



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Vít Hauser

**C-metrika jako limita fotonové rakety**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2ě.7.2021

Vít Hauser

Rád bych poděkoval vedoucímu práce Mgr. Davidu Kofroňovi, Ph.D. za nabídnutí zajímavého tématu práce, dále za to že mi poskytl pomoc a konzultaci kdykoliv jsem požádal a také za doporučení odborné literatury.

Název práce: C-metrika jako limita fotonové rakety

Autor: Vít Hauser

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Předložená práce se zabývá studiem vlastností vybraných přesných řešení Einsteinových rovnic. V první části se uvádějí základní vlastnosti zkoumaných řešení. Stručně se shrnují základní modely černých děr, jejichž zobecnění budou důležitá v následující části práce. Probírá se základní model nekonečné kosmické struny. Prezentuje se jedna z jejích možných konstrukcí. Dále se shrnují poznatky o třídě Robinson-Trautmanových řešení, mezi která patří fotonové rakety. Ty slouží k popisu zdrojů urychlovaných vyzařováním nulového prachu. Uvádí se rovněž C-metrika, která popisuje dvě rovnoměrně zrychlující černé díry. V druhé části práce se prezentuje konstrukce kosmických strun, které se objevují jednak u C-metriky a také u jednoduššího modelu Schwarzschildovy černé díry, prořaté kosmickou strunou. Předvedená konstrukce je založena na posloupnosti zobecněných fotonových raket a umožňuje určit tenzor energie a hybnosti strun, který existuje jako zobecněná funkce.

Klíčová slova: Schwarzschildovo řešení, C-metrika, Bonnorova raketa, Kosmická struna

Title: C-metric as a limit of photon rocket

Author: Vít Hauser

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This thesis deals with the study of properties of selected exact solutions to Einstein's equations. The first part states the basic properties of the examined solutions. It briefly summarizes basic models of black holes, whose generalizations will be important in the following part of the work. Next, it discusses a simple model of an infinite cosmic string and presents one of its possible constructions. After that, it reviews the properties of a class of Robinson-Trautman solutions, which includes photon rockets. These are used to describe sources accelerated by the emission of null dust. The final section presents the C-metric describing a pair of uniformly accelerating black holes. The second part of the work presents the constructions of cosmic strings, which arise both in C-metric and the simpler model of Schwarzschild black hole, pierced by a cosmic string. The presented construction is based on a sequence of generalized photon rockets and allows to determine the energy-momentum tensor of strings, which exists as a generalized function.

Keywords: Schwarzschild solution, C-metric, Bonnor rocket, Cosmic string

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod do teorie</b>	<b>4</b>
1.1 Schwarzschildovo a Vaidyaovo řešení . . . . .	4
1.2 Robinsonova-Trautmanova třída řešení . . . . .	4
1.3 Fotonové rakety . . . . .	5
1.3.1 Kinnersleyova raketa . . . . .	6
1.3.2 Bonnorova raketa . . . . .	7
1.4 Kosmické struny . . . . .	7
1.5 Schwarzschildova černá díra s kosmickou strunou . . . . .	11
1.6 C-metrika . . . . .	11
<b>2 Konstrukce prostoročasů obsahujících kosmické struny</b>	<b>15</b>
2.1 Rozšířená třída Bonnorových raket . . . . .	15
2.2 Zavedení funkcí použitých k aproximacím . . . . .	16
2.3 Dynamický přechod . . . . .	17
2.4 Přechod pomocí statických prostoročasů . . . . .	18
<b>3 Dodatek o záporné hmotnosti</b>	<b>23</b>
<b>Závěr</b>	<b>24</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>25</b>

# Úvod

Cílem této práce je zabývat se vlastnostmi několika řešení Einsteinových polních rovnic.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Einsteinovy rovnice zde byly zapsány v úplné obecnosti, ve zbytku textu se ale soustředíme na případ  $\Lambda = 0$ .

Nejjednodušším řešením těchto rovnic je Minkowského prostoročas, popisující plochý prostor, který neobsahuje žádné zdroje. Nedlouho po publikaci obecné teorie relativity Karl Schwarzschild odvodil statické sféricky symetrické řešení které popisovalo pole hmotného zdroje nacházejícího se ve středu souřadnic. Přes svojí jednoduchost hrálo důležitou roli při experimentálním ověřování obecné relativity.

Kromě jiných přesných řešení byl Schwarzschildův prostoročas dále studován a byla hledána jeho zobecnění, nebo čistě matematická řešení polních rovnic byla fyzikálně interpretována jako jeho rozšíření. Jako příklad těchto zobecnění je je možno uvést Reissnerovo–Nordströmovo řešení pro nabitý sféricky symetrický zdroj, Kerrovo řešení pro rotující zdroj a nebo Vaidyaovo řešení popisující zdroj který vyzařuje nebo pohlcuje nulový prach. Jak je ale uváděno v [1, kap. 1], je kromě hledání nových prostoročasů důležitým úkolem analýza již známých řešení a jejich detailních vlastností.

Jedním z cílů této práce bude zabývat se typem singularit, vyskytujících se v obecné relativitě, nazvaných kosmické struny. Jedná se o topologické defekty prostoročasu, jejichž důležitou vlastností je, že by mohly vést k pozorovatelným jevům. Kosmické struny mohou způsobovat efekt gravitační čočky, který by se dal využít k jejich pozorování (např. [2], [3]). Další možností jak pozorovat kosmické struny je na základě jimi produkovanými gravitačními vlnami (např. [4]).

Jak je uváděno v [5], jejich vlastnosti a původ jsou nejen předmětem studia z pohledu obecné relativity, ale hrají i důležitou roli v teoriích interakce elementárních částic.

V následujícím textu se budeme zaměřovat výhradně na geometrické vlastnosti strun, jakožto řešení Einsteinových rovnic. Budeme se zajímat o axiálně symetrické prostoročasy ve kterých struna leží na ose symetrie. Takovýmto strunám je možné přiřadit lineární hustotu energie a která v případě nekonečné struny přímo souvisí s okolním polem.

Einsteinovy polní rovnice jsou systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, a není tedy možné přímočaře využít teorie distribucí pro vyšetřování singularitních zdrojů, jako v lineárních teoriích. Z tohoto důvodu je důležitá důkladná analýza problémů a například hledání vhodných způsobů regularizace.

Nekonečné rovné kosmické struny se přirozeně objevují v různých přesných řešeních. V této práci se budeme hlavně zabývat prostoročasem dvou černých děr, které rovnoměrně akcelerují směrem od sebe, C-metrikou. Tato metrika obsahuje kosmické struny na ose, které je možné interpretovat jako důvod zrychlení děr.

C-metrika patří do obecné Rovinsonovy-Trautmanovy třídy řešení, která mimo jiné obsahuje i výše zmíněné zobecnění Schwarzschildova prostoročasu. Dalším

členem této třídy jsou takzvané fotonové rakety, které je možné interpretovat jako lokalizované zdroje poháněné vyzařováním fotonů. V druhé kapitole studujeme konstrukci kosmické struny vyskytující se na ose symetrie, pomocí limity vhodné posloupnosti těchto raket.



# 1. Úvod do teorie

V této kapitole se pokusíme popsat poznatky z teorie přesných řešení Einsteinových rovnic, které budou dále využívány v dalších kapitolách. Obsah této kapitoly se bude hlavně opírat o [1] a bude využívat stejné konvence a značení.

## 1.1 Schwarzschildovo a Vaidyaovo řešení

Schwarzschildův prostoročas byl prvním netriviálním řešením Einsteinových rovnic. Přesto se jedná o fyzikálně velmi významný model, který popisuje sféricky symetrický vakuový prostoročas. Jeho aplikace na pohyby planet v naší solární soustavě byla důležitá pro uznání obecné teorie relativity jako nástupce Newtonovy teorie gravitace. Dále pak posloužil například jako model silných gravitačních polí při studiu černých děr. Metrika tohoto prostoročasu je nejčastěji udávána ve tvaru

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.1)$$

Jediný volný parametr  $m$  se obvykle dá interpretovat jako hmotnost zdroje. Přejdem k Eddingtonovým-Finkelsteinovým souřadnicím získáme metriku ve tvaru

$$ds^2 = -2dudr - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.2)$$

Jedním z důležitých rozšíření Schwarzschildovy metriky je Vaidyaova metrika [7]. Tato metrika popisuje sféricky symetrický systém jehož hmotný střed produkuje nulové záření. Volbou vhodných souřadnic jako v [1, kap. 9.5] je metrika zapsat jako

$$ds^2 = -2dudr - \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.3)$$

Zjevně se tedy jedná o zobecnění metriky (1.2). Funkce  $m(u)$  je libovolná nerostoucí funkce retardovaného času  $u$ .

## 1.2 Robinsonova-Trautmanova třída řešení

Prostoročasy, kterými se budeme v této práci zabývat, patří mezi Robinsonova-Trautmanova řešení [8, 9]. Jedná se o širokou třídu řešení, která je geometricky definována existencí expandující nulové kongruence geodetik bez twistu a deformace. Obecný tvar metriky, obsahující nulové záření, nejprve zapíšeme v souřadnicích  $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$ , kde  $u$  je retardovaný čas,  $r$  je afinní parametr nulových geodetik a  $\zeta, \bar{\zeta}$  jsou komplexní prostorové stereografické souřadnice.

$$ds^2 = -2dudr - 2Hdu^2 + 2\frac{r^2}{P^2}d\zeta d\bar{\zeta} \quad (1.4)$$

kde

$$2H = \Delta \log P - 2r(\log P)_{,u} - \frac{2m}{r} \quad (1.5)$$

Funkce  $P = P(u, \zeta, \bar{\zeta})$  a  $m = m(u)$  vystupující v metrice musí splňovat Robinsonovu-Trautmanovu rovnici s nulovým zářením

$$\Delta\Delta(\log P) + 12m(\log P)_{,u} - 4m_{,u} = 16\pi n^2 \quad (1.6)$$

funkce  $n(\zeta, \bar{\zeta}, u)$  udává profil záření. Hustotu záření a tenzor energie a hybnosti je dán vztahy

$$\rho = \frac{n^2}{r^2} \quad (1.7)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho k_\mu k_\nu \quad (1.8)$$

kde  $k_\mu$  značí vektor tečný k nulovým geodetikám. Gaussova křivost ploch  $u = \text{konst.}$  a  $r = 1$  je, jak ukázáno například v [10], je

$$K = \Delta \log P \quad (1.9)$$

Jak je ukázáno v [1, kap. 19.5.1], řešení algebraického typu D musí splňovat rovnici

$$P^2 K_{\bar{\zeta}} = h(\zeta, u) \quad (1.10)$$

kde  $h(\zeta, u)$  je libovolná funkce. V nejjednodušším případě kde  $h = 0$ , křivost  $K$  závisí pouze na  $u$  a existuje řešení ve tvaru

$$P = A(u) + B(u)\zeta + \bar{B}(u)\bar{\zeta} + C(u)\zeta\bar{\zeta} \quad (1.11)$$

$$K = 2(AC - B\bar{B}) \quad (1.12)$$

kde  $A, B, C$  jsou libovolné funkce. V případě kdy se jedná o konstanty, je možné  $P$  převést do jednoduchého tvaru

$$P = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\zeta\bar{\zeta} \quad (1.13)$$

s  $\epsilon = \pm 1, 0$ . Pro případ  $\epsilon = +1$  jsou plochy kulové a přechodem k souřadnicím úhlového typu, substitucí

$$\zeta = \sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad (1.14)$$

přejde metrika (1.4),(1.5) do tvaru

$$ds^2 = -2dudr - \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.15)$$

což je Vaidyaova metrika (1.3), kde pro vyzařování platí

$$n^2 = -\frac{1}{4\pi}m_{,u}. \quad (1.16)$$

Tedy pokud  $n = 0$  jedá se o Schwarzschildovu metriku

### 1.3 Fotonové rakety

Mezi Robinsonova-Trautmanova řešení také patří Kinnersleyova a Bonnorova raketa. Tyto prostoročasy je možné interpretovat jako pole bodových zdrojů, které jsou urychlovány nulovým zářením.

### 1.3.1 Kinnersleyova raketa

Z rovnice (1.11) získáme axiálně symetrické řešení pro  $h = 0$  a  $K = 1$ , zavedeme-li

$$\begin{aligned}\zeta &= e^{\sqrt{2}\bar{\zeta}} \\ A(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\int \alpha(u) du\right) \\ B(u) &= 0 \\ C(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\int \alpha(u) du\right),\end{aligned}$$

kde  $m(u), \alpha(u)$  jsou dvě libovolné funkce. Vlnku nad  $\zeta$  pro jednoduchost v následujícím opomeneme a získáme tak

$$P = \cosh\left(\int \alpha(u) du - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})\right) \quad (1.17)$$

Vhodnou volbou souřadnic  $\theta, \phi$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \tanh\left(\int \alpha(u) du - \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})\right) \\ \phi &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\zeta - \bar{\zeta})\end{aligned}$$

zajistíme že

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} &= \sin \theta \\ (\log P)_{,u} &= \alpha \cos \theta\end{aligned}$$

a tedy společně s  $\Delta \log P = K = 1$  dosazením do (1.4), (1.5), (1.6) dostáváme výraz pro metriku a profil záření

$$\begin{aligned}ds^2 &= -2dudr - \left(1 - \frac{2m(u)}{r} - 2\alpha r \cos \theta - \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta\right) du^2 \\ &\quad + 2\alpha r^2 \sin \theta dud\theta + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\end{aligned} \quad (1.18)$$

$$4\pi n^2(\theta, u) = 3\alpha m \cos \theta - m_{,u}. \quad (1.19)$$

Aby bylo zajištěno, že  $n$  je reálné, musí být  $m(u)$  ryze klesající. Pro  $\alpha(u) = 0$  dostáváme Vaidyaovo řešení (1.15), (1.16). V limitním případě  $m = 0$  se jedná o plochý Minkowského prostoročas s zkušební částicí v středu, jejíž zrychlení je udáváno funkcí  $\alpha(u)$ .

Podstatnou vlastností Kinnersleyovy rakety je, že neprodukuje gravitační záření, jak bylo ukázáno v [11], jedná se o jedinou třídu axiálně symetrických, asymptoticky plochých, zářících řešení Robinsonova-Trautmanova typu která neobsahuje gravitační záření.

### 1.3.2 Bonnorova raketa

Zobecnění Kinnersleyovy rakety provedl v roce 1996 Bonnor [12], axiálně symetrické řešení Robinsonovy-Trautmanovy třídy, algebraického typu II s nulovým zářením. Jak je zřejmé v [1] volbou souřadnic

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - \int \frac{dx}{G(x,u)} + \int \alpha(u) du + i\phi \right) \quad (1.20)$$

kde  $G(x,u)$  je libovolná funkce  $x,u$  a  $\alpha(u)$  je libovolná funkce  $u$ . Provedeme Identifikaci

$$P(\zeta, \bar{\zeta}, u) = G^{-1/2} (x(\zeta, \bar{\zeta}, u), u) \quad (1.21)$$

Funkci  $x(\zeta, \bar{\zeta}, u)$  získáme invertováním (1.20)

$$\int \frac{dx}{G(x,u)} = \int \alpha(u) du - \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta + \bar{\zeta}) \quad (1.22)$$

Těmito úpravami získá metrika (1.4) tvar

$$ds^2 = -2dudr - \left( -\frac{1}{2}G_{,xx} - \frac{2m(u)}{r} - r(bG)_{,x} - b^2Gr^2 \right) du^2 + 2br^2dudx + r^2 \left( \frac{dx^2}{G} + Gd\phi^2 \right) \quad (1.23)$$

kde

$$b(u,x) = -\alpha(u) - \int \frac{G_{,u}(x,u)}{G^2(x,u)} dx. \quad (1.24)$$

Zavedením  $G(x) = 1 - x^2$ , tak že  $b = -\alpha(u)$  a přechodem k polární souřadnici  $x = \cos(\theta)$  získáme opět výrazy pro Kinnersleyovu metriku (1.18).

Celou třídu fotonových raket pak Bonnor určil volbou

$$G(x,u) = (1 - x^2) \left( 1 + (1 - x^2)h(x,u) \right) \quad (1.25)$$

kde  $h(x,u)$  je libovolná, hladká, omezená funkce větší než  $-1$ . Touto volbou je zajištěno, že metrika je na ose  $x = \pm 1$  regulární. Radiační profil (1.6) má v této situaci tvar

$$4\pi n^2(x,u) = -\frac{1}{8}(GG_{,xxx})_{,x} + \frac{3}{2}m(bG)_{,x} - m_{,u} \quad (1.26)$$

## 1.4 Kosmické struny

Základní model kosmické struny, založený na prostoročasu s takzvanou konickou singularitou je popsán v [1, kap. 3.4]. Při jeho konstrukci se vychází z Minkowského metriky v cylindrických souřadnicích

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (1.27)$$

kde jako obvykle  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Z tohoto prostoročasu odstraníme výřez o úhlu  $2\pi\delta$  a identifikujeme takto vytvořené okrajové plochy  $\varphi = 0$  a  $\varphi = (1 - \delta)2\pi$ . Souřadnice  $\varphi$  je tak omezena pouze do intervalu  $[0, (1 - \delta)2\pi)$ , ale zavedením

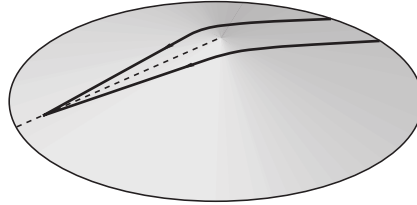
souřadnice  $\varphi = C\phi$  s  $C = 1 - \delta$  získáme metriku opět ve tvaru, v němž úhlová souřadnice má opět rozsah  $\phi \in [0, 2\pi)$

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + C^2\rho^2d\phi^2 + dz^2. \quad (1.28)$$

Kvůli tvaru nadploch  $t = \text{konst.}$  a  $z = \text{konst.}$ , které popisují kužel při vnoření do euklidovského prostoru, se takovýto typ singularity označuje jako konická singularita.

Výsledný prostoročas je plochý všude, až na osu  $\rho = 0$ , kde tenzor křivosti neexistuje jako spojitá funkce. Přestože je kolem osy křivost nulová a tedy na testovací částice nepůsobí žádná přitažlivá síla, tak paralelním přenosem vektoru kolem osy se pootočí o úhel  $2\pi\delta$ , který udává konický deficit singularity.

Z tohoto důvodu je důležité zkoumat regularitu os u axiálně symetrických prostoročasů. Například právě konický deficit je jednou známek topologických defektů.



Obrázek 1.1: Konický tvar prostoročasu kolem struny, který působí na kolem procházející geodetiky jako gravitační čočka. Obrázek převzat z [3]

U kosmických strun, které je možné právě tímto modelem zjednodušeně popisovat, se konický deficit používá k popisu lineární hustoty struny.

Plně relativistickou konstrukci nekonečné struny provedl v roce 1981 [13] v linearizované teorii a pak v roce 1985 na sobě nezávisle Gott [14] a Hiscock [15]. Tuto konstrukci, která je také dále rozebrána v [16], zde prezentujeme.

Hiscock vycházel z obecného cylindricky symetrického statického řešení.

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} d\phi^2 + e^{2\lambda} (d\rho^2 + dz^2), \quad (1.29)$$

kde  $\nu$ ,  $\psi$  a  $\lambda$  jsou funkce souřadnice  $\rho$ . Strunu uvažoval ve tvaru válce o malém poloměru  $\rho_0$  a konstantní hustotě  $\epsilon$ . Tenzor energie a hybnosti, jak argumentoval Vilenkin [13] na základě zákonů zachování, má podobu

$$T_t^t = -\epsilon, \quad (1.30)$$

pro  $\rho < \rho_0$  a všechny ostatní složky jsou nulové.

Pro metriku (1.29) tedy mají Einsteinovy rovnice tvar

$$G_t^t = e^{-2\lambda} (\psi_{,\rho\rho} + (\psi_{,\rho})^2 + \lambda_{,\rho\rho}) = -8\pi\epsilon, \quad (1.31)$$

$$G_\phi^\phi = e^{-2\lambda} (\nu_{,\rho\rho} + (\nu_{,\rho})^2 + \lambda_{,\rho\rho}) = 0, \quad (1.32)$$

$$G_\rho^\rho = e^{-2\lambda} (\nu_{,\rho}\psi_{,\rho} + \nu_{,\rho}\lambda_{,\rho} + \psi_{,\rho}\lambda_{,\rho}) = 0, \quad (1.33)$$

$$G_z^z = e^{-2\lambda} (\nu_{,\rho\rho} + (\nu_{,\rho})^2 - \nu_{,\rho}\lambda_{,\rho} + \psi_{,\rho\rho} + (\psi_{,\rho})^2 + \psi_{,\rho}\nu_{,\rho} - \psi_{,\rho}\lambda_{,\rho}) = -8\pi\epsilon. \quad (1.34)$$

Dále máme podmínku pro zachování tenzoru energie a hybnosti  $T_{\alpha}^{\beta}{}_{;\beta} = 0$  odkud plyne

$$(\nu_{,\rho} + \lambda_{,\rho})\epsilon = 0. \quad (1.35)$$

Z této rovnice s využitím rovnice pro  $G_{\phi}^{\phi}$  plyne, že  $\nu$  a  $\lambda$  jsou konstanty, které mohou být položeny rovné nule vhodným přeskálováním souřadnic  $t, \rho, z$ . Rovnice pro  $G_{\rho}^{\rho}$  je pak triviálně splněna a rovnice pro  $G_t^t$  a  $G_z^z$  dávají

$$\psi_{,\rho\rho} + (\psi_{,\rho})^2 = -8\pi\epsilon. \quad (1.36)$$

Tato rovnice pak určuje výsledný tvar metriky válce,

$$e^{\psi} = A \cos(\rho/\rho_*) + B \sin(\rho/\rho_*), \quad (1.37)$$

kde  $\rho_* = (8\pi\epsilon)^{-1/2}$ . Aby byla metrika regulární na ose volíme  $A = 0$  a  $B = \rho_*$ . Vnitřní metrika válce o konstantní hustotě tedy je

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho_*^2 \sin^2(\rho/\rho_*)d\phi^2 + dz^2. \quad (1.38)$$

Vnější řešení je možné nejjednodušeji určit, po upravení Einsteinových vakuových rovnice do podoby

$$e^{\nu+2\lambda+\psi}(G/2 - G_t^t) = (\nu_{,r}e^{\nu+\psi})_{,r} = 0, \quad (1.39)$$

$$e^{\nu+2\lambda+\psi}(G/2 - G_z^z) = (\lambda_{,r}e^{\nu+\psi})_{,r} = 0, \quad (1.40)$$

$$e^{\nu+2\lambda+\psi}(G/2 - G_{\phi}^{\phi}) = (\psi_{,r}e^{\nu+\psi})_{,r} = 0, \quad (1.41)$$

$$e^{2\lambda}(G_r^r) = \lambda_{,r}\nu_{,r} + \lambda_{,r}\psi_{,r} + \nu_{,r}\psi_{,r} = 0. \quad (1.42)$$

Tato soustava rovnic má řešení

$$\nu = m \log |r + K| + C_1, \quad (1.43)$$

$$\lambda = m(m-1) \log |r + K| + C_2, \quad (1.44)$$

$$\psi = (1-m) \log |r + K| + C_3, \quad (1.45)$$

$$(1.46)$$

kde  $m, K, C_1, C_2, C_3$  jsou integrační konstanty. Výsledná metrika má po vynulování konstanty  $K$  posunutím radiální souřadnice tvar

$$ds^2 = -r^{2m}c^2dT^2 + r^{2m(m-1)}b^2(dZ^2 + dr^2) + r^{2(1-m)}a^2d\phi^2, \quad (1.47)$$

kde  $a, b, c$  jsou konstanty. Dalším krokem bude navázat na sebe vnitřní a vnější řešení, tak aby na povrchu válce byla křivost spojitá. Protože radiální souřadnice  $r$  vně a  $\rho$  uvnitř jsou obecně rozdílné, označíme příslušné poloměry válce  $r_0$  a  $\rho_0$

Na povrchu válce máme ortonormální triádu vektorů

$$t_1^{\mu} = e^{-\nu}\delta_t^{\mu}, \quad (1.48)$$

$$t_2^{\mu} = e^{-\lambda}\delta_z^{\mu}, \quad (1.49)$$

$$t_3^{\mu} = e^{-\psi}\delta_{\phi}^{\mu} \quad (1.50)$$

$$(1.51)$$

a také normálový vektor

$$n_\mu = e^\lambda \delta_\mu^r. \quad (1.52)$$

Vnější křivost povrchu válce je tedy dána

$$K_{ij} = -t_i^\mu t_j^\nu n_{\mu;\nu}. \quad (1.53)$$

Aby byla zachována spojitost křivosti při přechodu přes povrch válce, je nutné aby funkce  $e^\nu$ ,  $e^\lambda$ ,  $e^\psi$ ,  $\nu_{,r}$ ,  $\psi_{,r}$ ,  $\lambda_{,r}$  byly spojitě. Protože funkce  $\nu$ ,  $\lambda$  jsou ve vnitřku válce konstantní dostáváme podmínku

$$\frac{m}{r_0} = \frac{m(m-1)}{r_0} = 0 \quad (1.54)$$

odkud plyne  $m = 0$ . Dále ze spojitosti  $e^\nu$  a  $e^\lambda$  plyne, že  $b = c = 1$ .

Z rovnice (1.36) dostáváme vynásobením  $e^\psi$

$$(e^\psi)_{,\rho\rho} = -8\pi\epsilon e^\psi \quad (1.55)$$

a integrací této rovnice, s využitím  $\psi_{,\rho} e^\psi \rightarrow 1$  pro  $\rho \rightarrow 0$ , dostáváme

$$a = 1 - 8\pi\epsilon \int_0^{\rho_0} e^\psi d\rho, \quad (1.56)$$

kde jsme využili vnější řešení pro  $\psi$  k napojení metrik (1.38) a (1.47) na hranici válce a tedy  $\psi_{,r} e^\psi = a$ .

Lineární hustotu  $\mu$  je u cylindricky symetrické situace přirozené definovat jako hustotu  $\epsilon$  na vlastní objem válcového zdroje

$$\mu = \epsilon \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} e^\psi d\phi d\rho = 2\pi\epsilon \int_0^{\rho_0} e^\psi d\rho. \quad (1.57)$$

V našem případě konkrétně

$$a = 1 - 4\mu, \quad (1.58)$$

$$\mu = 2\pi\epsilon\rho_*^2 (1 - \cos(\rho_0/\rho_*)) = \frac{1}{4} (1 - \cos(\rho_0/\rho_*)). \quad (1.59)$$

Dosazením do rovnice (1.38) dostáváme výsledný tvar metriky

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + (1 - 4\mu)^2 r^2 d\phi^2 \quad (1.60)$$

a zároveň hodnotu konického deficitu takovéto struny  $8\pi\mu$ . Protože metrika (1.60) nezávisí přímo na  $\rho_0$  ani  $\epsilon$  a pouze na  $\mu$  je možné provést limitu  $\rho_0 \rightarrow 0$  při zachování  $\rho_0/\rho_* = \text{konst.}$  a tedy i konstantní lineární hustoty. Při této limitě se také objevuje  $\delta$ -funkce v tenzoru energie a hybnosti.

Stejně závislosti konického deficitu a lineární hustoty struny je možné dosáhnout i pomocí složitějších regularizací singulární osy. Jak bylo ukázáno v [17], tak je možné najít i takové řešení, kde po limitním přechodu lineární hustota neodpovídá konickému deficitu stejným způsobem. Pro případ nekonečné rovné struny jsou tyto problémy detailněji vyšetřeny v [16, kap. 7].

Z matematického hlediska je vyšetřování singulárních zdrojů v relativitě obtížné, kvůli nevhodnosti využití teorie distribucí, k vyšetřování problému nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. V [17] jsou také zkoumány postačující podmínky, kdy je využití distribucí oprávněné, metrika nekonečné rovné struny je ale nesplňuje. Jedním z možných přístupů je využití, který je diskutován v [18] teorie algeber zobecněných funkcí.

## 1.5 Schwarzschildova černá díra s kosmickou strunou

Jednoduché zobecnění Schwarzschildovy metriky (1.1) je možné konstruovat odstraněním části prostoročasu omezením souřadnice  $\phi$  a identifikací zbylých okrajů, stejně jako bylo provedeno při konstrukci jednoduchého modelu struny. Výsledná metrika, která má tvar

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + C^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.61)$$

byla důkladněji diskutována v [19]. Tato metrika popisuje Schwarzschildovu černou díru, kterou protíná kosmická struna ležící na ose  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ . Stejně jako v případě samotné nekonečné struny, tak i v zde křivost prostoru mimo strunu se neliší od křivosti Schwarzschildovy černé díry, ale struna působí na geodetiky procházející kolem ní (detailní řešení pohybu testovacích i hmotných částic v tomto prostoročasu je provedeno v [20]).

Schwarzschildova metrika je asymptoticky plochá, při limitě  $r \rightarrow \infty$  v (1.61) dostaneme, po přechodu do válcových souřadnic, metriku ve tvaru (1.28).

V článku [19] je také studováno zobecnění prostoročasu jedné černé díry protažené strunou. Autoři se zabývali soustavou dvou černých děr, které jsou drženy od sebe strunami které od děr jdou nekonečna. Takovýto systém je ale nestabilní. Pokud obě díry budou mít stejnou hmotnost a budou v dostatečně velké vzdálenosti od sebe, tak napětí ve strunách způsobí, že budou urychlovány do nekonečna.

## 1.6 C-metrika

C-metrike je vakuové řešení, jehož statická podoba byla rozpracována již v roce 1918 [21], [22]. Dále bylo podrobněji popsáno a interpretováno v [23] a [24], jako řešení popisující dvě černé díry které navzájem od sebe zrychlují působením strun na ose.

Metrika tohoto prostoročasu se nejběžněji udává ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2} \left( -\tilde{F} dt^2 + \frac{dy^2}{\tilde{F}} + \frac{dx^2}{\tilde{G}} + \tilde{G} d\phi^2 \right) \quad (1.62)$$

kde  $G$  a  $F$  jsou kubické funkce

$$\tilde{G} = 1 - x^2 - 2MAx^3 \quad (1.63)$$

$$\tilde{F} = -1 + y^2 - 2MAy^3. \quad (1.64)$$

Metrika obsahuje 2 parametry  $M$  a  $A$ , pro  $M = 0$  se jedná o Minkowského metriku. Aby funkce  $\tilde{F}$  a  $\tilde{G}$  měli nedegenerované reálné kořeny požadujeme podmínku  $27M^2A^2 < 1$ , čímž se omezíme na fyzikálně nejpodstatnější případy.

Tato podoba metriky byla volbou souřadnic upravena tak, aby v kubických funkcích  $\tilde{F}$  a  $\tilde{G}$  nebyly lineární členy. V [25] je však této volnosti využito k



získání podoby ve které kořeny kubických funkcí měly jednodušší podobu, konkrétně  $\pm 1, -\frac{1}{2\alpha m}$ . Metrika v těchto nových souřadnicích po provedeném přeškálování má podobu

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2(x+y)^2} \left( -F d\tau^2 + \frac{dy^2}{F} + \frac{dx^2}{G} + G d\varphi^2 \right), \quad (1.65)$$

kde

$$G = (1-x^2)(1+2\alpha m x) \quad (1.66)$$

$$F = -(1-y^2)(1+2\alpha m y). \quad (1.67)$$

Aby bylo zachováno správné pořadí kořenů, tak požadujeme  $0 < 2\alpha m < 1$ , zároveň pro zachování signatury metriky je nutné aby  $G > 0$ , tedy  $x$  musí ležet mezi odpovídajícími kořeny  $G$ . Vzhledem k tvaru metriky (1.65) fyzikální prostoročas splňuje buďto  $x+y > 0$  nebo  $x+y < 0$ . Již zmíněná situace zrychlujících černých děr nastává právě pro  $x \in [-1, 1]$  s  $x+y > 0$ .

Pro vyšetřování některých dalších vlastností C-metriky je vhodné znát její podobu také v souřadnicích sférického typu. Substitucí

$$x = -\cos \theta$$

$$y = \frac{1}{\alpha r}$$

$$\tau = \alpha t$$

kde bereme  $\theta \in [0, \pi]$ . Získáme metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{(1-\alpha r \cos \theta)^2} \left( -Q dt^2 + \frac{dr^2}{Q} + \frac{r^2 d\theta^2}{P} + P r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (1.68)$$

kde

$$P = 1 - 2\alpha m \cos \theta \quad (1.69)$$

$$Q = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (1 - \alpha^2 r^2) \quad (1.70)$$

Vzhledem k nulové tetradě odpovídající (1.68) je jediná nenulová složka Weylova tenzoru křivosti

$$\Psi_2 = - \left( \frac{1}{r} - \alpha \cos \theta \right)^3 = -m\alpha^3 (x+y)^3. \quad (1.71)$$

Tedy pro  $m \neq 0$  jediná neodstranitelná singularita je v  $r = 0$ . Kořeny  $Q$  v  $r = 2m, 1/\alpha$  jsou souřadnicové singularity. Z druhého výrazu v (1.71) je také jednoduše vidět, že v konformním nekonečnu, tedy když  $x \rightarrow -y$  je metrika plochá.

Vzhledem k podobnosti se Schwarzschildovým řešením, v něž tato metrika přechází pro  $\alpha = 0$  je možné interpretovat singularitu  $r = 2m$  jako horizont událostí černé díry. Jak je ukázáno například v [1, kap. 14.1.4] pomocí Minkowského limity, parametr  $\alpha$  odpovídá zrychlení bodového zdroje a souřadnicová singularita  $r = 1/\alpha$  je horizont zrychlení.

Z podkapitoly o kosmických strunách víme, že C-metrika by měla obsahovat struny na ose symetrie. Metrika (1.68) má v sférických souřadnicích Killingův vektor  $\xi_{(\phi)} = \partial_\phi$ , ten vymizí v kořenech členu  $g_{\phi\phi}$  a tedy pro  $\theta = 0, \pi$ . Tím je dána osa symetrie prostoročasu C-metriky. Z tohoto důvodu je vhodné brát  $\varphi \in [0, 2\pi C)$  kde spolu identifikujeme okraje tohoto rozmezí.

Přítomnost singularity můžeme zkoumat pomocí jejích invariantních geometrických vlastností. Vezmeme-li malý kroužek okolo poloosy  $\theta = 0$ , s  $t, r$  konstantními, jeho obvod bude

$$\int_0^{2\pi C} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi \quad (1.72)$$

a jeho poloměr bude

$$\int_0^\theta \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta. \quad (1.73)$$

Nyní při limitě  $\theta \rightarrow 0$  poměr obvodu ku poloměru bude

$$\frac{2\pi CP \sin \theta}{\theta} \rightarrow 2\pi C(1 - 2\alpha m) \quad (1.74)$$

Tedy nedostaneme přesně  $2\pi$ , při obdobném výpočtu pro druhou poloosu  $\theta = \pi$  získáme

$$\frac{2\pi CP \sin \theta}{\pi - \theta} \rightarrow 2\pi C(1 + 2\alpha m) \quad (1.75)$$

opět vychází hodnota rozdílná od  $2\pi$  navíc jiná, než kterou jsme dostali na opačné poloose. Vzhledem k diskusi v předešlé kapitole je jasné, že na obou poloosách se skutečně nacházejí konické singularity, každá s jinou konicitou.

Důležitou vlastností C-metriky je, že strunu na jedné straně osy je možné vhodnou volbou konstanty  $C$  odstranit. Tak abychom odstranili neregularitu osy na  $\theta = \pi$  volíme

$$C = \frac{1}{1 + 2\alpha m} \quad (1.76)$$

a metrika má při této volbě podobu

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \alpha r \cos \theta)^2} \left( -Q dt^2 + \frac{dr^2}{Q} + \frac{r^2 d\theta^2}{P} + \frac{Pr^2 \sin^2 \theta}{(1 + 2\alpha m)^2} d\varphi^2 \right). \quad (1.77)$$

O regularitě os je podle [26, kap. 19.1] také možné se přesvědčit zkoumáním Killingova vektoru  $\xi_{(\phi)}$  odpovídajícímu axiální symetrii. Označíme  $X = \xi_{(\phi)\mu} \xi_{(\phi)}^\mu$ , pokud je osa regulární tak bude splněna podmínka

$$\frac{X^{,a} X_{,a}}{4X} \rightarrow 1, \quad (1.78)$$

při limitě k bodu na ose.

Vyhodnotíme-li tuto limitu pro metriku (1.77), dostáváme pro  $\theta \rightarrow \pi$

$$\frac{X^{,a} X_{,a}}{4X} \rightarrow 1 \quad (1.79)$$

a při  $\theta \rightarrow 0$

$$\frac{X^{,a} X_{,a}}{4X} \rightarrow \frac{(1 - 2\alpha m)^2}{(1 + 2\alpha m)^2}. \quad (1.80)$$

Ověřili jsme tedy, že zvolenou volbou  $C$  jsme odstranili strunu na jedné poloose a na druhé poloose stále zůstává konická singularita.

C-metrika také patří mezi Rovinsonova-Trautmanova řešení s  $n = 0$ , konkrétně algebraického typu D. Podle [27, 28] můžeme transformovat rovnici (1.4) pomocí

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\alpha(x+y)} \\ u &= \frac{1}{\alpha} \left( \tau + \int \frac{dy}{F} \right) \\ \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \tau + \int \frac{dy}{F} - \int \frac{dx}{G} + i\varphi \right) \end{aligned} \quad (1.81)$$

kde za  $F, G$  bereme (1.66), (1.67), tím dostáváme metriku ve tvaru (1.65).

Ponecháním souřadnic  $x, \varphi$  a zavedením souřadnic  $r, u$  pomocí (1.81) dostáváme metriku ve tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2 du dr + \alpha^2 r^2 G \left( x - \frac{1}{\alpha r} \right) du^2 \\ &\quad - 2\alpha r^2 du dx + r^2 \left( \frac{dx^2}{G(x)} + G(x) d\phi^2 \right), \end{aligned} \quad (1.82)$$

Přes svojí podobnost jsou metriky fotonových raket a C-metrika odlišné, neboť C-metrika je vakuová na rozdíl od metrik raket, které obsahují nulový prach, který vyzářují. Pro  $n = 0$  prostoročasy raket prach neobsahují, ale naopak dostáváme  $\alpha = 0$  a tedy Schwarzschildovo řešení.

## 2. Konstrukce prostoročasů obsahujících kosmické struny

Cílem této kapitoly je prezentovat, jakým způsobem je možné z prostoročasu Bonnorovy rakety přejít do prostoročasu C-metricky. Díky podobnosti tvarů metricky Bonnorovy rakety a C-metricky je možné se zabývat dynamickým přechodem, při kterém dochází k fokusaci zářivého profilu  $n$  fotonové rakety a formování kosmické struny. Kromě dynamického přechodu je také možné se zabývat systémem statických prostoročasů Bonnorových raket, které limitou přecházejí v prostoročas s kosmickou strunou. Tato kapitola je založena na výsledcích [6]

### 2.1 Rozšířená třída Bonnorových raket

Bonnorova raketa (1.23) – (1.25) nebyla v [12] z Robinson-Trautmanovy metricky sestrojena v nejobecnější podobě. Podmínka (1.25) zaručuje, že osa nebude singulární, a tedy zde nebude konická singularita. Pro obecně zvolenou funkci  $G(x, u)$  není zaručené, že hodnota na levé straně (1.26) bude kladná.

V následujícím textu uvolníme podmínku (1.25) a budeme uvažovat

$$G(x, u) = (1 - x^2)(1 + h(x, u)), \quad (2.1)$$

a zároveň opomeneme druhou mocninu v definici zářivého profilu  $n^2$ . Podmínka regularity osy (1.78) dává při limitě na ose  $x \rightarrow \pm 1$

$$\frac{X^a X_{,a}}{4X} \rightarrow 1 + h(\pm, u), \quad (2.2)$$

tedy regularita závisí na funkci  $h$ .

Takovéto rozšíření umožňuje přechodem od  $G$  k  $KG$  a přeškálováním souřadnic a volných parametrů

$$\tilde{u} = \sqrt{K} u, \quad (2.3)$$

$$\tilde{r} = r/\sqrt{K}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{m} = m/K\sqrt{K}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{A} = A/\sqrt{K}, \quad (2.6)$$

získat opět metriku ve tvaru (1.23), která ale obsahuje člen  $K^2 d\phi^2$  odpovídající konické singularitě.

Bonnorova raketa vyzařováním nulového záření ztrácí hmotu

$$\int r^2 \rho d\Omega = \int n(x) d\Omega. \quad (2.7)$$

Jou-li však uvažovány i záporné hodnoty radiačního profilu  $n(x)$ , je možné se zabývat i statickými případy, kde

$$\oint n(x) d\Omega = 0, \quad (2.8)$$

$$m(u) = m. \quad (2.9)$$

## 2.2 Zavedení funkcí použitých k aproximacím

V této části zavedeme několik matematických nástrojů, které budou v následujícím textu využívány.

Při modelování vhodných radiačních profilů budeme využívat hladké, ale neanalytické schodové funkce jako  $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_0, \\ \frac{f\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}{f\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) + f\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)} & \text{pro } x \in [x_0, x_1], \\ 1 & \text{pro } x > x_1, \end{cases} \quad (2.10)$$

kde  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ , tedy schodová funkce mezi hodnotami  $x_0$  a  $x_1$ . Kromě těchto funkcí budeme také využívat, v některých situacích výhodnější schodové funkce založené na polynomech řádu  $2n + 1$  s zadanými odpovídajícími okrajovými podmínkami.

Budeme používat značení pro zvyšující se schodovou funkci  $\mathcal{S}_{(a,b)}(x)$ , která je nulová pro  $x < a$  a má hladký přechod od 0 do 1 pro  $x \in [a, b]$ , přičemž pro  $x > b$  je rovna 1; a snižující se schodovou funkci  $\mathfrak{S}_{(a,b)}(x) = 1 - \mathcal{S}_{(a,b)}(x)$ .

Také budeme využívat stolovou funkci zavedenou pomocí

$$T_{(a,b,c,d)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ \mathcal{S}_{(a,b)}(x) & \text{pro } x \in [a, b], \\ 1 & \text{pro } x \in [b, c], \\ \mathfrak{S}_{(c,d)}(x) & \text{pro } x \in [c, d], \\ 0 & \text{pro } x > d. \end{cases} \quad (2.11)$$

Tyto funkce budou následně v prostředí systémů počítačové algebry (CAS) využity k zavedení hladkých limitních přechodů.

Dalším nástrojem bude rozvoj funkcí na intervalu  $[-1,1]$  do báze Legendreových ortogonálních polynomů

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (2.12)$$

kde koeficienty  $a_n$  mají díky normalizaci Legendreových polynomů tvar

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (2.13)$$

K převodu polynomiálních výrazů se kterými budeme pracovat do báze Legendreových polynomů, využijeme vyjádření standardní báze  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

$$x^k = \sum_{j=0}^k a_j^{(k)} P_j(x). \quad (2.14)$$

Pro koeficienty podle (2.13) vychází

$$x^{2k} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2k+1)}{2^{2k+1}} \sum_{j=0}^k \tilde{a}_{2j}^{(2k)} P_{2j}(x), \quad (2.15)$$

$$\tilde{a}_{2j}^{(2k)} = \frac{4j+1}{\Gamma(k+j+\frac{3}{2}) \Gamma(k-j+1)},$$

pro sudé mocniny  $x$  a pro liché mocniny pak

$$x^{2k+1} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2k+2)}{2^{2k+2}} \sum_{j=0}^k \tilde{a}_{2j+1}^{(2k+1)} P_{2j+1}(x),$$

$$\tilde{a}_{2j+1}^{(2k+1)} = \frac{4j+3}{\Gamma(k+j+\frac{5}{2})\Gamma(k-j+1)}. \quad (2.16)$$

V bázi Legendreových polynomů je možné taky vyjádřit některé distribuce – například Diracovu delta funkci

$$\delta(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(a). \quad (2.17)$$

## 2.3 Dynamický přechod

Metrika Bonnorovy rakety (1.23) při volbě  $A = 0$  a  $G = (1-x^2)$  přechází na metriku Schwarzschildova řešení. Volbou  $A = 0$  a  $G = K(1-x^2)$  dostáváme Schwarzschildovu černou díru obsahující konickou singularitu.

S využitím hladké schodové funkce můžeme sestrojít dynamický přechod mezi těmito dvěma situacemi. Zavedením

$$G(x, u) = (1-x^2) \left(1 + 2w \mathcal{S}_{(u_0, u_1)}(u) e^{-\frac{\mathcal{K}_{(u_0, u_1)}(u)}{1-x^2}}\right) \quad (2.18)$$

při  $A = 0$  dostáváme přechod od Schwarzschildovy metriky pro  $(u < u_0)$  přes radiační fázi fotonové rakety pro  $u \in [u_0, u_1]$  k Schwarzschildově metrice s kosmickou strunou, kde  $K = 1 + 2w$  při  $u = u_1$ .

Obdobný postup můžeme využít i v případě C-metriky. V metrice Bonnorovy rakety (1.23), položíme-li

$$m(u) = m, \quad (2.19)$$

$$b(x, u) = -A, \quad (2.20)$$

$$G(x, u) = (1-x^2)(1 + 2Amx). \quad (2.21)$$

dostaneme C-metriku ve tvaru (1.82) s (1.66).

Přidáním hladkého přechodu do funkcí  $G(x, u)$  a  $A(u)$

$$G(x, u) = (1-x^2) \left(1 + 2Amx \mathcal{S}_{(u_0, u_1)}(u) e^{-\frac{\mathcal{K}_{(u_0, u_1)}(u)}{1-x^2}}\right), \quad (2.22)$$

$$A(u) = A \mathcal{S}_{(u_0, u_1)}(u), \quad (2.23)$$

je možné dostat přechod od Schwarzschildovy metriky pro  $(u < u_0)$  přes radiační fázi fotonové rakety s regulární osou pro  $u \in [u_0, u_1]$  k metrice, která je difeomorfní c-metrice pro  $u = u_1$ , kdy je veškeré záření soustředěno ve směru osy. Tato metrika však neobsahuje druhou černou díru, jako C-metrika a nemůže na ni být analyticky rozšířena.

Tvar radiačního profilu (1.26) při takto provedené aproximaci je nemožné řešit analyticky a je pouze možné dosáhnout výsledku numerickou aproximací.

## 2.4 Přechod pomocí statických prostoročasů

Pro zkoumání konkrétních vlastností vyzařovacího profilu raket a formování struny na ose je výhodnější přechod mezi metrikami konstruovat jako limitu statických prostoročasů.

Obdobně jako v předešlé části volíme podle podmínky (2.1) takový tvar rakety, abychom získali parametrický přechod mezi Schwarzschildovou černou dírou, přes prostoročas obsahující fotonovou raketu s regulární osou až po metriku s konickou singularitou na ose.

Volbou posloupnosti prostoročasů, kde  $N \in \mathbb{N}_0$  pomocí

$$\begin{aligned} G(x,u) &= (1-x^2) \left(1 + 2w(1-x^{2N})\right), \\ A(u) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

dostáváme systém, který můžeme studovat bez nutnosti numerických aproximací.

Při  $N = 0$  strukturní funkce  $G$  odpovídá Schwarzschildovu řešení, s rostoucí hodnotou  $N$  dostáváme fotonovou raketu s regulární osou a v limitním případě  $N \rightarrow \infty$  metrika přechází na Schwarzschildovu metriku s kosmickou strunou.

Dosazením (2.24) do (1.26) obdržíme výraz

$$\begin{aligned} 4\pi n_N(x) &= -2w^2(4N+1)(2N+1)(N+1)N x^{4N} \\ &\quad + 4w^2(2N^2+1)(4N-1)N x^{4N-2} \\ &\quad - 2w^2(4N-3)(2N-1)N(N-1) x^{4N-4} \\ &\quad + (2w+1)w(2N+1)^2(N+1)N x^{2N} \\ &\quad - 2(2w+1)w(2N^2+1)(2N-1)N x^{2N-2} \\ &\quad + (2w+1)w(2N-1)(2N-3)N(N-1) x^{2N-4}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tento výraz je možné pomocí (2.15) a (2.16) převést do báze Legendreových polynomů a získat takto vyjádření ve tvaru řady

$$4\pi n(x) = (w^2 + w) \sum_{n=0}^{\infty} 2n \left(2n + \frac{1}{2}\right) (2n+1) P_{2n}(x). \quad (2.26)$$

Protože  $P_k(-1) = (-1)^k$ , tak vyjádřením delta funkce jako řady polynomů dostáváme

$$\delta(x+1) + \delta(x-1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(2n + \frac{1}{2}\right) P_{2n}(x). \quad (2.27)$$

Derivováním obou stran tohoto vztahu dostáváme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} (\delta(x+1) + \delta(x-1)) \right) = \quad (2.28)$$

$$= -\frac{d}{dx} \delta(x+1) + \frac{d}{dx} \delta(x-1) \quad (2.29)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} 2n \left(2n + \frac{1}{2}\right) (2n+1) P_{2n}(x). \quad (2.30)$$

Můžeme tedy určit výslednou formu radiačního profilu fotonové rakety odpovídající metrice Schwarzschildovy černé díry, kterou protíná kosmická struna.

$$4\pi n(x) = -(w^2 + w) \left[ \frac{d}{dx} \delta(x+1) - \frac{d}{dx} \delta(x-1) \right]. \quad (2.31)$$

Zároveň jsme tak podle (1.8) dostali vyjádření tenzoru energie a hybnosti struny na ose.

$$T_{ab} = -(w^2 + w) \left[ \frac{d}{dx} \delta(x+1) - \frac{d}{dx} \delta(x-1) \right] \frac{k_a k_b}{r^2}. \quad (2.32)$$

Obdobným způsobem postupujeme i při konstrukci C-metriky. Aby byly splněny podmínky naší rozšířené třídy Bonnorových raket volíme

$$\begin{aligned} G(x,u) &= (1-x^2) \left( 1 + 2Amx(1-x^{2N}) \right), \\ A(u) &= \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) A. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Systémem počítačové algebry pak obdobně jako v předchozím případě vyhodnotíme radiační profil. Přejdem k Legendreovým polynomům a provedením limitního přechodu pak dostáváme

$$\begin{aligned} 4\pi n(x) &= A^2 m^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2n \left( 2n + \frac{1}{2} \right) (2n+1) P_{2n}(x) \\ &\quad + Am \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( 2n + \frac{3}{2} \right) (2n+2) P_{2n+1}(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Opět využijeme vyjádření delta funkce v podobě řady

$$\delta(x+1) - \delta(x-1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2n + \frac{3}{2} \right) P_{2n+1}(x) \quad (2.35)$$

a využitím vlastností Legendreových polynomů jsme opět schopni dostat odpovídající podobu nekonečné řady

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} (\delta(x+1) - \delta(x-1)) \right) = \quad (2.36)$$

$$= -\frac{d}{dx} \delta(x+1) - \frac{d}{dx} \delta(x-1) \quad (2.37)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( 2n + \frac{3}{2} \right) (2n+2) P_{2n+1}(x). \quad (2.38)$$

Z tohoto výrazu již je jasně vidět tvar radiačního profilu (2.34) a tedy i tenzoru energi a hybnosti (1.8)

$$\begin{aligned} 4\pi n(x) &= -A^2 m^2 \left( \frac{d}{dx} \delta(x+1) - \frac{d}{dx} \delta(x-1) \right) \\ &\quad - Am \left( \frac{d}{dx} \delta(x+1) + \frac{d}{dx} \delta(x-1) \right) \\ &= -Am(Am+1) \frac{d}{dx} \delta(x+1) + Am(Am-1) \frac{d}{dx} \delta(x-1). \end{aligned} \quad (2.39)$$



Další možností je volit strukturní funkce využívající polynomiální schodové funkce, řádu 7 nebo výše, v podobě

$$G(x,u) = (1-x^2) \left( 1 + 2w\mathcal{G}_{(-1,0)}(-\varepsilon) T_{(-1,-1+\varepsilon,1-\varepsilon,1)}(x) \right), \quad (2.40)$$

pro Schwarzschildovo řešení se strunou a

$$G(x,u) = (1-x^2) \left( 1 + 2Amx\mathcal{G}_{(-1,0)}(-\varepsilon) T_{(-1,-1+\varepsilon,1-\varepsilon,1)}(x) \right), \quad (2.41)$$

pro C-metiku. V tomto případě opět pomocí systému počítačové algebry provedeme rozvoj do Legendreových polynomů a po provedení limity dospějeme opět ke stejnému výsledku.

Jako výchozí strukturní funkci  $G$  je ale také možno volit v jiné podobě, to také naznačuje že výsledky nezávisí na volbě přechodu mezi metrikami.

Je možné využít hladkých schodových funkcí a zadefinovat

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(x,u) &= (1-x^2) \left( 1 + 2we^{-\frac{\varepsilon}{1-x^2}} \mathfrak{S}_{(0,1)}(\varepsilon) \right), \\ A(u) &= 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

pro Schwarzschildovu metriku s kosmickou strunou a

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(x,u) &= (1-x^2) \left( 1 + 2Amxe^{-\frac{\varepsilon}{1-x^2}} \mathfrak{S}_{(0,1)}(\varepsilon) \right), \\ A(u) &= A\mathfrak{S}_{(0,1)}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.43)$$

pro C-metiku.

Vypočtením radiačního profilu (1.26) pro tyto strukturní funkce dostáváme pro Schwarzschildovo řešení

$$4\pi n_\varepsilon(x) = -\frac{2w^2\mathfrak{S}_{(0,1)}^2(\varepsilon) p_8(x)}{(x-1)^6(x+1)^6} \varepsilon^2 e^{-\frac{2\varepsilon}{1-x^2}} - \frac{w\mathfrak{S}_{(0,1)}(\varepsilon) q_8(x)}{(x-1)^6(x+1)^6} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{1-x^2}}, \quad (2.44)$$

kde  $p_8(x)$  a  $q_8(x)$  jsou polynomy

$$\begin{aligned} p_8(x) &= 8\varepsilon^2 x^4 - 2x^2 (1-x^2) (11x^2 + 9) \varepsilon \\ &\quad + 3(3x^4 + 8x^2 + 1) (1-x^2)^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

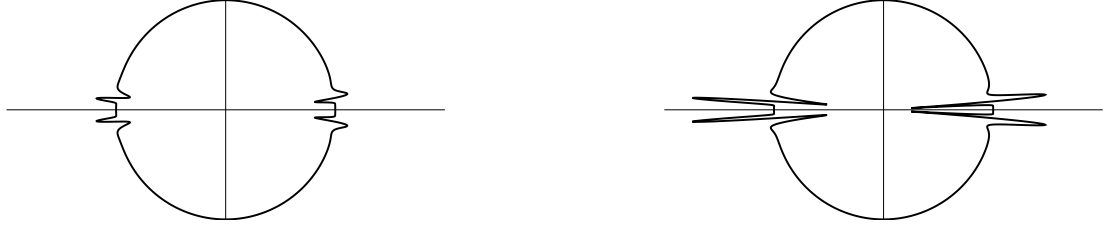
a

$$q_8(x) = p_8(x) - 4\varepsilon^2 x^4 + 2x^2 (1-x^2) (7x^2 + 6) \varepsilon. \quad (2.46)$$

V tomto případě, kvůli exponenciálním členům, není výhodné opět postupovat stejným způsobem a pokoušet se najít rozvoj do Legendreových polynomů. Vzhledem k očekávanému výsledku v podobě distribuce, je vhodné zkoumat funkci  $n_\varepsilon(x)$  jako distribuci a zabývat se jejím působením na testovací funkce v podobě polynomiální báze.

Chování  $n_\varepsilon(x)$  je při limitě  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  pro  $x \in (-1, 1)$  určeno převážně exponenciálními členy, pro malá  $\varepsilon$  tak je možné využít přiblížení

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\varepsilon}{1-x^2}} &\sim e^{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{x+1}}, & \text{pro } x \in (-1, 1); \text{ označované } n_\varepsilon^- \\ e^{-\frac{\varepsilon}{1-x^2}} &\sim e^{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{x-1}}, & \text{pro } x \in (-1, 1); \text{ označované } n_\varepsilon^+ \end{aligned} \quad (2.47)$$



Obrázek 2.1: Radiační profil  $n_\epsilon$  pro případ C-metriky (2.43) s  $A = \frac{1}{10}$  a  $m = \frac{1}{5}$ . Souřadnice  $x$  byla zobrazena jako polární pomocí  $x = \cos(\theta)$  a nulová hodnota radiačního byla posunuta o hodnotu 100 od středu aby bylo možné zobrazit i záporné hodnoty. Levý obrázek je vytvořen pro  $\epsilon = \frac{1}{16}$  a pravý obrázek pro  $\epsilon = \frac{1}{32}$ . Porovnáním obou obrázků je možné vidět zesilování a fokusaci vyzařování podél osy s rostoucí hodnotou  $\epsilon$ .

Pomocí systému počítačové algebry je možné působení distribucí analyticky vyšetřit. Provedením limitního přechodu pak dostáváme pro  $x_0 \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0}^1 x^N n_\epsilon^+(x) dx &= (w^2 + w)N \\ &= -(w^2 + w) \delta'(x + 1) [x^N], \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{x_0} x^N n_\epsilon^-(x) dx &= (-1)^N N(w^2 + w) \\ &= -(w^2 + w) \delta'(x - 1) [x^N]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Jako u přechodu se strukturní funkcí v podobě polynomu (2.31) jsme dostali stejný výsledek: radiační profil v podobě derivace delta funkce. Obdobným způsobem bychom postupovali i v případě C-metriky, a opět bychom dospěli k (2.39).

Pokud bychom chtěli získat jako výsledek C-metriku, která má konickou singularitu pouze na jedné ose, můžeme volit jako strukturní funkci

$$\begin{aligned} G(x, u) &= (1 - x^2) \left( 1 + 2Am(1 + x) (1 - x^{2N}) \right), \\ A(u) &= \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) A. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Protože funkce  $h$  je v  $x = -1$  vymizí, tak podle (2.2) zde bude metrika regulární. Pro radiační profil rozvojem do Legendrových polynomů a provedením limity dostáváme

$$\begin{aligned} 4\pi n(x) &= mA(2mA + 1) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(4k+1)k P_{2k}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(4k+3)(k+1) P_{2k+1}(x) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Využitím rovnic (2.28) a (2.36) tato rovnice získává tvar

$$4\pi n(x) = mA(2mA + 1) \left( \frac{d}{dx} \delta(x + 1) - \frac{d}{dx} \delta(x - 1) \right) + \frac{d}{dx} \delta(x + 1) + \frac{d}{dx} \delta(x - 1) \quad (2.52)$$

$$= 2mA(2mA + 1) \frac{d}{dx} \delta(x + 1) \quad (2.53)$$

Radiační profil a tedy i tenzor energie a hybnosti (1.8) tedy v případě, kdy poloosa  $x = -1$  je regulární má distribuční výraz pouze na  $x = 1$ .

### 3. Dodatek o záporné hmotnosti

Při konstrukci statických prostoročasů v druhé kapitole jsme k zajištění zachování hmotnosti zdroje při limitním procesu museli uvažovat vyzařování nulové tekutiny o záporné energii-hmotě. Přestože v přírodě nebyla pozorována tak, v některých případech v relativistické fyzice může být záporná hmota použita k modelování jevů, jejichž fyzikální podstata je ve skutečnosti odlišná. Podobně jako v případě kosmické struny způsobující konický deficit, které odpovídá kladná lineární hustota, je možné se zabývat strunou způsobující konickou singularitu s přebytkovým úhlem. Takovéto struně by podle jednoduché konstrukce v první kapitole odpovídala záporná lineární hustota. Struna s konickým přebytkem je v [1] diskutována v rámci několika řešení, například jako příčina akcelerace černých děr u C-metriky nebo udržování dvou částic v konstantní vzdálenosti v rámci statického řešení. Záporná hmota má také uplatnění v kosmologii, například [29], kde je možné ji využít jako vysvětlení temné hmoty.

Základní analýzu záporné hmoty v obecné relativitě provedl Bondi [30]. Již z jeho příkladů se jeví, že výskyt záporné hmoty v přírodě však není možný. V takovém případě by totiž dvě částice s opačnými hmotnostmi, které jsou ve výchozím stavu v klidu, začaly samy od sebe zrychlovat ve stejném směru.

# Závěr

V předložené práci jsme se zabývali studiem kosmických strun nacházejících se na ose symetrie v axiálně symetrickém prostoročasu popisujícím dvě rovnoměrně zrychlující černé díry. V první části jsme se seznámili s Robinsonovou-Trautmanovou třídou řešení, mezi která patří Schwarzschildovo i Vaidyaovo a dále ale i prostoročasy fotonových raket a C-metrika, které jsou v práci dále zkoumány.

Dále jsme se zabývali konstrukcí nekonečné tenké kosmické struny a vztahem její lineární hustoty ke konickému deficitu odpovídajícímu síle jejího působení na okolní prostor. Přestože v případě složitějších modelů strun není možné tuto souvislost určit na základě uvažované jednoduché konstrukce, jak je diskutováno v [17] a [16], v tomto případě vede k očekávaným výsledkům.

Jako důležití zástupci Robinsonových-Trautmanových byly uvedeny Kinner-sleyovy a Bonnorovy rakety.

Dále je diskutována Schwarzschildova metrika, kterou protíná kosmická struna. Kosmická struna v tomto případě je narozdíl od C-metricky pouze odstranitelná souřadnicová singularita, ale přesto tato metrika slouží jako užitečný model v další analýze.

Nakonec jsou v první části stručně prezentovány některé aspekty C-metricky a zmíněny interpretace jejích vlastností jejichž důkladná analýza je shrnuta v [1].

V části práce se prezentujeme výsledky [6], uvažujeme uvolněnou třídu Bonnorových raket, kde je uvolněna podmínka na regularitu osy a jsou povoleny záporné hodnoty radiačního profilu. Zabýváme se konstrukcí limitních přechodů prostoročasy raket se stále zužujícími se radiačními profily a metrikami obsahujícími kosmické struny.

Nejdříve se zabýváme dynamickým přechodem mezi těmito prostoročasy. Tento postup, ale neumožňuje analyticky zkoumat vlastnosti výsledných metrik.

Dále je uvažována parametrická posloupnost statických prostoročasů a jejich limitou je konstruován výsledný prostoročas. Při limitním přechodu získáváme tenzor energie a hybnosti nulového prachu soustředěného do osy v podobě derivace delta funkce, tento výsledek je v souladu s teorií o strunách zkoumaných v první kapitole.

Jsou prezentovány 3 různé posloupnosti prostoročasů které vedou ke stejným výsledkům pro C-metricku, nebo pro Schwarzschildovu černou díru prořatou strunou. To naznačuje že výsledek nezávisí na volbě parametrizace. Dále byl vypočten radiační profil, a tedy i tenzor energie a hybnosti, posloupnosti prostoročasů která přechází na C-metricku, u které byla jedna z konických singularit odstraněna.

Ve třetí kapitole se velmi stručně diskutujeme oprávněnost využití záporné hmoty, při konstrukci statických prostoročasů užitě v předchozí části.

# Seznam použité literatury

- [1] GRIFFITHS, J. B. a PODOLSKÝ, J. (2009). *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511635397.
- [2] KOTVYTSKIY, A. T. (2015). Gravitational lensing by straight cosmic strings. *Theoretical and Mathematical Physics*, **184**(1), 1033–1046. ISSN 1573-9333. doi: 10.1007/s11232-015-0315-x. URL <https://doi.org/10.1007/s11232-015-0315-x>.
- [3] ADE, P. A. R., AGHANIM, N., ARMITAGE-CAPLAN, C., ARNAUD, M., ASHDOWN, M., ATRIO-BARANDELA, F., AUMONT, J., BACCIGALUPI, C., BANDAY, A. J. a ET AL. (2014). Planck2013 results. xxv. searches for cosmic strings and other topological defects. *Astronomy and Astrophysics*, **571**, A25. ISSN 1432-0746. doi: 10.1051/0004-6361/201321621. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321621>.
- [4] BELAHCENE, I. (2019). *Searching for gravitational waves produced by cosmic strings in LIGO-Virgo data*. PhD thesis, Orsay, LAL.
- [5] HINDMARSH, M. B. a KIBBLE, T. W. B. (1995). Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, **58**(5), 477–562. ISSN 1361-6633. doi: 10.1088/0034-4885/58/5/001. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/58/5/001>.
- [6] KOFROŇ, D. (2020). On the nature of cosmic strings in black hole spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, **52**(9), 91. ISSN 1572-9532. doi: 10.1007/s10714-020-02741-8. URL <https://doi.org/10.1007/s10714-020-02741-8>.
- [7] VAIDYA, P. (1951). The gravitational field of a radiating star. *Proc. Indian Acad. Sci.*, **33**, 264. doi: 10.1007/BF03173260. URL <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF03173260>.
- [8] ROBINSON, I. a TRAUTMAN, A. (1960). Spherical gravitational waves. *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 431–432. doi: 10.1103/PhysRevLett.4.431. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.4.431>.
- [9] ROBINSON, I., TRAUTMAN, A. a BONDI, H. (1962). Some spherical gravitational waves in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **265**(1323), 463–473. doi: 10.1098/rspa.1962.0036. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1962.0036>.
- [10] KOLÁŘ, I. (2012). *Prostoročasy s fotonovými raketami*. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [11] VON DER GÖNNA, U. a KRAMER, D. (1998). Pure and gravitational radiation. *Classical and Quantum Gravity*, **15**(1), 215–223. doi: 10.1088/0264-9381/15/1/016. URL <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F15%2F1%2F016>.

- [12] BONNOR, W. B. (1996). Another photon rocket. *Classical and Quantum Gravity*, **13**(2), 277–282. doi: 10.1088/0264-9381/13/2/015. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/2/015>.
- [13] VILENKIN, A. (1981). Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, **23**, 852–857. doi: 10.1103/PhysRevD.23.852. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.852>.
- [14] GOTT, III, J. R. (1985). Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions. *Astrophys. J.; (United States)*, **288**:2. doi: 10.1086/162808.
- [15] HISCOCK, W. A. (1985). Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, **31**, 3288–3290. doi: 10.1103/PhysRevD.31.3288. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.3288>.
- [16] ANDERSON, M. (2003). *The mathematical theory of cosmic strings : cosmic strings in the wire approximation*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. Institute of Physics Publishing, Bristol Philadelphia. ISBN 0-7503-0160-0.
- [17] GEROCH, R. a TRASCHEN, J. (1987). Strings and other distributional sources in general relativity. *Phys. Rev. D*, **36**, 1017–1031. doi: 10.1103/PhysRevD.36.1017. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.1017>.
- [18] STEINBAUER, R. a VICKERS, J. A. (2006). The use of generalized functions and distributions in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, **23** (10), R91–R114. doi: 10.1088/0264-9381/23/10/r01. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/r01>.
- [19] ARYAL, M., FORD, L. H. a VILENKIN, A. (1986). Cosmic strings and black holes. *Phys. Rev. D*, **34**, 2263–2266. doi: 10.1103/PhysRevD.34.2263. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.2263>.
- [20] HACKMANN, E., HARTMANN, B., LÄMMERZAHN, C. a SIRIMACHAN, P. (2010). Complete set of solutions of the geodesic equation in the space-time of a schwarzschild black hole pierced by a cosmic string. *Phys. Rev. D*, **81**, 064016. doi: 10.1103/PhysRevD.81.064016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.064016>.
- [21] LEVI-CIVITA, T. (1918).  $ds^2$  einsteiniani in campi newtoniani. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, **27**.
- [22] WEYL, H. (1919). Bemerkung über die axialsymmetrischen lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Annalen der Physik*, **364**(10), 185–188. doi: 10.1002/andp.19193641006. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19193641006>.
- [23] KINNERSLEY, W. a WALKER, M. (1970). Uniformly accelerating charged mass in general relativity. *Phys. Rev. D*, **2**, 1359–1370. doi: 10.1103/PhysRevD.2.1359. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1359>.

- [24] BONNOR, W. (1983). The sources of the vacuum c-metric. *General relativity and Gravitation*, **15**(6), 535–551. doi: 10.1007/BF00759569. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00759569>.
- [25] HONG, K. a TEO, E. (2003). A new form of the c-metric. *Classical and Quantum Gravity*, **20**(14), 3269–3277. doi: 10.1088/0264-9381/20/14/321. URL <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F20%2F14%2F321>.
- [26] STEPHANI, H., KRAMER, D., MACCALLUM, M., HOENSELAERS, C. a HERLT, E. (2003). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 edition. doi: 10.1017/CBO9780511535185.
- [27] PODOLSKÝ, J. C. V., ORTAGGIO, M. a KRTOUŠ, P. (2003). Radiation from accelerated black holes in an anti-de sitter universe. *Phys. Rev. D*, **68**, 124004. doi: 10.1103/PhysRevD.68.124004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.124004>.
- [28] PODOLSKÝ, J. (2008). Photon rockets in the (anti-)de sitter universe. *Phys. Rev. D*, **78**, 044029. doi: 10.1103/PhysRevD.78.044029. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.044029>.
- [29] NÁJERA, S., GAMBOA, A., AGUILAR-NIETO, A. a ESCAMILLA-RIVERA, C. (2021). On negative mass cosmology in general relativity. *Astronomy and Astrophysics*. ISSN 1432-0746. doi: 10.1051/0004-6361/202141394. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202141394>.
- [30] BONDI, H. (1957). Negative mass in general relativity. *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 423–428. doi: 10.1103/RevModPhys.29.423. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.29.423>.