

# Posudek vedoucího na diplomovou práci Bc. Martina Černého

## Představení a shrnutí práce

Předložená práce *Cooperative games with partial information* Bc. Martina Černého se zabývá modelem kooperativních her známým jako *částečně definované hry*. Na rozdíl od běžných kooperativních her v charakterstisko-funkční formě s přenosným užitekem, v tomto modelu neznáme hodnotu kooperace některých skupin hráčů (*koalic*), a proto charakteristická funkce je jen částečnou funkcí na potenční množině hráčů. Jinými slovy, jde o jeden z dalších přístupů k neurčitosti v kooperativním hrám. Téma neurčitosti v teorii her má jak široký aplikační potenciál (což dokazují četné publikace na toto téma), tak mnoho teoretických směrů kudy se analýza neurčitosti může vydat. Z některých známějších modelů pro kooperativní hry vzpomeňme koop. fuzzy hry, koop. intervalové hry, pravděpodobnostní hry a koop. hry s tzv. neúplnou informací. Oproti těmto, v podstatě již zavedeným a aktivně studovaným přístupům, jsou částečně definované hry relativně neprobádané a jejich studium po dlouhé době obnovil Inuiguchi a Masuya v roce 2016. Diplomantova práce na tento výzkum navazuje. Shrnuje dosavadní stav poznání, ale zejména ho podstatně rozšiřuje množstvím vlastních výsledků.

Základní otázka kterou si práce pokládá je: za jakých podmínek lze uvedená částečně definovaná hra rozšířit na konvexní/pozitivní/1-konvexní hru, kde každá z koalic má danou shodnout hodnotu kooperace s charakteristickou funkcí částečné hry (tzv. *extenze*)? Existuje kompaktní a pěkný popis množiny všech takových extenzí? Jaké můžeme vyslovit odhady pro hodnoty charakteristické funkce pro extenze z dané třídy? A pokud popis množiny extenzí tvoří konvexní polyedr, jak vypadají jeho vrcholy (tzv. *extrémní hry*)?

První tři kapitoly shrnují dosavadní poznatky (v případě třetí kapitoly je uvedeno několik nových menších lemmat, které v literatuře chybějí). Stěžejní částí práce jsou kapitoly čtvrtá až šestá, obsahující čisté původní výsledky.

Kapitola čtvrtá se zabývá *konvexními extenzemi* a řeší zejména aplikace výsledků ohledně rozšiřitelnosti částečných funkcí na specifické případy struktury koalic se známou hodnotou charakteristické funkce.

Kapitola pátá se věnuje *positivním extenzím*. Hlavním výsledkem je zde charakterizace extrémních her množiny pozitivních extenzí, kde se netriviálně využívá adaptace známé klasické věty Bondarevy a Shapleyho.

Kapitola šestá se zabývá *1-konvexním extenzím*, a to pro hry s tzv. *minimální informací* a hry s *definovaným horním vektorem*. Pro oba tyto případy je kompletně charakterizováno, kdy je hra rozšiřitelná a je uveden popis množiny všech 1-konvexních extenzí přes extrémální hry. Speciálně pro hry s minimální informací jde o velmi pěkný a silný výsledek.

S uvedeným popisy se pak přirozeně nabízí vhodně zobecnit tzv. *řešení hry*. To bylo učiněno v případě 1-konvexních her pro *nukleolus*,  $\tau$ -*hodnotu* a *Shapleyho hodnotu*. Zmíním dva, z mého pohledu nejzajímavější, aspekty této části práce. Prvním je zavedení tzv. *průměrné hodnoty* jako  $\tau$ -hodnoty těžiště extrémálních 1-konvexních extenzí her. V práci je odvozen pro hry s min. informací její explicitní předpis a ukázán vztah k obdobně definované Shapleyho hodnotě, se kterou se dokonce shoduje. Právě to motivovalo pojmenování konceptu, který tak zobecňuje najednou všechny tři zmíněná řešení. Pro průměrnou hodnotu je dále dokázáno několik jejich

přirozených vlastností, které vedou k dvěma různým axiomatizacím ve stylu axiomatizace Shapleyho hodnoty pro klasické kooperativní hry.

Dále se ukazuje, že pro hry s minimální informací není na první pohled jasné, zda do výpočtu řešení zahrnout i extrémální paprsky. To dává vzniknout hned několika možným přístupům jak  $\tau$ -hodnotu, potažmo průměrnou hodnotu, zadefinovat ještě jinak. Tyto varianty potom autor porovnává.

Pro každou z výše uvedených tříd (tedy konvexní, pozitivní, 1-konvexní) se navíc všechny výše zmíněné fundamentální otázky řeší i pro tzv. symetrický případ, kde stejně velké koalice mají stejnou hodnotu charakteristické funkce. Symetrie pak dovoluje pěkný geometrický popis extenzí daného typu, což je i vhodně v práci doplněno obrázky.

## Hodnocení práce

Předkládanou práci považuji za velmi kvalitní, rozsáhlou. Výsledky v ní obsažené jsou jednoznačně publikovatelné v kvalitním mezinárodním žurnálu s IF zaměřeném na teorii her a operační výzkum. Ostatně, v době psaní posudku jsou ve fázi finálních příprav dva články pro odeslání do časopisu, další pak bude brzy následovat. Kromě toho student již prezentoval výsledky z práce na konferenci KOI 2020 a bude tento rok prezentovat na konferencích MME 2021 a 16th SING European Meeting on Game Theory. M. Černý je též od letošního roku hl. řešitelem grantu GAUK, kde se kooperativními hrami a jejich modely vzhledem k neurčitosti bude dále zabývat během svého doktorského studia.

Student v průběhu přípravy diplomové práce postupoval samostatně, iniciativně, drtivá většina vět a jejich důkazů ve své první verzi pocházela přímo od něj a skrze další konzultace a diskuse pak student práci dále vylepšoval až do aktuální podoby. Je třeba zdůraznit, že student prokázal samostatnost při psaní a vymýšlení, ale taktéž aktivně hledal další směry, kam by se mohla práce dál ubírat.

Co se týče nedostatků, narazil jsem při čtení na chyby jen v opravdu sporadických případech. Dlužno dodat, že vzhledem k rozsahu práce, tomu, že nemají žádný vliv na správnost výsledků, a s přihlédnutím k tomu, že jsem si jich sám nevšiml v ranějších verzích práce, nepovažuji za důležité je zde jmenovitě uvádět. Ostatně, v časopiseckých článcích vzešlých z práce jsou již opraveny.

Z pohledu vedoucího si pak dovolím poznamenat, že jsem vděčný za možnost diplomovou práci a studenta vést a věřím, že celá spolupráce obohatila nejen diplomanta, ale rozhodně i mě. Navíc, jak je zřejmé patrné, výzkum touto prací nekončí, nýbrž bude pokračovat dále.

## Verdikt

S ohledem na výše uvedené shledávám práci jako nadprůměrnou a jednoznačně doporučuji uznat ji jako práci diplomovou o ohodnotit známkou **v ý b o r n ě**. Komisi pak navrhuji zvážení nominace na ocenění práce.

V Praze dne 24.6.2021

.....  
Mgr. Jan Bok  
Informatický ústav Univerzity Karlovy