpověď teorie generického modelu, která byla, dle slov jejího autora, přímo konstruována jako nástroj na:

> 1. porozumění příčinám vzniku formálního poznání,
> 2. diagnostikování formálního poznatku,
> 3. reedukaci formálního poznatku,
> 4. předcházení tvorbě fixovaných formálních poznatků.
>
> (Hejný, 2004, s. 39)

Příčinám vzniku formálního poznání a možnostem jeho diagnostiky, reedukace a prevence jsou věnovány následující oddíly práce.

1.2.2 Příčiny vzniku

Teorie generického modelu implikuje, že kvalitní poznatek si musí žák zkonstruovat sám na základě svých zkušeností. Pokud však popsaný mechanismus poznávacího procesu není respektován a poznatek se žákovi do paměti dostává jako informace, tedy bez opory v generickém modelu, výsledné poznání bude formální (Hejný, 2004, s. 39; Hejný, 2016, s. 58). Autoři se shodují, že ke vzniku formálního poznání proto dochází zejména v důsledku přeskakování etapy modelů (Hejný & Kuřina, 2015, s. 155; Hejný, 2016, s. 51). Namísto vlastní konstrukce poznatků se žáci snaží přebírat již hotové poznatky a ty uchovávají pamětně. Otázkou je, z jakého důvodu se žáci k volbě této „zkratky“ uchylují. Jak se ukazuje, svou roli hraje především edukační strategie ve vyučování matematice.

Transmisivní vyučování

Hlavní příčinou vzniku formalismů bývá nejčastěji označován transmisivní způsob vyučování (Hejný & Stehlíková, 1999, s. 29; Hejný, 2004, s. 39). Pro tento výukový styl je charakteristická víra, že matematickou znalost je možné přenést do mysli žáka z mysli učitele, a na základě této víry jsou žákům předkládány hotové informace. U obzvlášť nebezpečného typu transmisivního vyučování, který je založen na imitaci předávaných instrukcí, hovoříme o vyučování instruktivním.

Dle Hejného a Stehlíkové (1999, s. 31–33) je pro transmisivní vyučování typické zaměření na výkon žáka u zkoušek, nikoliv jeho osobnostní rozvoj. Práce učitele, který je při transmisivním stylu vyučování nositelem aktivity, je popsána takto (ibid., s. 31):

> Cvičí žáka v řešení typových úloh, které je možné na zkouškách očekávat, ukazuje mu triky, kterými může řešení zlehčit či urychlit. Častým opakováním vštěpuje do žákovy paměti přesné formulace definic, vět, někdy i důkazů.

Přirozená žákova reakce na transmisivní způsob vyučování je dle (Hejný & Hejný, 1978, s. 91) následovná: dítě se matematice nesnaží porozumět, nýbrž spoléhá na svou paměť, kterou zdokonaluje na úkor kauzálního myšlení. Není tak rozvíjen jeho intelekt. Tento stav však není chybou ani žáka, ani učitele – ten, neznaje zákonitosti mechanismu poznávacího procesu, se podobá zahradníku, který se v dobré víře snaží povytahovat květ ze země, aby podpořil jeho růst (ibid., s. 93).

Konstruktivistické vyučování

Protipólem k transmisivnímu vyučování je vyučování konstruktivistické, ve kterém je akcentována aktivní úloha žáka, který si poznání vytváří samostatně při zpracovávání vhodné série úloh. Žák si tedy poznání konstruuje sám na základě vlastních zkušeností, které jsou nepřenositelné (Hejný & Stehlíková, 1999, s. 29).

V rámci konstruktivismu rozlišujeme několik proudů – např. konstruktivismus sociální či radikální (Vondrová, 2004, s. 11). Z pohledu didaktiky matematiky je pak nejvíce relevantní tzv. didaktický konstruktivismus, jehož desatero je formulováno v (Hejný & Kuřina, 2015, s. 194—195).

Dle Stehlíkové a Cachové (2006, s. 6) lze některé rysy konstruktivistického způsobu vyučování popsat v pěti tezích:

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.
3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.
4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

Vondrová (2004, s. 18) uvádí, že konstruktivistické vyučování může vést k poznatkům, jejichž kvalita je vyšší než u poznatků získaných na základě transmise. Ve prospěch konstruktivismu rovněž hovoří fakt, že tento způsob vyučování má pozitivní dopad na žákovu intelektuální sebedůvěru a „nepřipouští vznik formálních poznatků“ (Hejný & Stehlíková, 1999, s. 33).

Je však třeba zmínit, že ani konstruktivistické vyučování není možné vnímat absolutně nekriticky, neboť i tento způsob výuky má svá přirozená úskalí (například nemusí vyhovovat všem žákům).

Příčiny mechanického učení v matematice

Formální poznatky mají ve vědomích žáků často podobu mechanicky osvojených procedur. Uveďme proto ještě hlavní příčiny mechanického učení v matematice, které shrnul V. Hejný:

1. předčasné „vyzbrojení“ dítěte silnými nástroji,
2. časová tíseň, ve které má dítě řešit úkoly,
3. nízká motivace žáka – ten je k učení se matematiky nucen, nebaví jej to,

4. nezkušenost žáka s konkrétními jevy, příliš rychle dostává hotovou znalost.

(Hejný, 2016, s. 39–40)

Lze konstatovat, že první a čtvrtá z příčin spolu úzce souvisí. Otázkou zůstává, proč se učitelé těchto nešvarů dopouštějí a proč ve výuce příliš rychle přistupují k transmisivnímu předkládání hotových znalostí. Odpověď nabízí Hejný a Kuřina (2015, s. 155): na budování kvalitních představ, které je časově velmi náročné, ve výuce nezbývá prostor. Učitelé jsou tak chyceni v určitém „bludném kruhu“, v rámci nějž se snaží na jednu stranu dovést žáky k porozumění, ale na stranu druhou postupovat podle tematického plánu a plnit osnovy.[15]

1.2.3 Diagnostika

Provádět diagnostiku formalismu znamená dle Hejného (2016, s. 57) „odhalovat, které pojmy, vztahy, procesy a argumenty má daný žák zatíženy formalizmem, hledat příčiny tohoto nedostatku a navrhnout reedukační postupy“. Diagnostickým závěrem přitom může být i konstatování, že žákovo porozumění je dobré.

Některé formalismy je možné identifikovat i při běžném vyučování, a to zejména na základě běžné třídní diskuse či písemných projevů žáka. Na podrobnější diagnostiku kvality žákovského poznání však v běžném vyučování zpravidla nebývá čas.

Indikátory formalismu

Pro účely diagnostikování formalismů formuluje Hejný (2014, s. 55–57) celkem sedm indikátorů (viz tab. 1.1), na jejichž základě je možné označit daný poznatek za formální. Nejdůležitější jsou přitom indikátory č. 1 a č. 2, které jsou souhrnně označovány jako indikátory izolovanosti.

Nástroje diagnostiky formalismu

Hejný et al. (1988, s. 24) upozorňují, že formalismy jsou velmi často kryty různými pamětně uchovanými poučkami, vzorci apod. Na základě standardních

[15]Této problematice se věnuje i Skemp (1976, s. 24), který uvádí také další překážky. Mezi nimi zmiňuje například situaci začínajících učitelů, kteří se k nácviku procedur uchýlí z důvodu, že tímto způsobem je matematika na škole vyučována všemi ostatními učiteli. Začínající učitel se proto tomuto výukovému stylu přizpůsobí.

Tabulka 1.1: Indikátory formalismu (Hejný, 2014, s. 55–57)

1.	**Formální poznatek není propojen na životní zkušenosti.**
2.	**Formální poznatek není propojen na jiné poznatky.**
3.	Když žák formální poznatek zapomene, neumí se k němu dobrat bez vnější pomoci.
4.	Formální poznatek není aplikovatelný v nestandardních situacích.
5.	Formální poznatek není schopen dalšího rozvoje.
6.	Chybný formální poznatek žák není schopen samostatně opravit. Žák někdy není schopen poznat, že jeho poznatek je chybný.
7.	Poučka uchovaná ve vědomí žáka bez porozumění kontextu je formálním poznáním.

školských úloh se tak může zdát, že žák učivo ovládá a jeho znalosti jsou dostatečně kvalitní. Pravdou ale může být opak – žák má mechanicky osvojené procedury, nicméně porozumění mu chybí. Z tohoto důvody jsou základním nástrojem komplexní diagnostiky formálního poznání takové úlohy, které testují žákovské porozumění. Základem při diagnostikování formalismů mohou být například úlohy, které žáky staví do nestandardních situací, zmíněných v tab. 1.2.

Tabulka 1.2: Nestandardní situace k diagnostikování formalismu (Hejný et al., 1988, s. 24–25)

1.	Objasnit paradox.
2.	Rekonstruovat zapomenutý vzorec.
3.	Objasnit selhání standardního postupu.
4.	Obhájit standardní postup vůči námitce.
5.	Najít chybu v úvaze.
6.	Aplikovat poznatek v praxi.
7.	Rozhodnout o platnosti hypotézy.
8.	Najít objekt požadovaných vlastností.
9.	Řešit nestandardní úlohu.
10.	Objasnit některé pojmy, souvislosti, symboliku atp.

Za nejdůležitější nástroj pro identifikaci formalismu však Hejný a Kuřina (2015, s. 157) považují zejména znalosti a zkušenosti osoby, která diagnostiku provádí, přičemž tyto znalosti a zkušenosti je možné získat vlastní tvorbou a použitím diagnostických technik. Diagnostika formalismu tak klade velké nároky také na učitele či výzkumníka, který se o ni pokouší.

Při diagnostice formalismu je v každém případě nutné mít na paměti následující: za formální nelze považovat poznatek, u kterého je důvodem nedostatečné zásoby izolovaných modelů fakt, že se žák nachází teprve na samém počátku procesu konstrukce znalosti (Hejný & Kuřina, 2015, s. 160).

1.2.4 Reedukace a prevence

O závažnosti formalismu již bylo pojednáno na s. 19 této práce. Je tedy žádoucí, aby se žáci již vzniklých formálních poznatků zbavovali a zároveň předcházeli vzniku dalších. Přestože ani reedukace, ani prevence formalismů není cílem výzkumu v praktické části práce, pro úplnost o nich bude v tomto oddílu stručně pojednáno.

Reedukace

Jev odstranění formálního poznatku z kognice žáka je označován jako *zživotnění*[16] (Hejný et al., 1988, s. 41).

Vzhledem ke zmiňované příčině vzniku formalismů, kterou je přeskakování etapy modelů, není překvapením, že zživotňování formálního poznatku spočívá v dobudování chybějících izolovaných modelů, případně modelu generického (Hejný & Kuřina, 2015, s. 167). V procesu reedukace je tedy nutné vrátit se s žákem na úroveň problematiky, do které má vhled, a od té postupovat v souladu se zásadami konstruktivismu (Hejný & Stehlíková, 1999, s. 30).

Šance na zživotnění formálního poznatku je větší, pokud má na jeho odstranění zájem i sám žák, nejenom jeho učitel. Pokud žák proces reedukace naopak odmítá, může být zživotnění identifikovaných poznatků dle Hejného et al. (1988, s. 41) přímo nemožné. To mimo jiné implikuje, že formalismy lze snáze redukovat v prvním stádiu, ale hůře (nebo vůbec) ve stádiu třetím. Dobrým předpokladem k úspěšnému zživotnění formálního poznatku je dle Rendla a Páchové (2013, s. 165) i pamětné osvojení procedury či definice.

Z uvedeného je patrné, že proces zživotňování formálních poznatků může být procesem velmi dlouhým a u každého žáka rovněž velmi individuálním. Je na učiteli, aby se těmito překážkami nenechal odradit.

Prevence

Odpověď na otázku, jak předcházet formálním poznatkům, je jednoduchá: při koncipování výuky je nutné trpělivě respektovat zákonitosti pojmotvorného procesu v matematice a nepřeskakovat žádné z jeho klíčových etap (Hejný &

[16] Vedle pojmu zživotnění se v literatuře vyskytuje také pojem *oživení* (viz Hejný & Kuřina, 2015, s. 167).

Stehlíková, 1999, s. 30). Současně je nezbytné žáky cíleně vést k porozumění[17] a v duchu konstruktivismu podporovat jejich aktivní činnost a zájem o matematiku; naopak není radno transmisivním způsobem předávat informace a hotové poznatky, které jsou určené k pamětnému osvojení. V každém případě je třeba poskytnout žákům při objevování matematiky dostatek času.

1.3 Kritická místa matematiky 2. stupně ZŠ

Oddíl 1.3 je věnován shrnutí výsledků výzkumného projektu, jehož cílem bylo zkoumat tzv. kritická místa matematiky základní školy, tj. obtížné oblasti, ve kterých žáci „často a opakovaně selhávají“ (Vondrová & Rendl, 2015, s. 12). Výsledky tohoto projektu byly publikovány ve dvou knihách. V knize (Rendl et al., 2013) jsou uvedeny závěry z rozhovorů na téma kritických míst vedených s učiteli, jež se vyjadřovali k žákovským obtížím, které ve vyučování pozorují a uváděli jejich možné příčiny. V monografii (Vondrová et al., 2015) jsou publikovány výsledky následných hloubkových rozhovorů s žáky. Cílem bylo zejména nabýt hlubšího vhledu do problematiky žákovských obtíží.

Původním záměrem autorů bylo začlenit do výzkumu pouze žáky s průměrnou známkou z matematiky 2, 3 nebo 4. Od tohoto záměru však bylo upuštěno, když autoři po předběžné analýze rozhovorů s několika žáky zjistili, že některé ze zkoumaných obtíží je možné vysledovat také u těch, kteří jsou v matematice hodnoceni známkou 1. Do výzkumu proto byli zařazeni i žáci s výborným prospěchem, netvořili však významnou část zkoumaného vzorku.

Z výsledků rozhovorů s učiteli se jako vhodná pro rozhovory s žáky 2. stupně základní školy vykrystalizovala následující témata: zlomky, algebraické modelování a úpravy algebraických výrazů, konstrukční úlohy a míra v geometrii. Zlomkům v této práci nebude věnována pozornost, níže jsou však popsány některé obvyklé žákovské obtíže ve zbývajících zmíněných oblastech.

[17] Otázka, jak vést žáky ve výuce k porozumění, je velice složitá a její podrobnější diskuse je nad rámec této práce. Obecné tendence, které se v empirickém výzkumu podařilo vysledovat, je možné nalézt v práci (Hiebert & Grouws, 2007), v níž autoři na základě metaanalýzy studií, zabývajících se kvalitou výuky, identifikovali aspekty výuky, které přispívají k rozvoji žákovského porozumění. Dále je zájemcům doporučena kapitola 2.5 v práci (Vondrová, 2019, s. 29—52), ve které autorka (v části kapitoly vycházejíce ze zmiňované metaanalýzy) nabízí ucelený přehled charakteristik výukových situací, které porozumění v matematice podporují.

1.3.1 Konstrukční úlohy

Konstrukčními úlohami jsou „takové úlohy, v nichž mají žáci na základě zadaných hodnot zkonstruovat geometrický objekt daných vlastností“ (Vondrová & Havlíčková, 2015, s. 133).

Jednou z nejzávažnějších příčin problémů při řešení konstrukčních úloh je nerozlišování dvou prostorů v geometrii (viz Laborde, 2005) – prostoru geometrických objektů a vztahů (‚*theoretical*‘) a prostoru prostorově-grafických entit (‚*spatio-graphical*‘).[18] Důsledkem nerozlišování dochází k častému zaměnění objektů v geometrii za jejich sémantickou reprezentaci – body a objekty, které je nutno chápat v teoretickém prostoru, jsou ztotožněny s jejich znázorněními na tabuli či papíře.

Při řešení konstrukčních úloh se od žáků očekává, že budou uvažovat v rámci teoretického prostoru a teprve na základě teoretických znalostí budou konstruovat obraz v prostoru reprezentací. Častou chybou, které se žáci dopouští a která je projevem setrvávání v prostoru reprezentací, je snaha o „překreslení“ objektu, aby zadané vlastnosti zdánlivě splňoval (Vondrová & Žalská, 2013, s. 108; Vondrová & Havlíčková, 2015, s. 134–135). Taková konstrukce není korektní.

Přechod z prostoru reprezentací k úvahám v prostoru teoretickém je dle Hejného (2004, s. 39) u žáků na základní škole „nejzávažnějším abstrakčním zdvihem v rozvoji geometrického myšlení“ a právě tento zdvih je nutnou podmínkou pro konstrukci kvalitní abstraktní znalosti. Žáci, kteří se v konstrukčních úlohách snaží řešení „nakamuflovat“, se proto ve stádiu abstraktní znalosti ještě nenachází.

Další obtíže žáci vykazují v oblasti poznatků o geometrických objektech. Výzkum ukázal, že přestože jsou žáci (v tomto konkrétním případě prvostupňoví) například u kosočtverce většinou schopni uvést správný název, jen málo z nich dokáže objekt s využitím jeho charakteristických vlastností přesně popsat. U žáků 2. stupně se navíc projevilo, že „znalost termínu (např. osa) a postupu příslušné konstrukce nezaručuje, že žák má daný pojem, který je termínem pojmenován, podepřen správnou představou“ (Vondrová & Havlíčková, 2015, s. 171).

Zdrojem mnoha žákovských obtíží při řešení konstrukčních úloh je také silné uvažování v prototypech. Časté je například zobrazování geometrických objektů výhradně v prototypických polohách (ibid., s. 136). Prototypy jsou rovněž po-

[18] Pro tyto prostory budeme v práci používat označení prostor *teoretický* a prostor *reprezentací*.

užívány při značení geometrických útvarů, což je dle některých učitelů (viz Vondrová & Žalská, 2013, s. 115) způsobeno didaktickou překážkou v podobě sklonu označovat geometrické útvary stále stejnými písmeny (u trojúhelníku písmeny A, B a C, apod.).

1.3.2 Míra v geometrii

V oblasti míry v geometrii se učitelé ve výzkumu vyjadřovali téměř výhradně k žákovským obtížím týkajících se práce se vzorci. Za největší problém je označován fakt, že si žáci vzorce nepamatují, případně si je pletou (Vondrová & Žalská, 2013, s. 113).

Při výzkumu byla vysledována tendence žáků příliš se na vzorce spoléhat, což je patrné z toho, že v mnohých úlohách na výpočet obsahu je využití vzorce upřednostňováno před úvahou (Vondrová, 2015, s. 288). Poznatky o vzorcích jsou také v případě některých žáků formálního charakteru. Pravděpodobnou příčinou tohoto problému může být dle autorů fakt, že vzorce jsou žákům předloženy příliš brzy – tedy dochází k předčasné algebraizaci. Zároveň je kladen přílišný důraz na kalkulativní stránku míry (Vondrová & Žalská, 2013, s. 114).

Dále jsou pro žáky obtížné úlohy, při kterých je nutné „vystoupit z obrázku“ (např. s využitím strategie komplementu), či úlohy na „umění vidět“, ve kterých je třeba využít dynamického pohledu na míru v geometrii, jehož podstatou je konzervace obsahu a jenž je oproštěn od výpočtů. V důsledku možného zanedbání propedeutické přípravy na 1. stupni většina žáků, kteří se výzkumu účastnili, neumí pracovat s mírou ve čtvercové síti.[19]

Autoři si dále všímají, že u části žáků není dobře rozvinuté konceptuální porozumění multiplikativnímu vztahu mezi stranami obdélníku při výpočtu jeho obsahu (Vondrová, 2015, s. 294). Logickým důsledkem je fakt, že v takovém případě žáci nedosahují kvalitního porozumění ani u obsahů složitějších geometrických útvarů.

V neposlední řadě se i do oblasti míry negativně promítá žákovské nerozlišování teoretického prostoru a prostoru reprezentací, které se projevuje při chybné interpretaci obrázků použitých v zadání úloh.

[19] Přestože je stádium objevování ve čtvercové síti zásadní v pojmotvorném procesu v oblasti míry v geometrii, úlohu na určování obsahu nepravidelného útvaru v síti vyřešilo správně jen 17 % žáků 2. stupně (Vondrová, 2015, s. 265).

1.3.3 Algebraizace a algebraické úpravy

V oblasti algebry označují učitelé za nejobtížnější zejména úpravy algebraických výrazů a práci s nimi (Vondrová & Žalská, 2013, s. 88). O problémech s algebraizací, tj. převedením slovního vyjádření matematického vztahu do vyjádření pomocí algebraické symboliky, se učitelé v rozhovorech naopak téměř nevyjadřují.

Hloubkové rozhovory vedené se žáky v oblasti algebraizace byly zaměřené zejména na zkoumání schopnosti žáků vytvářet tyto algebraické reprezentace či interpretovat algebraický objekt v různých kontextech. Výzkum ukázal, že žáci jsou limitováni potřebou konkrétnosti, kterou pociťují, a která jim brání v kvalitním porozumění proměnné v matematice (Žalská, 2015, s. 353—354), a mnozí dostatečně neovládají vyjádření vztahů mezi proměnnými pomocí operací (ibid., s. 358). Zásadní problém byl identifikován při reprezentaci algebraického vztahu v geometrickém kontextu, a to zejména v jednorozměrném prostoru (ibid., s. 364). Pravděpodobnou příčinou těchto obtíží je přitom nedostatek žákovských zkušeností – úlohy na aplikaci algebraických výrazů v geometrickém kontextujsou totiž učiteli do výuky zařazovány jen velmi málo (Vondrová & Žalská, 2013, s. 91).

U úprav algebraických výrazů se jako nejzásadnější překážka ukázaly mezery v práci se závorkami, u kterých žáci často nerozumějí jejich podstatě (což se projevuje tím, že je nepoužívají ve vlastních zápisech), či je nesprávně interpretují (Žalská, 2015, s. 379). Rovněž časté byly obtíže spojené s operacemi s proměnnými a jejich mocninami (a to i v případě zdánlivě jednoduchých úprav) či s prací se zápornými čísly (ibid., s. 386, s. 390).

1.4 Případová studie

Závěrečný oddíl teoretické části této práce je věnován stručnému vymezení pojmu případová studie, která byla zvolena jako výzkumná strategie v části praktické.

V Pedagogickém slovníku (Průcha et al., 2003, s. 188) je případová studie definována následovně:

> **Případová studie.** Angl. case study. Výzkumná metoda v empirickém pedagogickém výzkumu, zpravidla kvalitativním[20], při níž je zkoumání podroben

[20]Podstatou kvalitativního výzkumu, na rozdíl od výzkumu kvantitativního, je „proces hledání porozumění založen na různých metodologických tradicích“, při kterém badatel vytváří „komplexní, holistický obraz“ (Creswell, 1998, s. 12, citováno v Hendl, 2005, s. 50).

> jednotlivý případ (např. žák, malá skupina žáků, učitelů, třída, škola). Ten je detailně popsán a vysvětlován, takže se dochází k takovému typu objasnění, jehož při zkoumání týchž objektů v hromadném souboru nelze dosáhnout.

Mareš (2015, s. 116) však upozorňuje, že definovat pojem případové studie není jednoduché a na vymezení pojmu mezi jednotlivými autory nepanuje bezvýhradná shoda. Sám Mareš tak ve své práci například nepopisuje případovou studii jako metodu, nýbrž obecněji jako přístup, jelikož metody jako takové, které je v případové studii možné využít, jsou různé. Sedláček (2007, s. 98) dále zdůrazňuje, že přestože je případová studie v domácí metodologické literatuře obvykle považována za jeden z typů kvalitativního výzkumu, metody uplatňované při sběru dat jsou nezřídka kombinací metod kvalitativních i kvantitativních, přičemž jejich volba vždy záleží na konkrétní výzkumné otázce. Obecně však lze říci, že jádrem každého vymezení případové studie je zejména důraz na důkladné zkoumání jednoho nebo více případů[21] s cílem zachytit jev v jeho komplexnosti a dosáhnout detailního porozumění. Případová studie je proto nejčastěji používána ve výzkumech, jejichž úkolem je zodpovědět výzkumné otázky typu „jak“ nebo „proč“ (Yin, 2003, s. 9; Mareš, 2015, s. 113).

Výzkum, který je založen na případové studii, je možné rozčlenit do několika kroků. Těmi dle Mareše (ibid., s. 113) jsou:

- koncipování projektu případové studie,
- výběr zkoumaných subjektů,
- sběr a analýza dat,
- interpretace získaných výsledků a možnost jejich zobecnění,
- sepisování a zveřejňování případové studie.

Nedílnou součástí koncipování projektu případové studie je určení výzkumné otázky a stanovení, jaká data jsou potřebná k jejímu zodpovězení. V pedagogice jsou data pro případovou studii získávána podle Hendla (2005, s. 114) nejčastěji z rozhovorů[22] (s žákem, rodiči a učiteli), záznamů pozorování nebo dokumentů

[21] Na základě počtu zkoumaných případů je možné provést základní rozdělení typů případových studií na jednopřípadové (či individuální) studie a na studie s více než jedním případem (tzv. *multiple-case study*) (Mareš, 2015, s. 119).

[22] Průcha et al. (2003, s. 203–204) popisují rozhovor jako „výzkumný prostředek používaný při dotazování, spočívající v přímé ústní komunikaci výzkumného pracovníka s respondentem

(deník, zápisky učitele apod.). V matematických výzkumech, ve kterých je cílem zkoumání kognitivních procesů žáka, je často používána i technika myšlení nahlas (Švaříček, 2007, s. 177), při které žák současně pracuje na zadané úloze a popisuje výzkumníkovi svůj proces myšlení.

Pro zpracování získaných dat v případových studiích neexistují specifické analytické procedury a přístup k analýze je vždy do jisté míry originální (Hendl, 2005, s. 129; Sedláček, 2007, s. 109).

Problematickým krokem při zpracování případové studie je často generalizace jejích výsledků, a omezené možnosti zobecnění jsou proto mnohými autory považovány za jednu z nevýhod tohoto výzkumného přístupu (viz např. Průcha et al., 2003, s. 188). Je však třeba mít na paměti, že smyslem zpracování případové studie není odhalování obecných kauzálních příčin.

Konečně, při sepisování případové studie je třeba věnovat pozornost otázce anonymizace, tedy utajení identity všech zkoumaných osob a/nebo institucí (Mareš, 2015, s. 135). S cílem uchránit citlivé informace jsou proto jména zkoumaných osob v publikovaném textu často nahrazena jmény smyšlenými (a dochází tedy k tzv. pseudo-anonymizaci).

či informantem. Je zaznamenáván na magnetofon či jinak a pak analyzován z hlediska obsahu rozhovoru, chování respondentů aj." Švaříček (2007, s. 159–160) dále uvádí, že se pro rozhovor často používá také označení hloubkový rozhovor (*in-depth interview*), přičemž dvěma hlavními typy hloubkového rozhovoru jsou rozhovor polostrukturovaný (u kterého výzkumník vychází z předem připravených témat a otázek) a rozhovor nestrukturovaný. S přihlédnutím k cílům této práce je důležitý také rozhovor diagnostický. Ten Průcha et al. (2003, s. 42) definují jako „typ rozhovoru mezi odborníkem (učitelem, výchovným poradcem, psychologem) a žákem s cílem vyšetřit žáka, poznat jeho zvláštnosti, jeho vidění světa a problémů a dospět k pravděpodobné diagnóze". Dále uvádí, že diagnostický rozhovor „často mívá podobu polostandardizovaného rozhovoru, v němž jsou některé části standardní pro všechny vyšetřované žáky, zbytek rozhovoru probíhá volně podle aktuální situace a svébytného obsahu žákových odpovědí."

2 Praktická část

Praktická část této práce je věnována provedené případové studii. Nejprve je popsána metodologie výzkumu zahrnující stručnou charakteristiku vybrané žákyně, která se výzkumu účastnila (viz 2.1.1), a dále pak proces výběru témat (2.1.2) a tvorby úloh (2.1.3), které byly použity k diagnostikování formálního poznání. Zároveň je ozřejmen způsob sběru a analýzy dat (2.1.4). Stěžejním, a proto také obsahově nejrozsáhlejším oddílem práce je oddíl 2.2, ve kterém jsou uvedeny výsledky analýzy každého z celkem čtyř vybraných diagnostických rozhovorů. Zjištěné formální poznatky v daných oblastech matematiky jsou následně shrnuty (2.3) a je provedena diskuse možných příčin jejich vzniku (2.4.1). Závěrem jsou nastíněny jednak didaktické důsledky výsledků výzkumu (2.4.2), druhak jeho zřejmá omezení (2.4.3).

2.1 Metodologie výzkumu

Jak již bylo zmíněno v úvodu, tato diplomová práce si klade za cíl zodpovědět dvě výzkumné otázky:

1. Jaké formalismy lze identifikovat v matematické kognici čtrnáctileté žákyně, která má v matematice výborné výsledky?
2. Jaké jsou možné příčiny identifikovaných formalismů?

Za účelem zodpovězení těchto otázek byla provedena případové studie, která je založena na sérii hloubkových rozhovorů s čtrnáctiletou gymnazistkou Kristýnou[1]. Povaha výzkumu je tak čistě kvalitativní, jelikož volba výzkumných otázek implikuje potřebu detailního mapování Kristýnina řešitelského procesu a způsobu jejího uvažování.

Přestože naše spolupráce s Kristýnou byla původně započata pouze jako nepříliš rozsáhlý experiment v rámci plnění oborové praxe v době uzavření škol

[1] Z důvodu anonymizace dat se jedná o fiktivní křestní jméno.

v důsledku pandemie na jaře roku 2020, velmi záhy se ukázalo, že by mohlo být zajímavé tuto naši spolupráci rozšířit. Postupem času jsem totiž u Kristýny odhalila poměrně zásadní nedostatky v podobě většího množství formálních poznatků, které byly vzhledem k informacím, které jsem měla o Kristýniných výsledcích v matematice, překvapivé. Iluze o „jedničkářce, která všemu rozumí" se tak postupně rozplynula a mnohem lépe bylo možné Kristýnu charakterizovat spíše slovy „jedničkářka, která má hodně namemorováno a zvládá aplikaci ve standardních úlohách". Experiment tak plynule přešel ve studii zkoumající formální poznatky v její poznatkové struktuře.

Pro diagnostikování formalismů bylo vytvořeno několik sérií diagnostických úloh z různých oblastí matematiky, které jsme s Kristýnou postupně řešily v období mezi dubnem až zářím roku 2020. Pro potřebu detailní analýzy byly ze všech rozhovorů se souhlasem pořízeny videozáznamy.

Nutno podotknout, že přestože Kristýna věděla, že je natáčena z důvodu výzkumu, netušila, čeho konkrétně se výzkum týká.

2.1.1 Základní charakteristika vybrané žákyně

V době rozhovorů navštěvovala Kristýna tercii až kvartu jednoho pražského osmiletého gymnázia.[2] Na gymnázium nastoupila z malotřídní základní školy, kde byla sice vyučujícími označována za šikovnou žákyni, nicméně toto označení bylo, dle slov jejích rodičů, nutné brát s rezervou, jelikož měla v ročníku pouze dva spolužáky. Chybělo jí tak širší porovnání. Z tohoto důvodu také v pátém ročníku navštěvovala přípravné kurzy na přijímací zkoušky, u kterých však skutečně vyšlo najevo, že matematika pravděpodobně bude její silnou stránkou. Po úspěšném složení přijímacích zkoušek se tak podle očekávání, vytvořených na základě výsledků v přijímacím testu z matematiky, velmi rychle etablovala jako „jedničkářka", která chybuje jen velmi zřídka. Vedle matematiky je na vysvědčení pravidelně klasifikována známkou „výborně" téměř ve všech předmětech, s výjimkou českého jazyka, ve kterém je obvykle hodnocena známkou „chvalitebně".

Kristýnin vztah k matematice je mimořádně dobrý. Dle rozhovoru, který jsem s ní vedla na začátku naší spolupráce v dubnu roku 2020, má matematiku velmi ráda a platí za jednu z nejlepších ve třídě – dokonce se i často stává, že je ve třídě vyvolána, aby předvedla řešení zadané úlohy na tabuli. To přisuzuje

[2] Tercie na osmiletém gymnáziu odpovídá osmému ročníku základní školy, kvarta devátému.

tomu, že ji její učitel matematiky dobře zná a ví, že toto řešení bude nejspíše bezchybné, a ostatní spolužáci si ho tak budou moci také zapsat. Velmi kladný vztah má tak Kristýna také ke svému učiteli matematiky, ve kterém se zhlédla. Až odmaturuje, chce vystudovat vysokou školu a také vyučovat matematiku.

Co se týče Kristýniných psychologických charakteristik, je možné usuzovat, že její nejsilnější motivační potřebou je potřeba vyhnout se neúspěchu, která dominuje nad potřebou úspěšného výkonu. Sebemenší neúspěch ji údajně dokáže značně rozhodit – a v matematice obzvlášť, jelikož ta pro ni představuje oblast, v níž na neúspěchy není zvyklá. Kromě toho je Kristýna do výrazné míry orientována na klasifikaci a za úspěšnou se považuje tehdy, kdy je za svou práci oceněna jedničkou. Z toho lze vyvodit závěr, že spíše než o motivaci můžeme v Kristýnině případě mluvit o stimulaci (viz s. 13).

Při hloubkových rozhovorech, které jsme spolu vedly, pracovala Kristýna ochotně, a to i přesto, že bylo chvílemi zřejmé, že jí situace, ve kterých chybovala, nebyly vůbec příjemné. Občas tak v průběhu rozhovorů nastávaly momenty, kdy se snažila zpochybňovat mou autoritu a kdy dávala najevo pocit, že přeci není nutné věnovat se danému učivu tolik do hloubky, případně k němu přistupovat takto „jinak“.[3]

2.1.2 Výběr témat

Na začátku výzkumné práce bylo nejprve potřeba vytipovat matematické oblasti, které by se mohly vyznačovat zvýšeným výskytem formalismů a nad kterými by bylo vhodné vést diagnostické rozhovory.

Při výběru témat byly zohledněny zejména výsledky již zmiňovaného výzkumného projektu, publikované v (Rendl et al., 2013; Vondrová et al., 2015), ve kterých autoři identifikovali kritická místa matematiky základní školy (viz 1.3). Dále byla využita má přechozí zkušenost s Kristýnou, díky níž bylo možné odhadnout, která témata v matematice by pro ni mohla být problematická – už jsem totiž věděla, v jakých oblastech Kristýna selhávala při našich dřívějších experimentech. Nutnou podmínkou pro zařazení konkrétního tématu do výzkumu byl také fakt, že ho Kristýna již měla ve škole probrané.

Nakonec je v této práci provedena analýza celkem čtyř hloubkových rozhovorů.[4] Témata vybraných rozhovorů jsou shrnuta v tab. 2.1.

[3]Příběh Kristýny je v tomto ohledu do značné míry analogický s příběhem žákyně Danky (viz Hejný, 2014, s. 63–65), pro niž je rovněž charakteristický odmítavý přístup k takovým přístupům ve vyučování, na které není zvyklá.

[4]Přestože rozhovorů bylo v průběhu zmiňovaného období vedeno a zaznamenáno více,

Tabulka 2.1: Přehled rozhovorů použitých v práci a jejich témat

Rozhovor	Téma
č. 1	Obsah trojúhelníku
č. 2	Lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů
č. 3	Thaletova kružnice
č. 4	Pythagorova věta

Průběh každého z rozhovorů bude podrobně popsán v oddílu 2.2.

2.1.3 Tvorba diagnostických úloh

Pro diagnostiku formálního poznání bylo ke každému z vybraných témat nutné vytvořit pracovní list obsahující vhodnou sérii úloh, které by bylo možné použít jako diagnostický nástroj – přičemž diagnostickým nástrojem myslíme takový nástroj, jenž primárně slouží k identifikaci formálního poznání. Zde je tedy nutná malá terminologická odbočka. Zatímco Hejný pod pojmem *diagnostika formalismu* rozumí, kromě odhalování formalismu a hledání jeho příčin, také návrhy reedukačních postupů (viz 1.2.3), v této práci se o reedukaci v pravém slova smyslu nepokoušíme.[5] Diagnostiku formalismů proto budeme pro potřeby této práce vymezovat poněkud úžeji a budeme tímto termínem myslet pouze proces identifikace formalismů a jejich možných příčin.

Při procesu tvorby diagnostických úloh byl zohledňován zejména výčet nestandardních situací, z nichž lze formalismy poznat (viz tab. 1.2). V pracovních listech jsou proto obsaženy úlohy na rekonstruování zapomenutého vzorce, nalezení chyby v úvaze, aplikaci poznatku v praxi, rozhodnutí o platnosti hypotézy aj. Jednotlivé úlohy v pracovních listech se také na určitých místech vyznačují jistou mírou gradace – při jejich tvorbě bylo totiž nutné předpovídat možné problémy, které se při řešení mohou vyskytnout, a pro takový případ bylo praktické mít připraveny návodné úlohy. Tyto úlohy v průběhu rozhovoru

ne ve všech bylo možné identifikovat takové množství formalismů jako právě v rozhovorech vybraných. Kvalitní znalost byla prokázána například v oblasti zlomků či procent; nedostatek materiálu k analýze formalismů nabídl (poměrně překvapivě) také rozhovor na téma obsah kruhu. Vzhledem k cílům práce jsou však takové rozhovory z tohoto textu vynechány a dále jim není věnována pozornost.

[5] Částečnou výjimkou z tohoto pravidla je pouze první pracovní list zaměřený na objevování vzorce pro obsah trojúhelníku (použitý v rozhovoru č. 1), jenž je svým charakterem výrazněji objevitelský a reedukační, než jsou pracovní listy zbývající. Důvodem je fakt, že rozhovor č. 1 celý výzkum do diplomové práce odstartoval; jakmile však byly vymezeny cíle práce, tedy identifikace konkrétních formalismů, od reedukačních snah bylo do velké míry upuštěno. Nutno dále dodat, že podmínkou pro úspěšný proces reedukace je mimo jiné také dlouhodobé působení, ke kterému v průběhu této případové studie nedocházelo.

mohly, ale nemusely být použity. Dále je důležité zmínit, že jednou z výhod při tvorbě diagnostických úloh byl fakt, že výzkum v této práci je založen na případové studii jedné konkrétní žákyně, což umožnilo značnou individualizaci úloh.

Pro přehlednost je v následujících odstavcích každý ze čtyř použitých pracovních listů stručně shrnut. Vzhledem k univerzálnosti, s jakou je pracovní listy možno upotřebit, je v textu pro řešitele úloh použito generické označení „žák“. Naskenovaná řešení pracovních listů tak, jak byly vyplněny Kristýnou, jsou k nahlédnutí v přílohách k této práci (viz přílohy A–D).[6][7] Čtenáři je doporučeno, aby se na tomto místě se zadáním jednotlivých úloh seznámil, a to pro svou lepší orientaci v následujícím textu. Konkrétní Kristýnina řešení je naopak v tuto chvíli možné ignorovat.

Obsah trojúhelníku (Příloha A)

Pracovní list k objevování vzorce pro obsah trojúhelníku lze úrovní náročnosti zařadit zhruba do sedmého ročníku, příčemž je dobře využitelný i jako výukový materiál – ostatně za tímto účelem také původně vznikl.[8] Pracovní list obsahuje sérii gradovaných úloh, které jsou navrženy s cílem pomoci žákovi objevit vzorec pro obsah trojúhelníku; jeho zaměření je tedy značně konstruktivistické. Hlavní myšlenkou pracovního listu je dovést žáka od práce ve čtvercové síti (o které se dá předpokládat, že ji ovládá) pomocí postupného zobecňování až k hledané funkční závislosti a následně její algebraizaci. Důležitým prvkem je také práce v počítačovém softwaru GeoGebra, který slouží jako vhodný nástroj k tréninku dynamického/kvalitativního pohledu na míru v geometrii.

Lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů (Příloha B)

Druhá série úloh je zaměřena na identifikaci formalismů v oblasti řešení lineárních rovnic a úprav algebraických výrazů. Pro diagnostiku je využito prostředí algebraických dlaždic, v němž jsou nejprve modelovány a řešeny dvě lineární rovnice, přičemž důraz je kladen zejména na argumentaci žáka týkající se pro-

[6] Kristýnina řešení byla pro lepší čitelnost (po převedení do elektronické podoby) přepsána, s maximální snahou o zachování věrnosti originálu.

[7] Řešení úloh v hloubkovém rozhovoru č. 2 probíhalo výhradně manipulací s modely algebraických dlaždic, pouze s občasnou kontrolou správnosti pomocí výpočtů. Z tohoto důvodu také k rozhovoru neexistuje vyplněný pracovní list. V příloze je proto obsaženo alespoň zadání jednotlivých úloh.

[8] Jak již bylo avizováno, rozhovor nad tímto pracovním listem a formální poznatky, které při něm byly objeveny, celý výzkum v této práci motivovaly a odstartovaly.

váděných ekvivalentních úprav. Další úlohy jsou zaměřeny na demonstraci distributivního zákona a na zjednodušení a úpravu algebraických výrazů. Zejména při úpravě výrazů v součinovém tvaru, tj. v úloze 4, je klíčová aplikace výrazů v geometrickém kontextu. Tato aplikace je pak následně použita také v úloze 5, v níž je třeba rozhodnout o platnosti zdánlivé algebraické identity.

Thaletova kružnice (Příloha C)

Pracovní list s tématem Thaletovy kružnice je uveden třemi, spíše rutinními, úlohami na sestrojení tečny kružnice – nejprve v úlohách 1 a 2 z bodu ležícího na dané kružnici a následně v úloze 3 z bodu ležícího vně kružnice. Cílem úlohy 1 je zejména aktivování vstupních znalostí žáka o kolmosti tečny na příslušný průměr kružnice. Pokud žák správně konstruuje tečny z bodu ležícího vně kružnice, je možné přeskočit úlohu 4, která v opačném případě slouží jako návodná pro ty, kteří zprvu korektní konstrukce nejsou schopni. Úloha 6 by měla být řešena každým žákem, nezávisle na úspěšnosti v úlohách předchozích, a v jejím zadání je vyžadována formulace vlastní úlohy, ve které je nutné Thaletovu kružnici využít – jedná se tedy o úlohu charakteristickou svou vyšší kognitivní náročností a ve školním prostředí spíše nestandardní; z pohledu diagnózy kvality poznání však jde o jednu z úloh klíčových.

Pythagorova věta (Příloha D)

Tématem čtvrtého rozhovoru je aplikace geometrického významu Pythagorovy věty, a to konkrétně na úloze o čtvercových čokoládách. Zadáním ve dvou stěžejních úlohách tohoto pracovního listu je narýsování takové čtvercové čokolády, která je stejně velká jako dvě jiné čtvercové čokolády dohromady. U úlohy 1, v níž je pro rozměry délek odvěsen a přepony záměrně volena pythagorejská trojice, se neočekává, že by pro žáka měla být problematická, jelikož tuto úlohu lze snadno řešit početně, tj. bez geometrického vhledu. Totéž však neplatí pro úlohu 2, kde se již pythagorejská trojice nevyskytuje, a je tedy testována schopnost aplikovat Pythagorovu větu v nestandardním kontextu, příčemž nestandardním kontextem zde myslíme takový kontext, ve kterém není explicitně zmíněn ani pravoúhlý trojúhelník, ani algebraické vyjádření součtu druhých mocnin. Kvůli očekávaným obtížím je zahrnuta také úloha 3, která slouží jako návodná.

2.1.4 Sběr a analýza dat

Sběr dat

Všechna data, která byla pro potřeby této práce mezi dubnem až zářím roku 2020 sesbírána, lze zařadit do jedné z následujících tří kategorií.

Nejdůležitějším materiálem, jehož analýza tvoří fundamentální část případové studie, jsou čtyři vybrané videozáznamy pořízené z diagnostických rozhovorů na výše uvedená témata (viz tab. 2.1). Průměrná délka rozhovoru činí 47 minut.

Kromě hloubkových rozhovorů současně probíhal také sběr informací o Kristýnině vztahu k matematice a o způsobu, jakým je matematika v její třídě vyučována, a to formou nestrukturovaných rozhovorů. Tyto rozhovory na video z většiny zaznamenávány nebyly. Důvodem byla zejména obava, že by důsledkem nahrávání mohlo dojít ke ztrátě autentičnosti Kristýniných výpovědí. Z těchto neformálních rozhovorů tak existují pouze zápisky, sepsané vždy bezprostředně po jejich uskutečnění. Jeden nestrukturovaný rozhovor o Kristýně jako žákyni byl veden také s jejími rodiči.

V neposlední řadě byly cenným pramenem při výzkumu autentické výukové materiály, které Kristýna obdržela v rámci distanční výuky matematiky ve druhém pololetí školního roku 2019/2020.

Zatímco výsledky analýz videozáznamů z diagnostických rozhovorů jsou předmětem oddílu 2.2, zbylé informační zdroje jsou využity zejména v oddílu 2.4.1, kde jsou klíčové pro diskusi možných příčin identifikovaných formalismů.

Sběr dat probíhal v přátelské atmosféře, do jisté míry zapříčiněné tím, že se s Kristýnou známe již od jejích dětských let. Jak je patrné i z videozáznamů, Kristýna se v průběhu rozhovorů necítila pod žádným tlakem a pracovala soustředěně a ve vyhovujících podmínkách.

Analýza dat

Prvním krokem při analýze dat bylo zhlédnutí pořízených videozáznamů, při kterém byly rozhovory zároveň doslovně (a tedy bez stylistických úprav) převedeny do psané podoby. V těchto přepisech bylo pomocí počátečních písmen křestních jmen vždy označeno, komu patří daná promluva – tedy zda se jedná o promluvu mou („T“) či Kristýninu („K“). Do přepisů byly kromě verbálních projevů zahrnuty také projevy neverbální, jako jsou například smích či gestikulace.

Přepisy byly následně opakovaně a pečlivě čteny, a to ve snaze vyčlenit ty informace, které jsou relevantní pro zodpovězení výzkumných otázek.[9] Pozornost byla proto věnována zejména chybám, kterých se Kristýna při řešení úloh dopustila; důležité přitom byly ty chyby, které by mohly být projevem formálních poznatků v její kognici (např. chyby z nepozornosti či chyby numerické tedy podrobněji rozebírány nebyly). Pro diagnostiku možných formalismů byly využity zejména indikátory formalismu dle Hejného (viz tab. 1.1). Chyby byly také průběžně seskupovány, a to dle jejich povahy a dle pravděpodobné příčiny.[10]

Rovněž byly podrobně zkoumány výukové materiály, které byly Kristýně zaslány jejím učitelem, s cílem porozumět způsobu, jakým je matematika v Kristýnině třídě vyučována. Ze stejného důvodu byly pečlivě analyzovány také zápisky z provedených neformálních rozhovorů.

2.2 Výsledky analýzy hloubkových rozhovorů

Tento oddíl je věnován výsledkům detailní analýzy každého ze čtyř vybraných rozhovorů, přičemž cílem těchto analýz je identifikace konkrétních formálních poznatků v Kristýnině matematické kognici. V následujícím textu se prolíná jak popis průběhu rozhovorů, tak také diagnostická interpretace. Na několika místech v textu jsou využity úryvky z doslovných přepisů některých dialogů, které jsou klíčové pro ucelenou představu o průběhu diagnostiky. Tyto úryvky jsou vždy graficky odděleny.

2.2.1 Obsah trojúhelníku

*„Obsah trojúhelníku se rovná…
No, to bych potřebovala tabulky.“*

Jelikož téma obsahu trojúhelníku je Kristýně (v době rozhovoru žákyni tercie) již dobře známé, je v úvodu tázána, zda zná vzorec pro tento výpočet. Ten si ale nepamatuje.

[9] V průběhu procesu analýzy bylo také rozhodnuto, že některé uskutečněné rozhovory do této práce nebudou zahrnuty – neposkytovaly totiž příliš materiálu, který by byl v vzhledem k jejímu cíli významný.

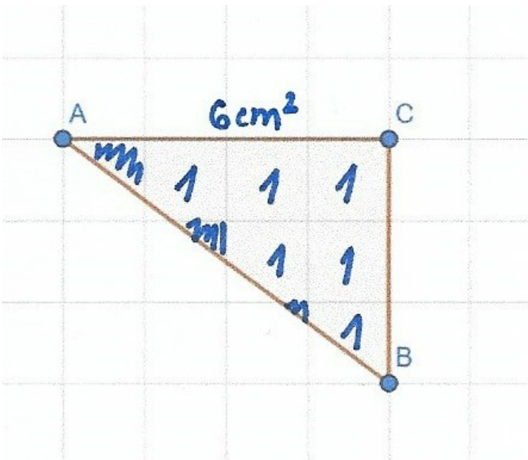
[10] Příkladem takového seskupení jsou například chyby plynoucí z Kristýnina uvažování v prototypech nebo v prostoru reprezentací, opakovaně zmiňované dále v oddílu 2.2.

K: No, na to bych potřebovala tabulky, protože neznám ty vzorce, protože se to nemusíme učit, tak si to nepamatuju. Na test máme vždycky tabulky.

Je tedy patrné, že u poznatku týkajícího se daného vzorce u Kristýny nedošlo k uložení do paměti, ba právě naopak – došlo k jeho rychlému zapomenutí. O rekonstrukci vzorce se Kristýna ani nepokouší, a proto rovnou přecházíme na řešení připravených úloh.

V úloze 1 Kristýna správně vidí, že trojúhelníky 1 a 2 jsou shodné, a proto se ujišťuje, zda musí mít vždy jeden trojúhelník větší obsah než druhý. Po odpovědi, že nemusí, pak v případech, kde tuší shodnost obsahů, zakroužkuje jako odpověď vždy oba z trojúhelníků. U této úlohy postupuje téměř bez chyby, s výjimkou třetí z dvojic, kde po lehkém zaváhání označuje za větší (ve smyslu obsahu) trojúhelník 5. Sama ovšem dodává, že „úplně neví, jestli je některý větší, možná jsou oba stejný“.

Jako velmi problematická se (v souladu s výsledky studie [Vondrová, 2015], viz oddíl 1.3) ukazuje úloha 2.[11] Hned zpočátku, tedy od trojúhelníku ABC, přistupuje Kristýna k úloze způsobem, při kterém si trojúhelník rozděluje na jednotlivé čtverečky. Ty z nich, které trojúhelníku nenáleží celé, se pak snaží „složit“ dohromady tak, aby z nich celé čtverečky vytvořila. Tento postup je patrný i z Kristýnina písemného řešení na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Kristýnina metoda určování obsahu trojúhelníku ABC

Pomocí této metody tak Kristýna sice dochází ke správnému výsledku (6 cm^2), je však evidentní, že tento postup není korektní. Proces „kompletace“ jednot-

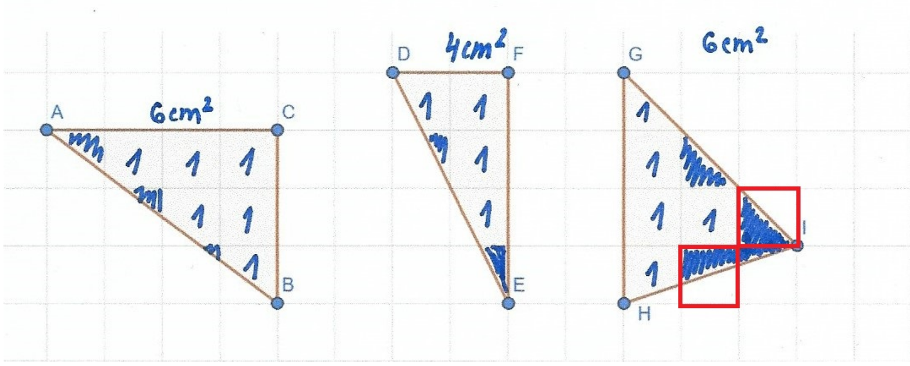
[11] Prvním škobrtnutím je již zadání úlohy, ve kterém Kristýna čte, že „jeden čtvereček má obsah jeden centimetr krychlový“, a teprve poté se opravuje na „centimetr čtvereční“. S jistou pravděpodobností se může jednat o pouhé přeřeknutí, nicméně v dalším průběhu výzkumu tuto chybu Kristýna ještě jednou zopakuje.

livých čtverečků je totiž založen na prostém odhadu, jak ilustruje následující úryvek:

> T: A z čeho to vyšlo, že má šest?
> K: No, protože tohle má jeden, tam jsou celý ty čtverečky, a potom tenhleten *(ukazuje postupně jednotlivé dvojice necelých čtverečků, které lze složit na jeden čtvereček celý)* má svůj zbytek jakoby tady, takže to dává dohromady jeden, tenhle má tady, takže jeden a tenhle má tady, takže to je další jeden.
> T: A jak to víš, že k tomuhle „ukousnutému“ čtverečku patří tenhle zbytek? To sis tipla?
> K: No, tak jako zbyly na sebe... A potom tadyty oba míří přímo ke kraji a tady je zhruba stejnej kousíček, co zbývá, tak mi to přijde, že to tam prostě patří.
> T: Ano, ale takže je to víceméně odhadem?
> K: No. Jako zbyly na sebe, tak takhle jsem to brala.

Je tak zřejmé, že Kristýna není schopna tzv. „vystoupit z obrázku“ a nahlédnout souvislost mezi obsahem pravoúhlého trojúhelníku a příslušného obdélníku, na který je možné trojúhelník vhodně doplnit.[12] Jelikož jsem si vědoma toho, že tento její postup brzy selže, a bude tak třeba hledat postup jiný, nechávám ji stejným způsobem určovat také obsahy trojúhelníků DEF a GHI. Číselnou hodnotu obsahu trojúhelníku DEF určuje Kristýna správně a zároveň si všímá, že dvojice necelých čtverečků, které je možné spárovat, v tomto případě nejsou dány jednoznačně.

Větší komplikace ale nastávají u trojúhelníku GHI. Kristýna zde opět vyplňuje číslice 1 k celým čtverečkům a dále ke dvěma čtverečkům necelým, ke kterým je schopna nalézt odpovídající komplementy. Následně se ovšem zaráží, jelikož neví, jak pokračovat s posledními dvěma necelými čtverečky (jedná se o čtverečky vyznačené na obr. 2.2).



Obrázek 2.2: Kristýnina metoda řešení úlohy 2

[12] V tomto kontextu není bez zajímavosti, že určování obsahu obrazců pomocí čtvercové sítě je očekávaným výstupem již v RVP ZV pro 1. stupeň.

K: Ajéje.

T: Ajéje. Najednou vidíme, že tahle metoda nám trochu selhává.

Přestože však vyznačené necelé čtverečky není možné jednoduše složit, dochází Kristýna k závěru, že i tak vytvoří dohromady přesně jeden celý čtvereček; oba jsou totiž podle ní přesně „půlčtverečky“. Tento způsob uvažování – tedy uvědomění si, že útvary o obsahu 1 cm^2 nemusí být nutně shodné – svědčí o tom, že v porozumění míře v geometrii je Kristýna minimálně na dobré cestě. Ke stěžejnímu abstrakčnímu zdvihu v geometrii, tedy přechodu z prostoru reprezentací do prostoru teoretického (viz 1.3), však u Kristýny ještě nedošlo, jelikož není schopna uspokojivé argumentace.

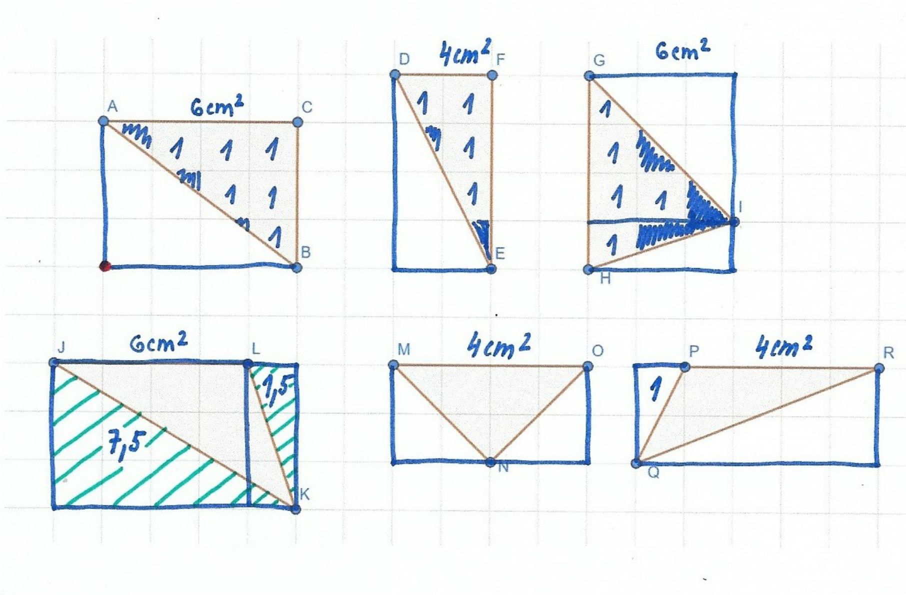
V této chvíli již Kristýnu nasměruji zpět k trojúhelníku ABC a žádám ji, aby zkusila vymyslet jiný způsob, jakým by bylo možné jeho obsah určit: ideálně přesněji a bez tipování. Mezitím si ujasňujeme, že obsah umíme vypočítat vždy, když máme obrazec složený z celých čtverečků, což nám umožňuje počítat obsahy rovinných obrazců, jako jsou čtverec a obdélník.

Ani po delším přemýšlení však není Kristýna na korektní způsob výpočtu schopna přijít. Proto jí v mříži jako nápovědu vyznačuji čtvrtý vrchol obdélníku, ze kterého lze obsah trojúhelníku vypočítat. Nyní již Kristýna okamžitě vidí, k čemu se ji snažím navést, a je schopna zamýšlený způsob výpočtu obsahu vysvětlit. Sama pak pomocí tohoto způsobu orámuje trojúhelník GHI, a dokonce i tento vzniklý obdélník správně rozděluje na dílčí konfigurace – tedy na čtverec a obdélník – a určuje obsah.

Velké potíže ovšem nastávají u obsahu tupoúhlého trojúhelníku JKL a Kristýna je úlohu schopna vyřešit jen s velmi výraznou dopomocí – přestože má trojúhelník správně orámován a rozdělen (viz obr. 2.3), není schopna nahlédnout, které obsahy je třeba určit k dopočítání správného výsledku. Jako nejproblematičtější se tak v tomto směru jeví Kristýnina neschopnost využít s výhodou obdélníky, které jí v obrázku po jeho doplnění a rozdělení vznikly. Obsahy trojúhelníků MNO a PQR již pak určuje sama a správně; nutno však podotknout, že úlohy předchozí jí nyní poskytují jasný návod, jak postupovat.

Úlohy 2a a 2b jsou pro Kristýnu snadné, pouze si u nich tedy ujasňujeme, že pravděpodobně nejlepší způsob určování obsahu v případě trojúhelníku ABC spočíval v jeho prostém doplnění na obdélník, jehož obsah se určí snadno, a z nějž pak jen stačí vypočítat jednu polovinu.

U obecného trojúhelníku GHI v úloze 2c se však Kristýna doplňování na obdélník, které jí zprvu nešlo, opět vyhýbá. Namísto toho však rovnou a bez obtíží



Obrázek 2.3: Kristýnino finální řešení úlohy 2

vysvětluje, jak by se dal daný trojúhelník složit s dalším shodným trojúhelníkem na rovnoběžník, který by pak bylo možné dále „přeskládat“ na obdélník.[13] Tím tak Kristýna předbíhá zamýšlenou strukturu vytvořeného pracovního listu, jelikož tato konstrukce, kterou si pamatuje ze školy, je předmětem úlohy 2e.

Úloha 2d je pro Kristýnu rovněž jednoduchá, a proto do pracovního listu pouze dopisuje „kosodélník“ a provádí náčrtek. Na otázku, jak by se dal obsah takového kosodélníku vypočítat, však odpovídá velmi váhavě:

K: No... Něco s výškou?

Na vyžádání proto Kristýna v úloze 2e vysvětlení postupu, jakým je možné kosodélník „přeskládat“ na obdélník, zopakuje a pokračuje s úlohou 2f. V té postupuje samostatně a poté, co si v obdélníku i kosodélníku vyznačí potřebné rozměry, již oba vzorce pro výpočet obsahů vyplňuje hravě. Z Kristýnina označení těchto útvarů je také do jisté míry patrné její prototypické uvažování, jelikož oba obrazce označuje shodně $ABCD$ (viz obr. 2.4).

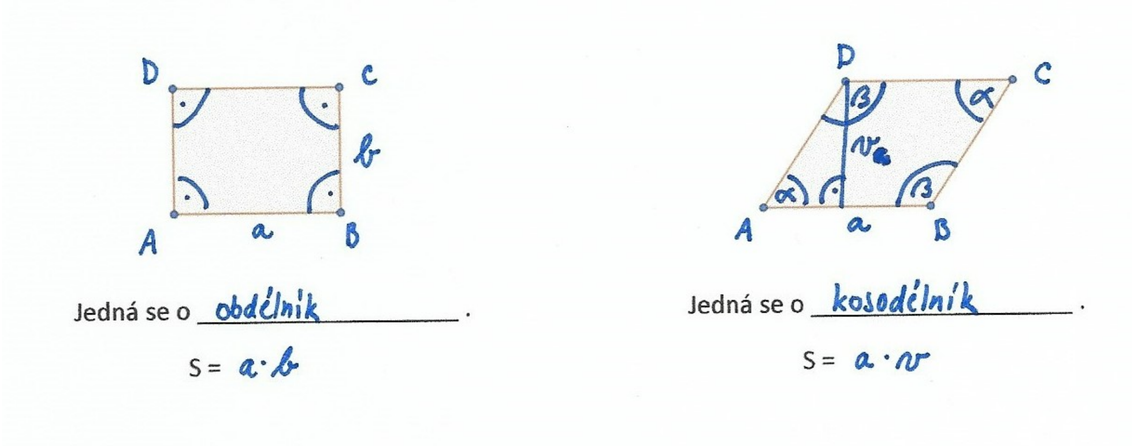
Dále je možné sledovat mezery, které má Kristýna v terminologii – například v případě kosodélníku zná termín a má o pojmu určitou představu, nicméně není schopna ho samostatně nadefinovat:

T: Co je to kosodélník?

K: Noo, obrazec... Je to jakoby převrácenej... teda trošku nakloněnej obdélník.

[13] Pro vizualizaci této myšlenky mám pro Kristýnu připravený vystřižený model trojúhelníku GHI, se kterým manipuluje.

T: A co to znamená, že to je „jakoby obdélník“? A co znamená, že je „trošku nakloněný“?
K: No, jakoby že padá na tu jednu stranu. *(modeluje princip „padání na jednu stranu“ pomocí rukou)* Já nevim, jak to mám popsat.[14]



Obrázek 2.4: Kristýnino řešení úlohy 2f

Po přechodu k úloze 3 je Kristýna požádána, aby načrtla libovolný trojúhelník a zobecnila, jaké dva rozměry budou určující pro jeho obsah. Pro potřeby zobecnění se tedy v úvahách vracíme k principu výpočtu obsahu obecného trojúhelníku, i přesto však Kristýna chybuje:

T: A když tedy víš, že pro výpočet obsahu trojúhelníku si ten trojúhelník můžeme takhle doplnit *(myšleno na kosodélník)* a ten obsah nám stačí jenom…
K: … vydělit dvěma…
T: Přesně tak, takže co jsou ty rozměry v trojúhelníku, které potřebujeme znát?
K: Ehm… Dvě strany?

Na základě této Kristýniny odpovědi je jasné, že její porozumění je nedostačující. Dávám jí proto za úkol, aby si načrtla další kosodélník, který následně rozděluje na dva shodné trojúhelníky. Na pokyn, aby na obrázku označila rozměry, které jsou potřeba k výpočtu obsahu kosodélníku, pak správně označuje jednu ze stran (v souladu s očekáváním se jedná o stranu rovnoběžnou s dolním okrajem papíru) a k ní příslušnou výšku.

T: A teď si představ, že by tam ten druhý přikreslený trojúhelník vůbec nebyl. *(zakrývá ho papírem, takže je nadále viditelný pouze trojúhelník s vyznačenými rozměry)*

[14]Tento rozhovor výrazně připomíná rozhovory z výzkumu (Vondrová & Havlíčková, 2015, s. 167), v nichž žáci popisují kosočtverec jako „nahnutý“, „křivý“ či „nedokonalý“ čtverec. Závažnost Kristýniných terminologických nedostatků je však zdůrazněna faktem, že respondenty ve zmiňovaném výzkumu nejsou gymnazisté, nýbrž žáci prvního stupně.

Kristýnina odpověď je však opět neuspokojivá:

> K: Takže potřebuju tu… tu nejdelší stranu?

V tuto chvíli tak opět narážíme na otázku, která byla původně naplánována až na samý konec výukové jednotky v rámci úlohy 7. Z časových důvodů[15] se však rozhoduji, že Kristýně správnou odpověď prozradím, a alespoň ji nechávám pomocí otočení náčrtku kosodélníku demonstrovat, že stejně jako stranu a je možné použít k výpočtu obsahu jistě i stranu b.

Celá úloha 4 je zaměřena na práci v GeoGebře, se kterou Kristýna pracuje poprvé. Vše však probíhá poměrně hladce, pouze počítání obsahu mřížového trojúhelníku v úloze 4a je opět o něco zdlouhavější.

V úloze 5 Kristýna rychle a správně doplňuje jak připravenou tabulku, tak vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku.[16] Jako vedlejší produkt při diagnostice formálních poznatků také postupně vychází najevo některé Kristýniny znalosti, které se naopak zdají být dostatečně kvalitní. Jedním z takových příkladů je výška v trojúhelníku, s níž Kristýna pracuje s porozuměním jak na úlohách v GeoGebře, tak také v úloze 5, a to včetně výšek u trojúhelníků tupoúhlých, které bývají problematické.

Úloha 6 je jen jednoduchým počítáním, které slouží jako nácvik práce s odvozeným vzorcem. Do jisté míry se tak jedná o úlohu procvičovací. Ta už Kristýně nečiní žádné obtíže – standardní aplikační úlohy se ostatně zdají být v celém průběhu naší spolupráce její silnou stránkou.

Závěrem pak Kristýnu ještě vyzývám, aby se pokusila shrnout, co by bylo dobré si z této naší práce odnést:

> K: No, k výpočtu obsahu trojúhelníku musím vědět jednu stranu a výšku na tu stranu. A pak že se to dá odvodit ten vzorec. A že s tabulkama to je lehčí.

Téměř se tak zdá, že i samotný fakt, že vzorec pro obsah trojúhelníku lze odvodit, je pro Kristýnu novinkou.

[15] Rozhovor v této době trvá již přes 40 minut.

[16] Přestože jedním ze způsobů, jak by bylo možné ke vzorci dospět, je vyvození daného vztahu z délek a obsahů uvedených v tabulce (což by bylo příkladem syntetizující úlohy, ve které je třeba hledat společné charakteristiky několika izolovaných modelů), v tomto pracovním listu je vzorec objeven na základě zkušenosti se samotným procesem jeho odvozování.

2.2.2 Lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů

„Ta jednička by šla sem, ale měla by opačný znamínko… protože se jako převede na druhou stranu.“

Již bylo poznamenáno, že identifikace formálních poznatků v tematických celcích lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů probíhala při řešení úloh v prostředí algebraických dlaždic, které jsou založeny na korespondenci mezi algebraickými výrazy a obsahy geometrických útvarů a které byly Kristýně na úvod tohoto rozhovoru představeny.[17] Jelikož k tomuto rozhovoru neexistuje vyplněný pracovní list, pro větší názornost je následující text doplněn obrázky příslušných modelů. Zároveň je text rozdělen na dvě části: tématem první z nich je řešení lineárních rovnic, tématem druhé jsou úpravy algebraických výrazů. Rozhovory na obě témata následovaly bezprostředně po sobě.

Lineární rovnice

Lineárním rovnicím je věnována úloha 1 (viz obr. 2.5), ve které má Kristýna za úkol dané rovnice s využitím algebraických dlaždic nejprve namodelovat a následně je vyřešit.

a) $3x - 1 = 5$
b) $2x + 2 = x - 6$

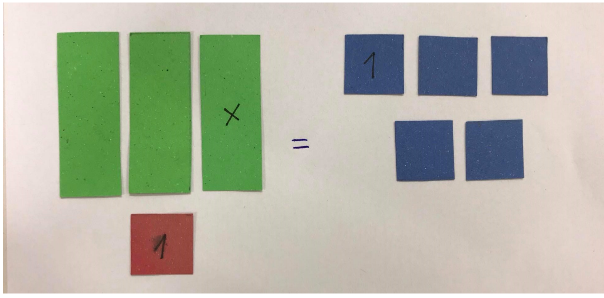
Obrázek 2.5: Zadané lineární rovnice v úloze 1

U první lineární rovnice zvládá Kristýna bez problémů namodelovat její levou stranu, pravá strana je pro ni ovšem zpočátku problematická:

K: Já nevím, kde jako vzít tu pětku.
T: No, tak jak vezmeme pětku?
K: No… jakoby tohle je pět. *(ukazuje na již vymodelovaný výraz $3x - 1$ na levé straně rovnice, který je dle zadání rovnice roven 5)*

[17] Je nezbytné podotknout, že tomuto rozhovoru již předcházel výukový experiment zaměřený na ověření platnosti algebraické identity $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Kristýna tak už byla do určité míry s geometrickou interpretací algebraických výrazů obeznámena.

Po krátké chvíli však Kristýna modeluje potřebnou kvantitu pomocí pěti modrých dlaždic, tedy „kladných jedniček“ (viz obr. 2.6).[18] V tomto momentě jistě není bez zajímavosti, že u modelování většího počtu x na levé straně rovnice Kristýna na podobný problém nenarazila, přestože se v jádru jednalo o identický problém. Tento fakt poukazuje na možné nedostatky, které Kristýna má v porozumění písmenům v matematice, jelikož je patrné, že s nimi zachází jinak než s čísly – a to i v případě, kdy jsou použita pouze jako reprezentanti nějaké neznámé.



Obrázek 2.6: Model rovnice 1a v prostředí algebraických dlaždic

Klíčové v této první části rozhovoru je porozumění ekvivalentním úpravám rovnice (jako protiklad k jejich pouhému zapamatování a schopnosti je mechanicky použít); dle Hejného je totiž právě poznatek typu „když číslo převádíme na druhou stranu rovnice, měníme znaménko“ velmi často poznatkem formálním (viz odd. 1.2). Kristýna je proto požádána, aby rovnici nejenom řešila, ale současně své řešení také komentovala:

> T: A teď jak by se tahle rovnice řešila? Ty to totiž už znáš jako rovnici.
> K: No, dala bych si na jednu stranu x a na druhou stranu ty čísla.
> T: A to by bylo jak? Jak se to dělá?
> K: To 3x by jakoby zůstalo a ta jedna by šla sem *(ukazuje pohyb směrem z levé na pravou stranu rovnice)*, ale měla by opačný znamínko, takže by tady *(ukazuje na pravou stranu rovnice)* bylo plus 1.
> T: A zvládla bys to nějak namodelovat? Jak to myslíš, že „jedna by šla sem“? Jak tam může takhle „chodit“? Co se tam děje?
> K: *(odebírá zápornou jedničku z levé strany a na pravou stranu naopak přidává jedničku kladnou)*
> T: A co se vlastně stalo? Na tu pravou stranu jsi přidala plus 1 a co jsi udělala s tou levou stranou?
> K: No, dala jsem to minus 1 pryč.

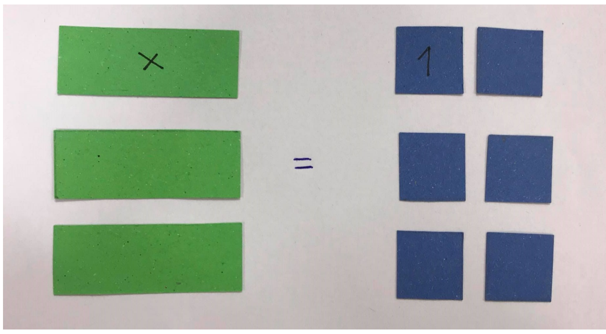
[18] Základní pravidla, která byla použita při výrobě algebraických dlaždic, jsou popsána v příloze E.

T: A na základě čeho? Jak to může takhle odejít?
K: No, protože se jako převede na druhou stranu.

Po čase se však dostáváme k tomu, že pro ekvivalentní úpravu rovnice je třeba na obou stranách rovnice přičíst stejné číslo, konkrétně v případě úlohy 1a tedy číslo 1. Po manipulaci s dlaždicemi tak dostáváme rovnici $3x = 6$. Zde však narážíme na další možný formalismus:

K: No, a když $3x$ je 6, tak tu trojku dám sem *(ukazuje na pravou stranu rovnice)*, a protože tam má krát, tak tam bude děleno, takže to vydělím třema a zbyde mi dva, a x je teda 2.

Poprosím tedy Kristýnu o názornou ukázku toho, jak je možné tento proces předvést pomocí manipulace s dlaždicemi. Kristýna však dlaždice přemísťuje rychle a správně způsobem patrým z obr. 2.7. Fakt, že je schopna toto pravidlo rozklíčovat, tak naznačuje, že se v tomto případě o formalismus nejedná.[19]



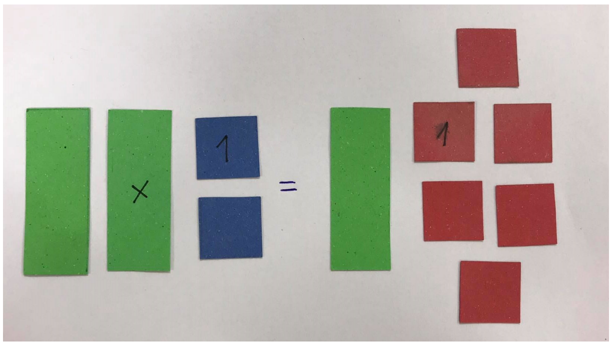
Obrázek 2.7: Názornost dělení rovnice modelované pomocí algebraických dlaždic

U druhé lineární rovnice již Kristýna nemá obtíže s jejím namodelováním, ovšem hned záhy opět narážíme na problematiku „přehazování na druhou stranu“. Aniž by se totiž Kristýna snažila řešit rovnici pomocí úvah o ekvivalentních úpravách, zarytě trvá na aplikaci osvojené procedury:

T: A kam budeš co přehazovat?
K: Takže to x musí jít sem *(ukazuje z pravé strany na levou)* a ta dvojka musí jít sem. *(ukazuje z levé strany na pravou)*
T: A jak se to stane?
K: Ehm…

[19]Zde je patrná didaktická síla práce s algebraickými dlaždicemi, plynoucí právě z jejich názornosti. Není totiž jisté, zda by si Kristýna s vyjasněním celé situace poradila v případě, že by dlaždice k dispozici neměla a musela se spolehnout pouze na matematický model. Algebraické dlaždice se tak ukazují jako vhodný prostředek pro prevenci vzniku formalismů.

V případě neznámé x je přitom provedení správné ekvivalentní úpravy rovnice v této úloze jednoduché – na obou stranách se vyskytují zelené, tj. „kladné“ dlaždice, které reprezentují neznámou x, a je tak možné na obou stranách po jedné takové dlaždici odebrat (viz obr. 2.8). Protože ale Kristýně pochopení ekvivalentní úpravy chybí, uvažovat tímto způsobem se jí nedaří.



Obrázek 2.8: Model rovnice 1b v prostředí algebraických dlaždic

Navádím ji proto na analogii mezi rovnicí a váhami, u kterých rovnítko znamená, že je váha v rovnováze.[20] Pro lepší představu používám k argumentaci konkrétní případ, ve kterém jsou na jednotlivých miskách vah položena jablka (jedná se tak vlastně o jeden konkrétní izolovaný model celé situace). Následně se ptám, jak je s váhami možno manipulovat, aby rovnováha zůstávala zachována:

> K: No, udělat to stejný na obou stranách.

Po této úvaze jí při pohledu na rovnici již dochází, že x je možné z obou stran jednoduše odebrat, a také tak činí. Zároveň chce ovšem opět „odebírat“ dvě kladné jedničky z levé strany, aniž by mohla provést stejnou operaci rovněž na straně pravé. Také nyní ví, že pro „vynulování“ dvou kladných jedniček na levé straně je třeba na tuto stranu přidat dvě jedničky záporné. Ani moje odkazování na předcházející úlohu ale nepomáhá, aby si uvědomila, že je pro udržení rovnováhy nutné přidat v jednom kroku stejný počet záporných jedniček také na pravou stranu. Namísto toho sama neustále opakuje matematickou proceduru, kterou má naučenou ze školy:

> K: No, tady mám vpravo minus šest, a já mám odečíst ještě dva, takže tam dám další dva. *(myšleno další dvě červené dlaždice)*

[20] Jistě stojí za zmínku, že Kristýna později po rozhovoru uvádí, že analogii s váhami slyší poprvé.

Kristýnino lpění na matematické poučce je možné přisuzovat zejména tomu, že tato poučka jí poskytuje spolehlivý nástroj, který vede ke správnému výsledku. Proto také není ochotná se od něj oprostit – nedaří se jí pracovat v prostředí vah a stále trvá na svém „odečítání toho čísla“. Následuje tak její poněkud zdlouhavá manipulace s dlaždicemi, často doprovázená mým komentářem, že při takovém navrhovaném postupu váhy nejsou v rovnováze.

Nakonec se nám však díky návratu k analogii s jablky daří se od matematického modelu odpoutat. Kristýně tak již stačí pouze zopakovat své dříve učiněné pozorování o přidávání, resp. odebírání jablek z váhy, načež konečně bere do ruky všechny čtyři potřebné červené dlaždice a přidáním po dvou na každou ze stran rovnice nakonec řeší úlohu úspěšně. Klíčovým faktorem pro řešení s porozuměním tak v tomto případě bylo opakované propojování matematického modelu na životní zkušenost, které Kristýně chybělo (a které je možno považovat za počátek případné reedukace).

Nutno podotknout, že ve větší části tohoto rozhovoru je z Kristýniných reakcí patrné, že je již značně frustrovaná, což mi po skončení rozhovoru také potvrzuje. Vychází totiž najevo, že se jí práce s dlaždicemi zdá zbytečná a vadí jí, že vypadá „hloupě“, protože se jí nedaří – přitom ale rovnici přece spočítat umí. Lze tak učinit závěr, že Kristýna je v této oblasti matematiky úspěšná výhradně díky dobře nacvičeným postupům. Při hlubší diagnostice je nicméně patrné, že její poznatky jednak nejsou propojeny na životní zkušenosti, jednak jsou aplikovány s absencí porozumění. Na základě Hejného indikátorů (viz tab. 1.1) je tedy možné konstatovat, že se jedná o poznatky formálního charakteru.

Úpravy algebraických výrazů

Ve druhé části rozhovoru, věnované úpravám algebraických výrazů, Kristýna nejprve bez větších problémů pracuje na úlohách 2 a 3.[21]

Úlohu 4 pak začíná popisem algoritmu, který zná pro roznásobení daných závorek ze školy:

> K: No, já nevim, jak to vysvětlit, ale jakože <u>mám první a násobim ho s prvnim z tý druhý závorky a to samý s tim druhym</u>.

Úlohu se jí nicméně daří správně uchopit také v kontextu algebraických dlaždic a díky nabytým zkušenostem s geometrickou reprezentací algebraických

[21] V úloze 3 se záměrně vyhýbám tomu, abych požadovala vysvětlení, proč znaménko minus před závorkou vyžaduje změnu znaménka všech členů v závorce. Předpokládám totiž, že by nás toto vysvětlování zdržovalo. O případné míře formálnosti tohoto poznatku tak není možné činit závěry.

výrazů vysvětluje, že v případě součinu budeme hledat obsah útvaru, velikosti jehož stran jsou rovny jednotlivým činitelům.

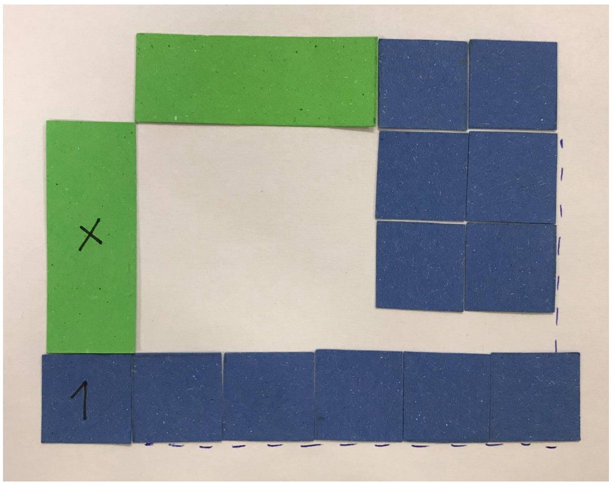
V úloze 4a tak modeluje obě ze stran daného obrazce a tento obrazec si také graficky znázorňuje. Při vyplňování obsahu vzniklého obdélníku pomocí algebraických dlaždic však chybuje a člen odpovídající x^2 se nejprve snaží namodelovat pomocí zelených obdélníků reprezentujících x. Záhy ovšem zjišťuje, že takové vyplnění nebude fungovat, a snaží se nalézt jiný způsob:

> K: *(smích)* No... <u>Tak asi těma jedničkama</u>... No, i když... Ježišmarja, já nevim.

Pokouší se proto vyplnit obdélník pomocí modrých dlaždic, reprezentujících útvar o obsahu 1.

> T: A můžu se zeptat? Teď mi řekni, kolik těch jedniček sem teď přijde?
> K: *(smích)* Nevim.
> T: No, to ale musíme vědět.
> K: Tak <u>prostě kolik se jich tam vejde</u>. *(smích)*

Nyní již Kristýna ví, že navrhované řešení není správné, přesto zkusmo vyplňuje zvýrazněný obdélník způsobem patrným z obr. 2.9.[22]

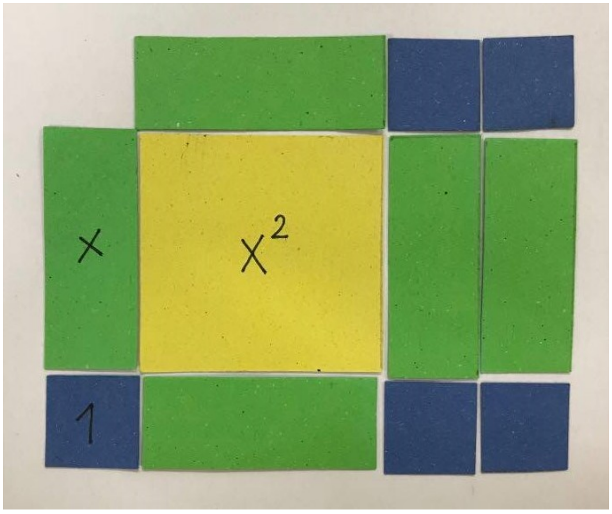


Obrázek 2.9: Snaha o vyplnění obdélníku pomocí dlaždic o obsahu 1

Rozhodnu se proto pro modifikaci úlohy a požádám Kristýnu, zda by zvládla namodelovat součin $x \cdot (x + 2)$. Poté, co si opět vyzkouší, že podél strany o délce x není možné poskládat žádný počet čtverečků se stranou o délce 1, sahá po dlaždici s obsahem x^2 a úlohu řeší správně (viz obr. 2.10).

[22] I zde tedy Kristýna uvažuje v prostoru reprezentací.

Je nezbytné připomenout, že se Kristýna seznámila s algebraickými dlaždicemi teprve při popisovaném rozhovoru. Při diagnostických závěrech týkajících se formalismů je tedy nutné postupovat s nejvyšší opatrností: zdaleka ne každá situace, ve které Kristýna chybuje, musí být zapříčiněna formálností jejích poznatků – a to zejména, pokud se jedná o látku, která je pro ni nová (viz 1.2.3). I přesto je však možné sledovat Kristýninu nedostatečně kvalitní znalost v oblasti algebry, kde ještě plně nechápe proměnnou x jako reprezentanta (v našem případě) určité délky, tj. jako zobecněné číslo, ale raději se uchyluje k práci s číslem konkrétním.[23]



Obrázek 2.10: Správné řešení úlohy 4a

V úloze 4b se u Kristýny poprvé projevuje snaha aplikovat poznatky, které jsou pro ni v matematice nejčerstvější, tedy algebraické vzorce.[24] Když je požádána, aby příslušné závorky roznásobila, ptá se:

K: A takže to nemám dělat podle vzorečku?
T: Tam je nějaký vzoreček?
K: No, není?
T: No, to mě zajímá, co tam je za vzoreček.
K: Tak asi není. *(smích)*

[23]Zde si dovolím připojit návrh na vylepšení pracovního listu pro jeho možné budoucí použití. Stejně jako v případě Kristýny se může stát, že práce s dlaždicí, jejíž obsah je obecně označen pomocí x, je pro žáka problematická. V takové situaci by bylo vhodné mít připravenou další sadu algebraických dlaždic, jejichž strana by nebyla rovna x, nýbrž nějakému konkrétnímu číslu většímu než 1, které by s číslem 1 bylo nesoudělné (např. 2,5). U této snazší úlohy by tak pro potřeby diagnostiky kvality porozumění bylo možné sledovat, zda žák v takovém případě správně použije dlaždici o rozměrech 2,5 x 2,5, či nikoliv.

[24]Rozhovor následoval poté, co měla Kristýna ve škole (v rámci distanční výuky) probrané vzorce pro druhé mocniny součtu a rozdílu.

Toto Kristýnino zmatení považuji za výsledek drilu, který v rámci výuky probíhal a který se týkal právě výše zmíněných vzorců.[25] Tento dril, zaměřený výhradně na aplikaci daných vzorců, tak má za následek, že Kristýna chce vzorec automaticky uplatňovat i tam, kde pro něj není prostor. Dokonce ani tehdy, kdy si úlohu prohlédne důkladněji, není schopna jednoznačně a jasně rozhodnout, že pro daný součin žádný ze vzorců použít nelze.

> T: Jak by to muselo vypadat, aby tam byl vzoreček?
> K: *(smích)* Já nevím, ale tady není. Já bych na to asi přišla, že tam není.

Jako problematický tak v této situaci vidím fakt, že Kristýna není schopna rozlišit, v jaké situaci je vhodné některý ze vzorců aplikovat. Její znalost v této oblasti tedy nelze považovat za dostatečně kvalitní.

V úloze 5, ve které je zapotřebí rozhodnout o platnosti hypotézy, se navíc ukazuje, že aplikaci vzorců nemá Kristýna dobře zvládnutou ani v případě, kdy již vzorec jasně rozeznává a správně ho pojmenuje:

> T: Napiš si $(x+1)^2$. Víš, jak tomuhle ve škole říkáte?
> K: *(okamžitě)* Druhá mocnina součtu![26]
> T: A já po tobě budu chtít, jestli bys mě dokázala nějak přesvědčit, nebo mi to vyvrátit, když já tvrdím, že se to rovná x^2+1.
> K: No. Tak to je asi dobře.
> T: Tak ukaž.

Aniž by Kristýna pro druhou mocninu používala paralelu s obsahy obrazců, modeluje výraz x^2+1. Nasměruji ji proto ke korektní práci s algebraickými dlaždicemi. Hned zpočátku se však vynořuje další z formalismů, jelikož zjišťuji, že Kristýna nedisponuje kvalitní znalostí procesu umocňování. Není si totiž jistá, jak s danou mocninou pracovat, a je patrné, že umocňování jako opakované násobení má ukotvené ryze pamětně, bez hlubšího porozumění:

> T: No, tak čím začneme? Když máme přece $(x+1)^2$, tak co to je?
> K: No, je to $x+1$ krát... Ne, plus! Plus... Ne, počkej... *(evidentně se snaží „lovit“ v paměti; současně také celou situaci modeluje pomocí dlaždic, ovšem způsobem, jako kdyby oba dvojčleny chtěla sčítat, namísto násobení)*
> T: Čekám...
> K: Krát $x+1$!

[25] Více informací o způsobu výuky této látky je v oddílu 2.4.1, který je věnován diskusi možných příčin vzniku formálních poznatků.

[26] Také zde se pravděpodobně jedná o výsledek drilu – Kristýnin učitel totiž požadoval, aby si žáci tento termín zapamatovali.

Teprve nyní tedy začíná mocninu modelovat správně jako obsah čtverce.[27] V momentě, kdy má Kristýna model hotov a vidí, že hypotéza je nepravdivá, pak konstatuje následující:

> K: No, tak to teda není dobře. No, já bych si to pak roznásobila asi, ale takhle to vypadalo docela jako dobře.
> T: A kolik to má tedy vyjít, ta mocnina součtu?
> K: $x^2 + 2x + 1$.
> T: A v tomhle už něco vidíš?
> K: Ten vzoreček.
> T: Ano, tohle už je vzoreček. A ty víš, že v tom vzorečku je ten prostřední člen, třeba to…
> K: *(skáče do řeči)*… $\underline{2AB}$!
> T: Ano, vy to znáte s $2AB$.

Opět je tak možné povšimnout si Kristýniny silné tendence uvažovat v prototypech, které jí jsou při výuce matematiky nabídnuty. Zároveň je z tohoto dialogu jasné, že vzorec pro druhou mocninu součtu má Kristýna dobře zvládnutý pamětně.

Závěrem rozhovoru následuje opět krátká reflexe:

> T: Co si o tomhle myslíš? Není to docela kouzlo, že to takhle funguje?
> K: Já nevím. Nebo jako je to docela hustý, že to jde ten vzoreček a to všechno udělat v geometrii.

Z tohoto Kristýnina vyjádření tak lze usuzovat, že algebra a geometrie jsou v jejím matematickém chápání dva oddělené světy. Souvislosti mezi nimi jí však dosud zůstávaly skryty.[28]

[27] Jsem si samozřejmě vědoma, že zápis opakovaného násobení pomocí exponentů je záležitostí konvence; stejně jako je konvencí, kterou je nezbytné si uchovat pamětně, např. znak pro zápis procent. Na druhou stranu: vzhledem k tomu, že druhé a třetí mocniny výrazů jsou základním stavebním kamenem míry v geometrii, dovoluji si vyjádřit názor, že v případě dostatečně vykrystalizované znalosti by při podobné nejistotě v práci s mocninami měla být primární právě opora v geometrickém modelu, a nikoliv pamětné uchování, jak je tomu v Kristýnině případě.

[28] V tomto případě připomíná Kristýna vysokoškolskou studentku primární pedagogiky, o které se zmiňuje ve své práci Hejný (2004, s. 29). Ta chápe odděleně světy aritmetiky a algebry a při kontrole správnosti počítání s mocninami pomocí dosazení je překvapena, že je možné „to o těch písmenech kontrolovat pomocí čísel“.

2.2.3 Thaletova kružnice

„Thaletova kružnice je množina vrcholů všech pravých úhlů sestrojených nad nebo pod úsečkou AB bez bodů A a B."

Cílem pracovního listu s tématem Thaletovy kružnice je ověřit Kristýninu schopnost aplikovat daný poznatek v praxi, a to na jedné z nejstandardnějších úloh – tedy na úloze o nalezení tečen ke kružnici.

Úloha 1a o narýsování tečny ke kružnici z bodu, který kružnici náleží, je další úlohou, u které je možno zjistit, zda se Kristýna ve svém geometrickém uvažování pohybuje v prostoru teoretickém, či v prostoru reprezentací. Určitý náznak odpovědi poskytuje již její první otázka, která zní následovně:

K: Musím úplně přesně pomocí pravítka?[29]
T: Úplně přesně.
K: Achjo.

Po tomto úvodním zklamání se Kristýna chvíli snaží „nastavit" pravítko ke kružnici tak, aby se zdánlivě jednalo o tečnu, a tedy jasně pracuje pouze v prostoru reprezentací. Poměrně rychle však od tohoto způsobu upouští a konstrukci provádí na základě znalostí z prostoru teoretického – rýsuje tedy příslušný průměr kružnice a na něj pak kolmou přímku procházející bodem T (viz obr. 2.11). Žádám Kristýnu, zda by mohla způsob sestrojení tečny vysvětlit:

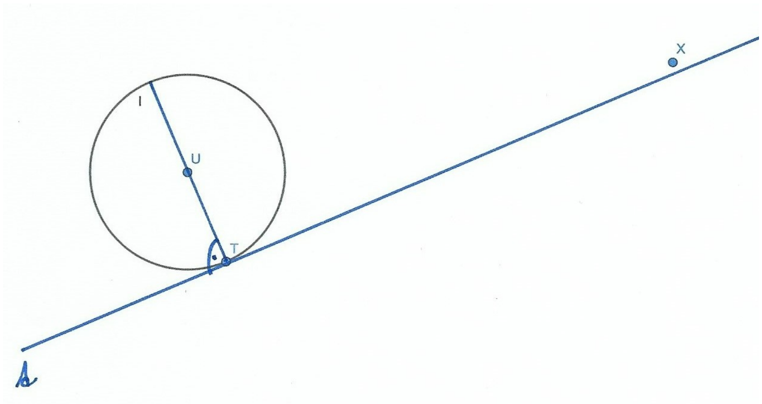
K: No, tady jsem si udělala průměr ze středu k tomu bodu, a potom jsem udělala kolmici. To je vlastně ta tečna a prochází tím bodem T.
T: To znamená, že <u>když se bavíme o úhlu, tak je tam jaký úhel</u>?
K: <u>Pravý</u>.

Následně Kristýna vyplňuje úlohu 1b a ověřuje si správnost pomocí GeoGebry.

Bez větších problémů pracuje také na úloze 1c, přestože formulace v poslední větě je pro ni evidentně náročnější. Sama si pak u své odpovědi všímá, že každý průměr kružnice již z definice prochází jejím středem (a tedy část „který prochází středem k" je irelevantní).

Úloha 2 je pro Kristýnu rovněž snadná.

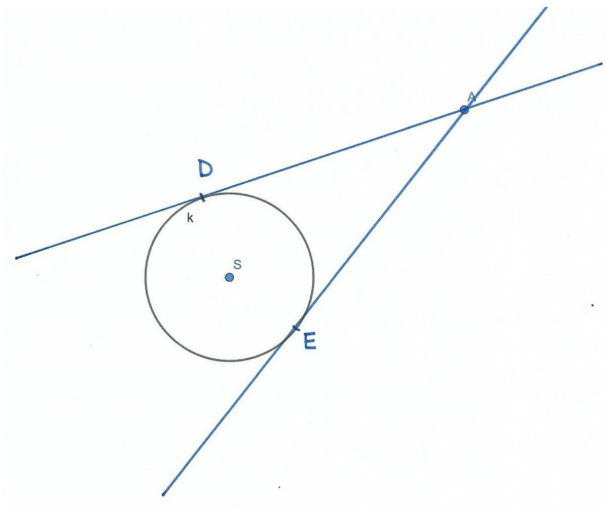
[29] Je ovšem také možné, že se Kristýna pouze potřebuje ujistit, že se jedná o konstrukční úlohu.



Obrázek 2.11: Kristýnino řešení úlohy 1a s vyznačeným pravým úhlem

Úloha 3 je druhou ze série konstrukčních úloh k sestrojení tečny k dané kružnici – tentokrát však z bodu ležícího vně kružnice.[30] Jelikož Kristýna neví, jak v úloze postupovat, opětovně se snaží manipulovat pravítkem tak, aby bylo možné narýsovat přímku, která bude zdánlivě vypadat jako tečna. Svůj postup komentuje slovy, že „neví, jestli je k tomu potřeba ještě něco jinýho“. Když je s prací hotova (viz obr. 2.12), ptám se jí, co si o svém postupu tedy myslí:

K: No, asi to není dobře, asi bych to měla dělat přesnějc, ale nevim jak.



Obrázek 2.12: Tečny v úloze 3 sestrojené od ruky

Zde je tak vidět, že si je Kristýna nesprávnosti svého postupu pravděpodobně vědoma. Geometrické objekty tedy do jisté míry vnímá v kontextu světa

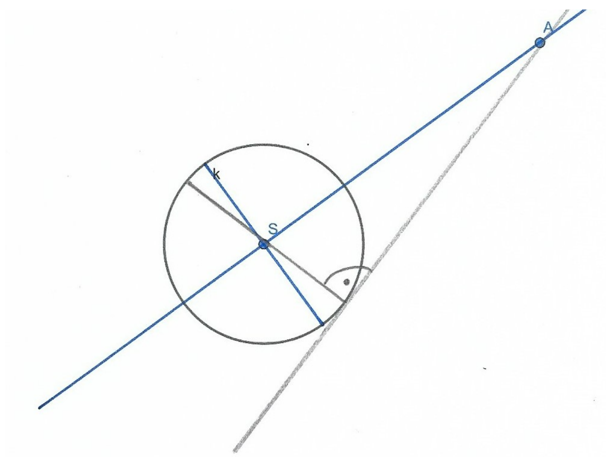
[30]Nepožaduji po Kristýně, aby konstrukční úlohu řešila se všemi jejími náležitostmi, jako jsou rozbor, popis konstrukce nebo diskuse počtu řešení. Například k potřebě udělat si náčrtek však dojde Kristýna v průběhu řešení sama.

teoretického, chybí jí však myšlenka, která by jí korektní konstrukci tečny umožnila – a přestože aktivování Kristýniných vstupních znalostí o kolmosti tečny na příslušný průměr bylo jedním ze zamýšlených cílů úlohy 1a, tento poznatek z jejích úvah naprosto vymizel. Dokonce se tak stalo i navzdory tomu, že na přítomnost pravého úhlu v řešení jsem ji v našem rozhovoru přímo navedla.

Rekapitulujeme si tedy, v čem se úloha 3 liší od úlohy 1, a docházíme k závěru, že pro správné sestrojení tečen je třeba určit, kde na kružnici se budou nacházet body dotyku. První Kristýnina úvaha, jak takové body nalézt, je však nesprávná:

> K: To bych nějak potřebovala zjistit, aby to bylo kolmý na ten... No, možná kdybych si spojila ten střed s tím bodem A a pak udělala kolmici... No, to asi nebude vycházet.

Přestože tuší, že tímto způsobem se k cíli nedostane, rýsuje přímku procházející body A a S a k ní kolmý průměr (viz obr. 2.13). Když chce následně spojit průsečík tohoto průměru a kružnice s bodem A, sama sobě se směje, protože je jí už jasné, že takto pravý úhel nevyjde.



Obrázek 2.13: Kristýnin náčrtek tečen z bodu vně kružnice

> K: No, počkej, vždyť to má bejt kolmý, to nevychází.

Kristýna je tedy schopna opravit si chybu v postupu sama, činí tak ale až překvapivě pozdě – bylo by jistě žádoucí, aby měla fakt, že „kolmice ke kolmici je rovnoběžná s původní přímkou“, zautomatizovaný.

V této chvíli se Kristýna zeptá, zda si může udělat náčrtek, protože sama cítí, že by jí svou názorností mohl pomoci. Náčrtek proto provádí a sama si shrnuje, jakému čelí problému.

> K: Takže máme bod A a hledáme body dotyku, o kterých víme... jakoby já nevím, jak to zformulovat, ale leží na tý kružnici... a že ten bod dotyku jakoby v tom místě, kde se střetne ten průměr s tou tečnou, tak tam by měl bejt pravej úhel, ale já nevím, jak na něj přijít.

Přestože je Kristýna schopna správně formulovat daný problém, který potřebuje vyřešit, stále neví, jak v úloze pokročit dále. Přecházíme proto k úloze 4, která je vytvořena za účelem objevení Thaletovy kružnice jako příslušné množiny bodů. V kontextu teorie generického modelu je tak snahou poskytnout Kristýně větší množství izolovaných modelů v naději, že bude schopna odhalit, co dané modely spojuje, a následně vyslovit hypotézu.

Kristýně se bohužel při prvních dvou pokusech o pravoúhlý trojúhelník nedaří načrtnout situaci dostatečně dobře. Chystám se jí proto poradit, jak lze trojúhelníky alespoň přibližně nalézt s použitím pravítka s ryskou. Než se však k této radě dostanu, Kristýna mi skáče do řeči se svým nápadem, ke kterému ji pravděpodobně přivádí asociace se souslovím „pravý úhel“:

> T: Kdybych já věděla, že tam chci někde mít pravý úhel, tak si...
> K: Thaletovu kružnici!
> T: Co je Thaletova kružnice?
> K: No, množina vrcholů pravých úhlů.
> T: Tak to ještě určitě pokračuj.
> K: Sestrojených nad nebo pod danou úsečkou. Takže jakoby má střed ta kružnice ve středu tý úsečky a prochází těma bodama. A potom tam všude jsou ty pravý úhly. *(naznačuje tužkou Thaletovu kružnici nad úsečkou BC)* Takže když tady udělám půlku... Jo! Já už vím! Ale to jsme se učili, sakra. *(směje se)*
> T: To jste se všechno, co děláme, učili, a určitě jste s tím i rýsovali nějakou tečnu.[31]

S evidentním nadšením, že již ví, jak postupovat, rýsuje Kristýna Thaletovu kružnici a příslušné tečny. Poznatky o kružnici následně shrnujeme a Kristýna nyní doslova „jako když bičem mrská“ opakuje její definici, kterou má ze školy naučenou jako tzv. „poučku“ (více viz oddíl 2.4.1)[32]. Je tedy očividné, že poznatek o Thaletově kružnici má velmi dobře uložený pamětně, a to i přesto, že se jedná o látku, kterou ve škole probírala zhruba před rokem. Zároveň se ale jedná o poznatek, který není schopna aplikovat, a to ani v jedné z nejstandardnějších situací. Taková poučka je tedy značně formální. O její formálnosti

[31] Skutečně, identickou úlohu má Kristýna vyřešenou ve svém školním sešitě z matematiky.
[32] Velmi zajímavý je také fakt, že se Kristýně při odříkávání „poučky“ znatelně změní intonace ve výrazně monotónní a tón hlasu ve výrazně hlubší.

dále svědčí mimo jiné fakt, že když je Kristýna žádána, aby vysvětlila, co tedy definice Thaletovy kružnice znamená, její vysvětlení je čistě instruktivní a založené výhradně na popisu toho, jak Thaletovu kružnici sestrojit. Thaletova kružnice je totiž v Kristýnině matematické kognici primárně uložena jako procedura, ovšem s chybějícím porozuměním této kružnici jako množině bodů dané vlastnosti.[33] Teprve na mou doplňující otázku se Kristýna uchyluje k ozřejmění významu:

> T: A kdybys mi měla říct, k čemu je ta Thaletova kružnice dobrá? Proč se jí učíte?
> K: No, když vím, že je někde pravej úhel, ale nemám ten vrchol, tak abych si ho zjistila.[34]

Poslední částí tohoto diagnostického rozhovoru je práce na úloze 6, ve které je Kristýna tázána, aby vymyslela zadání vlastní úlohy, ve které je zapotřebí Thaletovu kružnici využít. Tato úloha se ukazuje jako velmi náročná.[35] Kristýna nejprve zkouší navrhnout sestrojení vrcholu pravého úhlu nad danou přeponou, což však nepřináší mnoho nového v porovnání s úlohou 4. Zůstává však ve svých úvahách u trojúhelníků a je si vědoma, že hledá „něco, kde potřebuje pravej úhel“. Jelikož si sama neví příliš rady, pomáhám jí tím, že narýsuji obecný trojúhelník a požádám ji, aby ho pojmenovala a vyznačila v něm vše, co již o trojúhelníku zná. Zároveň ji upozorňuji, že musí mít na paměti, že budeme potřebovat pravý úhel.

> K: No, jakoby výška.
> T: Co je výška?
> K: No... teda já doufám, že to je výška. *(smích)* No, že jde z vrcholu k tý jedný jeho straně, co je naproti, a vlastně je tam pravý úhel.[36]

Nápad s výškou tedy schvaluji. Vymýšlení zadání úlohy je však stále poměrně zdlouhavé. Jako užitečný nástroj se opět ukazuje náčrtek. Kristýna postupem času vymýšlí úlohu, ve které je známa velikost strany b a velikost výšky

[33]Dle závěrů výzkumu (Vondrová & Havlíčková, 2015, s. 171) je tento případ neznalostí častý – Kristýna sice zná termín a umí Thaletovu kružnici zkonstruovat, ale (ani navzdory správnému pamětnému uchování její definice) nerozumí tomu, o jakou množinu bodů se jedná.

[34]Zde by se mohlo jednat o zárodek zživotnění poznatku (viz 1.2.4).

[35]Práce na vymýšlení vlastní úlohy zabírá 12 z celkových 36 minut tohoto rozhovoru.

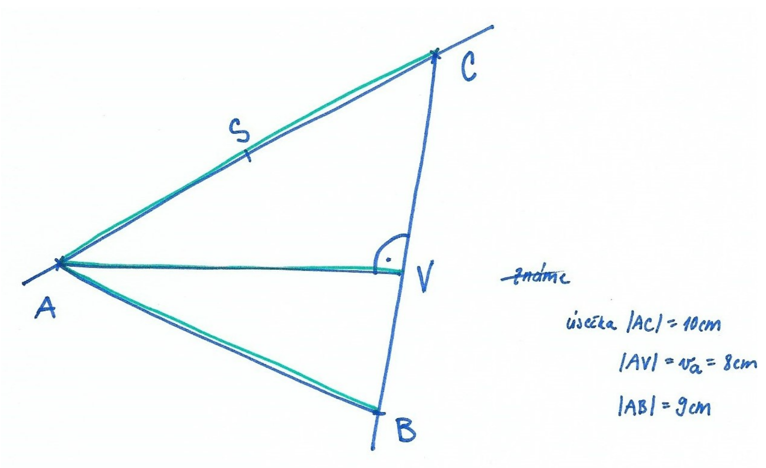
[36]Výše ve výsledcích analýzy rozhovoru na téma obsahu trojúhelníku (viz 2.2.1) jsem Kristýnino porozumění výšce v trojúhelníku označila jako kvalitní. Za tímto označením si stojím i tomuto dialogu navzdory – i přes poněkud „kostrbatou“ formulaci Kristýna totiž i nadále prokazuje, že pojmu výška rozumí; nejistota, kterou zde vyjadřuje, je ryze terminologického charakteru.

na stranu a. Je pro ni ovšem složité si situaci představit, a má proto dojem, že tyto dva údaje by pro zkonstruování trojúhelníku mohly stačit. Nabízím jí tedy barevný fix, aby si v náčrtku mohla známé údaje zvýraznit. Kristýna však začíná následovně:

> K: No, měla bych znát bod A…
> T: No, tak ten si potom nějak dáš, ne? Úlohy na konstrukci trojúhelníku přece většinou nezačínají „znáte bod A“, ale znáte…?
> K: Úsečku?

Tato Kristýnina odpověď svědčí o jisté potřebě konkrétnosti, kterou v geometrii pravděpodobně pociťuje. Zajímavé je, že tato potřeba se neprojeví tehdy, kdy má Kristýna sama nějaký trojúhelník konstruovat, ale vyjde najevo teprve v momentě, kdy úlohu ke zkonstruování vymýšlí. V takovém případě má pocit, že se řešitel bez zadaného umístění počátečního bodu neobejde.

Protože je pro Kristýnu stále poměrně obtížné se v úkolu orientovat, rozhodnu se pomoci jí takovým způsobem, že si hraji na její „žákyni“ a snažím se trojúhelník konstruovat podle jejích instrukcí. Toto postupné konstruování trojúhelníku současně s vymýšlením úlohy se ukazuje jako dobrý nápad. Kristýna mi tak zadává velikost strany b, nad níž dle zadání rýsuji Thaletovu kružnici. Po tomto kroku si pak Kristýna správně všímá, že pouze Thaletova kružnice však neurčuje patu kolmice z bodu A na stranu a přesně, proto do zadání připisuje navíc velikost výšky AV. Poslední zadanou informací, kterou o trojúhelníku doplní, je pak velikost úsečky AB, čímž je úloha hotova (viz obr. 2.14).



Obrázek 2.14: Kristýnino zadání konstrukční úlohy na využití Thaletovy kružnice

V závěrečné reflexi pak ještě Kristýna na otázku, zda bylo vymyslet zadání obtížné, odpovídá, že „hodně“. Stejný pocit jsem při tom, když jsem ji sledovala pracovat, měla i já. Úloha pro ni byla jistě netypická a aplikovat v ní daný formální poznatek bylo, podle očekávání, velmi složité.

2.2.4 Pythagorova věta

„Á na druhou plus bé na druhou rovná se cé na druhou.“

Posledním diagnostickým rozhovorem, který je v této práci analyzován, je rozhovor na téma Pythagorovy věty. Opět je cílem odhalit, zda je Kristýna schopná aplikace poznatku o této větě v praxi, ovšem tentokrát na poměrně nestandardní úloze. Nutnou podmínkou pro úspěšné aplikování věty je v tomto případě fakt, že Kristýna nejenom zná její znění, nýbrž také rozumí jejímu geometrickému významu.

Úlohy 1 a 2 jsou Kristýně vytvořeny tzv. „na míru“. Jsou totiž zasazeny do atraktivního kontextu, který je jí důvěrně známý. Dále jsou také úlohy formulovány jako určité výzvy. Oba tyto aspekty přispívají k podpoře Kristýniny motivace.

V úloze 1 si Kristýna počíná velmi dobře; již výše u popisu pracovního listu (viz 2.1.3) však bylo zdůrazněno, že úloha je díky přítomnosti pythagorejské trojice záměrně snadná.

Za zmínku však stojí způsob, jakým Kristýna přenáší velikosti úseček – protože předpokládá, že jeden dílek čokolády má stranu o velikosti 1 cm, rovnou pomocí pravítka rýsuje úsečku o délce 5 cm.[37] Teprve na dotaz, zda by bylo možné přenést délku úsečky jinak, Kristýna odpovídá, že pomocí kružítka.

Úloha 2 je podle očekávání problematická. Přestože její zadání je téměř totožné jako zadání úlohy 1, počet dílků v jednotlivých čokoládách je nyní 16 a 25. Součet těchto počtů dílků tak nelze celočíselně odmocnit, jak si Kristýna všímá:

> K: Takže tohle je 16 a tohle je 25… Takže to je 41. Nooo… *(smích)*
> T: Nooo?
> K: *(po chvíli přemýšlení)* No, to nevychází přesně.
> T: Co nevychází přesně?

[37] Fakt, že délka strany dílku je skutečně 1 cm, je nešťastnou náhodou, ke které došlo při tisku.

K: Těch 41.

T: Jak to myslíš, že to nevychází přesně?

K: No, na celý ty dílky. 41.

Na můj dotaz pak Kristýna vysvětluje, z jakého důvodu tedy byla úloha 1 tak jednoduchá: „protože 5 krát 5 je 25." Přestože Kristýna ví, že číslo 41 odmocnit neumí, i zde se při nalezení objektu daných vlastností vehementně snaží o ryze početní řešení:

K: *(píše $\sqrt{41}$)* No, asi by to mělo bejt něco jako tohle, ale já nevím, kolik to je.

T: Ano, a máš zakázanou kalkulačku.

K: *(zkouší tipovat číselně, kolik by výsledek zhruba mohl vyjít)* No, tak asi by to mělo bejt něco mezi šesti a sedmi, půl na půl. *(smích)*

Tuto její domněnku jí potvrzuji, ale upozorňuji ji, že výslednou čokoládu po ní budu chtít úplně přesně narýsovat – proto má také k dispozici rýsovací pomůcky, zakázanou kalkulačku a hodnotu $\sqrt{41}$. Snažím se jí tedy pomoci návodnými otázkami:

T: Napadá tě, jak by se to dalo udělat? Když máme dva čtverce a jako výsledek budeme chtít co?

K: Taky čtverec?

T: Ano, pro který platí co?

K: Že to je ten jeden plus ten druhej... Že ten obsah je stejnej. Teda že ten obsah je obsah toho jednoho plus obsah toho druhýho.

Právě v tomto momentě tak Kristýna přímo vyslovuje geometrický význam Pythagorovy věty. To, že by úlohu bylo možné řešit za pomoci znalostí z geometrie, však není schopná nahlédnout, a proto jí nedochází, jak velký objev právě učinila.[38] Nechávám ji proto chvíli přemýšlet. Následně na mou otázku, zda ji něco napadá, odpovídá takto:

K: Tak nějakej vzoreček?[39]

T: Vzoreček? Jsme u vzorečků zase? No, skoro by tam mohl být nějaký vzoreček... A dokonce vzoreček, který určitě velmi dobře znáš, jen tě tady možná hned nenapadne, u téhle úlohy.

K: *(přemýšlí a zkouší psát $a^2 + b^2$)*

T: Tak, co sis to napsala teď?

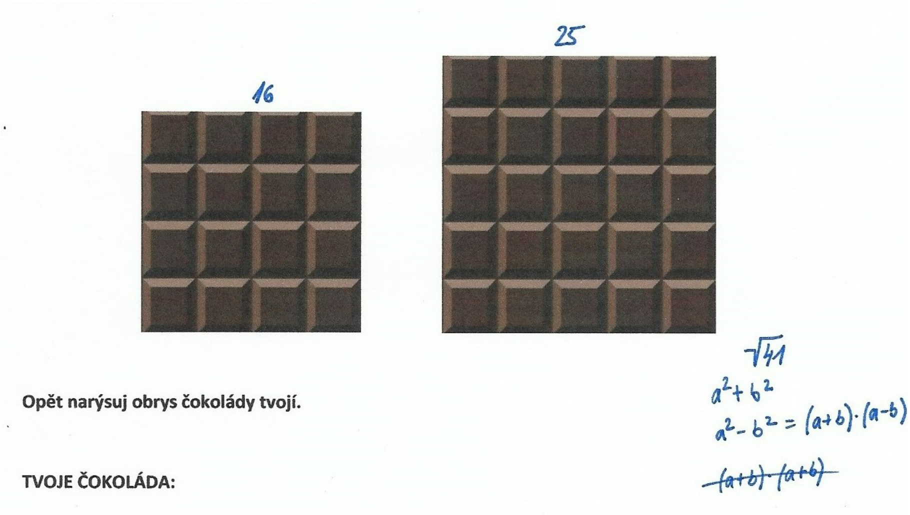
K: No, a^2 plus b^2 že je ten výsledek, 41. Ale teď nevím, co s tím.

[38] Jak bylo zmíněno v analýze rozhovoru s tématem úprav algebraických výrazů (viz 2.2.2), jednotlivé oblasti matematiky chápe Kristýna spíše odděleně.

[39] Tato Kristýnina odpověď je pro ni poměrně charakteristická, jak jsem měla za dobu naší spolupráce možnost vypozorovat a jak je také zřejmé z výsledků analýz předcházejících rozhovorů. To, o co se Kristýna v matematice nejčastěji opírá, je totiž právě znalost vzorců a jejich aplikace ve standardních úlohách.

Požádám tedy Kristýnu o vysvětlení geometrického významu členu a^2. To je pro ni po práci s algebraickými dlaždicemi jednoduché. Spojitost mezi daným algebraickým výrazem a obsahem čtverce o straně a tak vidí – ovšem bohužel až poté, co jsem ji na tento fakt musela upozornit. Tato spojitost by však měla být patrná již při pohledu na samotné zadání úlohy; od samého počátku pracujeme s „velikostmi" nějakých čtverců.

V tento moment mi však dochází, že Kristýniny úvahy o vzorcích se ubírají jiným směrem než takovým, který by vedl k Pythagorově větě: je totiž stále ovlivněna před nějakou dobou probíraným školním učivem, tedy vzorci pro mocniny součtu a rozdílu. Chce proto výraz a^2+b^2 „rozdělit na ty dvě závorky". Rozkládá si tak zkusmo na součin výraz $a^2 - b^2$ a následně si zapisuje také součin $(a+b)\cdot(a+b)$ a ptá se, zda hledaný rozklad vypadá takto (viz obr. 2.15). Naštěstí jí však samotné okamžitě dochází, že se o správný rozklad nejedná. Připomínám jí také, že o správnosti právě této zdánlivé algebraické identity měla rozhodnout již při rozhovoru na téma úprav algebraických výrazů – tehdy chybovala a vztah nejprve označila za správný (viz 2.2.2).



Obrázek 2.15: Kristýnin pokus o řešení úlohy 2

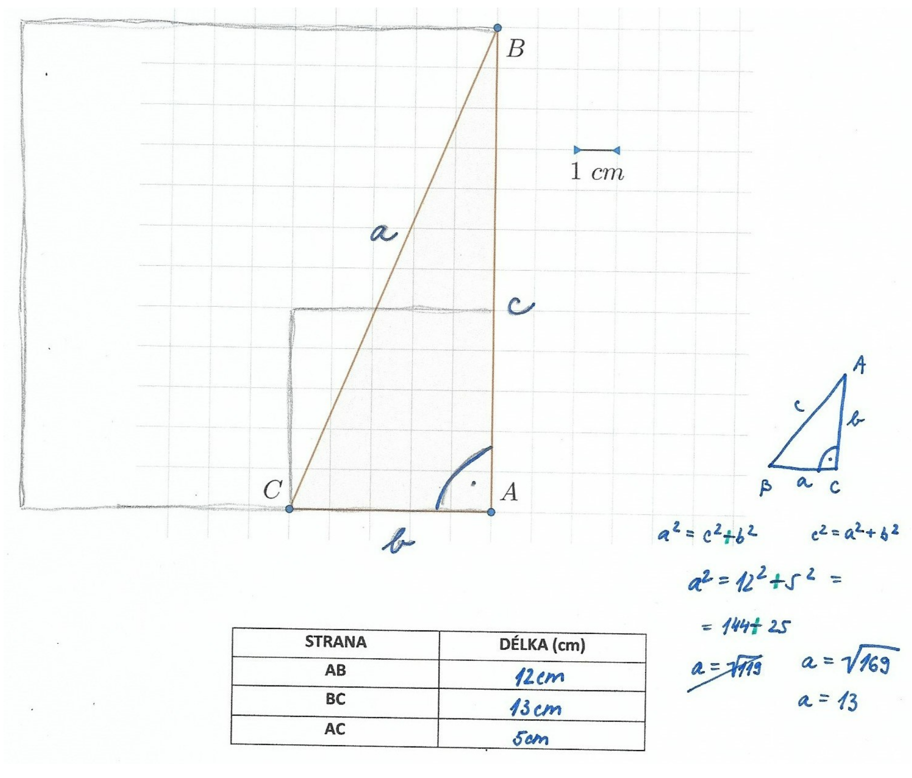
Jelikož je tedy třeba stočit Kristýniny myšlenky směrem ke geometrii, zadávám jí úlohu 3, která je standardní úlohou na využití Pythagorovy věty pro výpočet přepony v pravoúhlém trojúhelníku:

T: Tak já ti dám takovou malou nápovědu. Dostaneš ode mě úlohu a nebudeš tam vůbec používat algebru, žádné tyto vzorečky, ale bude to úloha. . .
K: *(skáče do řeči)* Pythagorova věta! *(smích)*
T: . . . z geometrie.
K: Ach jo.

V případě Kristýnina zvolání se pravděpodobně jedná jen o jakýsi tip, nikoli o to, že by se jí najednou jasně vyjevilo, jakým způsobem je úloha s čokoládami řešitelná. Navíc v prvních chvílích, kdy pracuje na úloze 3, na Pythagorovu větu úplně zapomíná. Je totiž opět zmatena tím, že je úloha zadána ve čtvercové síti. Z ní tak nejprve správně odečítá velikosti obou odvěsen, ale namísto dopočítání přepony pomocí známého vzorce se i její velikost snaží nějakým způsobem určit ze sítě – obdobně, jako se již dříve v rozhovoru o obsahu trojúhelníku pokoušela určovat obsahy mřížových útvarů (viz 2.2.1):

> K: Nooo… A tohle… No, já bych to udělala tak, že bych si přikládala, jakoby k sobě.

Poměrně brzy však zjišťuje, že takový postup nebude možný. Po dotazu na typ trojúhelníku a odpovědi „pravoúhlý“ se proto vrací k Pythagorově větě a okamžitě píše vzorec $a^2 = c^2 - b^2$.



Obrázek 2.16: Kristýnino řešení úlohy 3

Jak je však vidět na obr. 2.16, vrcholem pravého úhlu trojúhelníku ABC záměrně není vrchol C, který je pro tento účel používán nejčastěji, nýbrž vrchol A. Kristýna si toho nicméně nevšímá a aplikuje špatný vzorec – ví, že potřebuje vypočítat stranu a, a postupuje naprosto mechanicky. Je tedy očividné, že vzorec pro výpočet je pro ni formální: uchovaný pamětně, nicméně bez porozumění. Nyní proto na svou aplikaci mechanicky zvládnutých vzorců doplácí nesprávným řešením. Teprve poté, co se dostane k výsledku $a = \sqrt{119}$, ji vracím zpět na začátek s tím, že musela někde udělat chybu, protože žádný takový výsledek určitě vyjít nemá. Poprosím ji také, aby vysvětlila, které písmeno označuje na obrázku kterou stranu:

K: *(ukazuje na přeponu)* Takže tohle by asi měla být strana c.
T: To nevím, jestli se mi úplně zdá. A zajímá mě, proč sis napsala ten vzoreček v této podobě, tedy že a^2 se rovná něčemu?
K: *(ukazuje po řadě nejprve na vrchol u pravého úhlu a poté na přeponu)* No, protože mě zmátlo že tady je bod A, takže by tady měla být strana a, ale ona je to asi strana c.
T: No, tak počkat, jak strana c? Tak když tady je bod A... Přece kde je strana c? Tak si označ ten trojúhelník.

Kristýna trojúhelník označuje správně podle konvence, ve které jsou strany pojmenovány podle protilehlých vrcholů. Po krátkém přemýšlení pak vysloví následující:

K: No, je to divný, že ta strana a je ta nejdelší, to by měla být c.

Nyní je evidentní, že jiné značení Kristýnu opravdu zmátlo. Ukazuje se totiž, že o významu matematického značení disponuje zkreslenými představami. Fakt, že ve školním prostředí je zvyklá využívat nejčastěji[40] to značení, při kterém přepona odpovídá straně c, u ní totiž vedl k tomu, že na odlišná značení nejenom není zvyklá, nýbrž je dokonce považuje za značení chybná. To je dalším znakem již mnohokrát zmiňovaného prototypického uvažování.

Poprosím ji tedy, aby si načrtla trojúhelník se značením, které je jí známé, napsala znění Pythagorovy věty a následně ho pozměnila tak, aby odpovídalo značení z pracovního listu. To už nyní zvládá bez problému, a v původním výpočtu tedy přepisuje všechna minus na plus a dostává správný výsledek, který doplňuje do tabulky (viz opět obr. 2.16).

V momentě, kdy má Kristýna poznatky o Pythagorově větě shrnout, se nicméně opětovně potvrzuje, že její porozumění danému konceptu není dobré:

T: A kdybys měla napsat její znění, co napíšeš? Kdybys měla třeba v testu ve škole: „Napiš, jak zní Pythagorova věta,“ tak co napíšeš?
K: *(píše $c^2 = a^2 + b^2$, ovšem neupřesňuje, v jakém případě daný vztah platí)*
T: Víme, kde to platí a kde to třeba neplatí?
K: No, platí to u těch pravoúhlých trojúhelníků. *(opět nijak blíže nespecifikuje, že je v případě takto zapsaného vzorce potřeba „standardní“ značení)*

[40]Nebo snad pouze?

Dále se ukazuje, že Kristýna daný vztah chápe pouze jako nástroj k výpočtu jedné chybějící velikosti stran, ale geometrickou interpretaci za vztahem nevidí. Na tu je tak třeba ji navádět:

> T: A kdyby ses podívala na ten zápis, jak jsi to zapsala, nebo tak, jak to platí pro ten náš trojúhelník, co ono to vlastně říká? Kdybys to měla nějak interpretovat, co to znamená, že $c^2 = a^2 + b^2$? Ty jsi u těch čokolád byla poměrně blízko. Je tu něco, co ti tu sedí s těmi čokoládami?
> K: No, to $a^2 + b^2$.
> T: A kdybys to vysvětlila? Ty přece víš, co je to $a^2 + b^2$, ty jsi to napsala u těch čokolád, že by tam mohlo být nějaké $a^2 + b^2$.
> K: *(naznačuje oba dva čtverce nad odvěsnami)* No, tady je to b^2. A tady, kdybych udělala to stejný, že bych vzala těch 12, tak by to dalo ten další čtverec, a to by bylo to a^2. No, a je to vlastně že obsah tohohle plus obsah tohohle...
> T: ... se rovná čemu teď?
> K: Obsahu toho velkýho čtverce? Tý velký čokolády?
> T: Sedí to v tom? Mohlo by to takhle být?
> K: Mohlo.
> T: Takže vlastně možná ta Pythagorova věta neříká jenom něco o nějakých písmenkách a součtech, ale o čem? Co jsi mi tu naznačovala v tom obrázku?
> K: No že tady jsou obsahy čtverců.

Následně Kristýna dostává zmenšeninu pravoúhlého trojúhelníku v mříži, aby si mohla situaci přehledně načrtnout. Protože původně črtá čtverce nad odvěsnami v opačné polorovině, než ve které se obvykle vyznačují, poradím jí, že v polorovině druhé bude celá situace přehlednější. Nyní se již konečně můžeme vrátit k úloze 2. Pravděpodobně také zásluhou vizualizace problému, kterou jsme právě provedly, již Kristýna čokoládu rýsuje bez problému. Jakmile dorýsuje, je znovu požádána, aby zopakovala, z čeho výsledek vyplývá. To činí víceméně úspěšně, leč po mých četných doplňujících dotazech (např. opět na útvar, ze kterého se u narýsování celé situace vychází, tj. pravoúhlý trojúhelník).

Když v úplném závěru rozhovoru ještě Kristýna měřením alespoň zhruba ověřuje velikost přepony, tedy jestli jí skutečně vyjde „něco mezi šesti a sedmi", objevuje se ještě jeden diagnosticky zajímavý moment:

> K: Jo, šest celá čtyři asi.
> T: A úplně konkrétně je její velikost kolik?
> K: *(přemýšlí)* Cé? *(smích)*
> T: A kolik to je? Máme to spočítané pro tento případ někde?
> K: No... druhá odmocnina ze 41? *(dle intonace se spíše ptá, než odpovídá)*

Tento dialog tak poukazuje na nedostatečně kvalitní znalost, která se týká chápání čísla: Kristýna totiž druhou odmocninu ze 41 nepovažuje za konečný výsledek, ale spíše za výsledek průběžný, který je třeba ještě nějak „dopočítat“/definitivně vyčíslit. Nutno však podotknout, že na Kristýnu, vzhledem k jejímu věku, není možné klást v oblasti porozumění iracionálním číslům přehnané nároky – přestože se již s některými iracionálními čísly setkala (např. jistě s číslem π), tato zatím v její matematické kognici reprezentují pouze jednotlivé izolované modely.

2.3 Shrnutí identifikovaných formálních poznatků

Na úvod oddílu shrnujícího identifikované formální poznatky je důležité zmínit, že se v žádném případě nejedná o formalismy ojedinělé – spíše se zdá, že různé pamětně uchované poučky, u kterých však chybí porozumění, jsou v Kristýnině matematické kognitivní struktuře poměrně časté.

Totéž platí pro množství algoritmů. V průběhu naší společné práce se totiž Kristýna ukazovala jako silná v úlohách, jejichž vyřešení je podmíněné znalostí nějaké nacvičené procedury, jako jsou například úlohy na řešení lineární rovnice či prosté sestrojení Thaletovy kružnice. Jak se však díky hloubkovým rozhovorům ukázalo, Kristýna tyto procedury aplikuje bez potřebného porozumění. Jako ilustraci lze uvést rozhovor na téma lineárních rovnic, kdy není schopna vysvětlit princip ekvivalentních úprav, jelikož poznatky o nich nemá propojeny na zkušenosti. V takových momentech má pak Kristýna tendenci přílišně lpět na matematických poučkách.

Také u velké části dalších testovaných poznatků bylo prokázáno, že jsou u Kristýny velmi dobře uloženy pamětně (např. definice Thaletovy kružnice či vzorec pro výpočet z Pythagorovy věty). Přesto však Kristýna není schopna aplikace těchto poznatků v celé řadě situací – a to nejenom v situacích nestandardních, ale někdy ani v situacích typických. Za nestandardní situace jsou v tomto kontextu považovány např. vymyšlení vlastní úlohy na využití Thaletovy kružnice či aplikace geometrického významu Pythagorovy věty; za typické naopak sestrojení tečen ke kružnici z bodu nebo výpočet velikosti přepony v pravoúhlém trojúhelníku. Takové poznatky jsou tedy poznatky formální.

V úloze na dopočítání velikosti přepony se jako problematické ukazuje již pouhé přeznačení trojúhelníku, které je odlišné od značení nejběžnějšího. To jasně ukazuje na další dva problémy, které se u Kristýny objevují.

Zaprvé, Kristýna nemá dostatečně kvalitní porozumění písmenům v matematice, jak je patrné také z rozhovoru na téma lineárních rovnic a úprav algebraických výrazů. Je tak zatím ve fázi, kdy o písmenech ví, že se používají jako určití zástupci čísel, a případně za ně umí dosadit a procedurálně s nimi pracovat. Nedosáhla však ještě fáze abstraktní znalosti.

Zadruhé, Kristýnina matematická kognice je zatížena silným uvažováním v prototypech. Toto její uvažování je patrné nejprve ze způsobu, kterým označuje geometrické objekty, a naplno se pak projevuje u tématu vzorců – ať už se jedná o vzorce pro algebraické identity, či pro výpočet velikosti přepony v pravoúhlém trojúhelníku. V případě pravoúhlého trojúhelníku je alarmující, že jiné než prototypické značení dokonce Kristýna považuje za značení nesprávné.

U některých svých poznatků Kristýna dále není schopna rozeznat, že se jedná o poznatky chybné, a postrádá jejich propojení na jiné poznatky. To je patrné zejména v případech, kdy nezvládá pracovat s algebraickými výrazy v jejich geometrickém kontextu. Stejně tak je pro ni složité rozhodovat o platnosti různých hypotéz.

V případě tématu obsahu trojúhelníku Kristýna neumí vzorec, u kterého nedošlo ani k prostému pamětnému uložení, samostatně rekonstruovat, přičemž tato rekonstrukce je pro ni náročná i v případě, kdy se jí dostane výrazné dopomoci. Chybí jí totiž potřebný vhled, což se projevuje například tehdy, kdy ani po delší práci na odvození vzorce stále není schopna určit správné rozměry, které jsou pro vypočítání obsahu potřebné. V tomto rozhovoru dále vychází najevo, že některé formalismy si Kristýna přináší pravděpodobně již z prvního stupně – číselné hodnoty obsahů jednodušších útvarů ve čtvercové síti sice určuje správně, nicméně způsobem, který není korektní.

V neposlední řadě je v Kristýnině geometrickém uvažování patrné, že se ještě nepohybuje plně v teoretickém prostoru geometrických objektů, a to např. u konstrukční úlohy na tečny ke kružnici. Thaletovu kružnici má totiž zapamatovánu pouze jako poučku, případně proceduru, nicméně bez dostatečného porozumění. To jí tak v dané situaci znemožňuje tento nástroj využít, a je proto odsouzena k pokusu o „nakamuflování“ tečen v prostoru reprezentací. O setrvávání v tomto prostoru svědčí také její potřeba konkrétnosti v geometrii či moment v rozhovoru o obsahu trojúhelníku, ve kterém není schopna využít uvažování v prostoru teoretickém ke zdůvodnění, proč lze, mluvíme-li o obsahu, považovat dva „půlčtverečky“ za jeden celý čtvereček.

Společným jmenovatelem výše zmíněných formalismů je fakt, že může být složité je diagnostikovat – tyto formalismy jsou totiž často kryty pamětně uchovanými poznatky a při řešení standardních školských úloh (navíc s prototypických značením) se nemusí projevit. Na druhou stranu je možné konstatovat, že pamětné uložení daných poznatků dává určitou naději na jejich zživotnění, pokud mu bude věnováno dostatečné úsilí a čas.

2.4 Diskuse

Závěrečný oddíl praktické části této práce je věnován diskusi, ve které jsou nastíněny možné příčiny vzniku Kristýniných formálních poznatků, a dále pak didaktické důsledky výsledků výzkumu a jeho omezení.

Již v oddílu 1.2 bylo zmíněno, že teorie generického modelu byla vybudována mimo jiné jako nástroj k porozumění příčinám vzniku formálnímu poznání a také k prevenci tohoto jevu. Není proto překvapením, že jak při odhalování možných příčin identifikovaných formalismů, tak při diskusi didaktických důsledků výzkumu budeme stále vycházet z této teorie.

2.4.1 Možné příčiny vzniku formálních poznatků

Připomeňme, že dle Hejného je důvodem vzniku formálních poznatků to, že poznatky jsou žákům předkládány transmisivním způsobem jako *informace*. S přihlédnutím k tomu, že významná část formalismů má u Kristýny podobu pamětného osvojení definic a procedur, je dále nutné vzít v potaz také příčiny mechanického učení v matematice dle V. Hejného (viz 1.2.2).

Je nezbytné podotknout, že provést jednoznačné a úplné určení hledaných příčin není možné. Jelikož obecně je hlavní (nikoliv však jedinou) příčinou vzniku formalismů transmisivní způsob vyučování, je třeba věnovat se v následující diskusi právě edukačnímu stylu, kterým je Kristýna vyučována. Většina informací, které se o edukačním stylu podařilo sesbírat, byla nicméně získána pouze zprostředkovaně skrze rozhovory. Osobně jsem však na výuce nikdy přítomna nebyla (natož pak po delší dobu) a Kristýnino vnímání výuky je jistě subjektivní. V diskusi je třeba mít tento fakt na paměti.

Na druhou stranu: v oddílu věnovanému sběru dat (viz 2.1.4) již bylo uvedeno, že jedním z analyzovaných informačních pramenů v praktické části této práce jsou výukové materiály, které byly Kristýně zaslány v době distanční výuky.[41] V tomto oddílu proto při odhalování možných příčin vzniku formalismů čerpám právě z nich. Pro ilustraci je část z výukových materiálů, týkající se

[41]Žádné on-line hodiny v dané době neprobíhaly, látka byla tedy žákům prezentována čistě skrze zaslaný výklad, který byl určen k samostudiu.

učiva o algebraických vzorcích, k nahlédnutí v přílohách (viz příloha F).[42] Níže jsou také uvedeny některé citace z těchto materiálů, které jsou z didaktického hlediska nejzajímavější a na které je v průběhu diskuse odkazováno:

A. Tyto 3 úlohy už nikdy nebudeš počítat násobením, ALE podle vzorců, které se jmenují: 2. mocnina součtu, 2. mocnina rozdílu, rozdíl čtverců. Vzorce budeš užívat ZPAMĚTI až do 8. ročníku a přibydou k nim další.

B. Vzorce musíš umět NEOMYLNĚ zpaměti včetně znamének („tahák“ je ti k ničemu), v září bude taková 1. práce.

C. Pravidlo musíš mít „v hlavě“ a výsledky říkáš nebo píšeš rychle zpaměti.

D. Pokud se vzorce nenaučíš, budeš mít ve 4. ročníku v pololetí známku 4, protože se na nich staví všechno další učivo.

E. *(u vzorce pro rozdíl čtverců)* Je jedno, která závorka je první.

F. *(u vzorce* $(A + B)^2$*)* Stejné je $(-A - B)^2$.

G. *(u vzorce* $(A - B)^2$*)* Stejné je $(-A + B)^2$.

H. Každý příklad opiš a napiš přímo výsledky podle uvedených vzorců, výsledky 2x podtrhni.

I. Úkol tentokrát napiš PŘESNĚ podle uvedených vzorců se všemi rozpisy. Jen tak se vše naučíš.

Možné příčiny vzniku formalismů, které byly u Kristýny identifikovány, jsou shrnuty v následujících odstavcích.

Transmisivní způsob vyučování a předkládání hotových znalostí

Z rozhovorů, které jsem s Kristýnou vedla, vyšlo najevo, že výuka matematiky v její třídě skutečně probíhá značně transmisivně. Její učitel obvykle každé téma začne výkladem, následně na tabuli vyřeší vzorovou úlohu a nakonec dá žákům prostor k samostatnému procvičování. Učitel tedy vystupuje jako zdroj znalostí, který žákům předvede, jak je třeba v úlohách postupovat, aniž by jim však dal prostor k (tolik potřebné) samostatné konstrukci poznatku. Látka je žákům předkládána ve formě výkladu, který je třeba se naučit, a při řešení úloh žáci často jen imitují řešení učitele. Takový styl výuky ale může být značně kontraproduktivní, o čemž již bylo pojednáno v oddílu 1.2.2.

Z přiložených výukových materiálů je očividné, že učivo o algebraických vzorcích je žákům jednoznačně předloženo jako hotová znalost, přičemž úkolem

[42] Materiály byly pro potřeby uveřejnění v této práci beze změny přepsány.

pro žáky je zejména osvojit si danou znalost pamětně.[43] Výklad, který tvoří stěžejní část těchto materiálů, je tak bohužel příkladem ne příliš šťastné praxe, o níž se ve své diskusi o příčinách vzniku formalismů zmiňuje i Hejný.[44].

Citace E, F a G, ve kterých je žákům opět pouze prezentován hotový poznatek, jsou v tomto směru navíc ukázkou nevyužité příležitosti k učení. V případě tohoto poznatku by totiž jistě nebyla obtížná jeho implementace do výuky takovým způsobem, při kterém by došlo k samostatné konstrukci poznatku – okamžitě se nabízí např. jeho formulace ve formě hypotézy, o jejíž platnosti by žáci mohli rozhodovat.

Předčasné „vyzbrojení“ žáka silnými nástroji

Na základě přiložených výukových materiálů lze dále konstatovat, že u algebraických vzorců jistě došlo k předčasnému „vyzbrojení“ Kristýny silnými nástroji. Příliš silný matematický aparát také pravděpodobně dostala do rukou i u ekvivalentních úprav lineárních rovnic, kde jí byl matematický model předložen bez dostatečného důrazu na jeho propojení na životní zkušenosti. Zároveň je možné, že k předčasné algebraizaci došlo i u dalšího zkoumaného učiva, jakým jsou např. vzorec pro obsah trojúhelníku či Pythagorova věta – zde se však jedná spíše o spekulace. Faktem ovšem zůstává, že díky dobře mechanicky osvojenému matematickému aparátu, který Kristýně stačí k úspěšnému řešení většiny školských úloh, se u ní vytrácí hlubší vhled. Procedury jsou aplikovány bez porozumění kontextu – a tedy formálně.

Ztráta motivace

Kromě vhledu samotného Kristýně chybí i jakási vnitřní potřeba tento vhled získat, a je tak utlumena její poznávací motivace. Přitom právě motivace, jako první etapa poznávacího procesu, je naprosto zásadní. Jak již bylo zmíněno v oddílu 2.1.1, Kristýna je v matematice spíše stimulována než motivována. Hlavním hnacím motorem pro ni není přirozená radost z poznání, nýbrž dobrá známka. Orientace na známky je ostatně patrná také u učitele z jeho citací

[43] Jsem si samozřejmě vědoma, že distanční výuka při uzavření škol v březnu 2020 byla naprosto bezprecedentní a v žádném případě nenahrávala konstruktivistickému pojetí vyučování. Z rozhovorů s Kristýnou jsem však nabyla dojmu, že v případě jejího učitele by látka byla vyložena velmi podobným způsobem i v případě výuky kontaktní.

[44] Právě u vzorce pro mocninu součtu varují Hejný et al. (1988, s. 39) před tím, že tento poznatek „může být v naší mysli uložen jako pouhý paměťový záznam, jako něco, co jsme se naučili, protože to v učebnici bylo napsáno v rámečku a nad ním byla rada ZAPAMATUJ SI”.

B a D, ve kterých se žáky snaží stimulovat k práci právě za pomoci výhružek týkajících se písemných prací a závěrečné klasifikace.

Přílišný důraz na pamětné uchování

Problematika toho, zda pamětné uchování vzorců je, nebo není nezbytné, by jistě vydala na desítky dalších diplomových prací a role správného pamětného osvojení je minimálně v procesu automatizace poznatků jistě nezastupitelná. Přiložené výukové materiály však naznačují, že důraz na pamětné uchování je v daném případě snad až přílišný (viz výroky A, B a C).

Toto podezření se potvrzuje i při jednom z rozhovorů s Kristýnou, ve kterém zmiňuje, jak se v geometrii učí tzv. „poučky“:

> K: No a my právě máme několik těch věcí jako „poučky“, to se tak prostě jmenuje, a <u>ty musíme umět, protože když je zkoušení, tak je z těch „pouček“</u>.[45]

Na dotaz, co si Kristýna o takovém učení pouček myslí, pak odpovídá následovně:

> K: No, já myslim, že to je právě dobrý, protože třeba těm, co jim to tolik nejde... Tak <u>těm se prostě jenom stačí naučit ty poučky a dostanou ze zkoušení jedničku</u>.

Mohlo by se tak zdát, že učení se definicím a vzorcům je do jisté míry nadřazeno kvalitnímu porozumění. Na tomto místě však můžeme jen spekulovat, z jakého důvodu jsou tyto „poučky“ Kristýniným učitelem do výuky zařazovány. Potenciálně ale tímto důvodem může být právě to, že se tak učitel snaží pomoci slabším žákům. Na případu Kristýny se však ukazuje, že tento přílišný důraz na pamětné uchování může vést k tomu, že i silnější žáci (ve smyslu klasifikace) se uchylují jen k pouhému zapamatování. Naopak porozumění, pokud není cíleně rozvíjeno, chybí.

Přílišný důraz na nácvik procedur

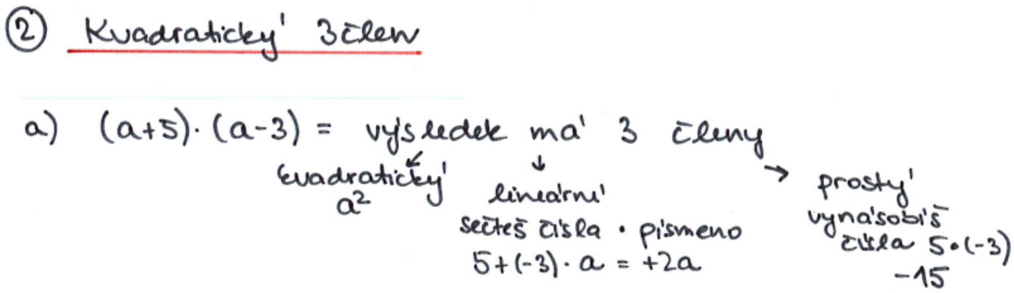
Přiložené materiály, výklad v nichž je silně instruktivního charakteru (viz s. 20), také naznačují, že přílišný důraz je ve výuce kladen i na nácvik procedur. Množství poznatků, které má Kristýna zafixované jako pouhé mechanické postupy, tak nemůže být překvapením.[46] Příkladem může být citace I, ve které učitel

[45] Příkladem jedné takové „poučky“ je definice Thaletovy kružnice, jak vyšlo najevo při rozhovoru na toto téma.

[46] Čistě mechanicky nahlíží Kristýna např. na řešení lineárních rovnic či výpočet obsahu trojúhelníku pomocí vzorce uvedeného v tabulkách.

žáky nejenom nabádá, aby při výpočtech pracovali přesně podle daného vzoru (tj. „se všemi rozpisy“), ale také na ně přenáší své přesvědčení, že tento způsob je jediný, jakým je možné se látku naučit. Skoro by se tak zdálo, jako by učitel své žáky cíleně vedl do třetího stádia formalismu (viz s. 19), kterému bychom se měli naopak vyhýbat.

Jako další ukázka je níže vyobrazen způsob, kterým je ve výukových materiálech vyložena látka o roznásobení dvou závorek na tzv. „kvadratický trojčlen“ (viz obr. 2.17). Za povšimnutí stojí zejména ryze procedurální charakter tohoto výkladu (ve smyslu „sečteš čísla krát písmeno“).[47]



Obrázek 2.17: Procedurální charakter výkladu

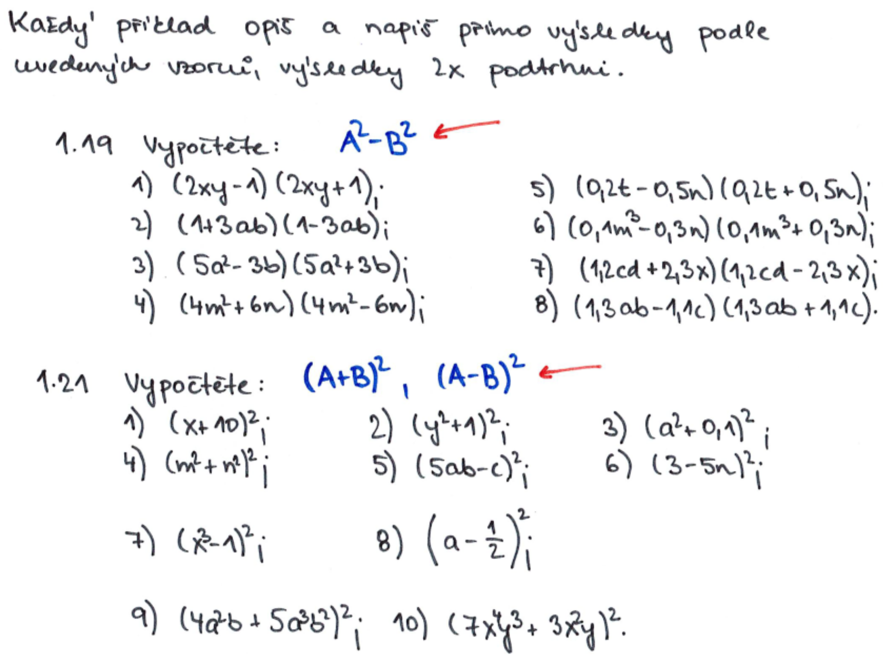
V oddílu 2.2 bylo také opakovaně zmiňováno, že Kristýna má často problém s rozeznáním, ve které situaci je možné aplikovat který poznatek. Při pohledu na její výukové materiály už tento fakt nemusí být natolik překvapivý. Zdá se totiž, že transmisivní edukační styl je v některých případech doveden do extrému. Pro ilustraci je přiložen obr. 2.18, který obsahuje zadání procvičovací úlohy na aplikaci vzorců.

Jak naznačují šipky na obrázku, i tato procvičovací úloha je redukována na pouhé procedurální provádění algoritmů, jelikož je žákům přímo předložen vzorec, který je k výpočtu potřeba – a to aniž by to v tomto případě bylo nutné. Podobně zadaná úloha pak může jen stěží přispívat k rozvoji intelektuální autonomie žáka.

Zanedbání propedeutické přípravy

Vzhledem k absenci porozumění, kterou Kristýna prokazuje při práci ve čtvercové síti, je pravděpodobné, že v jejím případě došlo k zanedbání propedeutické přípravy, minimálně co se týče tématu míry v geometrii. Výsledkem je

[47]V tomto případě lze navíc konstatovat, že formální zapsání procedury u výpočtu lineárního členu je chybné, jelikož nerespektuje pořadí, ve kterém v matematice provádíme operace.



Každý příklad opiš a napiš přímo výsledky podle uvedených vzorců, výsledky 2x podtrhni.

1.19 Vypočtěte: A^2-B^2

1) $(2xy-1)(2xy+1)$; 5) $(0{,}2t-0{,}5n)(0{,}2t+0{,}5n)$;
2) $(1+3ab)(1-3ab)$; 6) $(0{,}1m^3-0{,}3n)(0{,}1m^3+0{,}3n)$;
3) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$; 7) $(1{,}2cd+2{,}3x)(1{,}2cd-2{,}3x)$;
4) $(4m^2+6n)(4m^2-6n)$; 8) $(1{,}3ab-1{,}1c)(1{,}3ab+1{,}1c)$.

1.21 Vypočtěte: $(A+B)^2$, $(A-B)^2$

1) $(x+10)^2$; 2) $(y^2+1)^2$; 3) $(a^2+0{,}1)^2$;
4) $(m^2+n^2)^2$; 5) $(5ab-c)^2$; 6) $(3-5n)^2$;

7) $(x^3-1)^2$; 8) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$;

9) $(4a^2b+5a^3b^2)^2$; 10) $(7x^4y^3+3x^2y)^2$.

Obrázek 2.18: Zadání úlohy k procvičování s přiloženým vzorcem

tak chybějící konceptuální porozumění a zároveň přílišná orientace na výpočtovou stránku míry. K tomuto zanedbání však muselo dojít již na prvním stupni základní školy. O způsobu, jakým byla vyučována matematika na Kristýnině základní škole, ale nemám žádné informace – ani Kristýna si už totiž nemůže dostatečně vzpomenout.

Kristýniny osobnostní charakteristiky

Závěrem také nelze vyloučit, že do jisté míry mohou být Kristýniny formální matematické poznatky zapříčiněny jejími osobnostními charakteristikami, jako jsou například nezájem o předmět nebo nedostatečné nadání. Přinejmenším nezájem o předmět však lze jistě vyloučit – jak již bylo zmiňováno, Kristýnu matematika baví a v budoucnu by ji chtěla vyučovat.[48] Co se týče jejího nadání, troufla bych si na základě naší společné práce odhadnout, že určité předpoklady má, a tedy že hlubšího porozumění je schopna. V každém případě je třeba jí tuto možnost nabídnout.

[48]Otázkou však zůstává, jakou oblibu by u Kristýny matematika měla v momentě, kdyby byla vyučována podnětnějším způsobem, než na jaký je zvyklá – vzpomeňme si na její dominantní motivační potřebu, kterou je potřeba vyhnout se neúspěchu.

2.4.2 Didaktické důsledky

Didaktické důsledky výsledků výzkumu budou diskutovány ve dvou rovinách. První rovinou jsou obecné didaktické implikace fenoménu formálních poznatků; druhou pak důsledky, které se váží k přístupu k žákům s výbornými výsledky.

Obecné didaktické důsledky

Pokud jde o obecné didaktické důsledky, které studium formalismů přináší, je zejména důležité zdůraznit nezastupitelnou roli mechanismu poznávacího procesu, a to nejenom při diagnostice formalismů, nýbrž také při jejich reedukaci a prevenci. Je tedy žádoucí, aby byli vyučující v oblasti matematiky s tímto mechanismem obeznámeni a koncipovali svou výuku v souladu s jeho zákonitostmi. Při výuce tak například není možné přeskakovat jednotlivé fáze poznávacího procesu, zejména pak fáze motivace, izolovaného a generického modelu.

Při prevenci vzniku formalismů se jako nejdůležitější jeví potřeba opustit představu, že nejefektivnějším edukačním stylem je styl transmisivní, při kterém jsou žákům prezentovány hotové informace. Při takovém stylu výuky totiž není přihlíženo k žákovské potřebě konstrukce vlastního poznatku, která je klíčová pro kvalitu budoucího poznání. Výsledkem tak mohou často být jen pamětně uchované informace, u kterých však chybí porozumění. Jako vhodný edukační postup je v tomto směru doporučena práce na vhodné sérii gradovaných návodných úloh, která je vytvořena s přihlédnutím k zásadám konstruktivismu. Naopak nelze setrvávat v mechanickém nácviku procedur a učení vzorců na úkor porozumění.

V momentě, kdy se formalismům nepodaří předejít a dá se předpokládat, že matematická kognice žáků je již určitými formálními poznatky zatížena, je nutné tyto poznatky pečlivě diagnostikovat. Pro účely diagnostikování formalismů ale není možné předkládat žákům při testování výhradně typové úlohy nízké kognitivní náročnosti, případně redukovat ústní zkoušení na pouhé pamětní cvičení, nýbrž je nutné prověřovat znalosti žáků při řešení nestandardních aplikačních úloh. U takových úloh je totiž šance, že bude formalismus odhalen, výrazně vyšší než u úloh standardních. Dále je nutné mít na paměti, že zdaleka ne všechny formální poznatky bude u žáků možné identifikovat na základě jejich písemného projevu.

Konečně, jsou-li formalismy identifikovány, je nutné přistoupit k jejich reedukaci – využitelnost těchto nedostatečně kvalitních formálních poznatků je totiž značně omezená, a takové poznatky jsou tedy nežádoucí. Cílem reedukace by proto mělo být poznatky zživotnit.

Důsledky výzkumu pro práci s žáky s výbornými výsledky

Vzhledem k zaměření výzkumu jsou prezentovaná zjištění zajímavá zejména tehdy, připomeneme-li si, že Kristýna byla v úvodu praktické části této práce charakterizována jako jedna z premiantek třídy – a to dokonce na výběrové škole. Jelikož se s nemocí formalismu obvykle potýkají spíše průměrní až slabší žáci, u žákyně s výbornými výsledky je množství identifikovaných formalismů překvapením. Přestože výsledky výzkumu samozřejmě není možné bez výjimky generalizovat na celou populaci „jedničkářů“, je pravděpodobné, že Kristýna není ojedinělým případem a že matematické uvažování je zatížené formalismy i u dalších žáků, kteří se v matematice na první pohled jeví jako silní.[49]

Je třeba mít neustále na paměti, že jedním z hlavních cílů vyučování matematice je dosažení porozumění. Není však možné automaticky předpokládat, že u silnějších žáků k tomuto porozumění dochází samovolně. Přestože by jim jejich mentální kapacita kvalitní vhled umožňovala, může se stát, že při nevhodném způsobu výuky se i takoví žáci spokojí pouze s pamětným osvojením definic a procedur a jejich aplikací ve standardních úlohách. Výuka založená na vlastní zkušenosti, jejíž jádro je tvořeno prací s izolovanými modely, je proto žádoucí i u těchto žáků. To, že někteří žáci postupují při konstrukci poznatků rychlejším tempem, totiž ještě nutně neznamená, že je v jejich případě možné některé fáze poznávacího procesu přeskočit. Je proto třeba zbavit se mylného dojmu, že matematické poznání žáka, který zvládá dílčí školní kontroly v podobě testů a zkoušení se známkou „výborně“, je automaticky dostatečně kvalitní.

2.4.3 Omezení výzkumu

Největší omezení vyplývá bezpochyby z povahy zvolené metodologie, tedy případové studie. Zatímco volba této metodologie umožnila provést výzkum formálních poznatků poměrně komplexně, je nutné připomenout, že zkoumanou osobou byla pouze jedna žákyně. Výsledky proto není možné zobecňovat na širší populaci; není totiž jasné, jak by při diagnostických rozhovorech nad pracovními listy reagovali další „jedničkáři“.

[49] Jak již bylo zmiňováno v oddílu 1.3, formalismy u žáků s výbornou známkou z matematiky byly identitikovány také ve studii (Vondrová & Rendl, 2015, s. 18).

Dále je nutné zdůraznit, že hloubkové rozhovory byly vedeny na omezený počet témat, a identifikované formální poznatky proto netvoří kompletní portfolio.

V neposlední řadě pak také nebylo možné jednoznačně vymezit příčiny vzniku formálních poznatků, a to zejména z důvodu chybějících informací o způsobu, jakým byla Kristýna (ideálně již od počátků její školní docházky) v matematice vyučována. K uvedených příčinám, které bylo možné určit z dostupných informací, je tak nutno přistupovat s vědomím, že se jedná pouze o příčiny možné.

Závěr

Tato diplomová práce byla věnována diagnostice formálního poznání v matematice, které bylo diskutováno v kontextu teorie generického modelu. Stěžejní částí práce je její druhá kapitola, v níž byl popsán provedený empirický výzkum.

Zvolenou výzkumnou strategií byla případová studie, díky které bylo možné zachytit složitost konkrétního případu a věnovat se problematice v dostatečném detailu. Zkoumaným subjektem byla čtrnáctiletá gymnazistka s kladným vztahem k matematice, ze kterého také plynou její výborné výsledky v tomto předmětu. Cíl, který byl v této diplomové práci vytyčen, spočíval v diagnostice formalismů v její poznatkové struktuře a také v diskusi možných příčin jejich vzniku. Lze konstatovat, že cíl se podařilo naplnit.

Výzkum probíhal v období mezi dubnem až zářím roku 2020. V jeho úvodu byly nejprve vytipovány konkrétní oblasti matematiky 2. stupně základní školy, poznatky v nichž by u dané žákyně mohly být zatíženy formalismem. Jako inspirace pro výběr témat sloužily výsledky výzkumu tzv. kritických míst v matematice, tedy oblastí, ve kterých žáci často a opakovaně selhávají. Pro každou z těchto oblastí byl poté vytvořen pracovní list s vhodně zvolenými úlohami, které byly nástrojem pro diagnostiku formalismů. Pracovní listy tak mimo jiné obsahovaly např. úlohy na rekonstrukci zapomenutého vzorce, nalezení chyby v úvaze, rozhodnutí o platnosti hypotézy či jinak nestandardní úlohy. Na těchto úlohách žákyně následně pracovala při polostrukturovaných diagnostických rozhovorech, z nichž byly se souhlasem pořizovány videozáznamy. Tyto videozáznamy byly průběžně analyzovány a na základě této analýzy byly nakonec do práce začleněny čtyři hloubkové rozhovory z oblastí geometrie a algebry. Konkrétně se jednalo o následující témata: obsah trojúhelníku, lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů, Thaletova kružnice a Pythagorova věta.

Ve všech zmíněných matematických oblastech byla u žákyně identifikována řada formálních poznatků, které byly většinou skryty za různými pamětně uchovanými poučkami či dobře nacvičenými procedurami. Při pečlivé diagnostice se však ukázalo, že tyto poučky a procedury jsou aplikovány s absencí porozumění.

Důležité z hlediska diagnostiky formálních poznatků se ukázaly zejména oba identifikátory izolovanosti – zjištěné formalismy totiž často nebyly propojeny ani na životní zkušenosti, ani na jiné poznatky. Závažným problémem se ukázalo být zejména uvažování v prototypech (napříč matematickými oblastmi) či setrvávání v prostoru reprezentací (v geometrii). Rovněž byly diagnostikovány nedostatky v porozumění písmenům v matematice či pochopení souvislostí mezi algebrou a geometrií.

Možné příčiny vzniku uvedených formálních poznatků byly určeny na základě analýzy výukových materiálů, které byly žákyni zaslány k samostudiu, a nestrukturovaných rozhovorů, které s ní byly vedeny o způsobu, jakým je v její třídě matematika vyučována. Jako nejpravděpodobnější příčiny se přitom jeví zejména transmisivní výukový styl, který je založen na předkládání hotových znalostí, společně s předčasným „vyzbrojením“ žáků silnými nástroji, ztrátou motivace a přílišným důrazem na pamětné uchování a nácvik procedur.

Dále byly v práci diskutovány didaktické důsledky výsledků výzkumu. V rovině obecných didaktických důsledků je doporučeno zejména koncipovat výuku v souladu se zákonitostmi, kterými se řídí pojmotvorný proces v matematice, tedy poskytnout žákům prostor pro vlastní konstrukci kvalitních poznatků, při které nejsou přeskakovány žádné z etap teorie generického modelu. Rovněž je nutné nepodléhat přesvědčení, že nejefektivnějším edukačním stylem je styl transmisivní; zároveň je ale nutné podotknout, že i konstruktivistické pojetí vyučování má svá přirozená úskalí, kterých si učitelé musí být vědomi. Pokud jde o didaktické důsledky výzkumu, které jsou specifické pro práci s žáky s výborným prospěchem, je třeba zejména zdůraznit, že i u těchto žáků je nutné testovat porozumění, neboť nelze předpokládat, že k němu dochází samovolně.

Výsledky této práce a především nemožnost jejich zobecnění na širší populaci jsou pozvánkou po další badatele v oboru didaktiky matematiky, kteří zvažují, zda se ve svém výzkumu věnovat problematice formálního poznání. Další výzkumné snahy, v ideálním případě zaměřené na žáky s výborným prospěchem, kterým do této doby nebylo v tomto směru věnováno příliš pozornosti, by tak snad mohly pomoci objasnit, jak moc je závažná diagnóza formalismu mezi těmito žáky rozšířená. Doufejme, že nepříliš, ale buďme jako učitelé připraveni této výzvě čelit, pokud je pravdou opak.

Literatura

Creswell, J. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (s. 95–123). Dorfrecht: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics*, 25(2), 116–140.

Hejný, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2019). *Rodiče vítáni: Precizní příběhy profesora Milana Hejného #1*. H-mat.
https://www.h-mat.cz/media/precizni-pribehy-profesora-milana-hejneho-1

Hejný, V., & Hejný, M. (1978). Prečo je matematika taká ťažká?. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 23(2), 85–93.

Hejný, M., Bálint, L., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Frantiková, L., Gábor, O., Hrdina, L., Repáš, V., & Vantuch, J. (1988). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN.

Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.). (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování* (3. vyd.). Praha: Portál.

Hendl, J. (2005). *Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace.* Praha: Portál.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195–222. http://dx.doi.org/10.2307/749673

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students‘ construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (s. 159—179). New York: Springer.

Mareš, J. (2015). Tvorba případových studií pro výzkumné účely. *Pedagogika*, 65(2), 113–142.

MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani

Pavelková, I., & Škaloudová, A. (2008). Školní výkonové potřeby. *Psychologické dny: Já & my a oni.*

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2003). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In M. Rendl & N. Vondrová (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Sedláček, M. (2007). Případová studie. In R. Švaříček & K. Šeďová (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách* (s. 96–112). Praha: Portál.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20—26.

Stehlíková, N., & Cachová, J. (2006). Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. *Praha: JČMF.*

Švaříček, R., Šeďová, K., Janík, T., Kaščák, O., Miková, M., Nedbálková, K., Novotný, P., Sedláček, M., & Zounek, J. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Praha: Portál.

Švaříček, R. (2007). Hloubkový rozhovor. In R. Švaříček & K. Šeďová (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách* (s. 159–184). Praha: Portál.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Vondrová, N. (2004). Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 11–21). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N. (2015). Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles. In N. Vondrová & M. Rendl (Eds.), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 253–318). Praha: Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vondrová N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl & N. Vondrová (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N., & Havlíčková, R. (2015). Konstrukční úlohy v řešeních žáků napříč ročníky základní školy. In N. Vondrová & M. Rendl (Eds.), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 133–179). Praha: Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). Vybraná kritická místa matematiky – zkoumání žákovských obtíží. In N. Vondrová & M. Rendl (Eds.), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 11–25). Praha: Nakladatelství Karolinum.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

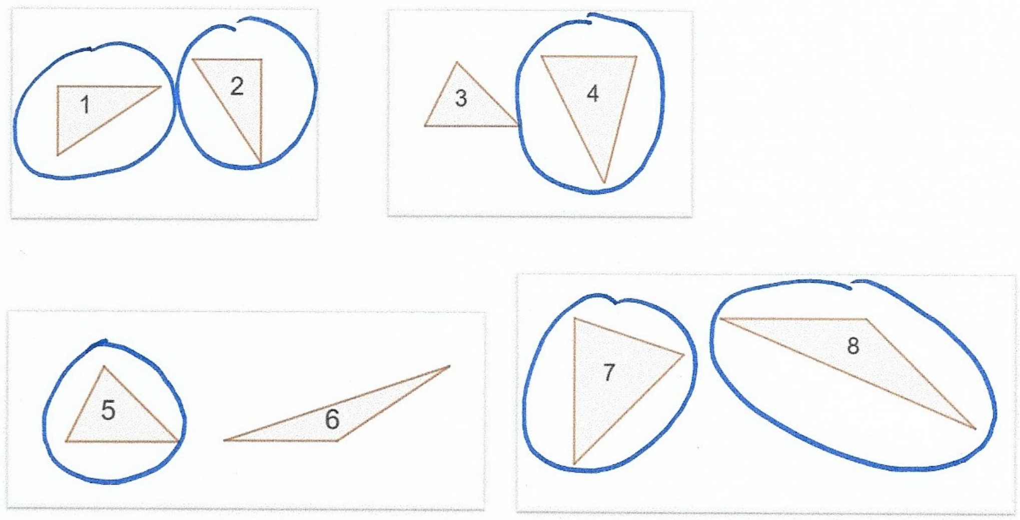
Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In N. Vondrová & M. Rendl (Eds.), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 319–399). Praha: Nakladatelství Karolinum.

Seznam příloh

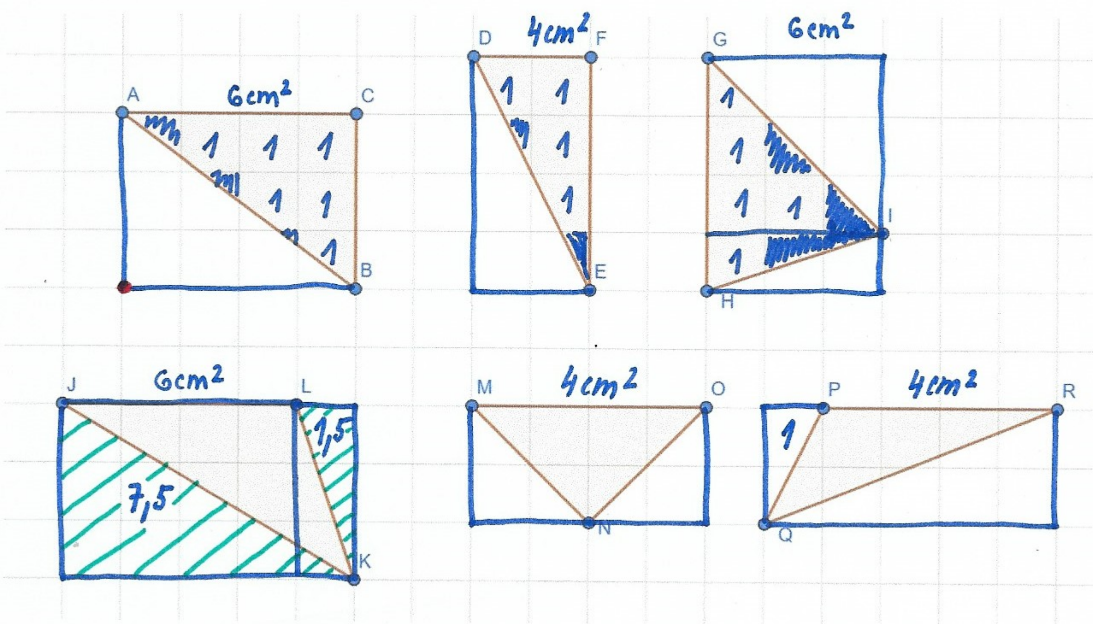
Příloha A

Pracovní list: Obsah trojúhelníku

1. ZAKROUŽKUJ, KTERÝ Z DVOJICE TROJÚHELNÍKŮ MÁ PODLE TEBE VĚTŠÍ OBSAH.

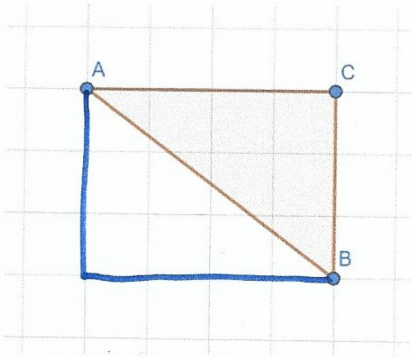


2. POMOCÍ ČTVERCOVÉ MŘÍŽKY URČI OBSAHY NÁSLEDUJÍCÍCH TROJÚHELNÍKŮ. UVAŽUJ, ŽE 1 ČTVEREČEK MÁ OBSAH 1 CM².



TROJÚHELNÍK	OBSAH (cm^2)
ABC	6cm²
DEF	4 cm²
GHI	6 cm²
JKL	6 cm²
MNO	4 cm²
PQR	4 cm²

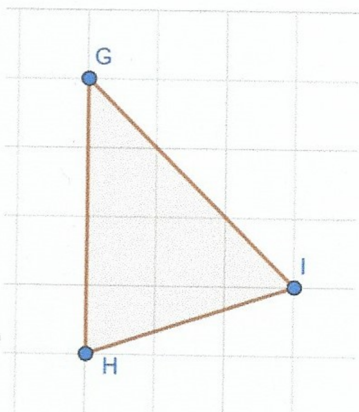
a) Jak jsi spočítal(a) obsah trojúhelníku ABC? Demonstruj pomocí modelů trojúhelníků, zakresli do čtvercové sítě a popiš:



b) Obsah kterého dalšího trojúhelníku/kterých další trojúhelníků lze určit stejným způsobem? Proč?

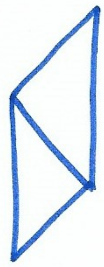
DEF

c) Jakým způsobem jsi určoval(a) obsah zbývajících trojúhelníků? Názorně ukaž a popiš:



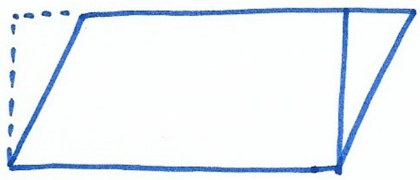
d) Pokud by ses pokoušel(a) určit obsahy těchto zbývajících trojúhelníků stejným způsobem jako v případě a), obsah kterého rovinného útvaru bys potřeboval(a) umět spočítat? Vyzkoušej si pomocí modelů trojúhelníků a zakresli:

Rovinný útvar, který vznikne: kosodélník

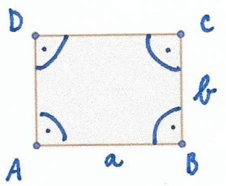


e) Jak by šlo obsah vzniklého rovinného obrazce vypočítat? Proč?

(Nápověda: Možná ti pomůže vzít si k ruce nůžky.)

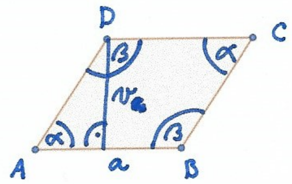


f) **Pojmenuj následující rovinné obrazce, popiš je, vyznač rozměry, které potřebuješ k vypočítání jejich obsahu, a napiš vzorce pro tento výpočet:**



Jedná se o obdélník.

S = $a \cdot b$

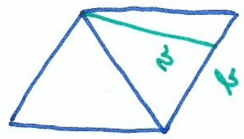


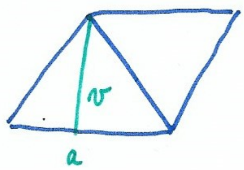
Jedná se o kosodélník.

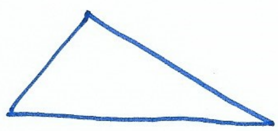
S = $a \cdot v$

3. **NA ZÁKLADĚ PŘEDCHOZÍHO POZOROVÁNÍ SE POKUS ZOBECNIT, NA JAKÝCH ROZMĚRECH BUDE ZÁVISET OBSAH TROJÚHELNÍKU:**

1. jakoukoli stranu
2. k ní příslušnou výšku







4. **GEOGEBRA:**

(S MŘÍŽKOU)

a) **Sestroj libovolný trojúhelník ABC a spočítej jeho obsah.**

S = $9\,cm^2$

b) **Ověř si svůj výsledek pomocí funkce Obsah. Počítal(a) jsi správně?**

S = $9\,cm^2$

c) **Nyní už víš, na jakých dvou délkách v trojúhelníku jeho obsah závisí. Sestroj dva další trojúhelníky, které mají s trojúhelníkem ABC společnou stranu AB a mají stejný obsah jako trojúhelník ABC. Ověř pomocí funkce Obsah.**

d) **Urči, jakou množinu bodů tvoří třetí vrcholy všech takových trojúhelníků, které je možné sestrojit ve cvičení c). Kam je nutné dané vrcholy umístit?**

Množina bodů: rovnoběžka se stranou AB ve vzdálenosti výšky

(BEZ MŘÍŽKY)

e) **Začni teď v Geogebře od znova. Sestroj úsečku AB, která bude tvořit jednu stranu trojúhelníku, a v libovolné vzdálenosti sestroj rovnoběžku s touto úsečkou. Bod, který jsi pro sestrojení rovnoběžky vytvořil(a), si skryj.**

f) **Pomocí funkce Bod na objektu umísti na danou rovnoběžku bod. Přejmenuj tento bod na bod C. Zkus s ním posunovat a vysvětli, jak se takový Bod na objektu chová.**

Bod na objektu: pohybuje se jen na rovnoběžce

g) **Sestroj trojúhelník ABC a spočítej v Geogebře jeho obsah.**

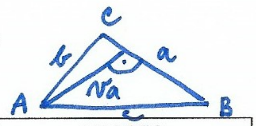
S = $46{,}56\,cm^2$

h) **Jak se bude měnit obsah trojúhelníku ABC, když budeš pohybovat vrcholem C?**

nebude

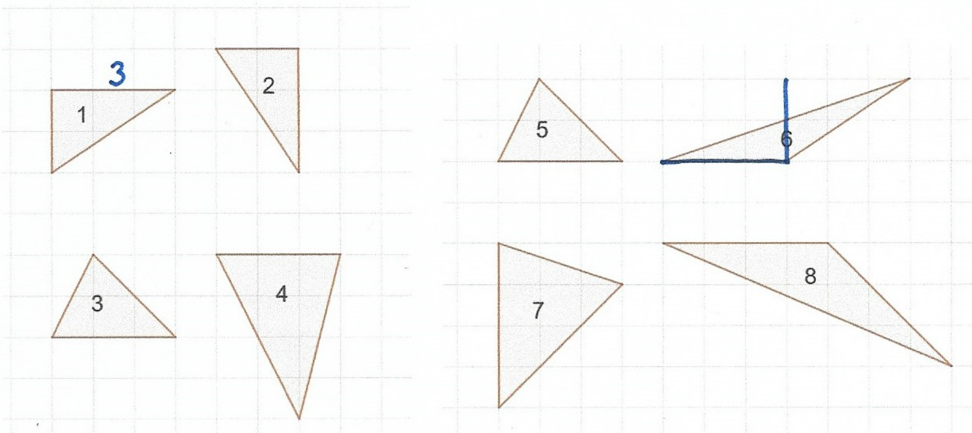
Svůj výsledek experimentálně ověř.

5. PRO TROJÚHELNÍKY ZE CVIČENÍ 2. VYPLŇ NÁSLEDUJÍCÍ TABULKU:



TROJÚHELNÍK	OBSAH (cm^2)	STRANA (cm)	VÝŠKA (cm)	VZOREC
ABC	6cm²	4	3	$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$
DEF	4	2	4	
GHI	6	4	3	$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$
JKL	6	4	3	
MNO	4	4	2	$S = \frac{b \cdot v_b}{2}$
PQR	4	4	2	

6. VYPOČÍTEJ OBSAHY TROJÚHELNÍKŮ, KTERÉ JSI MĚL(A) ZA ÚKOL V PRVNÍM CVIČENÍ POROVNAT. (POKUD SI NECHCEŠ PŘÍLIŠ KOMPLIKOVAT PRÁCI, MŮŽEŠ K VÝPOČTU VYUŽÍT VŽDY TU STRANU, KTERÁ MÁ CELOČÍSELNOU DÉLKU.)



$S_1 =$ 3

$S_2 =$ 3

$S_3 =$ 3

$S_4 =$ 6

$S_5 =$ 3

$S_6 =$ 3

$S_7 =$ 6

$S_8 =$ 6

7. ZAMYSLI SE: JE MOŽNÉ VYUŽÍT K VÝPOČTU OBSAHU TROJÚHELNÍKU JAKOUKOLI Z JEHO STRAN? PROČ ANO/PROČ NE? UKAŽ A VYSVĚTLI POMOCÍ MODELŮ.

Příloha B

Pracovní list: Lineární rovnice a úpravy algebraických výrazů

PRACUJ S POMOCÍ ALGEBRAICKÝCH DLAŽDIC.

1. **MODELUJ NÁSLEDUJÍCÍ ROVNICE A VYŘEŠ JE. KOMENTUJ TVŮJ POSTUP.**

   a) $3x - 1 = 5$
   b) $2x + 2 = x - 6$

2. **NALEZNI CHYBU V ÚVAZE:**

   a) Pro každé reálné číslo x platí: $3(x+2) = 3x + 2$.

3. **ZJEDNODUŠ NÁSLEDUJÍCÍ VÝRAZY:**

   a) $(2x^2 + 2x + 3) + (x^2 - x - 2)$
   b) $(2x^2 - 3x - 1) - (-x^2 - 2x - 3)$

4. **UPRAV NÁSLEDUJÍCÍ VÝRAZY:**

   a) $(x+1) \cdot (x+2)$
   b) $(x+3) \cdot (x-2)$
   c) $(x-2) \cdot (x-1)$

5. **ROZHODNI, ZDA JE NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ PRAVDIVÉ:**

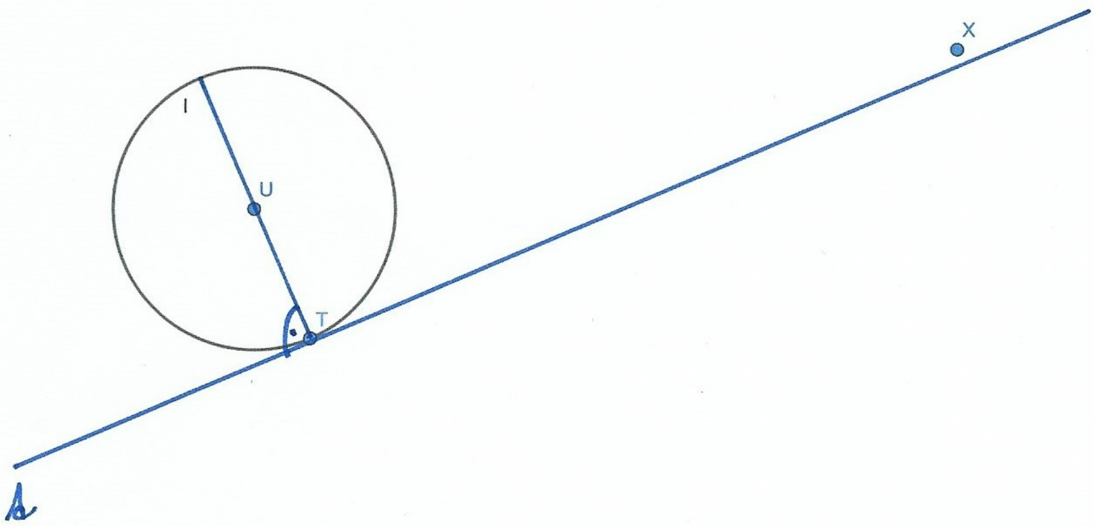
   a) Pro každé reálné číslo x platí: $(x+1)^2 = x^2 + 1$.

Příloha C

Pracovní list: Thaletova kružnice

1. **TEČNA KE KRUŽNICI I.**

   a) **Na kružnici *l* je vyznačen bod *T*. Veď tímto bodem tečnu ke kružnici *l*. Kolik takových tečen existuje?**



   b) **Zakroužkuj: Bod *X* leží nad/pod danou tečnou. Ověř v Geogebře.**

   c) **Doplň:**

   Tečna kružnice je přímka **(o jaký geometrický útvar se jedná?), která má s danou kružnicí** 1 společný bod **(kolik společných bodů?).**

   kružnice

   Pro tečnu platí, že je kolmá na průměr, který prochází středem k.
   a ~~daným~~ bodem, na kružnici.

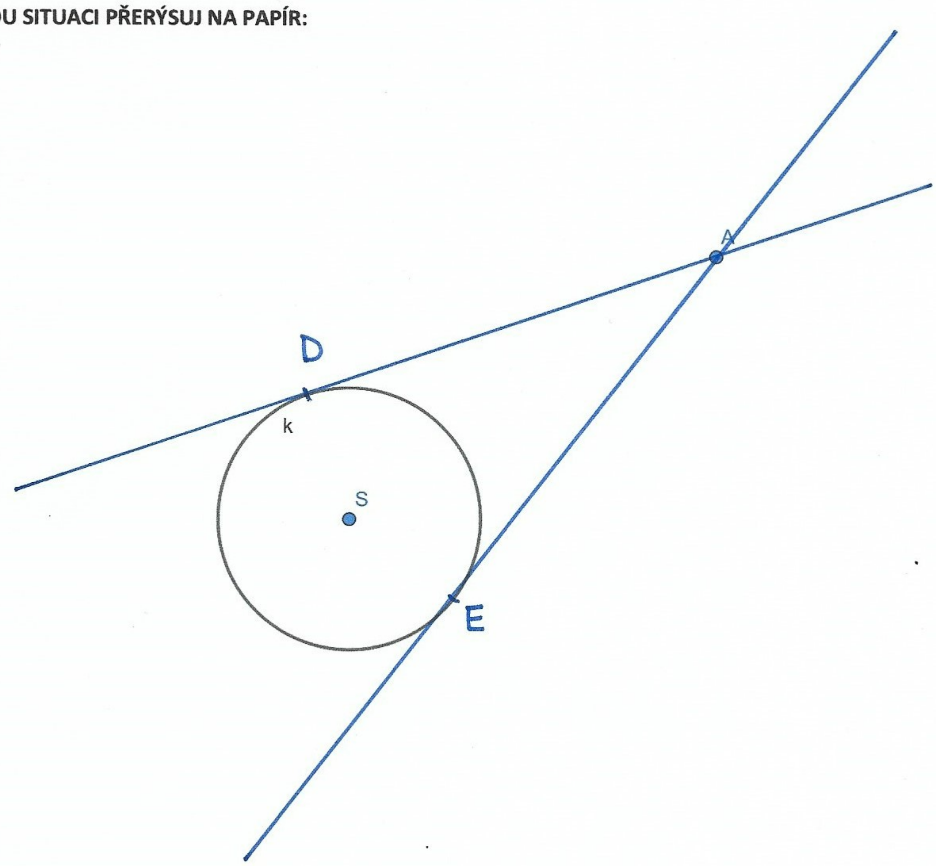
   dotyku

2. **TEČNA KE KRUŽNICI II.**

a) **Máš zadanou kružnici *k* a bod *A*, který leží vně kružnice. Pomocí programu Geogebra sestroj tečny z bodu *A* ke kružnici *k*. Kolik takových tečen existuje?**

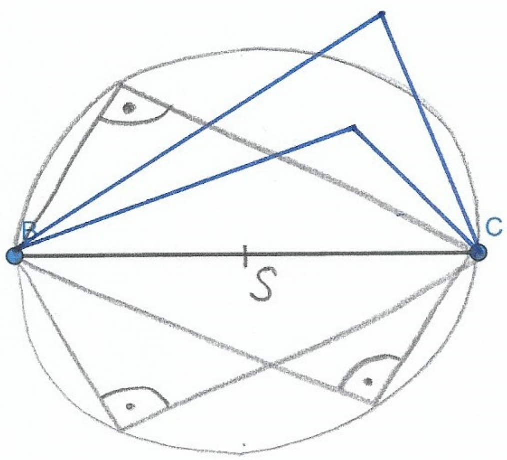
b) **Sestroj v Geogebře také body dotyku tečen a kružnice.**

3. **CELOU SITUACI PŘERÝSUJ NA PAPÍR:**



4. MÁŠ ZADANOU ÚSEČKU BC.

a) **Načrtni alespoň 5 takových trojúhelníků (BCD_1, ..., BCD_5), pro které je úsečka BC přeponou.**



b) **Pokud bys narýsovala všechny takové trojúhelníky, jakou množinu bodů by tvořily vrcholy D? Vyznač a popiš.**

kružnici

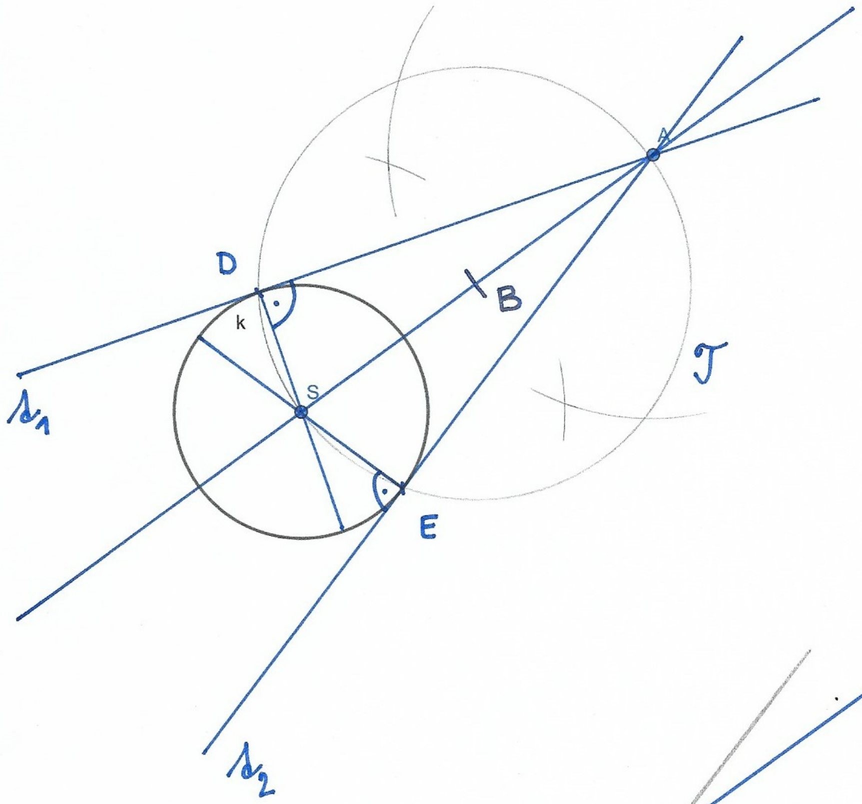
c) **Jak tuto množinu bodů nazýváme?**

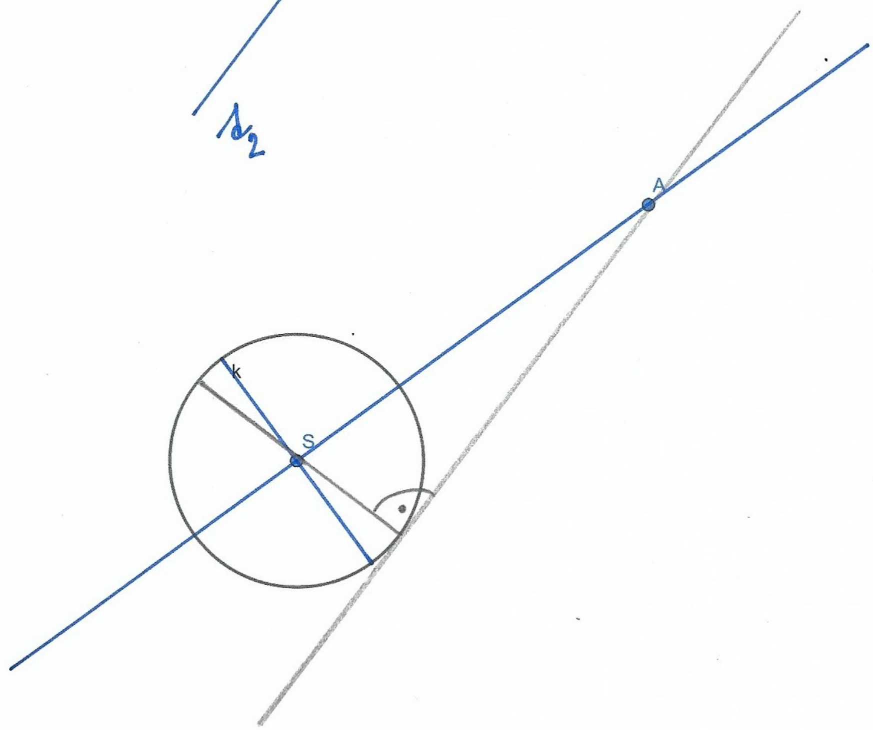
Thaletova kružnice

d) **(A znáš její definici ze školy?)**

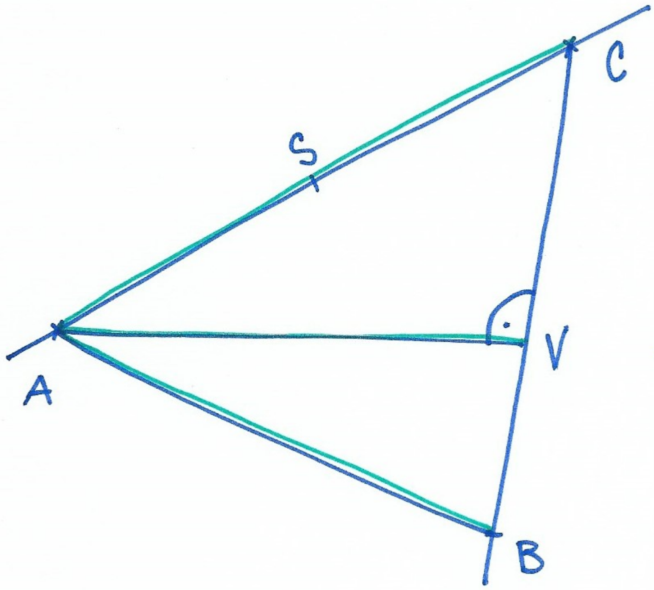
Thaletova kružnice je množina vrcholů pravých úhlů sestrojených nad nebo pod danou úsečkou

5. VRAŤ SE NYNÍ K ÚLOZE S TEČNAMI A VYŘEŠ JI.





6. VYMYSLI VLASTNÍ ÚLOHU, K JEJÍMUŽ VYŘEŠENÍ JE POTŘEBA POUŽÍT THALETOVU KRUŽNICI.

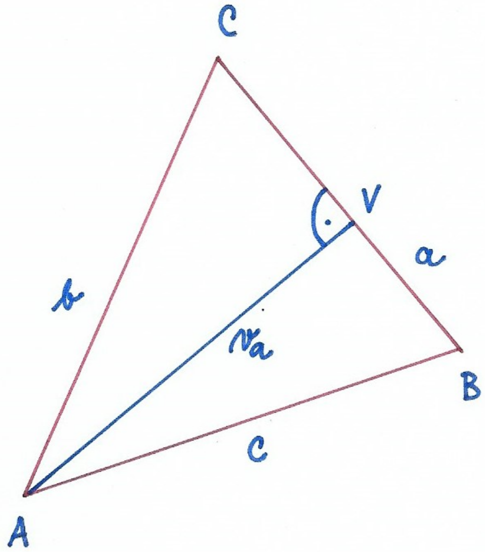


~~známe~~

úsečka $|AC| = 10cm$

$|AV| = v_a = 8cm$

$|AB| = 9cm$

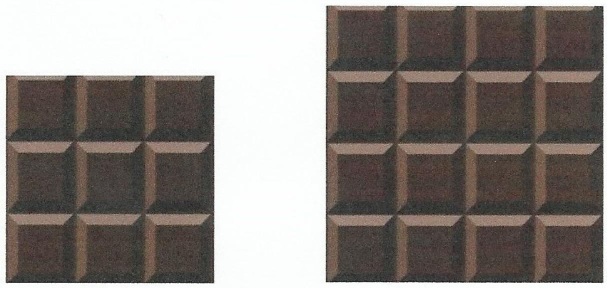


Příloha D

Pracovní list: Pythagorova věta

1. **PŘEDSTAV SI NÁSLEDUJÍCÍ SITUACI:**

Tvoje dvě starší sestry dostaly od babičky každá jednu čokoládu z obrázku pod tímto textem – jedna tu menší a druhá tu větší. Na tebe už bohužel žádná čokoláda nezbyla – možná proto, že nejvíc zlobíš, a ani si tedy žádnou nezasloužíš. Protože je ale babička hodná, tak s tebou udělala tuto domluvu – až k ní přijedeš příště na návštěvu, dostaneš čokoládu, která bude tak velká, jako jsou čokolády tvých starších sester dohromady, aby ti to nebylo líto.



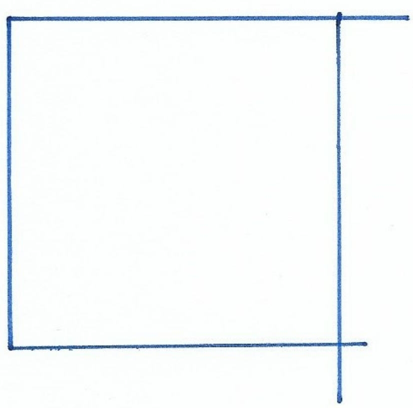
Tvým úkolem je teď poradit babičce, jak velkou čokoládu pro tebe musí sehnat. Při své práci však musíš vzít v potaz následující dvě omezení:

1. Tvá čokoláda musí mít také čtvercový tvar, stejně jako čokolády tvých sester.

2. Určitě budeš potřebovat použít rýsovací pomůcky, totéž však neplatí pro kalkulačku. Bez té se budeš muset obejít.

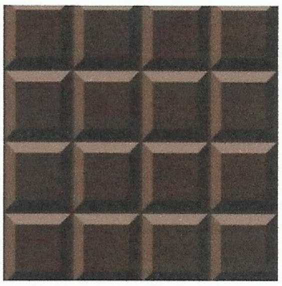
Narýsuj tedy, jak velká tvá čtvercová čokoláda bude. Není třeba ji rozdělovat na jednotlivé dílky, bude nám stačit její obrys.

TVOJE ČOKOLÁDA:

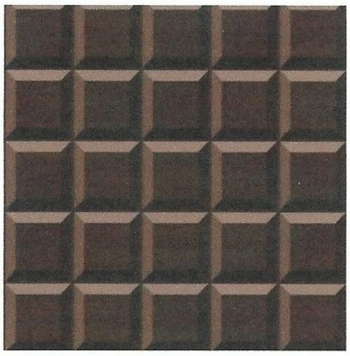


2. **STEJNÝ ÚKOL BUDEŠ NYNÍ PLNIT JEŠTĚ JEDNOU, ALE TENTOKRÁT ČOKOLÁDY TVÝCH SESTER VYPADAJÍ TAKTO:**

16



25



$\sqrt{41}$

a^2+b^2

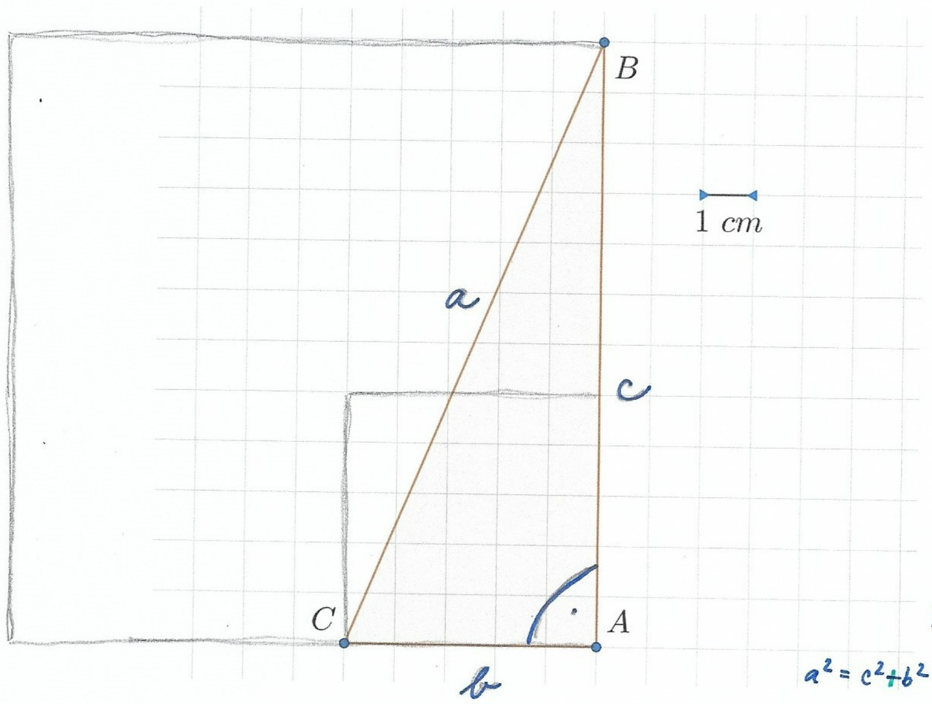
$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

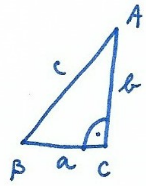
$\cancel{(a+b)\cdot(a+b)}$

Opět narýsuj obrys čokolády tvojí.

TVOJE ČOKOLÁDA:

3. **ZKUSÍME JINOU ÚLOHU. TVÝM ÚKOLEM JE TEĎ <u>BEZ MĚŘENÍ POMOCÍ PRAVÍTKA</u> URČIT DÉLKY VŠECH STRAN V TOMTO TROJÚHELNÍKU:**





$a^2 = c^2 + b^2 \qquad c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = 12^2 + 5^2 =$

$= 144 + 25$

$\cancel{a = \sqrt{119}} \qquad a = \sqrt{169}$

$a = 13$

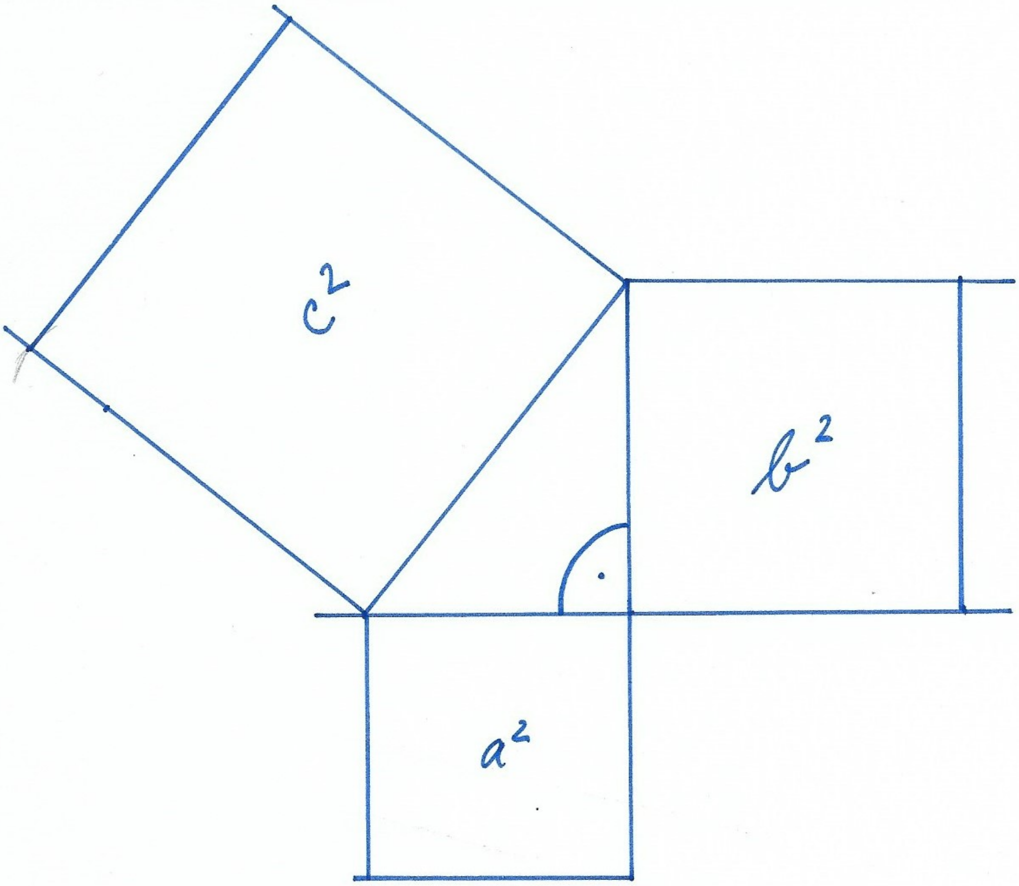
STRANA	DÉLKA (cm)
AB	12cm
BC	13cm
AC	5cm

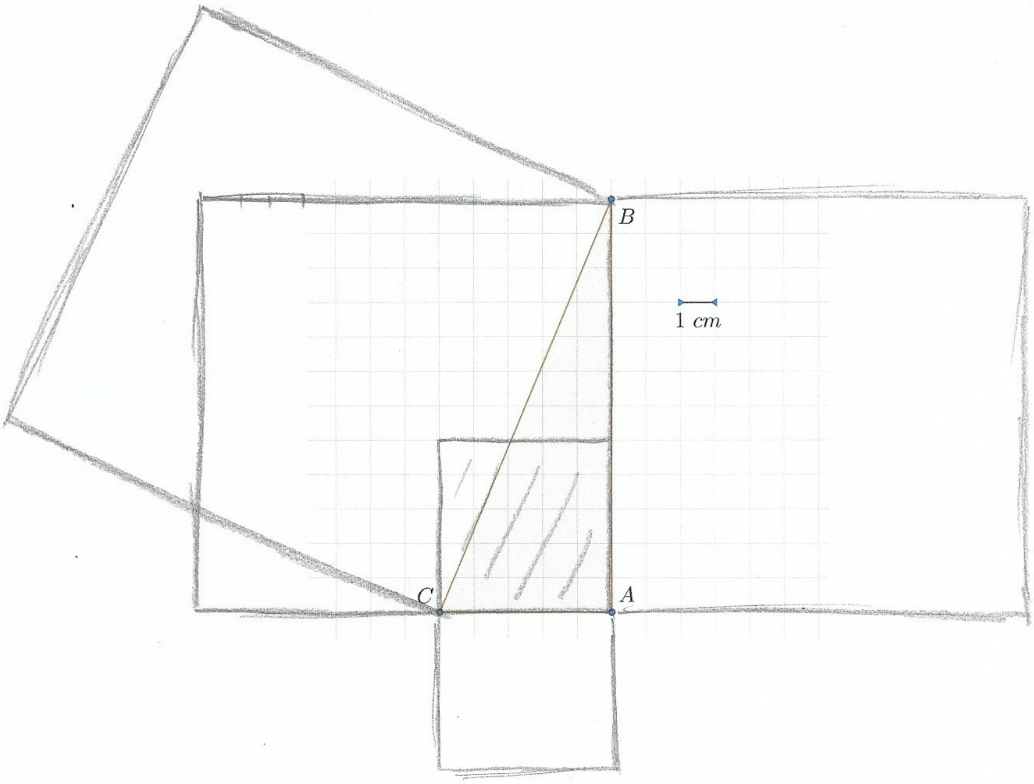
Jakou matematickou větu jsi k určení délek stran použila? Pojmenuj ji, napiš její znění a svými slovy vysvětli, co tato věta vlastně říká.

Pythagorova věta

$c^2 = a^2 + b^2$

4. VRAŤ SE K ÚLOZE S ČOKOLÁDOU – TEĎ UŽ JI JISTĚ ZVLÁDNEŠ VYŘEŠIT HRAVĚ.




B
1 cm
C
A

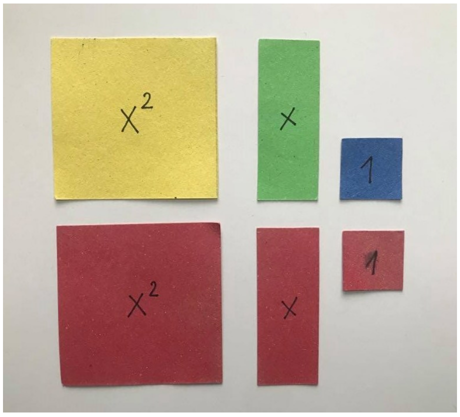
Příloha E

Pravidla pro tvorbu algebraických dlaždic

Práce s algebraickými dlaždicemi je založena na korespondenci mezi algebraickými výrazy a obsahy geometrických útvarů. V základní sadě algebraických dlaždic jsou celkem tři navzájem různé geometrické útvary (viz obr. 19):

- čtverec se stranou délky 1, a tedy obsahem 1,
- obdélník s jednou stranou délky 1 a druhou stranou délky x, a tedy obsahem x,
- čtverec se stranou délky x, a tedy obsahem x^2.

Délka x přitom není celočíselná. Záporné hodnoty jsou v základní sadě dlaždic reprezentovány pomocí červených geometrických útvarů – modrý čtverec o straně délky 1 tedy reprezentuje číslo 1, zatímco stejný čtverec v červené barvě číslo -1. Totéž platí také pro zbývající geometrické útvary.



Obrázek 19: Základní sada algebraických dlaždic

Příloha F

Ukázka výukových materiálů z distanční výuky

VELMI DŮLEŽITÁ LÁTKA.
VÝKLAD SI USCHOVEJ,
BUDEŠ S NÍM POČÍTAT I V PŘÍŠTÍM ŠKOLNÍM ROCE.

VZORCE

Výklad:

① $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = \underline{a^2+2ab+b^2}$

② $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = \underline{a^2-2ab+b^2}$

③ $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = \underline{a^2-b^2}$

Tyto 3 úlohy už nikdy nebudeš počítat násobením ALE podle vzorců, které se jmenují

① 2. mocnina součtu

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2+2AB+B^2$$

stejné je $(-A-B)^2 = A^2+2AB+B^2$

② 2. mocnina rozdílu

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2-2AB+B^2$$

stejné je $(-A+B)^2 = A^2-2AB+B^2$

③ Rozdíl čtverců

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2-B^2$$

je jedno, která závorka je první

Vzorce budeš užívat ZPAMĚTI až do 8. ročníku a přibydou k nim další.
Pokud se je nenaučíš, budeš mít ve 4. ročníku v pololetí známku 4, protože se na nich staví všechno další učivo.

Úkol tentokrát napiš PŘESNĚ podle uvedených vzorců se všemi rozpisy.
Jen tak, se vše naučíš.

NA VZORCE SE ZATÍM dívej a pracuj podle nich

Nové vzorce

Výklad: k naučení

① **2. mocnina trojčlenu**

$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

Výpočty s tímto vzorcem

a) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

b) $(x+y-z)^2 = x^2+y^2+z^2$ dále si všimáš znamének členů které násobíš $+2xy-2xz-2yz$

c) $(3c+2d-5e)^2 = 9c^2+4d^2+25e^2+\underbrace{12cd-20de-30ce}_{}$

pořadí těchto 3 členů je jedno

postup: $(3c)^2+(2d)^2+(5e)^2+\underline{2\cdot 3c\cdot 2d}-\underline{2\cdot 2d\cdot 5e}-2\cdot 3c\cdot 5e =$

$= \underline{\underline{9c^2+4d^2+25e^2+12cd-20de-30ce}}$

postup si jen myslíš, píšeš PŘÍMO výsledek

② **Kvadratický 3člen**

a) $(a+5)\cdot(a-3) =$ výsledek má 3 členy

kvadratický a^2

lineární: sečteš čísla · písmeno $5+(-3)\cdot a = +2a$

prostý: vynásobíš čísla $5\cdot(-3)$ -15

$(a+5)\cdot(a-3) = \underline{\underline{a^2+2a-15}}$

b) $(a-5)\cdot(a-3) = \underline{\underline{a^2-8a+15}}$

c) $(a-5)\cdot(a+3) = \underline{\underline{a^2-2a-15}}$

d) $(a+5)\cdot(a+3) = \underline{\underline{a^2+8a+15}}$

pravidlo musíš mít „v hlavě" a výsledky říkáš nebo píšeš rychle zpaměti

Přehled všech vzorců

USCHOVEJ!
přineseš v září

① 2. mocnina součtu: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(-A-B)^2$ totéž

② 2. mocnina rozdílu: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(-A+B)^2$ totéž

③ rozdíl čtverců $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

④ 2. mocnina 3členu $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

znaménka musím vymyslet

⑤ Kvadratický 3člen

$(x+3)\cdot(x-5) = x^2 - 2x - 15$

první písmeno má koeficient

součet čísel

součin čísel

Vzorce musíš umět NEOMYLNĚ zpaměti včetně znamének („tahák" je ti k ničemu) v září bude taková 1. práce – užití je celý 4. ročník, pak přibydou další vzorce.

Úkol písemně – pracuj takto, ZATÍM se dívej na přehled vzorců

VZOR: vždy opíšeš zadání a přímo píšeš výsledky, které 2x podtrhneš

např.

$$(3x-4y)^2 = \underline{\underline{9x^2 - 24xy + 16y^2}}$$
$$(5c+2d)(5c-2d) = \underline{\underline{25c^2 - 4d^2}}$$
$$(1{,}4x^3 - 2y^2)^2 = \underline{\underline{1{,}96x^6 - 5{,}6x^3y^2 + 4y^4}}$$
$$(3x-5y+6z)^2 = \underline{\underline{9x^2 + 25y^2 + 36z^2 - 30xy + 36xz - 60yz}}$$
$$(x-10)\cdot(x+3) = \underline{\underline{x^2 - 7x - 30}}$$

ÚKOL 11

Každý příklad opiš a napiš přímo výsledky podle uvedených vzorců, výsledky 2x podtrhni.

1.19 Vypočtěte: $A^2 - B^2$

1) $(2xy-1)(2xy+1)$;
2) $(1+3ab)(1-3ab)$;
3) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$;
4) $(4m^2+6n)(4m^2-6n)$;
5) $(0{,}2t-0{,}5n)(0{,}2t+0{,}5n)$;
6) $(0{,}1m^3-0{,}3n)(0{,}1m^3+0{,}3n)$;
7) $(1{,}2cd+2{,}3x)(1{,}2cd-2{,}3x)$;
8) $(1{,}3ab-1{,}1c)(1{,}3ab+1{,}1c)$.

1.21 Vypočtěte: $(A+B)^2$, $(A-B)^2$

1) $(x+10)^2$;
2) $(y^2+1)^2$;
3) $(a^2+0{,}1)^2$;
4) $(m^2+n^2)^2$;
5) $(5ab-c)^2$;
6) $(3-5n)^2$;
7) $(x^3-1)^2$;
8) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$;
9) $(4a^2b+5a^3b^2)^2$;
10) $(7x^4y^3+3x^2y)^2$.

1.22 Vypočtěte: $(A+B+C)^2$

1) $(a+b+1)^2$;
2) $(a-b+c)^2$;
3) $(2a+b+c)^2$;
4) $(2a-b+3c)^2$;
5) $(x-3y+2z)^2$;
6) $(u^2+2u-3)^2$.