

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Marek Mikoška

Modely kointegrovaných časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Ekonometrie

Děkuji Doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za vedení mojí diplomové práce, cenné rady, připomínky a návrhy při jejím psaní.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 18. dubna 2008

Marek Mikoška

Obsah

Úvod	6
1 Základní pojmy	7
1.1 Náhodné procesy	7
1.2 Grangerova kauzalita v časových řadách a analýza impuls-reakce	10
1.3 Exogenita	11
1.4 Základní modely vícerozměrných časových řad	13
1.5 Nestacionarita a integrované procesy	15
1.6 Funkcionální centrální limitní věta	19
2 Testování jednotkového kořene	22
2.1 Dickey-Fullerovy testy	23
2.2 Zobecněné Dickey-Fullerovy testy	25
2.3 Phillips-Perronovy testy	26
2.4 Testování více parametrů	31
3 Kointegrace	34
3.1 Definice kointegrace	34
3.2 Grangerova věta	37
4 Modely kointegrovaných časových řad	40
4.1 VAR a VMA reprezentace kointegrovaných veličin	40
4.2 ECM reprezentace	42
4.2.1 Odhad error-correction modelu dvoukrokovou metodou	43
4.2.2 Odhad error-correction modelu a testování kointegrace Johansenovou procedurou	44
4.2.3 Volba délky zpoždění p	48
4.2.4 Lineární omezení na β	49
4.2.5 Hypotézy na parametr α a podmíněný model	49
4.3 Triangular reprezentace	52
4.4 Statický regresní model kointegrovaných veličin	54
4.5 ADL reprezentace	55

4.6	Grangerova kauzalita v kointegrovaných systémech	58
5	Numerická aplikace na reálná data	61
5.1	Analýza integrovanosti	63
5.2	Kointegrační analýza vícerozměrného systému	65
5.3	Testování restrikcí na parametr β a testování exogenity	69
5.4	Závěry z vícerozměrné error-correction analýzy	71
5.5	Analýza v jednorovnicovém modelu	72
6	Shrnutí	75

Název práce: Modely kointegrovaných časových řad.

Autor: Marek Mikoška

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

e-mail vedoucího: lachout@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme konceptem kointegrace, který je vhodným nástrojem k analýze nestacionárních procesů. Předkládáme shrnutí nejpoužívanějších testů jednotkového kořene, kterými ověřujeme integrovanost analyzovaných řad. Dále se detailně zaměřujeme na modely, které jsou běžně používány k analýze kointegrovaných časových řad. Nejvíce se věnujeme popisu nejpoužívanějšího error-correction (EC) modelu, který lze použít k modelování většího počtu kointegračních vztahů. Zabýváme se testováním lineárních omezení na kointegrační vztah a dále také testováním slabé exogenity vyšetřovaných řad použitím poměru věrohodností. V rámci jednorovnicové kointegrační analýzy je podrobně popsán autoregressive distributed lags model (ADL). Ilustrujeme přímou souvislost mezi EC a ADL modely. Dále představujeme modely VAR, VMA, Phillipsovu triangular reprezentaci a kointegrační regresi. Zabýváme se vzájemnými vztahy mezi uvedenými modely a shrnujeme výhody a nevýhody jejich použití.

Na závěr ilustrujeme teoretické výsledky na analýze reálných časových řad. Na zvoleném modelu bylo možné provést redukci vektorového error-correction modelu na jednorovnicový ADL model bez ztráty eficeince a ověřit vztah mezi těmito modely. Použitím testů na lineární omezení kointegračního vektoru a testů exogenity a Grangerovy kauzality jsme dokázali přesněji identifikovat model na pozadí ekonomické teorie.

Klíčová slova: kointegrace, error correction model (EC), autoregressive distributed lag model (ADL), kointegrovaný VAR model, exogenita, triangular reprezentace.

Title: Cointegrated Time Series Models.

Author: Marek Mikoška

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Supervisor's e-mail address: lachout@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with the concept of cointegration which represents appropriate tool in the analysis of nonstationary processes. First we summarized most commonly used test for the presence of the unit root in individual time series. Next we concentrate on the models which are commonly used in the cointegration analysis of the time series. We are extensively described error-correction (EC) model which could be used in the analysis of few cointegrating relations. We also pay attention to testing of the linear restrictions on cointegrating relations and testing the hypothesis of weekly exogeneity of examined series by employing likelihood ratio. For the single equation cointegration analysis we described autoregressive distributed lags model (ADL) in detail. We illustrated straight connection between EC and ADL models. Next we introduce the models VAR, VMA, Phillips triangular representation and cointegrating regression. We were concerned with description of relationships between models and we summarized their advantages and disadvantages.

Final we illustrated theoretical results in the analysis of the real time series. In the final choice of model we could reduced vector error-correction model to single equation ADL model without the loss of efficiency and we could verified the relationship between them. By employing the tests of linear restriction on cointegrating relation and tests of exogeneity and Granger causality we achieved the better identification of the model in the background of economic theory.

Keywords: cointegration, error correction model (EC), autoregressive distributed lag model (ADL), cointegrated VAR model, exogeneity, triangular representation.

Úvod

Kointegrační analýza představuje moderní nástroj, kterým lze modelovat dlouhodobý rovnovážný vztah mezi několika nestacionárními proměnnými. Velmi zajímavé výsledky dosahuje v analýze ekonomických časových řad, které často obsahují stochastický trend. V práci jsme vycházeli z diplomových prací Bittner (2005) a Juráška (2007). Kromě přehledného shrnutí základních výsledků jsme se detailněji zabývali vztahy mezi jednotlivými typy kointegračních modelů.

V první kapitole jsou zdefinovány základní pojmy, které jsou v dalším textu používány. Dále jsou shrnuty nejpoužívanější testy jednotkového kořene, neboť tato problematika je velmi úzce spjatá s problematikou kointegrace. V třetí kapitole je čtenáři představen pojem kointegrace, spolu s příslušnou motivací. Zde je také sepsána obecná verze ústřední Grangerovy věty, která popisuje vztah základních kointegračních modelů. Následně se věnujeme popisu základních modelů, které bývají používány v rámci kointegrace. Zmiňujeme se o VAR a VMA modelu, error-correction modelu, Phillipsově triangular reprezentaci a na závěr detailněji popisujeme jednorovnicové modely, zvláště pak model ADL. Nejvíce se samozřejmě zabýváme nejpoužívanějším vektorovým error-correction modelem a dále pak ADL modelem, který je s ním úzce spjatý. Detailně se zabýváme testováním lineárních omezení v kointegračním vztahu a také převody mezi jednotlivými modely.

Na závěr ilustrujeme mnohé teoretické výsledky v praktické části, kde analyzujeme reálná data. Volba dat nám umožnila ilustrovat přechod z vícerozměrného na jednorozměrný model. Také jsme mohli posoudit důležitost ekonomické teorie, která stojí za volbou modelu. Díky použití lineárních omezení na parametry modelu jsme identifikovali problém v nekonzistenci výsledků s jinými analýzami prováděnými na obdobném poptávky po penězích. V našem případě jsme došli k závěru, že v použitých datech je spíše modelován jiný kointegrační vztah, než bylo původně předpokládáno. Praktická část je přínosná vzhledem k ilustraci problémů souvisejících s analýzou a návrhu možných způsobů řešení.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole jsou shrnuty základní definice a pojmy, se kterými se setkáváme v souvislosti s tématem kointegrace. V první části se zabýváme základy náhodných procesů. Zmíníme se o exogenitě a Grangerově kauzalitě. Dále jsou prezentovány některé základní typy vícerozměrných náhodných procesů v případě stacionárních procesů. Na závěr si zavedeme pojmy nestacionárního a integrovaného náhodného procesu a funkcionální centrální limitní větu, která se v tomto textu často využívá při odvození asymptotického asymptotických vlastností.

1.1 Náhodné procesy

V této sekci jsou zdefinovány základní pojmy z náhodných procesů, které bezprostředně souvisí s tématem kointegrace. Většinu pojmů lze nalézt v publikacích Prášková (2004), Arlt (1999) a Lütkepohl (2005).

Definice 1.1. Nechť $T \subset \mathbb{R}$ a (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Rodinu náhodných veličin $\{Y_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) nazýváme *náhodný proces*. Rodinu (m -rozměrných) náhodných vektorů $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) nazýváme *vektorový (m -rozměrný) náhodný proces*.

Náhodný proces s diskrétní množinou časů ($T \subset \mathbb{Z}$ nebo $T = \mathbb{Z}$) nazýváme *časovou řadou*. Někdy budeme náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ pro zjednodušení značit $\{\mathbf{Y}_t\}$.

Definice 1.2. Náhodný proces $\{Y_t, t \in T\}$ se nazývá *striktně stacionární*, jestliže pro libovolné $t_i \in T$, $i = 1, \dots, n$ a libovolné h takové, že $t_{i+h} \in T$, $i = 1, \dots, n$, je rozdělení náhodného vektoru $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ stejné jako rozdělení náhodného vektoru $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h})$.

Definice 1.3. Řekneme, že náhodný proces $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je *slabě stacionární*, jestliže platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mu_t = \mu \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, \\ \text{var}(Y_t) &= \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)^2 = \sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)(Y_{t+h} - \mu_{t+h}) = \gamma_h \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } t, h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Funkce $R(t, s) = \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)$ se nazývá *autokovarianční funkce* procesu $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Funkce μ_t a $\sigma_t^2 = R(t, t)$ z předešlé definice nazýváme *střední hodnotou* a *rozptylem* procesu $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Z definice vyplývá, že autokovarianční funkce $R(t, s)$ slabě stacionárního procesu závisí pouze na rozdílu $t - s$ a jeho rozptyl a střední hodnota je v čase neměnná. Obdobné požadavky obsahuje definice slabé stacionarity pro vícerozměrný náhodný proces.

Definice 1.4. Řekneme, že m -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je *slabě stacionární*, jestliže platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{Y}_t) &= \boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, \\ \text{var}(\mathbf{Y}_t) &= \mathbb{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)'] = \boldsymbol{\Sigma}_t = \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, \\ &\quad \boldsymbol{\Sigma} \text{ je reálná symetrická pozitivně semidefinitní matice,} \\ \text{cov}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t+h}) &= \mathbb{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)(\mathbf{Y}_{t+h} - \boldsymbol{\mu}_{t+h})'] = \boldsymbol{\Gamma}_h \in \mathbb{R}^m \quad \text{pro každé } t, h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je *kovarianční matice* rozměru $(m \times m)$, která má na diagonále rozptyly a mimo diagonálu kovariance jednotlivých náhodných veličin m -rozměrného procesu \mathbf{Y}_t . $\boldsymbol{\Gamma}_h$ z předešlé definice se nazývá *autokovarianční (maticová) funkce* m -rozměrného procesu \mathbf{Y}_t . Pro slabě stacionární m -rozměrný proces $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t})'$ ji lze zapsat následovně:

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = \mathbb{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{bmatrix} \gamma_{11,h} & \gamma_{12,h} & \cdots & \gamma_{1m,h} \\ \gamma_{21,h} & \gamma_{22,h} & \cdots & \gamma_{2m,h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1,h} & \gamma_{m2,h} & \cdots & \gamma_{mm,h} \end{bmatrix},$$

kde $\gamma_{ij,h} = \mathbb{E}(Y_{i,t} - \mu_i)(Y_{j,t+h} - \mu_j)$ pro $h \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, m$.

V praktické analýze časových řad většinou používáme výhradně slabou stacionaritu, pro jejíž ověření stačí odhadovat první dva momenty. Pokud nebude uvedeno jinak, pod pojmem stacionarita budeme rozumět slabou stacionaritu.

Definice 1.5. Řekneme, že m -rozměrný náhodný proces $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je (m -rozměrný) *bílý šum*, pokud pro něj platí:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) &= \mathbf{0}, \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') &= \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon &\text{ je reálná symetrická pozitivně semidefinitní matice,} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s') &= \mathbf{0} \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}, t \neq s. \end{aligned}$$

Stručně budeme zapisovat $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$. Pokud navíc platí $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$, pak proces nazýváme *normální (gaussovský) bílý šum*.

V předešlé definici i dalším textu budeme symbolem $\mathbf{0}$ značit nulový vektor nebo matici příslušných rozměrů.

Definice 1.6. Spojitý náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Wienerův proces*, jestliže splňuje:

- (i) $W_0 = 0$ s. j.,
- (ii) $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojitě trajektorie,
- (iii) pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné časové okamžiky $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ platí:

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (t_1 - t_0) & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (t_k - t_{k-1}) \end{bmatrix} \right)$$

(to znamená, že přírůstky $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $i = 1, \dots, k$ jsou nezávislé normálně rozdělené s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$).

Za povšimnutí stojí, že $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pro $t > 0$. Wienerův proces není slabě stacionární, neboť rozptyl tohoto procesu se mění v závislosti na čase. Uvádíme ještě obdobu této definice pro m -rozměrný Wienerův proces.

Definice 1.7. Necht' $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že spojitý m -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{W}_t, t \geq 0\}$ je m -rozměrný *Wienerův proces*, jestliže splňuje:

- (i) $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$ s. j.,
- (ii) $\{\mathbf{W}_t, t \geq 0\}$ má spojitě trajektorie,
- (iii) pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné časové okamžiky $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ jsou přírůstky $[\mathbf{W}_{t_i} - \mathbf{W}_{t_{i-1}}]$, $i = 1, \dots, k$ nezávislé s m -rozměrným normálním rozdělením. Platí $[\mathbf{W}_{t_i} - \mathbf{W}_{t_{i-1}}] \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t_i - t_{i-1}) \mathbf{I}_m)$ pro $i = 1, \dots, k$.

1.2 Grangerova kauzalita v časových řadách a analýza impuls-reakce

V analýze časových řad se často zajímáme o vzájemné vztahy mezi jednotlivými řadami. Hledáme mezi nimi vzájemné působení a snažíme se zjistit, zda je jedna časová řada užitečná pro předpověď řady druhé. Nejčastěji v souvislosti s kointegrací využíván koncept kauzality, který byl zdefinován v Granger (1969). Vycházel z myšlenky, že pokud je časová řada $\{\mathbf{Y}_t\}$ ovlivňována řadou $\{\mathbf{X}_t\}$, potom by měla řada $\{\mathbf{X}_t\}$ vylepšit predikci řady $\{\mathbf{Y}_t\}$. Pro formální zápis kauzality uvažujeme predikci založenou na minimalizaci střední čtvercové chyby (MSE)¹.

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je m -rozměrný náhodný proces a $\{\mathbf{Y}_t\}$ je n -rozměrný náhodný proces. Množinu, která obsahuje všechny informace dostupné do času t včetně, označme Ω_t . Nechť dále $\Omega_t \setminus \{\mathbf{X}_s, s \leq t\}$ je množina, která obsahuje všechny informace dostupné do času t s výjimkou informací obsažených v minulosti a přítomnosti procesu $\{\mathbf{X}_t\}$. Nechť $\mathbf{Y}_t(h | \Omega_t)$ je optimální předpověď (minimální MSE) procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ o h kroků vpřed konstruovaná v čase t , založená na informacích v množině Ω_t . Řekneme, že proces $\{\mathbf{X}_t\}$ *kauzálně působí v Grangerově smyslu* na proces $\{\mathbf{Y}_t\}$, jestliže pro alespoň jeden z horizontů $h = 1, 2, \dots$ je rozdíl matic

$$\text{MSE}[\mathbf{Y}_t(h | \Omega_t \setminus \{\mathbf{X}_s, s \leq t\})] - \text{MSE}[\mathbf{Y}_t(h | \Omega_t)]$$

pozitivně semidefinitní matice, různá od matice nulové.

V dalším textu budeme místo označení *kauzálně působí v Grangerově smyslu* používat pouze zkrácené označení *kauzálně působí*. Pro jednorozměrné procesy je formulace analogická jako v případě vícerozměrných procesů. Pokud proces $\{\mathbf{X}_t\}$ kauzálně působí na proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ a zároveň proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ kauzálně působí na proces $\{\mathbf{X}_t\}$, potom proces $\{\mathbf{Z}_t\} = \{(\mathbf{X}_t', \mathbf{Y}_t')'\}$ nazýváme *feedback system*. S dalšími pojmy jako *okamžitá kauzalita* (instantaneous causality) se lze podrobněji seznámit v Lütkepohl (2005). Zde je také probírána problematika, která souvisí s definicí kauzality. Pokud bychom měřili kvalitu předpovědi jiným kritériem než MSE, můžeme dostat odlišnou definici kauzality. Dále se v praxi většinou omezujeme na předpovědi lineární. Další problém se týká volby informační množiny Ω_t . V praxi většinou nemáme k dispozici všechny informace. Z tohoto důvodu je velmi časté omezení na množinu $\Omega_t = \{\mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_s, s \leq t\}$.

¹Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je m -rozměrný náhodný proces a množina Ω_t obsahuje všechny informace, které jsou dostupné do času t (včetně). Předpověď procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ konstruovanou v čase t o h kroků dopředu na základě množiny informací Ω_t označme $\mathbf{Y}_t(h | \Omega_t)$. Pak

$$\text{MSE}[\mathbf{Y}_t(h | \Omega_t)] = \text{E}[(\mathbf{Y}_{t+h} - \mathbf{Y}_t(h | \Omega_t))(\mathbf{Y}_{t+h} - \mathbf{Y}_t(h | \Omega_t))'].$$

Další metoda, kterou se vyšetřují vzájemné vztahy mezi časovými řadami ve vícerozměrných systémech, se nazývá *analýza impuls-reakce* (v anglicky psané literatuře má název *impuls-response analysis* nebo také *multiplier analysis*). Zajímá nás vztah mezi dvěma jednorozměrnými časovými řadami v tomto vícerozměrném systému. Analýzou se snažíme zjistit, jakou *reakci* v jedné časové řadě vyvolá *impuls* v druhé časové řadě. Vzhledem k rozsahu práce se tímto typem analýzy nebudeme dále zabývat. Zájemci o tuto problematiku mohou najít podrobnosti v Lütkepohl (2005) nebo Arlt (1999).

Obecně platí, že při analýze kauzality či jiných vztahů mezi náhodnými procesy ve vícerozměrném systému musíme být velmi opatrní. Ve vícerozměrných systémech se vyskytují problémy s nepozorovanými proměnnými, korelací atd. Interpretace výsledků často bývá složitější.

1.3 Exogenita

V dalších kapitolách se velmi často budeme zabývat modely pro časové řady, zvláště v kapitolách o modelech, které souvisí s kointegrací. Proměnné, které jsou modelovány uvnitř systému, nazýváme *endogenní*. V praxi však mohou být ekonomické modely ovlivňovány jinými stochastickými nebo deterministickými procesy, které v modelu nejsou zahrnuty, ale působí z vnějšku. Jedná se o *exogenní proměnné*. Základní pojmy ohledně *exogeneity* bylo potřeba zadefinovat. Kompletní popis je uveden např. Engle a kol. (1983), z něj budeme také vycházet. Uvedeme si definice slabé a silné exogenity.

Mějme n -rozměrný reálný náhodný proces $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbf{\Omega}_0$ označíme matici počátečních hodnot. Většinou máme T pozorování, pak $t = 1, \dots, T$. Dále označme historii procesu $\{\mathbf{X}_t\}$ do času $t-1$ jako $\mathbf{\Omega}_{t-1}^1 = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{t-1})$ a $\mathbf{\Omega}_{t-1} = (\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{\Omega}_{t-1}^1)$. Sdruženou hustotu $D(\mathbf{\Omega}_T^1 | \mathbf{\Omega}_0, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ je vektor neznámých parametrů z prostoru $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$, faktorizujeme jako

$$D(\mathbf{\Omega}_T^1 | \mathbf{\Omega}_0, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^T D(\mathbf{X}_t | \mathbf{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}),$$

kde $D(\mathbf{X}_t | \mathbf{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ je podmíněná hustota za podmínky $\mathbf{\Omega}_{t-1}$. Vektor \mathbf{X}_t rozdělíme na dva podprocesy:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Z}_t \end{bmatrix}, \quad \text{kde } \mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^p, \mathbf{Z}_t \in \mathbb{R}^q, p + q = n.$$

Uvažujme bijektivní transformaci nebo reparametrizaci původních parametrů $\boldsymbol{\theta}$:

$$f : \Theta \rightarrow \Lambda; \quad \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} = f(\boldsymbol{\theta}).$$

a zvolme $\boldsymbol{\lambda}$ tak, že $\boldsymbol{\lambda}' = (\boldsymbol{\lambda}'_1, \boldsymbol{\lambda}'_2)$, kde $\boldsymbol{\lambda}_i$ je rozměru n_i , $n_1 + n_2 = n$.

Definice 1.8. Řekneme, že proces $\{\mathbf{Z}_t\}$ je *slabě exogenní* pro parametr $\boldsymbol{\psi}$ (vektor o k elementech) právě tehdy, když existuje reparametrizace $\boldsymbol{\lambda}' = (\boldsymbol{\lambda}'_1, \boldsymbol{\lambda}'_2)$ taková, že

$$D(\mathbf{X}_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}) = D_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\lambda}_1) D_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\lambda}_2) \quad (1.1)$$

a platí

- (i) $\boldsymbol{\psi}$ je funkcí pouze $\boldsymbol{\lambda}_1$,
- (ii) $\boldsymbol{\lambda}_1$ a $\boldsymbol{\lambda}_2$ jsou tzv. *variation free* (tzn. $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_1 \times \boldsymbol{\Lambda}_2$, kde $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \boldsymbol{\Lambda}_1$ a $\boldsymbol{\lambda}_2 \in \boldsymbol{\Lambda}_2$).

Často se nezajímáme o všechny parametry, ale o nějakou funkci parametru $\boldsymbol{\theta}$, řekněme:

$$f : \boldsymbol{\Theta} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}; \quad \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\psi} = f(\boldsymbol{\theta}).$$

Takovou funkci uvažujeme i v definici 1.8. V anglicky psané literatuře jsou takové funkce nazývány *parameters of interest*. Dále si všimněme, že jsme v definici využívali rozkladu sdružené hustoty na součin podmíněné hustoty $\mathbf{Y}|\mathbf{Z}$ a marginální hustoty \mathbf{Z} . Je vidět, že v případě slabé exogenity procesu $\{\mathbf{Z}_t\}$ je přesná specifikace marginální hustoty nevýznamná pro analýzu, neboť tato marginální hustota závisí pouze na rušivých parametrech (tzv. nuisance parameters). Slabá exogenita bývá využívána k získání eficientních odhadů parametrů při analýze modelu.

Definice 1.9. Řekneme, že proces $\{\mathbf{Z}_t\}$ je *silně exogenní* pro parametr $\boldsymbol{\psi}$ právě tehdy, když je slabě exogenní pro parametr $\boldsymbol{\psi}$ a navíc platí

- (iii) proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ kauzálně nepůsobí na proces $\{\mathbf{Z}_t\}$ v Grangerově smyslu.

Definice silné exogenity má často praktické využití v konstruování předpovědí. Chceme-li konstruovat předpověď v modelu, který obsahuje zpožděné proměnné, musíme být opatrní, neboť existuje riziko zpětné vazby mezi exogenním a endogenním procesem. Tento problém může být odstraněn požadavkem striktní exogenity.

Přidáme-li k definici slabé exogenity podmínku na invarianci parametrů $\boldsymbol{\lambda}_1$ v podmíněném modelu $D_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\Omega}_{t-1}, \boldsymbol{\lambda}_1)$ vzhledem ke změnám v distribuci podmiňující proměnné, dostáváme definici *super exogenity*. Jedná se o velmi silný požadavek, se kterým nebudeme dále pracovat. Všechny uvedené typy exogenity jsou obsáhle popsány v Engle a kol. (1983).

Mimo uvedené typy existují také pojmy *striktní exogenita* a *predeterminovanost* procesu, které souvisí s nezávislostí zkoumaného procesu a nesystematické složky

modelu. Tyto pojmy jsou včetně ilustrace uvedeny v Arlt & Arltová (2007, kapitola 5.3.1). My se jimi dále nebudeme zabývat.

Stejně, jako lze v modelech ověřovat Grangerovu kauzalitu, je možné testovat exogenitu proměnných. V souvislosti s kointegrací je nejčastěji používána slabá exogenita.

1.4 Základní modely vícerozměrných časových řad

Modely kointegrovaných časových řad jsou velmi úzce provázány se základními modely vícerozměrných časových řad, které jsou používány k analýze stacionárních procesů. V následující sekci jsou tyto modely krátce shrnuty. Při zápisu je využíván *operátor zpětného posunutí* (značíme jej L), který je pro libovolnou n -rozměrnou ($n \in \mathbb{N}$) náhodnou posloupnost $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definován následovně:

$$L\mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}_{t-1}, \quad L^k\mathbf{Y}_t = L^{k-1}(L\mathbf{Y}_t) = \mathbf{Y}_{t-k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

V dalším textu využijeme také *operátor k -té difference*, který pro $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme jako:

$$\Delta^k = (1 - L)^k.$$

Vektorový autoregresní proces (VAR)

Mějme n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Řekneme, že tento proces se řídí *vektorovým autoregresním procesem řádu p* , jestliže pro něj platí

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{i=1}^p \Phi_i \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (1.2)$$

kde \mathbf{c} značí $(n \times 1)$ rozměrný vektor konstant, $\Phi_i, i = 1, \dots, p$ jsou $(n \times n)$ rozměrné nenáhodné matice reálných autoregresních koeficientů a $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ je n -rozměrný bílý šum se symetrickou pozitivně definitní varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\varepsilon}$. Vektorový autoregresní proces řádu p značíme $\text{VAR}(p)$. V této práci budeme uvažovat pouze konečný řád autoregrese. Vektor konstant \mathbf{c} umožňuje pracovat s nenulovou střední hodnotou $E(\mathbf{Y}_t)$. V případě, že $E(\mathbf{Y}_t)$ je nulová, budeme používat rovnici (1.2) bez vektoru konstant.

S využitím operátoru zpětného posunutí můžeme $\text{VAR}(p)$ proces přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\Phi(L)\mathbf{Y}_t &= \mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \text{ kde} \\ \Phi(L) &= \mathbf{I}_n - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Pokud je splněna podmínka

$$\det(\mathbf{I}_n - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p) \neq 0 \text{ pro } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

říkáme, že je splněna *podmínka stability*. Stabilní VAR(p) proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární. Podrobněji se stabilními VAR procesy zabývá Hamilton (1994) v 10. kapitole.

Vektorový proces klouzavých průměrů (VMA)

Řekneme, že n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se řídí *vektorovým procesem klouzavých součtů řádu q* , jestliže pro něj platí:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{i=0}^q \Theta_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}, \quad (1.5)$$

kde \mathbf{c} značí $(n \times 1)$ rozměrný vektor konstant, $\Theta_i, i = 1, \dots, q$ jsou $(n \times n)$ rozměrné nenáhodné matice reálných koeficientů, $\Theta_0 = \mathbf{I}_n$ a $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ je n -rozměrný bílý šum se symetrickou pozitivně definitní varianční maticí $\Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Vektorový proces klouzavých součtů (*vector moving average*) řádu q značíme VMA(q). V této práci nás bude zajímat pouze konečný řád q .

Proces lze opět zapsat s využitím operátoru zpětného posunutí:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_t &= \mathbf{c} + \Theta(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \text{ kde} \\ \Theta(L) &= \mathbf{I}_n + \Theta_1 L + \Theta_2 L^2 + \dots + \Theta_q L^q.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Pokud je splněna podmínka

$$\det(\mathbf{I}_n + \Theta_1 z + \Theta_2 z^2 + \dots + \Theta_q z^q) \neq 0 \text{ pro } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}, \quad (1.7)$$

je proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ *invertibilní*. Lze jej invertovat z VMA procesu na VAR proces. To znamená, že k operátoru $\Theta(L)$ existuje *inverzní operátor* $\Theta(L)^{-1}$ takový, že $\Theta(L)^{-1}\Theta(L) = \mathbf{I}_n$. Označíme-li jej $\Phi(L)$, pak má tvar $\Theta(L)^{-1} = \Phi(L) = \mathbf{I}_n + \Phi_1 L + \Phi_2 L^2 + \dots$, kde $\{\Phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ je absolutně sčítatelná posloupnost $(n \times n)$ rozměrných matic (pro prvky $\phi_{kl,i}$ matic Φ_i platí $\sum_{i=1}^{+\infty} |\phi_{kl,i}| < +\infty$ pro $k, l = 1, \dots, n$). Detailněji se VMA procesy zabývá Lütkepohl (2005) v 11. kapitole.

Proces VARMA(p, q)

Jedná se o *smíšený vektorový proces*, jehož speciálním případem je proces VAR i proces VMA. Místo označení *vektorový autoregresní proces klouzavých průměrů řádu p, q* budeme používat běžné značení VARMA(p, q) proces. Mějme n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Řekneme, že tento proces se řídí modelem VARMA(p, q), kde p a q jsou konečná, jestliže pro něj platí:

$$\sum_{i=0}^p \Phi_i \mathbf{Y}_{t-i} = \mathbf{c} + \sum_{i=0}^q \Theta_i \varepsilon_{t-i}. \quad (1.8)$$

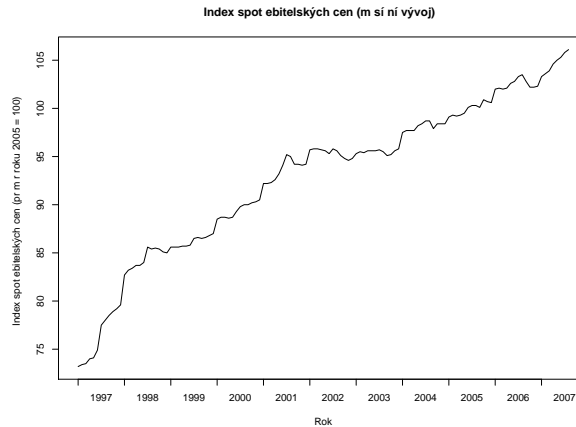
Značení a význam symbolů v tomto zápisu je stejný jako v zadefinování procesů VAR a VMA, navíc $\Phi_0 = \mathbf{I}_n$. Z rovnice (1.8) je vidět, že VARMA(p, q) vychází z VAR(p) procesu (1.2), kde je chybová složka ε_t nahrazena VMA procesem řádu q . Opět s využitím operátoru zpětného posunutí lze VARMA proces přepsat:

$$\begin{aligned} \Phi(L)\mathbf{Y}_t &= \mathbf{c} + \Theta(L)\varepsilon_t, \text{ kde} \\ \Phi(L) &= \mathbf{I}_n - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p \text{ a} \\ \Theta(L) &= \mathbf{I}_n + \Theta_1 L + \Theta_2 L^2 + \dots + \Theta_q L^q. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Operátory $\Phi(L)$ a $\Theta(L)$ se někdy v literatuře označují jako *autoregresní operátor* a *operátor klouzavých součtů*. V této sekci jsme u náhodných procesů uvažovali obecně $t \in \mathbb{Z}$. Velmi často není nekonečná historie procesu k dispozici, a proto budeme někdy místo procesu $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ uvažovat pouze $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}, t \geq -k\}$, kde $k \geq 0$ a $\mathbf{Y}_{-k}, \dots, \mathbf{Y}_0$ jsou počáteční hodnoty náhodného vektoru.

1.5 Nestacionarita a integrované procesy

V praxi bývá často stacionarita, kterou jsme zavedli v definicích 1.3 a 1.4, porušena. *Nestacionaritu* procesu může způsobit například v čase se měnící střední hodnota nebo rozptyl. Zvláště ekonomické časové řady bývají často nestacionární. Na obrázku 1.1 je ukázka měsíčního vývoje indexu spotřebních cen v České republice. Typický je rostoucí trend, který může být způsoben nenáhodnou trendovou složkou nebo také se může jednat o stochastický trend (např. vychýlená náhodná procházka, o které se zmíníme později). V případě nenáhodné trendové složky lze trend nalézt jednoduše regresí a další průběh je velmi dobře predikovatelný. Takový proces nazýváme *trendově stacionární* (TSP). V případě stochastického trendu se využívá diferencování procesu k dosažení stacionarity. Takový proces pak nazýváme *diferenčně stacionární* (DSP). Podrobněji se těmito pojmy věnuje Bittner (2005) a Juráška (2007).



Obrázek 1.1: Vývoj indexu spotřebních cen v České republice od ledna roku 1997 do srpna roku 2007 (průměr roku 2005 = 100).

V souvislosti s tématem kointegrace se budeme zabývat porušením stacionarity, které je způsobeno integrovaností procesu.

Definice 1.10. Nechtě $d \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že jednorozměrný náhodný proces $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, který neobsahuje deterministickou složku, je *integrovaný řádu d* , jestliže $\{\Delta^d Y_t\}$ je slabě stacionární proces, ale proces $\{\Delta^{d-1} Y_t\}$ slabě stacionární není. Značíme $\{Y_t\} \sim I(d)$.

Integrovaný proces je tedy diferencně stacionární, k získání stacionarity je potřeba jej d -krát diferencovat. Při označení $\{Y_t\} \sim I(0)$ máme na mysli, že se jedná o slabě stacionární proces. Otázkou je, jak zavést definici integrovanosti pro vícerozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Jednou možností je, že n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, \dots, Y_{n,t})'\}$ je *integrovaný řádu d* , jestliže alespoň jedna jeho složka $\{Y_{k,t}\}$ je integrovaná řádu d . Častější je ale pojetí, že proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ je *integrovaný řádu d* , jestliže všechny jeho složky jsou integrované řádu d . S touto definicí budeme pracovat i v této práci.

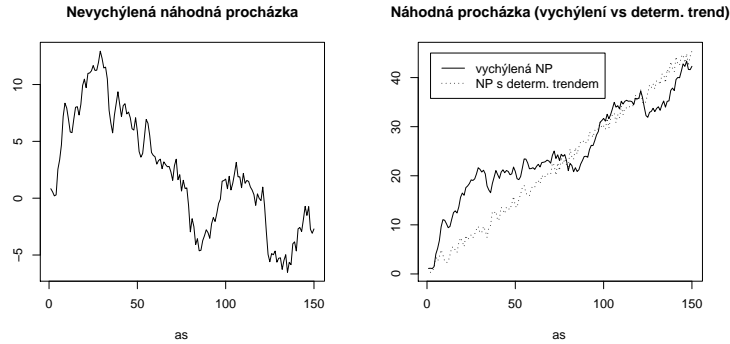
Typickým příkladem integrovaného procesu je *náhodná procházka* (random walk), která se řídí modelem:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (1.10)$$

Pokud ještě do modelu zahrneme konstantní člen μ , dostaneme *vychýlenou náhodnou procházku* (random walk with drift):

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ kde } \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Ukázka těchto dvou modelů je na obrázku 1.2. Zde je také zobrazen rozdíl mezi vychýlenou náhodnou procházkou a modelem, který obsahuje pouze deterministický trend.



Obrázek 1.2: Náhodná procházka generovaná gaussovským bílým šumem. Vlevo bez vychýlení: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Vpravo je srovnání vychýlené náhodné procházky ($Y_t = 0,3 + Y_{t-1} + \varepsilon_t$) s procesem, který obsahuje pouze deterministický trend a chybovou složku ($Y_t = 0,3t + \varepsilon_t$).

Zkusme přepsat rovnici (1.11) pro situaci, kdy proces začíná v čase $t = 1$, pozorujeme jej do času n a počáteční hodnota $Y_0 = 0$. Dostáváme rovnici:

$$Y_t = \mu t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \text{ kde } \mu \in \mathbb{R}, t = 1, \dots, n.$$

Z tohoto přepisu je dobře vidět, že $E(Y_t) = \mu t$ a $\text{var}(Y_t) = t\sigma_\varepsilon^2$. Pro $t \rightarrow \infty$ má střední hodnota a rozptyl procesu $\{Y_t\}$ nevlastní limitu. Zřejmé je porušení stacionarity u tohoto procesu.

Náhodnou procházku lze vyjádřit jako AR(1) model, který obsahuje *jednotkový kořen* v autoregresním operátoru tohoto modelu. Přepisem náhodné procházky (1.10) dostaneme následující autoregresní model:

$$\begin{aligned} Y_t - \phi Y_{t-1} &= \varepsilon_t, \quad \phi = 1 \\ \Delta Y_t &= (1 - L) Y_t = \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Autoregresní operátor u tohoto modelu je tvaru $\Phi(L) = (1 - \phi L) = (1 - L)$. Je narušena podmínka stability (v tomto případě má podmínka tvar $\Phi(z) \neq 0$ pro $|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$), neboť polynom $\Phi(z) = (1 - z)$ má *jednotkový kořen* $z = 1$. Je zřejmé, že použitím první diference na uvedenou náhodnou procházku dostáváme stacionární proces. Tato náhodná procházka je tedy $I(1)$ a je diferencně stacionární. Na náhodné procházce (1.10) je také názorně vidět, jak jsou Y_t a Y_{t+s} velmi silně korelované i pro větší horizont s . Uvažujme opět počáteční hodnotu $Y_0 = 0$. Za použití $\text{var}(Y_t) = t\sigma_\varepsilon^2$, $E(Y_t) = 0$ a přepisu $Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$, $t \in \mathbb{N}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{cor}(Y_t, Y_{t+s}) &= \frac{\text{E} \left[\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i \right) \left(\sum_{j=1}^{t+s} \varepsilon_j \right) \right]}{\sqrt{\text{var}(Y_t)} \sqrt{\text{var}(Y_{t+s})}} \\ &= \frac{t \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 \sqrt{t^2 + ts}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Uvažujme obecněji proces $\{Y_t\} \sim I(d)$, jehož d -tá diference se řídí jedno-rozměrným stacionárním a invertibilním $ARMA(p, q)$ modelem. Pak jej lze zapsat ve formě:

$$\begin{aligned} \Phi(L)\Delta^d Y_t &= \Theta(L)\varepsilon_t, \text{ kde} & (1.12) \\ \Phi(L) &= 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p \text{ a} \\ \Theta(L) &= 1 - \Theta_1 L - \Theta_2 L^2 - \dots - \Theta_q L^q. \end{aligned}$$

Opět předpokládáme $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ a pro autoregresní operátor a operátor klouzavých součtů platí:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(z) \neq 0 \\ \Theta(z) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ pro } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}.$$

V tomto případě se proces Y_t nazývá *autoregresní integrovaný proces klouzavých součtů*. Značíme jej $ARIMA(p, d, q)$, kde p je řád autoregrese, q je řád u operátoru klouzavých součtů a d je řád integrovanosti. Často se o tomto procesu mluví jako o procesu s *jednotkovými kořeny*. Důvodem je přítomnost jednotkových kořenů ve výrazu

$$\chi(L) = \Phi(L)\Delta^d,$$

který vystupuje na levé straně v (1.12). Platí totiž:

$$\chi(z) = \Phi(L)(1 - z)^d = 0 \text{ pro } z = 1.$$

S procesy $ARIMA$ se lze podrobněji seznámit v Cipra (1986). Náhodná procházka a také další integrované procesy v sobě obsahují *náhodný (stochastický) trend*. Obecně lze tyto procesy rozložit na několik složek. Mějme proces $ARIMA(p, 1, q)$ tvaru (1.12), kde $d = 1$. Pak pomocí odvození, které lze najít např. v Juráška (2007, Lemma 1.1), dostáváme následující dekompozici:

$$Y_t = \underbrace{\Psi(1) \sum_{i=1}^t \varepsilon_i}_{\text{stochastický trend}} + \underbrace{\Psi^*(L)\varepsilon_t}_{\text{stacionární proces}} + \underbrace{\Psi^*(L)\varepsilon_0}_{\text{počáteční hodnota}}. \quad (1.13)$$

Využili jsme rozkladu

$$\Phi^{-1}(L) \Theta(L) = \Psi(L) = (1 - L)\Psi^*(L) + \Psi(1),$$

kde $\Psi^*(L) = (1 - L)^{-1}[\Psi(L) - \Psi(1)]$. Korektnost tohoto přepisu bude zaručena podmínkami, že polynomy $\Psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i z^i$ a $\Phi(z)$ mají všechny kořeny vně jednotkového kruhu. Rozklad (1.13) je znám jako *Beveridge-Nelsonova dekompozice*. První sčítanec rozkladu bývá také někdy označován jako *long-run komponenta*, neboť je i v budoucnosti v procesu přítomen. Naopak druhý sčítanec bývá označován jako *short-run komponenta*, jejíž vliv na Y_{t+k} s rostoucím k konverguje k nule. Jedná se o kauzální lineární proces. Počáteční hodnota je fixní náhodná veličina.

Už z vlastností náhodné procházky a ARIMA procesů je vidět, že k analýze těchto řad je nutno přistupovat velmi opatrně. Testování integrovanosti se budeme věnovat v druhé kapitole. Závěrem této sekce si ještě krátce přiblížíme pojem *zdánlivá regrese*. Opět jde o ukázkou obtíží spojených s analýzou integrovaných časových řad. Uvažujme regresi

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t, \quad (1.14)$$

kde w_t je stacionární chybová složka. Procesy $\{Y_t\}$ a $\{X_t\}$ jsou nezávislé a integrované řádu 1:

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \varepsilon_t^X, \text{ kde } \varepsilon_t^X \sim \text{WN}(0, \sigma_X^2), \\ \Delta Y_t &= \varepsilon_t^Y, \text{ kde } \varepsilon_t^Y \sim \text{WN}(0, \sigma_Y^2). \end{aligned}$$

Teoreticky i pomocí simulací bylo zjištěno, že OLS odhad v tomto případě poukazuje na *zdánlivou regresi* mezi X_t a Y_t , přestože jsou vzájemně nezávislé. Bylo ukázáno, že t -statistika asymptoticky vždy zamítá hypotézu $\beta = 0$. Fakticky tato statistika diverguje pro $t \rightarrow \infty$. V anglicky psané literatuře bývá problém nazýván *spurious regression*. Teoretický důkaz tohoto fenoménu lze nalézt v Phillips (1986), zde je důkaz i pro obecnější případ $Y_t = \alpha + \mathbf{X}_t' \beta + w_t$, kde \mathbf{X}_t je m -rozměrný vektor, který je $I(d)$. α a β jsou koeficienty příslušných rozměrů.

1.6 Funkcionální centrální limitní věta

Při testování jednotkového kořene se využívá *funkcionální centrální limitní věta* k odvození asymptotických vlastností. Zde je shrnuta pouze základní myšlenka. Mnohé předpoklady se dají uvolnit, což lze vidět např. v Juráška (2007). Mějme jedno-rozměrný náhodný proces $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kde $\varepsilon_t \sim \text{i. i. d.}$ s nulovou střední hodnotou a s rozptylem $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

Z centrální limitní věty víme, že platí² $\sqrt{T} \bar{\varepsilon}_T \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, kde $\bar{\varepsilon}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t$. Pro $r \in [0, 1]$ zaveďme veličinu $X_T(r)$ následovně:

$$X_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t, \quad (1.15)$$

kde $\lfloor Tr \rfloor$ značí největší celé číslo, které je rovno nebo menší než Tr . Opět z centrální limitní věty dostáváme

$$\frac{\sqrt{T}}{\sigma_\varepsilon} X_T(r) = \frac{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}}{\sigma_\varepsilon \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{\lfloor Tr \rfloor}} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, r) \text{ pro } \forall r \in [0, 1].$$

Dále není náročné ověřit, že pro libovolné $r_1, r_2 \in [0, 1]$ takové, že $r_1 < r_2$ platí

$$\frac{\sqrt{T}}{\sigma_\varepsilon} [X_T(r_2) - X_T(r_1)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, r_2 - r_1)$$

a pro libovolné r_1, \dots, r_4 takové, že $r_1 < r_2 \leq r_3 < r_4$ jsou náhodné součty $[X_T(r_2) - X_T(r_1)]$ a $[X_T(r_4) - X_T(r_3)]$ nezávislé. Pomocí centrální limitní věty se tedy dá ukázat konvergence konečně rozměrných distribucí $X_T(r) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(r)$ pro $r \in [0, 1]$. Všimněme si, že $X_r(\cdot)$ je po částech konstantních náhodná funkce se skoky v bodech t/T , $t = 1, \dots, T - 1$. Je tedy elementem prostoru $D[0, 1]$, což je prostor reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$, které jsou zprava spojitě, a existuje konečná levostranná limita v každém bodě intervalu $(0, 1]$. Vlastnosti prostoru $D[0, 1]$, který je vybaven Skorochodovou metrikou, jsou shrnuty ve 3. kapitole v Billingsley (1968). Zde je také ukázána těsnost posloupnosti $\left\{ \sqrt{T} \sigma_\varepsilon^{-1} X_T \right\}$ v $D[0, 1]$.

Na základě těchto vlastností můžeme psát

$$\frac{\sqrt{T}}{\sigma_\varepsilon} X_T(\cdot) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W(\cdot) \text{ na } D[0, 1]. \quad (1.16)$$

Posloupnost náhodných funkcí $\left\{ \frac{\sqrt{T}}{\sigma_\varepsilon} X_T(r), r \in [0, 1] \right\}$ konverguje v distribuci k Wienerovu procesu $\{W(r), r \in [0, 1]\}$ na $D[0, 1]$ pro $T \rightarrow \infty$. Tento výsledek bývá často označován jako *funkcionální centrální limitní věta* (nebo také *Donskerova věta*). Ukázali jsme pouze základní ideu. Přesné znění a důkaz je uveden v Billingsley (1968, věta 16.1). V této knize se může čtenář seznámit podrobněji s celou problematikou a zmiňovanými pojmy. V ukázce této základní verze jsme uvažovali, že ε_t jsou i. i. d. Tento omezující předpoklad se dá uvolnit, jak je možné vidět v Juráška (2007) nebo v kapitole 17.5 v Hamilton (1994), kde je zobecnění na vektor chyb, jehož složky jsou vzájemně korelované (autokorelované).

²Symbolem $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ značíme *konvergenci v distribuci*.

Pro náhodné funkce můžeme zavést také konvergenci v pravděpodobnosti. Nechť $\{G_t(\cdot)\}$ je posloupnost náhodných funkcí a $G(\cdot)$ je náhodná funkce, všechny jsou definované na intervalu $[0, 1]$. Pak říkáme, že G_t konverguje v pravděpodobnosti ke G ($G_t \xrightarrow{\mathcal{P}} G$) na intervalu $[0, 1]$, jestliže

$$\sup_{s \in [0,1]} |G_t(s) - G(s)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} 0.$$

Důležitá vlastnost, která je často využívána v souvislosti s odhadem jednotkového kořene, je zachování konvergence při spojitým zobrazení. Věta, která je využívána, se nazývá *continuous mapping theorem*.

Věta 1.11. *Nechť $\{G_t(\cdot)\}$ je posloupnost náhodných funkcí a $G(\cdot)$ je náhodná funkce. Nechť dále h je spojitý funkcionál. Pak platí:*

$$G_t(\cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} G(\cdot) \implies h(G_t(\cdot)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} h(G(\cdot)). \quad (1.17)$$

Důkaz. Je uveden v 5. kapitole v Billingsley (1968). □

V uvedené knize je také zobecněná verze, která povoluje body nespojitosti u funkcionálu h . Funkcionálem v této větě může být např. druhá mocnina náhodné funkce nebo také integrál z náhodné funkce. S pomocí těchto výsledků jsou konstruovány mnohé asymptotické rozdělení testových statistik při testování jednotkového kořene.

Funkcionální centrální limitní věta má také vícerozměrnou analogii. Ta bývá využívána při testování kointegrace. Postup odvození je analogický jako v jedno-rozměrném případě. Nechť $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ je m -rozměrný náhodný proces, který je stacionární, ε_t jsou i. i. d. s nulovým vektorem středních hodnot a s varianční maticí Σ_ε . Analogicky se vzorcem (2.1) zavádíme:

$$\mathbf{X}_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t. \quad (1.18)$$

Pro tuto statistiku dojdeme k následujícímu výsledku *vícerozměrné funkcionální centrální limitní věty*:

$$\sqrt{T} \Sigma_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}_T(\cdot) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{W}(\cdot). \quad (1.19)$$

Opět lze uvolnit předpoklady zobecněním pro autokorelované procesy ε_t . Tento výsledek je za obecnějších předpokladů ukázán v Phillips (1987a, věta 2.2).

Kapitola 2

Testování jednotkového kořene

Vzhledem k tomu, že ekonomické časové řady jsou velmi často integrované a obsahují stochastický trend, bylo nutné najít metodiku, jak testovat, zda je přítomný jednotkový kořen. Touto problematikou se podrobně zabývaly už diplomové práce Juráška (2007) a Bittner (2005). Jedná se o velmi široké téma, kterému se věnovali také mnohé knihy a články. Vzhledem k tomu, že testování jednotkového kořene není základním tématem této práce, bude celá následující kapitola vycházet ze zmíněných prací mých kolegů, obzvláště pak z 2. kapitoly Juráška (2007). Shrneme si pouze základní výsledky, které budou použity v praktické části této diplomové práce.

Byly vyvinuty různé přístupy k testování jednotkového kořene. Velmi často bývají používány *Dickey-Fullerovy testy* [Dickey & Fuller (1979)]. První testy byly vyvinuty za velmi striktních předpokladů na chybový člen ε_t (další omezení bylo i na počáteční hodnotu $Y_0 = 0$ s. j.). Požadavek $\varepsilon_t \sim \text{i. i. d. } N(0, \sigma^2)$ je u ekonomických časových řad v praxi většinou nesplnitelný. Proto bylo potřeba zobecnit tyto předpoklady pro širší třídu chybových složek. *Rozšířené Dickey-Fullerovy testy* (ADF testy podle označení *augmented Dickey-Fuller tests*) umožňují pracovat s bohatší autokorelační strukturou. Neparametrickou úpravu testových kritérií u standardních Dickey-Fullerových testů provedli Phillips a Perron [Phillips (1987b), Phillips & Perron (1988)]. Tyto testy se někdy nazývají *Phillips-Perronovy testy*, které ještě více uvolnily předpoklady na chybovou složku a počáteční hodnoty procesu. Zmíněné zobecnění DF-testů umožnily také jednodušší rozšíření modelu o přebytečné parametry (nuisance parameters). Uvedené testy používáme v praktické části této práce a krátce je zde shrneme.

Další metodou testování je například testování *rozptylovým poměrem* [Cochrane (1988), Lo & MacKinlay (1988)], *Sargan-Bhargavův test* [Sargan & Bhargava (1983)], a mnohé další. Pro obecnější přehled o těchto testech čtenáři doporučujeme některou z rozsáhlejších knih o časových řadách [Hamilton (1994) apod.].

2.1 Dickey-Fullerovy testy

Mějme proces $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Pro $t \in \mathbb{N}$ uvažujme následující modely:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

$$Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.2)$$

$$Y_t = \mu + \beta t + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.3)$$

V článku Dickey & Fuller (1979) byl používán předpoklad, že $Y_0 = 0$ a $\{\varepsilon_t\}$ je posloupnost nezávislých normálně rozdělených proměnných s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2 . Chceme odhadnout parametr α na základě pozorování Y_1, \dots, Y_T , $T \in \mathbb{N}$. Nejnázornější je ukázka na modelu 2.1. Metodou nejmenších čtverců dostaneme pro parametr α odhad

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^T Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2}. \quad (2.4)$$

Chceme testovat hypotézu

$$\alpha = 1. \quad (2.5)$$

Použijeme-li jako testovací kritérium běžnou t -statistiku, pak za platnosti hypotézy (2.5) není asymptotické rozdělení této statistiky normální ani symetrické. Dickey a Fuller pro toto testování jednotkového kořene odvodili asymptotické rozdělení pro statistiku

$$T(\hat{\alpha} - 1) = \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_{t-1} \varepsilon_t}{T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2} \quad (2.6)$$

a pro t -statistiku

$$t_\alpha = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} = \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} s^{-1} (\hat{\alpha} - 1), \quad (2.7)$$

$$\text{kde } s^2 = (T - 1)^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{\alpha} Y_{t-1})^2.$$

Označením $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$ myslíme standardní OLS chybu odhadovaného koeficientu $\hat{\alpha}$.

K odvození asymptotických vlastností těchto statistik je využívána funkcionální centrální limitní věta a continuous mapping theorem, které jsme ilustrovali v sekci 1.6. Vezměme v úvahu například jmenovatel u statistiky (2.6). S využitím

$Y_0 = 0$ a rozpisu $Y_t = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t$ lze zadefinovat náhodnou funkci $X_T(r)$ obdobně jako (2.1):

$$X_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\lfloor Tr \rfloor} \varepsilon_t \quad \text{pro } r \in [0, 1].$$

Víme, že $\frac{\sqrt{T}}{\sigma} X_T(r) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(r)$ pro $r \in [0, 1]$. S využitím continuous mapping theorem dostáváme následující vztah:

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2 &= \sigma^2 \sum_{t=1}^T \int_{(t-1)/T}^{t/T} \frac{1}{T\sigma^2} Y_{\lfloor Tr \rfloor}^2 dr \\ &= \sigma^2 \int_0^1 \frac{T}{\sigma^2} X_T^2(r) dr \\ &\xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr. \end{aligned}$$

Tato jednoduchá ukázka využívala striktní předpoklady, které jsme uvedli výše. Stejný výsledek se dá ale ukázat i za uvolněných předpokladů, které budou uvedeny později. Podobnými úpravami byly odvozeny následující asymptotické vlastnosti zkoumaných statistik:

$$\begin{aligned} T(\hat{\alpha} - 1) &\xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(1/2)(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}, \\ t_\alpha &\xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(1/2)(W(1)^2 - 1)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Tyto výsledky jsou značně důležité z teoretického hlediska, ale nelze je použít ke konstrukci kritických hodnot. Kritické hodnoty byly zkonstruovány pomocí numerických metod jako např. Monte Carlo simulace. Pro zmíněné testy byly poprvé publikovány v Fuller (1976). Označme odhad parametru α v modelu (2.2) (resp. (2.3)) jako $\hat{\alpha}_\mu$ (resp. $\hat{\alpha}_{\mu\beta}$). Obdobně byly odvozeny asymptotické výsledky pro testování pomocí statistik $T(\hat{\alpha}_\mu - 1)$, t_α^μ , $T(\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1)$ a $t_\alpha^{\mu\beta}$. Testové statistiky a detaily ohledně těchto statistik lze nalézt v Dickey & Fuller (1979). Velmi přehledně jsou shrnuty také v Hamilton (1994, kap. 17.4).

V případě tohoto parametrického testování jsou dané asymptotické vlastnosti závislé na přebytech parametrech. Např. asymptotická distribuce odhadu $\hat{\alpha}_\mu$ v modelu (2.2) závisí na tom, zda se skutečný DGP (data generating process) řídí modelem (2.1) nebo (2.2).

2.2 Zobecněné Dickey-Fullerovy testy

Jak bylo zmíněno, v praxi potřebujeme testovat jednotkový kořen v případě obecnější autokorelační struktury. Jednou z možností je použít k testování *zobecněné Dickey-Fullerovy testy* (označované ADF testy podle augmented Dickey Fuller tests), které dovolují případ, kdy $\{\Delta Y_t\}$ mají stacionární $AR(p)$ reprezentaci (např. $\Phi_p(L)\Delta Y_t = \varepsilon_t$). Při neznámém p je potřeba jej odhadnout. Některé postupy uvedeny v Hamilton (1994, kap. 17.7).

Testování pak vychází z modelů:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (2.8)$$

$$Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (2.9)$$

$$Y_t = \mu + \beta t + \alpha Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (2.10)$$

kde $\{\varepsilon_t\}$ je i. i. d. posloupnost s nulovou střední hodnotou, konečným rozptylem σ^2 a konečnými čtvrtými momenty. Máme T pozorování a počáteční hodnoty Y_{-p+1}, \dots, Y_0 . Testujeme hypotézu $\alpha = 1$. Odvození a asymptotické vlastnosti těchto testů lze nalézt rovněž v Hamilton (1994, kap. 17.7). Opět jsou využity analogie statistik (2.6) a (2.7). V těchto modelech se navíc musíme vypořádat s odhady parametrů $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Statistika $T(\hat{\alpha} - 1)$ závisí na těchto odhadech. Said & Dickey (1984) dále ještě zobecnili ADF pro model $Y_t = \alpha Y_{t-1} + u_t$, kde u_t je stacionární a invertibilní ARMA proces.

Otázkou je, jak zvolit délku zpoždění p . Často se užívají pravidla na základě informačních kritérií. Hledáme minimální hodnotu funkce, kterou dané kritérium využívá. Nejčastěji bývají využívány:

- Akaikeho informační kritérium (AIC)

$$AIC(m) = \ln \tilde{\sigma}^2 + \frac{2m}{T}, \quad m = 0, \dots, M,$$

- Schwarzovo informační kritérium (SC)

$$SC(m) = \ln \tilde{\sigma}^2 + \frac{m \ln T}{T}, \quad m = 0, \dots, M,$$

- Hannan-Quinnovo informační kritérium (HQ)

$$HQ(m) = \ln \tilde{\sigma}^2 + \frac{2m \ln \ln T}{T}, \quad m = 0, \dots, M,$$

kde $\hat{\sigma}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ pro příslušný model. Velikost výběru značíme T . Více podrobností o těchto kritériích a také další možnosti odhadu p jsou k nalezení v Maddala & Kim (1998, kap. 3.6.2).

2.3 Phillips-Perronovy testy

Omezující předpoklady, potíže s přebytečnými parametry (zvláště rozptylu chybového členu), odhad zpoždění p a další úskalí zmíněných testů se snažili vyřešit Phillips (1987b) a Phillips & Perron (1988). Vycházeli ze standardního Dickey-Fullerova testu, ale testové statistiky neparametricky rozšířili. Test se nazývá neparametrický, neboť není požadována žádná parametrická specifikace chybového procesu. Následující shrnutí vychází ze zmíněných článků a diplomové práce Juráška (2007), který se těmito testy zabýval.

Uvažujme proces $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, který je generovaný modelem

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, t \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

$$\alpha = 1. \quad (2.12)$$

Volnější je předpoklad na Y_0 , které může být náhodná veličina s danou distribucí nezávislou na velikosti výběru T . Připouštíme i speciální případ $Y_0 = c$ s. j., kde c je konstanta. Připomeňme, že proces (2.11) lze za podmínky (2.12) zapsat ve formě $Y_t = Y_0 + S_t$, kde $S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$. Dále uvažujme následující předpoklad na posloupnost $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$:

Předpoklad 2.1. Necht' $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ splňuje následující podmínky:

- (i) $E(\varepsilon_t) = 0$, pro každé $t \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\sup_{t \in \mathbb{N}} E|\varepsilon_t|^{\beta+\eta} < \infty$ pro nějaké $\beta > 2$ a $\eta > 2$,
- (iii) $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1}S_T^2)$ existuje a platí $\sigma^2 > 0$,

(iv) $\{\varepsilon_t\}$ je strong mixing¹ s mixing koeficienty $\alpha(k)$, pro které platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-2/\beta} < \infty. \quad (2.13)$$

Tento předpoklad nám umožňuje používat speciálnější konstrukce chybové složky. Lze pak použít autokorelované nebo i heterogenně rozdělené chyby ε_t . Zahrnjuje použití na širokou třídu data generujících mechanismů včetně ARMA modelů konečného řádu. Podmínka (ii) brání neomezenému růstu β -tého absolutního momentu ε_t , podmínka (iv) řídí rozsah závislosti v procesu $\{\varepsilon_t\}$ (může být závislost mezi časově blízkými událostmi, ale události oddělené dlouhým časovým úsekem jsou téměř nezávislé). Podmínka (ii) je podmínka konvergence na rozptyl posloupnosti částečných součtů S_T/\sqrt{T} . Navíc předpokládáme $\sigma^2 > 0$, abychom se vyhnuli degenerativním výsledkům.

Zmiňovali jsme, že asymptotické distribuce testů uvedených dříve závisí na přebytečných parametrech. Tuto skutečnost lze pěkně ilustrovat na testových statistikách (2.6) a (2.7) při testování jednotkového kořene v modelu (2.11), jejichž asymptotická distribuce za platnosti hypotézy (2.12) závisí na podílu $\sigma^2/\sigma_\varepsilon^2$, kde:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_t \right)^2 \right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(\varepsilon_t^2). \quad (2.15)$$

Není obtížné ověřit, že $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$ v případě, že $\varepsilon_t \sim \text{i. i. d.}(0, \sigma^2)$. To také odpovídá tomu, že v asymptotické distribuci dříve uvedených standardních DF testů není obsažen podíl rozptylů $\sigma^2/\sigma_\varepsilon^2$. Nicméně v tomto obecném případě byly ukázány

¹Posloupnost $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ nazveme *strong mixing*, jestliže pro ni platí $\alpha(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, kde

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n(k) \text{ pro } k \in \mathbb{N} \text{ a} \\ \alpha_n(k) &= \sup_{1 \leq m \leq n-k} \{ |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| : A \in \sigma(\varepsilon_i : 1 \leq i \leq m), \\ &\quad B \in \sigma(\varepsilon_i : m+k \leq i \leq n) \}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \alpha_n(k) &= 0, \quad k \geq n. \end{aligned}$$

následující asymptotické výsledky u Dickey-Fullerova testu pro model (2.11):

$$T(\hat{\alpha} - 1) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(1/2)(W(1)^2 - \sigma_\varepsilon^2/\sigma^2)}{\int_0^1 W(r)^2 dr},$$

$$t_\alpha \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(1/2)(W(1)^2 - \sigma_\varepsilon^2/\sigma^2)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}}.$$

Neznámé parametry σ^2 a σ_ε^2 je potřeba odhadnout. Oba tyto parametry lze odhadnout konzistentně a odhady mohou být použity ke konstrukci modifikovaných statistik, jejichž limitní rozdělení je nezávislé na $(\sigma^2, \sigma_\varepsilon^2)$. Za platnosti nulové hypotézy (2.12) je pro σ_ε^2 konzistentní odhad

$$s_\varepsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - Y_{t-1})^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2. \quad (2.16)$$

Obtížnější bylo sestrojít konzistentní odhad pro σ^2 . Phillips ukázal, že

$$s_{Tl}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^l \sum_{t=\tau+1}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} \quad (2.17)$$

je konzistentním odhadem parametru σ^2 . Motivace k tomuto odhadu byla aproximace σ_T^2 , který byl zadefinován následovně:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \text{var}(T^{-1}S_T) \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \text{E}(\varepsilon_t^2) + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^{T-1} \sum_{t=\tau+1}^T \text{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}). \end{aligned}$$

Aproximace spočívala v nahrazení výrazu $T - 1$ v druhé sumě číslem l , kterému se říká *lag truncation number*. Důkaz, že s_{Tl}^2 je konzistentním odhadem σ^2 , je uveden v Phillips (1987b, věta 4.2). K tomuto důkazu bylo nutné uvažovat předpoklady 2.1, dále silnější podmínku $\sup_{t \in \mathbb{N}} \text{E}|\varepsilon_t|^{2\beta} < \infty$ pro nějaké $\beta > 2$ a $l \rightarrow \infty$ když $T \rightarrow \infty$ tak, že $l = o(T^{1/4})$.

Nicméně nevýhodou odhadu s_{Tl}^2 je to, že může nabývat i záporných hodnot (v případě, že výběrové kovariance mezi ε_t a $\varepsilon_{t-\tau}$ mají velké záporné hodnoty). Modifikaci navrhli Newey & West (1987). Ukázali, že odhad

$$\tilde{s}_{Tl}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^l w_{\tau l} \sum_{t=\tau+1}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}, \quad (2.18)$$

kde

$$w_{\tau l} = 1 - \tau/(l + 1),$$

je za nezměněných předpokladů konzistentním odhadem rozptylu σ^2 a navíc je nezáporný. V odhadu rozptylu σ^2 je také možno místo $\varepsilon_t = Y_t - Y_{t-1}$ použít rezidua $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\alpha}Y_{t-1}$. Tento odhad bude také konzistentní za platnosti nulové hypotézy (2.12), neboť $\hat{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{P}} 1$ pro $T \rightarrow \infty$. Otázkou zůstává, jak volit l v případě konečného výběru. Zajisté se jedná o empirickou záležitost. Předběžné vyšetřování autokorelací mezi jednotlivými ε_t může přispět k vhodné volbě. Vzhledem k tomu, že výběrové autokorelace jedenkrát diferencovaných ekonomických časových řad většinou rychle zanikají, je pravděpodobné, že při menší velikosti výběru bude vybrána menší hodnota l .

Na základě těchto výsledků byly zkonstruovány následující testové statistiky pro testování jednotkového kořene v modelu (2.11) za velmi obecných podmínek:

$$Z_\alpha = T(\hat{\alpha} - 1) - \frac{(1/2)(s_{Tl}^2 - s_\varepsilon^2)}{T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2}, \quad (2.19)$$

$$Z_t = \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\hat{\alpha} - 1)}{s_{Tl}} - \frac{(1/2)(s_{Tl}^2 - s_\varepsilon^2)}{s_{Tl} \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2 \right)^{1/2}}. \quad (2.20)$$

Z_α je transformace odhadu $T(\hat{\alpha} - 1)$ a Z_t je transformace regresní t -statistiky (2.7). Za platnosti nulové hypotézy byly odvozeny následující asymptotické vlastnosti:

$$Z_\alpha \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(W(1)^2 - 1)/2}{\int_0^1 W(t)^2 dt},$$

$$Z_t \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{(W(1)^2 - 1)/2}{\left(\int_0^1 W(t)^2 dt \right)^{1/2}}.$$

Získali jsme statistiky, jejichž asymptotické rozdělení je identické s asymptotickými rozděleními statistik $T(\hat{\alpha} - 1)$ a t_α , když platí $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2$. Při testování lze využít kritických hodnot stejných jako v případě standardních DF testů.

Opět bylo potřeba rozšířit model (2.11) i na situace, kdy je v něm přítomen trend či vychýlení, neboť tyto modely více odpovídají realitě. Toto rozšíření je shrnuto v Phillips & Perron (1988). Převážná většina textu v této části je založena na sekci 2.4.1 v Juráška (2007), kde je přehledné shrnutí tohoto rozšíření. Stále předpokládáme, že $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ jsou generovány modelem (2.11) s podmínkou (2.12),

a uvažujme modely

$$Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.21)$$

$$Y_t = \mu + \beta \left(t - \frac{1}{2}T \right) + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Posloupnost $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ splňuje předpoklady (2.1). Y_0 je náhodná veličina s danou distribucí nezávislou na velikosti výběru T . Modely jsou analogické s modely (2.2) a (2.3) s tím rozdílem, že model (2.22) obsahuje centrovanou časovou proměnnou. Regresní matici v modelu (2.3) označme \mathbf{X} . Odhad parametru α metodou nejmenších čtverců v modelu (2.21) označme $\hat{\alpha}_\mu$ a v modelu (2.22) $\hat{\alpha}_{\mu\beta}$ a dále obdobně pro tyto modely označme reziduální součet čtverců vydělený počtem pozorování jako s_μ^2 resp. $s_{\mu\beta}^2$. Dále označme $\bar{Y}_{-1} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}$. Regresní t -statistiky definujeme následovně:

$$t_\alpha^\mu = (\hat{\alpha}_\mu - 1) \left\{ \sum_{t=1}^T (Y_{t-1} - \bar{Y}_{-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} / s_\mu,$$

$$t_\alpha^{\mu\beta} = (\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1) / (s_{\mu\beta}^2 c_3)^{\frac{1}{2}}.$$

Označením c_i máme na mysli i -tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Pro upravené testové statistiky potřebujeme opět použít konzistentní odhady parametrů σ_ε^2 a σ^2 .

Pro konzistentní odhad σ_ε^2 použijeme $\tilde{s}_{Tl,\mu}^2$ a $\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2$, které jsou analogií vzorce (2.18), kde místo ε_t použijeme reziduum z příslušné regrese. K testování jsou využívány transformované statistiky

$$\begin{aligned} Z_\alpha^\mu &= T(\hat{\alpha}_\mu - 1) - \lambda_\mu / \bar{m}_{yy}, \\ Z_t^\mu &= (s_\mu / \tilde{s}_{Tl,\mu}) t_\alpha^\mu - \lambda'_\mu \tilde{s}_{Tl,\mu} / \bar{m}_{yy}^{1/2}, \\ Z_\alpha^{\mu\beta} &= T(\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1) - \lambda_{\mu\beta} / M, \\ Z_t^{\mu\beta} &= (s_{\mu\beta} / \tilde{s}_{Tl,\mu\beta}) t_\alpha^{\mu\beta} - \lambda'_{\mu\beta} \tilde{s}_{Tl,\mu\beta} / M^{1/2}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} m_{yy} &= T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2, \quad \bar{m}_{yy} = T^{-2} \sum_{t=1}^T (Y_{t-1} - \bar{Y}_{-1})^2, \quad m_y = T^{-3/2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}, \\ m_{ty} &= T^{-5/2} \sum_{t=1}^T t Y_{t-1}, \\ M &= (1 - T^{-2}) m_{yy} - 12 m_{ty}^2 + 12(1 + T^{-1}) m_{ty} m_y - (4 + 6T^{-1} + 2T^{-2}) m_y^2, \\ \lambda_\mu &= \frac{1}{2} (\tilde{s}_{Tl,\mu}^2 - s_\mu^2), \quad \lambda'_\mu = \lambda_\mu / \tilde{s}_{Tl,\mu}^2, \quad \lambda_{\mu\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2 - s_{\mu\beta}^2), \quad \lambda'_{\mu\beta} = \lambda_{\mu\beta} / \tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2. \end{aligned}$$

Zajímáme se o asymptotické vlastnosti těchto statistik za podmínky, že data jsou generovány modelem (2.11) s podmínkou (2.12). Bylo ukázáno, že za stejných předpokladů, které jsme používali v případě nevychýlené náhodné procházky, platí:

- (i) pro model (2.21) mají statistiky Z_α^μ a Z_t^μ za platnosti nulové hypotézy (2.12) stejné asymptotické rozdělení jako $T(\hat{\alpha}_\mu - 1)$ a t_α^μ v případě, že $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$.

- (ii) pro model (2.22) mají statistiky $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$ za platnosti nulové hypotézy (2.12) stejné asymptotické rozdělení jako $T(\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1)$ a $t_\alpha^{\mu\beta}$ v případě, že $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$. Výsledky uvedené pro $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$ zůstávají v platnosti i tehdy, kdy $\{Y_t\}$ je generován modelem (2.21) místo (2.11).

Dostáváme testy jednotkového kořene v modelech, které obsahují deterministický trend, za velmi obecných podmínek. K testování lze použít kritických hodnot, které publikovali Dickey a Fuller v případě i. i. d. chyb. Tyto kritické hodnoty byly publikovány ve Fuller (1976, str. 371, 373). Při používání těchto modelů je potřeba opatrnosti při volbě funkcionální formy deterministického trendu. Špatná volba vede ke snížení síly těchto testů.

Phillips a Perron porovnávali vlastnosti těchto testů s parametrickými testy v simulační studii. Přes asymptoticky ekvivalentní výsledky došli v simulaci k odlišným výsledkům v konečných výběrech. Generovali data s chybami, které měli formu klouzavých průměrů (MA) tvaru $\varepsilon_t = e_t + \theta e_{t-1}$, kde $e_t \sim$ i. i. d. $\mathcal{N}(0, 1)$. Zjistili, že v případě, kdy jsou chyby generovány kladným MA procesem ($\theta > 0$), je lepší použít jejich Z testy, neboť jsou v tomto případě silnější oproti jiným testům. V případě, kdy jsou chyby nezávislé a stejně rozdělené ($\theta = 0$), není transformace Z striktně potřebná, ale opět ji lze preferovat pro obecnější konstrukci. V modelu, kdy jsou chyby generovány MA procesem a negativně autokorelované ($\theta < 0$), mají transformované testy menší sílu a nedoporučuje se je používat. V tomto případě je vhodnější použít testy, které odvodili Said & Dickey (1984).

2.4 Testování více parametrů

Na závěr této kapitoly se ještě krátce zmíníme o testování více parametrů. Zmiňovali jsme, že asymptotické rozdělení statistik $\hat{\alpha}_\mu$ a t_α^μ není invariantní vzhledem k zahrnutí nenulového vychýlení μ do data generujícího procesu (2.11). Stejně tak $\hat{\alpha}_{\mu\beta}$ a $t_\alpha^{\mu\beta}$ není invariantní vzhledem k trendovému parametru β (ačkoliv je invariantní vůči pevnému μ). Bylo tedy užitečné najít testy, které budou testovat sdruženou hypotézu:

$$H_0^1: (\mu, \alpha) = (0, 1) \text{ v modelu (2.21),}$$

$$H_0^2: (\mu, \beta, \alpha) = (0, 0, 1) \text{ v modelu (2.22),}$$

$$H_0^3: (\mu, \beta, \alpha) = (\mu, 0, 1) \text{ v modelu (2.22).}$$

Předpokládáme, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou generovány modelem (2.11) s podmínkou (2.12), $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ splňuje předpoklady 2.1 a Y_0 má předem danou distribuci.

Dickey & Fuller (1981) navrhli F -test pro uvedené hypotézy za předpokladu nezávislých normálně rozdělených chyb:

$$\begin{aligned} H_0^1 : \Phi_1 &= (2s_\mu^2)^{-1}[Ts_\varepsilon^2 - (T-2)s_\mu^2], \\ H_0^2 : \Phi_2 &= (3s_{\mu\beta}^2)^{-1}[Ts_\varepsilon^2 - (T-3)s_{\mu\beta}^2], \\ H_0^3 : \Phi_3 &= (2s_{\mu\beta}^2)^{-1}[T(s_\varepsilon^2 - (\bar{Y} - \bar{Y}_{-1})^2) - (T-3)s_{\mu\beta}^2], \end{aligned}$$

kde s_ε^2 , s_μ^2 a $s_{\mu\beta}^2$ jsou reziduální součty čtverců vydělené počtem pozorování T z modelů (2.11), (2.21) a (2.22) za platnosti nulové hypotézy a $\bar{Y}_{-1} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}$. Nulová hypotéza H_0^3 je vychýlená náhodná procházka s vychýlením μ , vůči kterému je statistika Φ_3 invariantní.

Perron (1986) zobecnil tyto testy na výše uvedené obecnější předpoklady. Opět jsou využity konzistentní odhady parametrů σ^2 a σ_ε^2 , které byly zdefinovány u Phillips-Perronových testů jednotkového kořene. Tyto neparametrické testy mají tvar:

$$\begin{aligned} Z(\Phi_1) &= \frac{s_\mu^2}{\tilde{s}_{Tl,\mu}^2} \Phi_1 - \frac{1}{2\tilde{s}_{Tl,\mu}^2} (\tilde{s}_{Tl,\mu}^2 - s_\mu^2) \\ &\quad \times \left\{ T(\hat{\alpha}_\mu - 1) - \frac{1}{4} (\tilde{s}_{Tl,\mu}^2 - s_\mu^2) \left[\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (Y_{t-1} - \bar{Y}_{-1})^2 \right]^{-1} \right\}, \\ Z(\Phi_2) &= \frac{s_{\mu\beta}^2}{\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2} \Phi_2 - \frac{1}{3\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2} (\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2 - s_{\mu\beta}^2) \left\{ T(\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1) - \frac{T^6}{48D_X} (\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2 - s_{\mu\beta}^2) \right\}, \\ Z(\Phi_3) &= \frac{s_{\mu\beta}^2}{\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2} \Phi_2 - \frac{1}{2\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2} (\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2 - s_{\mu\beta}^2) \left\{ T(\hat{\alpha}_{\mu\beta} - 1) - \frac{T^6}{48D_X} (\tilde{s}_{Tl,\mu\beta}^2 - s_{\mu\beta}^2) \right\}, \end{aligned}$$

kde D_X je determinant matice $X'X$ (X je regresní matice rozměru $T \times 3$ z modelu (2.22)).

Perron (1986, věta 4.2) ukázal, že uvedené Z statistiky mají za platnosti příslušné nulové hypotézy stejné rozdělení jako odpovídající Φ statistiky. K testování lze tedy použít kritické hodnoty, které pro i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ chyby tabelovali Dickey & Fuller (1981, Tabulky IV, V, VI). K používání těchto neparametrických testů platí opět stejné doporučení jako v případě Phillips-Perronových testů. Je potřeba opatrnosti, pokud generující proces obsahuje MA část se zápornými parametry.

Doporučená strategie při testování

Přesný návod, které testy použít, samozřejmě neexistuje. Každý typ testů má své klady a zápory a reaguje lépe či hůře v určitých situacích. Alespoň některá základní

doporučení ohledně Phillips-Perronových testů jsou shrnuty v Juráška (2007, kap. 2.6). Bylo ukázáno, že v případě, kdy je řada trendově stacionární kolem lineárního trendu, je zamítnutí nulové hypotézy jednotkového kořene v modelu (2.21) nepravděpodobné s rostoucím T . Proto je doporučeno začít s odhadem modelu (2.22). Jako první je vhodné testovat sdruženou hypotézu $Z(\Phi_3)$ a dále pak $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$, které nejsou invariantní vzhledem k parametru β . Není nutné pokračovat, pokud je možné pro tento model nulovou hypotézu zamítnout. V opačném případě testujeme na základě modelu (2.21). Před testy v tomto modelu je nutné ověřit, jestli není vychýlení μ nulové, neboť asymptotická rozdělení testů Z_α^μ a Z_t^μ nejsou vzhledem k parametru μ invariantní. Zůstaneme u výsledku $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$ v případě, že $Z(\Phi_2)$ zamítne nulovou hypotézu $(\mu, \beta, \alpha) = (0, 0, 1)$. Jinak můžeme přejít k testům Z_α^μ a Z_t^μ . Pokud nelze zamítnout nulovou hypotézu $(\mu, \alpha) = (0, 1)$ pomocí $Z(\Phi_1)$, přejdeme k modelu (2.11).

Kapitola 3

Kointegrace

3.1 Definice kointegrace

Už jsme zmiňovali, že ekonomické časové řady jsou velmi často integrované řádu 1 a obsahují stochastický trend. V ekonomické teorii však očekáváme, že jisté řady by měly být v určitém dlouhodobě rovnovážném stavu, přestože jejich průběh v čase může být značně kolísavý. V krátkodobém horizontu mohou tyto řady značně kolísat, ale ekonomické síly by měly v dlouhodobém horizontu dosáhnout rovnovážného stavu. Příkladem může být cena podobných potravin v různých zemích, poptávka po penězích a hodnota peněz, krátkodobé a dlouhodobé úrokové míry apod. Obecně hledáme-li rovnovážný stav mezi proměnnými, které jsou složky n -rozměrného vektoru $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, \dots, Y_{n,t})'$, chceme najít vektor $\boldsymbol{\beta}$ takový, aby platilo $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t = 0$ v každém čase t . V praxi tolerujeme krátkodobé *odchylky od rovnovážného stavu*, které značíme v čase t jako $Z_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t$. Hledáme vektor $\boldsymbol{\beta}$ takový, že odchylky od rovnováhy $\{Z_t\}$ tvoří stacionární proces s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem. Tohoto dlouhodobě rovnovážného stavu lze dosáhnout i v případě, že jednotlivé veličiny jsou integrované. Kointegrace je vhodným nástrojem k analýze těchto vztahů. Tímto tématem se intenzivně zabýval nositel Nobelovy ceny za ekonomii Clive Granger. Základní myšlenky jsou shrnuty v článku Granger & Engle (1987), kde je i následující obecná definice pojmu kointegrace.

Definice 3.1. Necht' $b, d \in \mathbb{N}$ a $d \geq b$. Řekneme, že složky n -rozměrného náhodného procesu $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou *kointegrované řádu d, b* , jestliže všechny složky \mathbf{Y}_t jsou $I(d)$ a existuje nenulový vektor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ takový, že složky lineární kombinace $Z_t := \boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t$ jsou $I(d - b)$. Vektor $\boldsymbol{\beta}$ se nazývá *kointegrační vektor*. Kointegraci budeme značit $\{\mathbf{Y}_t\} \sim CI(d, b)$.

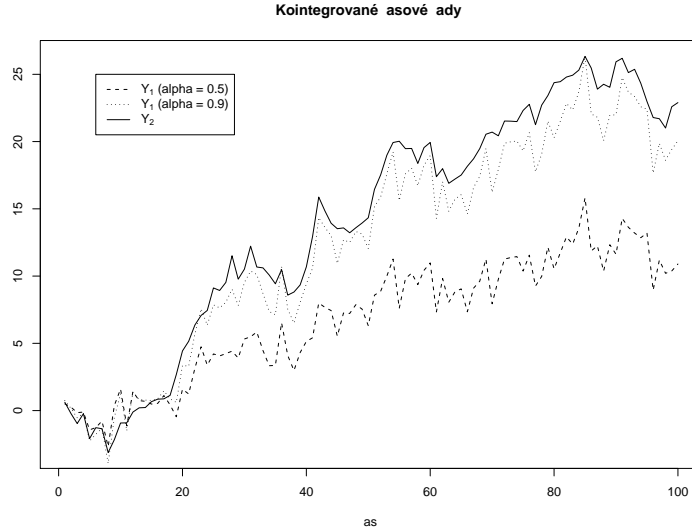
Je zřejmé, že kointegrační vektor není jednoznačný. Stačí jej vynásobit nenulovou konstantou a opět dostáváme kointegrační vektor. Pro $n > 2$ může obecně

existovat více lineárně nezávislých kointegračních vektorů. Existuje-li r takových nezávislých vektorů ($r \leq n - 1$), pak se r nazývá *řád kointegrace*. Pokud tyto vektory označíme β_1, \dots, β_r , můžeme je uspořádat do kointegrační matice β , která je rozměru $n \times r$ a má hodnost r . V dalších kapitolách se seznámíme s různými modely kointegrovaných časovaných řad, z nichž některé umožňují modelovat pouze jeden kointegrační vektor (jednorovnicové modely).

Nejzajímavější je situace, kdy $d = b$. V tomto případě je lineární kombinace řad stacionární. Nejčastější je situace, kdy složky procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ jsou $I(1)$ a $\{\beta' \mathbf{Y}_t\}$ je $I(0)$. Jedná se o kointegraci $\{\mathbf{Y}_t\} \sim CI(1, 1)$. Tímto typem kointegrace se budeme většinou zabývat i v této práci. Typickým příkladem $CI(1, 1)$ kointegrovaného vektoru je dvojice:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= \alpha Y_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} &= Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}, \end{aligned}$$

kde $\{\varepsilon_{1,t}\}$ a $\{\varepsilon_{2,t}\}$ jsou nekorelované procesy bílého šumu. Není obtížné ověřit, že pro $\alpha \neq 0$ jsou procesy $I(1)$, ale přitom lineární kombinace $Y_{1,t} - \alpha Y_{2,t}$ je stacionární. Ukázka pro $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 0,9$ je na obrázku 3.1, kde jsou $\{\varepsilon_{1,t}\}$ a $\{\varepsilon_{2,t}\}$ generovány náhodným výběrem $\mathcal{N}(0, 1)$ a jsou nezávislé.



Obrázek 3.1: Ukázka kointegrovaných časových řad.

V rámci kointegrace analyzujeme $I(d)$ časové řady. Víme, že pro získání stacionární časové řady stačí tyto řady d -krát diferencovat. Mohlo by se zdát, že pak už

je možné na tyto stacionární řady použít klasické přístupy k analýze vzájemných vztahů. Není to vhodná strategie. Pravdou je, že pouhým zdiferencováním řad ztrácíme důležitou informaci o celém systému. Eliminujeme možnost, jak odhadovat korektně vztahy mezi jednotlivými proměnnými a jejich dlouhodobou rovnováhou. Díky kointegraci však víme, že často tento vztah existuje a mívá také důležitou interpretaci (např. ekonomickou). Dříve než budeme pokračovat v tématu, zavedeme strukturu jednoho z velmi důležitých modelů, který s kointegrací $I(1)$ veličin úzce souvisí. Jedná se o *model korekce chyb*, který budeme nazývat známějším a všeobecně užívaným označením *error correction model* (odtud používaná zkratka EC nebo také ECM). Tento model byl ekonometry hojně využíván a v souvislosti s kointegrací je dobře interpretovatelný. Obsahuje v sobě jak krátkodobé, tak dlouhodobé vztahy. Základní idea je taková, že odchylka od rovnováhy v jednom období je opravena v období příštím. Uvažujme n -rozměrný proces $\{\mathbf{Y}_t\}$. Obecně se může jednat i o stacionární proces. Nás ale v dalším textu bude zajímat hlavně případ, kdy $\{\mathbf{Y}_t\} \sim CI(1)$. Řekneme, že tento proces má error correction reprezentaci, jestliže jej lze zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}_t &= \mathbf{\Pi} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \mathbf{\Gamma}_{p-1} \Delta \mathbf{Y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_i \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je stacionární n -rozměrný $WN(0, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$. Matice $\mathbf{\Pi}$ a $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{p-1}$ jsou $n \times n$ rozměrné matice koeficientů. V případě kointegrovaného procesu musí být matice $\mathbf{\Pi}$ singulární s řádem $\text{rank}[\mathbf{\Pi}] = r > 0$, jak bude ukázáno níže. Pak lze matici $\mathbf{\Pi}$ rozložit na součin matic $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$, kde $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou rozměru $n \times r$ a mají hodnotu r . Pokud využijeme značení $\mathbf{Z}_t := \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t$ z definice 3.1, lze model lze přepsat také do tvaru:

$$\boldsymbol{\Gamma}(L) \Delta \mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.2)$$

kde $\boldsymbol{\Gamma}(L) = \mathbf{I}_n - \mathbf{\Gamma}_1 L - \dots - \mathbf{\Gamma}_{p-1} L^{p-1}$. V modelu jsou změny proměnných závislé na odchylkách od rovnovážného stavu. V tomto tvaru definuje EC model Granger & Engle (1987). Navíc se pro korektnost zavádí podmínka, která zaručí, že všechny prvky matice $\boldsymbol{\Gamma}(1)$ jsou konečné. Budeme tedy předpokládat, že $\boldsymbol{\Gamma}(1) = \sum \mathbf{\Gamma}_i < \infty$. Podrobněji se vlastnostmi error correction reprezentace budeme zabývat až v kapitole 4.2, uveďme si zde však aspoň některé základní vlastnosti, které ukazují výhody této reprezentace v případě kointegrovaného procesu.

Kointegrační matice, kterou jsme už dříve zadefinovali, je reprezentována parametrem $\boldsymbol{\beta}$. Její hodnota je $r < n$, kde r je řád kointegrace. Matice $\boldsymbol{\alpha}$ se někdy nazývá *zátěžová matice* (v anglicky psané literatuře *loading matrix*). Lze i interpretovat jako míru odlišnosti mezi dlouhodobými a krátkodobými vztahy v systému. Všimněme si, že pokud by matice $\mathbf{\Pi}$ měla hodnotu¹ $\text{rank}[\mathbf{\Pi}] = 0$ (matice by byla nulová), měl

¹Symbolem $\text{rank}[\mathbf{B}]$ značíme hodnotu matice \mathbf{B} .

by pak proces $\{\Delta \mathbf{Y}_t\}$ stabilní VAR($p - 1$) reprezentaci a diferencováním bychom neztratili žádnou dlouhodobou informaci. Naopak pokud by měla plnou hodnotu $\text{rank}[\mathbf{\Pi}] = n$, znamenalo by to, že časová řada je generována stacionárním vektorovým procesem $\{\mathbf{Y}_t\}$. Z hlediska kointegrace je pro nás nejzajímavější případ, kdy je $\text{rank}[\mathbf{\Pi}] = r$, kde $0 < r < n$. V případě, že $\{\mathbf{Y}_t\} \sim I(1)$, jsou diferencované členy $\Delta \mathbf{Y}_t$ stacionární, a tudíž i $\alpha \beta' \mathbf{Y}_t$ musí být stacionární.

Na závěr podotkněme, že díky použití diferencí v error correction modelu významně redukuje problém multikolinearity, který je často přítomný u časových řad. Dále je výhodou, že všechny dlouhodobé vztahy jsou obsaženy v matici $\mathbf{\Pi}$.

3.2 Grangerova věta

Grangerova věta o reprezentaci tvoří základní pilíř mezi vztahy jednotlivých kointegrovaných modelů a jejich vlastnostmi. Clive Granger dal této větě základy, a proto byla pojmenována podle něj. Její základní verze je uvedena v článku Granger & Engle (1987). Struktura věty se liší podle toho, z jakého modelu vyjdeme. V uvedeném článku je jako výchozí model uvažován vektorový proces klouzavých průměrů. Dává jej do souvislosti s VARMA a EC modelem. Modifikovaná verze vycházející z modelu VAR je uvažována v Johansen (1991). Velmi užitečné srovnání mezi jednotlivými alternativami Grangerovy věty je uvedeno v knize Dhrymes (1998), která má hluboké teoretické základy. Grangerova věta je zde uvedena pro VMA($+\infty$) proces, dále pro VMA(q) proces, kde q je konečné a také verze vycházející z VAR modelu. V diplomové práci Bittner (2005) byla uvedena Grangerova věta vycházející VMA reprezentace podle Granger & Engle (1987). Zde si proto uvedeme vlastnosti modelů v kontextu s Johansenovým přístupem, který vycházel z VAR modelu. Vycházíme však z Dhrymes (1998, Kap. 4.4.3, Věta 4.), kde je věta přehledná a má odlišnou strukturu od původního Johansen (1988).

Věta 3.2. *Mějme náhodnou n -rozměrnou posloupnost $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{N}\}$ a předpokládejme, že:*

1. *má VAR(p) reprezentaci*

$$\Phi(L)\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \Phi(L) = \sum_{j=0}^p \Phi_j L^j, \quad \Phi_0 = \mathbf{I}_n,$$

kde $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\} \sim WN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$;

2. *$\{\mathbf{Y}_t\} \sim CI(1, 1)$ řádu r ;*

3. β je matice rozměru $n \times r$, která obsahuje r lineárně nezávislých kointegračních vektorů.

Pak platí následující:

(i) existuje reprezentace

$$\Phi(L) = \Phi(1) - \Delta\Phi^*(L), \quad \Phi^*(L) = \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_j^* L^j, \quad \Phi_j^* = \sum_{i=j+1}^p \Phi_i;$$

(ii) operátor $\Phi^*(L) = \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_j^* L^j$ nemá unit root faktorizaci (tzn. že pro žádné $d \geq 1$ neexistuje rozklad $\Phi^*(L) = \Delta^d \Phi^{**}(L)$, kde $\Phi^{**}(L)$ je invertibilní operátor);

(iii) $\text{rank}[\Phi(1)] = r$, $r < n$;

(iv) charakteristická rovnice $|\Phi(z)| = 0$ má $r_0 = n - r$ jednotkových kořenů;

(v) proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ má VMA reprezentaci nekonečného řádu; specificky, jestliže $\varphi^*(L) = |\Phi(L)|$ a $\Theta_*(L)$ je matice adjungovaná k matici

$$\Phi(L) = [\varphi_{rs}(L)], \quad \varphi_{rs}(L) = \sum_{j=0}^p \varphi_{rs}^{(j)} L^j,$$

kde $\varphi_{rs}^{(j)}$ je element matice Φ_j na pozici r, s ,
pak existují rozklady

$$\varphi^*(L) = \Delta^{r_0} \varphi(L), \quad \varphi(1) \neq 0$$

a

$$\Theta_*(L) = \Delta^{r_0-1} \Theta(L), \quad \Theta(1) \neq 0$$

a platí

$$\Delta \mathbf{Y}_t = [\varphi(L)^{-1}] \Theta(L) \varepsilon_t;$$

(vi) existuje matice α rozměru $n \times r$ a hodnosti r taková, že

$$\Phi(1) = -\alpha\beta',$$

a platí

$$\beta'\Theta(1) = \mathbf{0}, \quad \Theta(1)\alpha = \mathbf{0}, \quad \Theta(0) = \mathbf{I}_n;$$

(vii) existuje error correction (EC) reprezentace

$$\Delta \mathbf{Y}_t = -\alpha\beta'\mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Theta_j^* \Delta \mathbf{Y}_{t-j} + \varepsilon_t;$$

(viii) Vektor $\mathbf{Z}_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t$ má reprezentaci

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{G}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \mathbf{G}_0 = \boldsymbol{\beta}', \quad \mathbf{G}_i = (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\alpha}'\left(\sum_{j=0}^i \boldsymbol{\Phi}_j^* \boldsymbol{\Theta}_{i-j}^*\right), \quad i \geq 1.$$

Důkaz. Je uveden v kapitole 4.4.3 v Dhrymes (1998, Věta 4.). □

Jedná se o velmi důležitou větu, která ukazuje vztahy mezi některými z kointegračních modelů. Důkaz je delší, a proto jej zde neuvádíme. V dalších kapitolách jsou však ukázány aspoň některé z výsledků této věty. Jak jsme už zmiňovali, výsledky jsou odlišné v závislosti na tom, kterou reprezentaci vezmeme jako výchozí. Čtenářům doporučuji pro srovnání základní verzi v Granger & Engle (1987), kde je ukázán vztah výchozího VMA modelu s VARMA a EC reprezentací. Dhrymes (1998) srovnává tyto verze a ukazuje odlišnosti i propojenost (například mezi MA operátory u VMA reprezentací). Modely ve větě je možné rozšířit také o konstantní člen a deterministický trend či sezónní proměnné, jak lze vidět v Johansen (1988).

Za povšimnutí stojí také vztahy uvedené v bodu (vi) věty 3.2. Obdobné vztahy platí i v původní Grangerově větě, kde $\boldsymbol{\Theta}(L)$ je MA operátor u výchozí VMA reprezentace. Vezmeme-li v úvahu, že $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = -\boldsymbol{\Phi}(1)$ dostáváme

$$\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Theta}(1) = \boldsymbol{\Theta}(1)\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}_{n \times n}.$$

Vidíme, že v případě kointegrovaného procesu existuje úzká souvislost mezi AR operátorem z VAR reprezentace a MA operátorem z VMA reprezentace. Vztah mezi hodnotami matic $\boldsymbol{\Theta}(1)$ a $\boldsymbol{\Phi}(1)$ se nazývá *duální*. Hodnota matice $\boldsymbol{\Phi}(1)$ je r , zatímco hodnota matice $\boldsymbol{\Theta}(1)$ je $n - r$. Dále platí, že charakteristická rovnice $|\boldsymbol{\Phi}(z)| = 0$ má $r_0 = n - r$ jednotkových kořenů, zatímco charakteristická rovnice $|\boldsymbol{\Theta}(z)| = 0$ má r jednotkových kořenů, kde r je řád kointegrace.

Kapitola 4

Modely kointegrovaných časových řad

V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi některých modelů kointegrovaných časových řad. V rámci kointegrační analýzy časových řad jsou nejčastěji užívány modely ECM (*error correction model*). Velmi krátce se zmíníme o VAR modelu (*vektorový autoregresní model*) a VMA modelu (*vektorový proces klouzavých průměrů*). Navíc zavedeme *triangular reprezentaci*, která je některými autory užívána. V závěru se budeme věnovat jednorozměrným modelům, jako ADL (*autoregressive distributed lags*) modely a kointegrační regrese, a jejich vztahem vůči modelu vícerozměrnému. Zmíníme se také o souvislosti Grangerovy kauzality s kointegrací.

4.1 VAR a VMA reprezentace kointegrovaných veličin

V kapitole 3.2 je v Grangerově větě ukázán jednoznačný vztah mezi modely VMA, ECM a VAR v případě kointegrovaných veličin. Mnohými vlastnostmi VAR a VMA modelů se už zabýval Bittner (2005, kap. 4). Vzhledem k tomu, že v praktické analýze se většinou využívá error-correction model, který je velmi vhodný k modelování dlouhodobých kointegračních vztahů, uvedeme si zde pouze několik základních informací o těchto reprezentacích. Díky Grangerově větě lze v případě kointegrovaného procesu převést jak VAR, tak VMA reprezentaci na error-correction model. Tím se detailněji zabýváme v kapitole 4.2.

VAR reprezentace

Připomeňme si tvar vektorového autoregresního modelu řádu p , tentokrát pro n -rozměrný $I(1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t\}$:

$$\Phi(L)\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4.1)$$

kde $\Phi(L) = \mathbf{I}_n - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p$ a Φ_1, \dots, Φ_p jsou $n \times n$ rozměrné matice koeficientů. Dále předpokládáme, že ε_t je stacionární bílý šum s nulovou střední hodnotou a varianční maticí Σ_ε . Samozřejmě je možné tento model zobecnit a na pravou stranu rovnice lze přidat například vektor konstant \mathbf{c} nebo také trend či sezónní složku. Vzhledem k tomu, že v modelu jsou obsaženy integrované časové řady, není splněna podmínka stability $\det(\Phi(z)) \neq 0$ pro $|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$. Tento operátor totiž obsahuje jednotkový kořen. Převod VAR modelu na error correction model je ilustrován v kapitole 4.2. Na základě odhadů v error-correction modelu kointegrovaných veličin lze zpětně přejít k VAR reprezentaci bez ztráty informace. VAR model bývá využíván při testování Grangerovy kauzality v kointegrovaných systémech. Tato skutečnost bude ilustrována v sekci 4.6.

VMA reprezentace

Pro n -rozměrný $CI(1,1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ uvažujeme vektorovou reprezentaci klouzavých průměrů řádu q :

$$\mathbf{Y}_t = \Theta(L)\varepsilon_t, \quad (4.2)$$

kde $\Theta(L) = \mathbf{I}_n + \Theta_1 L + \Theta_2 L^2 + \dots + \Theta_q L^q$ a $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ jsou $n \times n$ rozměrné matice koeficientů. Předpokládáme, že $\varepsilon_t \sim WN(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon)$ a posloupnost Θ_i je absolutně sčítatelná. Trend, konstantu či sezónní proměnné lze přidat do modelu na pravou stranu rovnice. Vzhledem k integrovanosti procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ není proces invertibilní. Víme však, že $\{\Delta \mathbf{Y}_t\}$ by měl být proces stacionární, a proto někdy v případě $I(1)$ procesu uvažujeme zápis VMA(q) reprezentace ve formě

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}_t &= \Theta(L)\varepsilon_t \\ &= \sum_{i=0}^q \Theta_i \varepsilon_{t-i}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde $\Theta_0 = \mathbf{I}_n$. V případě tohoto modelu se někdy užívá označení, že proces má *vícerozměrnou Woldovu reprezentaci*. Granger & Engle (1987) použili tuto reprezentaci jako výchozí model v Grangerově větě. Velmi známý je rozklad operátoru z této reprezentace na

$$\Theta(L) = \Theta(1) - \Delta \Theta^*(L), \quad (4.4)$$

kde $\Theta^*(L) = \sum_{i=0}^{q-1} \Theta_i^* L^i$ a $\Theta_i^* = \sum_{j=i+1}^q \Theta_j$. Tento rozklad není obtížné ověřit. Uvedli jsme formu tohoto rozkladu pro konečný řád q . V případě nekonečné posloupnosti Θ_i lze dostat úplně stejný rozklad s tím rozdílem, že sumy jsou nekonečné ($q = +\infty$). Na základě tohoto rozkladu lze proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ zapsat ve tvaru

$$\mathbf{Y}_t = \underbrace{\Theta(1) \sum_{j=1}^t \varepsilon_j}_{\text{long-run komponenta}} + \underbrace{\Theta^*(L)\varepsilon_t}_{\text{short-run komponenta}} + \underbrace{\mathbf{Y}_0 - \Theta^*(L)\varepsilon_0}_{\text{počáteční hodnoty}}. \quad (4.5)$$

Všimněme si korespondence s Beveridge-Nelsonovou dekompozicí (1.13). Odvození tohoto rozkladu také není nijak obtížné, lze jej ověřit například v Bittner (2005, sekce 4.1.1). *Long-run komponenta* v rozkladu dobře ilustruje dlouhodobý efekt způsobený stochastickým trendem v řadě. Zato význam short-run komponenty je pouze krátkodobý a její vliv s rostoucím časem klesá. Reprezentace (4.5) se někdy říká *reprezentace společných trendů*. V kointegrační analýze ji využívali například Stock & Watson (1988).

Odhady parametrů VMA reprezentace kointegrovaných veličin lze díky Grangeově větě opět zkonstruovat z odhadu v error-correction modelu.

4.2 ECM reprezentace

Vzhledem k tomu, že error-correction model je jedna z nejpoužívanějších reprezentací při modelování kointegrovaných procesů, zabýváme se jím podrobněji než dalšími zmíněnými modely. Základní popis error-correction modelu jsme si uvedli už v předešlé kapitole a ve vzorci (3.1). V rámci kointegrační analýzy je možné používat také error correction model, jehož struktura je mírně odlišná od (3.1). Oba typy EC modelu lze získat reparametrizací z VAR reprezentace kointegrovaných veličin, jak uvidíme níže. Uvažujme n -rozměrný $I(1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t\}$. Tato modifikovaná forma má tvar

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{Y}_t &= \mathbf{\Pi}\mathbf{Y}_{t-p} + \mathbf{\Gamma}_1\Delta\mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \mathbf{\Gamma}_{p-1}\Delta\mathbf{Y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_{t-p} + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_i\Delta\mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,\end{aligned}\quad (4.6)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$. Uvedený model je používán například v článku Johansen (1991). Modely (3.1) a (4.6) se odhadují analogickým způsobem a mají většinu vlastností společných. Použití obou reparametrizací je správné, pouze je potřeba zvolenému modelu přizpůsobit interpretaci výsledků.

Nejprve si krátce ukážeme, jak lze pro proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ odvodit EC reprezentaci z reprezentace VAR(p)

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2\mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_{p-1}\mathbf{Y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\Phi}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (4.7)$$

Pro model (3.1) je toto odvození v Bittner (2005, sekce 4.1.1). Ukázal, že pro matice koeficientů $\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{p-1}$ z modelu (3.1) platí:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_i &= - \sum_{j=i+1}^p \boldsymbol{\Phi}_j \quad \text{pro } i = 1, \dots, p-1, \\ \mathbf{\Pi} &= -(\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p).\end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

Zde si tedy ukážeme analogii pro reparametrizaci typu (4.6). Vyjdeme z VAR(p) modelu (4.7) a postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{Y}_t &= (-\mathbf{I}_n + \Phi_1)\mathbf{Y}_{t-1} - (-\mathbf{I}_n + \Phi_1)\mathbf{Y}_{t-2} + (-\mathbf{I}_n + \Phi_1 + \Phi_2)\mathbf{Y}_{t-2} + \\ &\quad + \dots + \Phi_{p-1}\mathbf{Y}_{t-p+1} + \Phi_p\mathbf{Y}_{t-p} + \varepsilon_t = \\ &\quad \vdots \\ &= (-\mathbf{I}_n + \Phi_1)\Delta \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + (-\mathbf{I}_n + \Phi_1 + \dots + \Phi_{p-1})\Delta \mathbf{Y}_{t-p+1} + \\ &\quad + (-\mathbf{I}_n + \Phi_1 + \dots + \Phi_{p-1})\mathbf{Y}_{t-p}.\end{aligned}$$

Dostáváme tedy ECM model

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \Pi \mathbf{Y}_{t-p} + \Gamma_1 \Delta \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta \mathbf{Y}_{t-p+1} + \varepsilon_t,$$

kde

$$\left. \begin{aligned}\Gamma_i &= -\mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^i \Phi_j \quad \text{pro } i = 1, \dots, p, \\ \Pi &= \Gamma_p = -(\mathbf{I}_n - \Phi_1 - \dots - \Phi_p).\end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

Z uvedených výsledků vidíme, že tvar matice Π , která obsahuje dlouhodobý kointegrační vztah, je shodný pro oba typy reparametrizací (3.1) a (4.6) error correction modelu. Odlišná je pouze struktura parametrů Γ_i , $i = 1, \dots, p$.

Všimněme si také, že model 4.6 (resp. 3.1) lze zapsat s využitím operátoru

$$\Pi(L) = (1 - L)\mathbf{I}_n - \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i (1 - L)L^i - \Pi L^p \quad (4.10)$$

do tvaru $\Pi(L)\mathbf{Y}_t = \varepsilon_t$. Požadujeme, aby kořeny charakteristické rovnice $\Pi|z| = 0$ ležely vně nebo na jednotkovém kruhu. Tím zaručíme, že lze nestacionaritu procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ odstranit pouhým diferencováním.

4.2.1 Odhad error-correction modelu dvoukrokovou metodou

Jednou z prvních možností, jak odhadovat error-correction model, se zabývali Granger & Engle (1987), kteří zavedli *dvoukrokovou metodu odhadu*. Tato metoda má však omezující předpoklad existence jediného kointegračního vztahu. Vyjdeme z tvaru, který jsme zavedli v (3.1) pro n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t\} = \{(Y_{1,t}, \dots, Y_{n,t})\}$. V prvním kroku se provede odhad kointegračního vektoru metodou nejmenších čtverců v modelu

$$Y_{1,t} = \sum_{i=2}^n \delta_i Y_{i,t} + e_t.$$

Dostaneme tak odhad parametru β v modelu (3.1) jako $\hat{\beta} = (1, -\hat{\delta}_2, \dots, -\hat{\delta}_n)$, který je znormovaný vzhledem k první složce. V druhém kroku použijeme tento odhad v EC modelu a metodou nejmenších čtverců dostaneme odhad ostatních parametrů modelu. Tento odhad je konzistentní, avšak pro konečné výběry nastává problém s vychýlením odhadu. Tento problém je podrobněji popsán v Banerjee a kol. (1993, kap. 7.4) včetně provedené Monte Carlo studie. V prvním kroku tohoto odhadu se využívá tzv. *kointegrační regrese*, kterou se zabýváme v části 4.4. Zde je také podrobnější shrnutí problémů souvisejících s odhadem. Engle-Grangerovou dvoukrokovou metodou se nebudeme dále podrobně zabývat, detaily jsou obsaženy v diplomové práci Bittner (2005, kap. 4.1.2) nebo také v Banerjee a kol. (1993, kap. 5.6). Obecně je vhodnější začít analýzu dat s modelem vícerozměrným, který umožňuje modelovat více kointegračních vztahů. Z praktického pohledu je kointegrační regrese využívána v *residual based testech* kointegrace, o kterých se zmíníme v části 4.4.

4.2.2 Odhad error-correction modelu a testování kointegrace Johansenovou procedurou

Johansenova procedura je založena na odhadu modelu metodou maximální věrohodnosti. Umožňuje odhadovat několik lineárně nezávislých kointegračních vektorů. Dále ji lze také využít k testování řádu kointegrace. Pro model (4.6) je ilustrována Johansenova procedura v Juráška (2007, kap. 3.2). Zde si uvedeme základní kroky Johansenovy procedury pro reparametrizaci (3.1) s uvažovaným deterministickým členem ΦD_t , která je kompletně shrnuta v Johansen (1995, kap. 6.1). Z tohoto zdroje také vycházíme v této práci. Srovnáním s Juráška (2007) lze vidět velkou podobnost v Johansenově proceduře pro oba typy reparametrizaci.

Uvažujeme n -rozměrný $I(1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}, t \geq -p + 1\}$ pro nějaké $p \geq 2$ takové, že $\mathbf{Y}_{-p+1}, \dots, \mathbf{Y}_0$ jsou dané počáteční hodnoty a $\mathbf{Y}_t, t = 1, \dots, T$ jsou generovány error-correction modelem řádu p

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \Pi \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \Phi \mathbf{D}_t + \varepsilon_t, \quad (4.11)$$

kde ε_t je gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a pozitivně definitní varianční maticí Σ_ε . Dále $(\Pi, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}, \Phi, \Sigma_\varepsilon)$ jsou parametry modelu. Deterministický člen \mathbf{D}_t může obsahovat například konstantu, lineární člen nebo sezónní dummy proměnné. Předpokládáme, že \mathbf{D}_t je vektor velikosti m . Už jsme zmiňovali, že v případě kointegrovaného procesu musí být matice Π singulární o hodnotě $\text{rank}[\Pi] = r < n$ a lze ji rozložit na součin matic α a β o hodnotě r . Pro Johansenovu proceduru tedy formulujeme nulovou hypotézu pro $0 \leq r \leq n$ jako

$$H(r) : \quad \text{rank}[\Pi] \leq r \quad \text{nebo} \quad \Pi = \alpha \beta', \quad (4.12)$$

kde α a β jsou $n \times r$ rozměrné matice řádu r . Všimněme si, že model $H(r)$ je podmodelem modelu (4.11). Nulovou hypotézu uvažujeme buď proti alternativě $H_1(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] > r$ nebo $H_2(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] = r + 1$. Už jsme také zmiňovali nejednoznačnost odhadu matic α a β kointegračního vztahu vzhledem k lineární kombinaci odhadnutých kointegračních vektorů. Mějme na paměti, že Johansenovou procedurou odhadneme vektorový prostor, který je určen lineárně nezávislými sloupci kointegrační matice β . Tomu prostoru se také říká *kointegrační prostor*.

Pro další potřeby si zavedeme označení $\mathbf{Z}_{0,t} = \Delta \mathbf{Y}_t$, $\mathbf{Z}_{1,t} = \mathbf{Y}_{t-1}$ a $\mathbf{Z}_{2,t} = (\Delta \mathbf{Y}'_{t-1}, \dots, \Delta \mathbf{Y}'_{t-p+1}, \mathbf{D}'_t)'$ a $\Psi = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}, \Phi)$. Vektor $\mathbf{Z}_{2,t}$ má délku $n(p-1) + m$ a matice Ψ má rozměry $n \times n(p-1) + m$. Pomocí těchto proměnných lze model přepsat do tvaru:

$$\mathbf{Z}_{0,t} = \alpha\beta' \mathbf{Z}_{1,t} + \Psi \mathbf{Z}_{2,t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.13)$$

Primárně se zajímáme o odhad parametrů α a β . Pokusíme se tedy nejprve eliminovat matici parametrů Ψ . Použijeme k tomu regresního modelu, kde vysvětlujeme $\mathbf{Z}_{0,t} - \alpha\beta' \mathbf{Z}_{1,t}$ pomocí $\mathbf{Z}_{2,t}$ při fixních parametrech α , β a Σ_ε . Nejprve provedeme regresi $\mathbf{Z}_{0,t}$ na $\mathbf{Z}_{2,t}$, čímž dostaneme rezidua $\mathbf{R}_{0,t}$, a regresi $\mathbf{Z}_{1,t}$ na $\mathbf{Z}_{2,t}$ a získáme tak rezidua $\mathbf{R}_{1,t}$.

Při označení $\mathbf{M}_{i,j} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_{it} \mathbf{Z}'_{jt}$, $i, j = 0, 1, 2$ lze zmiňované reziduální složky získané metodou nejmenších čtverců zapsat jako

$$\mathbf{R}_{i,t} = \mathbf{Z}_{i,t} - \mathbf{M}_{i,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1} \mathbf{Z}_{2,t} \quad i = 0, 1. \quad (4.14)$$

V dalším kroku zapíšeme regresní rovnici s využitím odvozených reziduí:

$$\mathbf{R}_{0,t} = \alpha\beta' \mathbf{R}_{1,t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.15)$$

Dosazením výrazu (4.14) do rovnice (4.15) dostáváme po přeuspořádání členů:

$$\mathbf{Z}_{0,t} = (\mathbf{M}_{0,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1} - \alpha\beta \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1}) \mathbf{Z}_{2,t} + \alpha\beta \mathbf{Z}_{1,t} + \varepsilon_t. \quad (4.16)$$

Dostáváme tak odhad matice parametrů Ψ (jako funkci parametrů α a β):

$$\hat{\Psi}(\alpha, \beta) = \mathbf{M}_{0,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1} - \alpha\beta \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1}. \quad (4.17)$$

Rovnice (4.15) bývá někdy nazývána jako *regrese redukováného hodnoti* (v anglickém originále reduced rank regression).

K odhadu parametrů α a β z rovnice (4.15) použijeme věrohodnostní funkci, která je koncentrovaná vzhledem k parametrům Ψ . Tato věrohodnostní funkce je tvaru

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \Sigma_\varepsilon) &\propto |\Sigma_\varepsilon|^{-\frac{T}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_{0,t} - \alpha\beta' \mathbf{R}_{1,t})' \Sigma_\varepsilon^{-1} (\mathbf{R}_{0,t} - \alpha\beta' \mathbf{R}_{1,t}) \right\} \\ &\propto |\Sigma_\varepsilon|^{-\frac{T}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma_\varepsilon^{-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_{0,t} - \alpha\beta' \mathbf{R}_{1,t}) (\mathbf{R}_{0,t} - \alpha\beta' \mathbf{R}_{1,t})' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uvažujme označení $\mathbf{S}_{i,j}$

$$\mathbf{S}_{i,j} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_{i,t} \mathbf{R}'_{j,t} = \mathbf{M}_{i,j} - \mathbf{M}_{i,2} \mathbf{M}_{2,2}^{-1} \mathbf{M}_{2,j}, \quad i, j = 0, 1.$$

Pro dané $\boldsymbol{\beta}$ není obtížné získat odhady pro $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}_{0,1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\varepsilon(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{0,1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,0} \\ &= \mathbf{S}_{0,0} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta})'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Lze ověřit, že $\max_{\boldsymbol{\alpha}} L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon) = L(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$ nezávisle na $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$. Pak platí $\max_{\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon} L(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon) = L(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\beta}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\varepsilon(\boldsymbol{\beta}))$. Za použití uvedených odhadů dostáváme $L(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\beta}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\varepsilon(\boldsymbol{\beta})) \propto |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\varepsilon(\boldsymbol{\beta})|^{-T/2}$. Problém maximalizace této věrohodnostní funkce je ekvivalentní s minimalizačním problémem

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} |\mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{0,1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,0}|. \quad (4.21)$$

Využijeme-li rozklad

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{S}_{0,0} & \mathbf{S}_{0,1} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{0,1} & \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta} \end{vmatrix} &= |\mathbf{S}_{0,0}| |\boldsymbol{\beta}' (\mathbf{S}_{1,1} - \mathbf{S}_{1,0} \mathbf{S}_{0,0}^{-1} \mathbf{S}_{0,1}) \boldsymbol{\beta}| \\ &= |\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta}| |\mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{0,1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta})^{-1} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,0}|, \end{aligned}$$

lze úlohu (4.21) přepsat jako

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} |\boldsymbol{\beta}' (\mathbf{S}_{1,1} - \mathbf{S}_{1,0} \mathbf{S}_{0,0}^{-1} \mathbf{S}_{0,1}) \boldsymbol{\beta}| / |\boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_{1,1} \boldsymbol{\beta}|. \quad (4.22)$$

Johansen (1995) ukazuje, že (4.22) lze vyřešit pomocí vyřešení problému vlastních čísel v rovnici

$$|\lambda \mathbf{S}_{1,1} - \mathbf{S}_{1,0} \mathbf{S}_{0,0}^{-1} \mathbf{S}_{0,1}| = 0. \quad (4.23)$$

Vyřešením získáme vlastní čísla $1 > \hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_n \geq 0$ a k nim příslušné vlastní vektory $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n)$, které jsou znormovány podmínkou $\hat{\mathbf{V}}' \mathbf{S}_{1,1} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$. Za platnosti hypotézy (4.12) Johansenovou procedurou získáme odhad kointegračních vztahů jako

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_r). \quad (4.24)$$

Při uvedené normalizaci dostáváme také odhady

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{S}_{0,1} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\varepsilon &= \mathbf{S}_{0,0} - \mathbf{S}_{0,1} \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{S}_{1,0}. \end{aligned}$$

V Johansen (1995, kap. 13) je dokázána konzistence těchto odhadů a jsou odvozeny jejich asymptotická rozdělení.

Testování kointegrace poměrem věrohodností

Johansenova procedura vede na dva typy testových statistik k testování nulové hypotézy (4.12), že existuje alespoň r , $0 \leq r < n$ lineárně nezávislých kointegračních vektorů. K jejich odvození využíváme maximalizovanou věrohodnostní funkci, která má pro zmiňované odhady tvar:

$$L_{\max}^{-2/T} \propto |\mathbf{S}_{0,0}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i). \quad (4.25)$$

Máme k dispozici odhad všech n vlastních čísel $1 > \hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_n \geq 0$ a příslušných vlastních vektorů a věrohodnostním poměrem testujeme, kolik z nich je nulových. Všimněme si, že máme posloupnost modelů $H(0) \subset \dots \subset H(r) \subset \dots \subset H(p)$. Vezmeme-li maximalizovanou věrohodnostní funkci pro každé r a vydělíme jej příslušným vyjádřením pro $r = n$, dostaneme test poměrem věrohodnostní ve tvaru

$$Q(H(r)|H(n))^{-2/T} \propto \frac{|\mathbf{S}_{0,0}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i)}{|\mathbf{S}_{0,0}| \prod_{i=1}^n (1 - \hat{\lambda}_i)}.$$

Po zlogaritmování dojdeme k tzv. *trace statistice*

$$-2 \ln Q(H(r)|H(p)) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

Obdobně lze zkonstruovat věrohodnostní poměr pro modely $H(r)$ a $H(r+1)$, čímž lze získat tzv. *λ -max statistiku*. Shrňme si zde použití těchto statistik k testování kointegrace.

Trace test využíváme k testování hypotézy $H(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] \leq r$ proti alternativě $H_1(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] > r$. Konkrétně aplikujeme statistiku

$$\lambda_{\text{trace}} = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i), \quad (4.26)$$

kde $\hat{\lambda}_{r+1}, \dots, \hat{\lambda}_n$ je $n-r$ nejmenších vlastních čísel, která jsme odvodili v Johansenově proceduře.

λ -max test (někdy nazývaný test největšího vlastního čísla) využíváme k testování hypotézy $H(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] \leq r$ proti alternativě $H_2(r) : \text{rank}[\mathbf{\Pi}] = r+1$. K tomuto účelu aplikujeme statistiku

$$\lambda_{\max} = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1}), \quad (4.27)$$

kde $\hat{\lambda}_{r+1}$ je $r + 1$. největší vlastní číslo.

Asymptotické rozdělení těchto statistik jsou uvedeny v Johansen (1995, kap. 15). Je ukázáno, že nemají standardní χ^2 rozdělení, ale že asymptotické rozdělení je funkcí vícerozměrného Wienerova procesu, a také že oba testy nejsou asymptoticky závislé na přebytečných parametrech. Kritické hodnoty jsou tabelovány například v Banerjee a kol. (1993, str. 269). Při testování postupně za r volíme hodnoty $n - 1, \dots, 0$ a porovnáváme hodnotu testové statistiky s příslušnými kritickými hodnotami.

Poznamenejme, že v praxi je potřeba zvolit tvar deterministického členu podle toho, zda náhodný proces \mathbf{Y}_t obsahuje deterministický či lineární trend a zda je v kointegračním vztahu přítomna konstanta nebo lineární trend. Pět nejčastěji používaných tvarů deterministického členu je shrnuto v Johansen (1995, kap. 5.7).

4.2.3 Volba délky zpoždění p

Opět vzniká otázka, jak volit délku zpoždění p v modelu (4.11), resp. VAR(p) modelu (4.7), jehož vztah s error-correction modelem jsme si ilustrovali. Obdobně jako u ADF testů jednotkového kořene je jednou z možností použití informačních kritérií. Hledáme minimální hodnotu funkce, kterou dané kritérium využívá. Pro testování v tomto případě bývají používány:

- Akaikeho informační kritérium (AIC)

$$AIC(m) = \ln |\tilde{\Sigma}_{\epsilon}(m)| + \frac{2}{T}mn^2, \quad m = 0, \dots, M,$$

- Schwarzovo informační kritérium (SC)

$$SC(m) = \ln |\tilde{\Sigma}_{\epsilon}(m)| + \frac{\ln T}{T}mn^2, \quad m = 0, \dots, M,$$

- Hannan-Quinnovo informační kritérium (HQ)

$$HQ(m) = \ln |\tilde{\Sigma}_{\epsilon}(m)| + \frac{2 \ln \ln T}{T}mn^2, \quad m = 0, \dots, M,$$

kde $\tilde{\Sigma}_{\epsilon}(m) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t'$ je odhad kovarianční matice Σ_{ϵ} založený na reziduích příslušného modelu. Velikost výběru značíme T . Použitím příslušného kritéria zvolíme za řád modelu takové m , pro které je hodnota kritériální funkce minimální. Více podrobností o těchto kritériích je k nalezení v Lütkepohl (2005, kap. 4.3.2). Je zde ukázána konzistence HQ a SC kritéria, AIC odhad není konzistentní (asymptoticky nadhodnocuje skutečný řád).

4.2.4 Lineární omezení na β

Johansen (1995) se v kapitole 7.2 zabývá odhadem a testováním modelu (4.11) v situaci, kdy máme definovány nějaká lineární omezení na matici β . Vychází z modelu (4.11) a uvažuje nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \mathbf{H}\varphi$ pro nějakou známou matici \mathbf{H} rozměru $n \times s$, φ je $s \times r$ rozměrná matice parametrů. Matice omezení \mathbf{H} může být dána například určitými teoretickými předpoklady. Odhad a testování je založeno na metodě maximální věrohodnosti jako v Johansenově proceduře, kterou jsme uvedli výše. Zachováme-li značení, které jsme zavedli v části 4.2.2, dostaneme výsledky, které jsou shrnuty a dokázány v Johansen (1995, věta 7.2).

Za platnosti hypotézy $H_0 : \beta = \mathbf{H}\varphi$ nalezneme maximálně věrohodný odhad β pomocí regrese redukované hodnosti, kde vysvětlujeme $\Delta \mathbf{Y}_t$ pomocí $\mathbf{H}'\mathbf{Y}_{t-1}$ upravenou o zpožděné diference a dummy proměnné. Buďme konkrétní. Nejprve najdeme řešení

$$|\lambda \mathbf{H}'\mathbf{S}_{1,1}\mathbf{H} - \mathbf{H}'\mathbf{S}_{1,0}\mathbf{S}_{0,0}^{-1}\mathbf{S}_{0,1}\mathbf{H}| = 0, \quad (4.28)$$

pro vlastní čísla $1 > \lambda_1^* > \dots > \lambda_s^* \geq 0$ a k nim příslušné vlastní vektory $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$, které jsou znormalizovány podmínkou $\mathbf{V}'\mathbf{H}'\mathbf{S}_{1,1}\mathbf{H}\mathbf{V} = \mathbf{I}$. Dostáváme odhad

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \quad \text{a} \quad \hat{\beta} = \mathbf{H}'\hat{\varphi}. \quad (4.29)$$

Odhad ostatních parametrů se provede metodou nejmenších čtverců při $\beta = \hat{\beta}$.

K testování podmodelu H_0 v $H(r)$ se využívá test poměrem věrohodností $Q(H_0|H(r))$ tvaru

$$-2 \ln Q(H_0|H(r)) = T \sum_{i=1}^r \ln \left\{ \frac{1 - \lambda_i^*}{1 - \hat{\lambda}_i} \right\}, \quad (4.30)$$

který má asymptotické rozdělení $\chi_{r(n-s)}^2$.

V citovaném zdroji jsou shrnuty další typy omezení na kointegrační matici β . Všechny uvažované typy lze analyzovat metodou maximální věrohodnosti. Tímto postupem lze testovat hypotézy typu:

$$H_1 : \beta = (\mathbf{H}_1, \psi), \quad \mathbf{H}_1(n \times r_1), \quad \psi(n \times r_2), \quad r = r_1 + r_2 \quad (4.31)$$

a

$$H_2 : \beta = (\mathbf{H}_2\varphi, \psi), \quad \mathbf{H}_2(n \times s), \quad \varphi(s \times r_1), \quad (4.32)$$

$$\psi(n \times r_2), \quad r = r_1 + r_2, \quad r_1 \leq s \leq n.$$

4.2.5 Hypotézy na parametr α a podmíněný model

V předchozích sekcích jsme si ukázali plný vektorový error-correction model, který se pro n -rozměrný proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ skládá z n rovnic. V některých situacích se zajímáme o

skutečnost, zda lze přejít k redukovanému systému, který nemusí obsahovat všechny parametry plného modelu, přičemž nechceme ztratit žádnou informaci ze zbytku systému. Primárně bychom chtěli modelovat endogenní proměnné s využitím exogenních proměnných. V této kapitole si ukážeme rozklad plného modelu na model podmíněný a marginální. Korektně lze k podmíněnému modelu přejít pouze za předpokladů slabé exogenity. Popíšeme si tyto souvislosti a také se zmíníme o testování slabé exogenity pomocí restrikcí na parametr α . Kompletně je problematika popsána v Johansen (1995, kap. 8), ze které zde vycházíme.

Uvažujme model (4.11) s řádem kointegrace r a rozdělme modelovaný proces na dvě části $\mathbf{Y}_t = (\mathbf{Y}'_{1,t}, \mathbf{Y}'_{2,t})'$, kde $\mathbf{Y}_{1,t}$ je rozměru n_1 a $\mathbf{Y}_{2,t}$ je rozměru n_2 , $n_1 + n_2 = n$. Obdobně rozdělíme vektor chyb $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}'_{1,t}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{2,t})'$ a příslušné matice parametrů:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{1,j} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{2,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix}.$$

Za použití tohoto rozkladu lze model (4.11) rozepsat ve tvaru

$$\Delta \mathbf{Y}_{1,t} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_{1,i} \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{D}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t}, \quad (4.33)$$

$$\Delta \mathbf{Y}_{2,t} = \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{D}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t}, \quad (4.34)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim$ i. i. d. $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$. Opět rozdělme varianční matici v souladu s rozdělením vektoru \mathbf{Y}_t :

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{1,1} & \boldsymbol{\Sigma}_{1,2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{2,1} & \boldsymbol{\Sigma}_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Johansen ukazuje, že model (4.11) lze přepsat jako *marginální model* pro $\mathbf{Y}_{2,t}$ daný vztahem (4.34) a *podmíněný model* pro $\Delta \mathbf{Y}_{1,t}$ při daných současných a zpožděných hodnotách $\Delta \mathbf{Y}_{2,t}$ tvaru

$$\Delta \mathbf{Y}_{1,t} = \boldsymbol{\omega} \Delta \mathbf{Y}_{2,t} + (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\alpha}_2) \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1,i} \Delta \mathbf{Y}_{t-i} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \mathbf{D}_t + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,t}, \quad (4.35)$$

kde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Sigma}_{1,2} \boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1,i} = \boldsymbol{\Gamma}_{1,i} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Gamma}_{2,i}$, $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 = \boldsymbol{\Phi}_1 - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Phi}_2$ a $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,t} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t}$. Varianční matice členu $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,t}$ má tvar $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{1,1} - \boldsymbol{\Sigma}_{1,2} \boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{2,1}$. Všimněme si, že v marginálním i podmíněném modelu vystupuje parametr $\boldsymbol{\beta}$. Z tohoto důvodu bychom měli pro získání eficientního odhadu parametru $\boldsymbol{\beta}$ používat oba modely. Pokud bychom analyzovali pouze (4.35), mohl by nastat problém se ztrátou informace při zanedbání modelu (4.34). Nicméně existuje situace, kdy obsahuje podmíněný model plnou informaci o kointegračních vztazích. Jedná se o situaci, kdy je $\mathbf{Y}_{2,t}$ slabě exogenní pro parametr $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1)$. Johansen zformuloval následující postačující podmínku pro eficientní odhad v podmíněném modelu.

Věta 4.1. *Uvažujme rozklad modelu (4.11) na marginální model (4.34) a podmíněný model (4.35). Jestliže $\alpha_2 = \mathbf{0}$, potom je proces $\mathbf{Y}_{2,t}$ slabě exogenní vzhledem k parametru (β, α_1) a maximálně věrohodný parametrů β a α_1 může být zkonstruován na základě podmíněného modelu (4.35).*

Důkaz. Je uveden v Johansen (1995, Věta 8.1). V první části je ukázáno, že parametry β a α_1 jsou funkcí pouze parametrů podmíněného modelu, a tudíž $\mathbf{X}_{2,t}$ je slabě exogenní vzhledem k těmto parametrům. V další části důkazu se ukáže, že maximálně věrohodný odhad parametrů β a α_1 je v podmíněném modelu za předpokladu slabé exogenity stejný jako odhad v plném modelu (4.11). \square

Podrobněji se problematikou zabývá článek Johansen (1992a), kde je uvažována obecnější konstrukce podmíněného modelu. Velmi zajímavý je pro nás případ, kdy $n_1 = 1$. Pak lze za předpokladů exogenity přejít až na model jednorovnicový. Těmito modely se pro kointegrované procesy zabýváme v kapitolách 4.4 a 4.5. Existuje velmi úzký vztah mezi error-correction modely a autoregressive distributed lags modely, který v dané kapitole ilustrujeme.

Z věty 4.1 vyplývá, že chceme-li testovat, zda je podmnožina proměnných slabě exogenní pro parametry dlouhodobého vztahu, lze to provést testováním omezení zátěžové matice α . V části 4.2.2 jsme se zabývali testováním hypotézy, že matici Π lze rozložit na $n \times r$ rozměrné matice parametrů β a α . Nyní chceme v modelu $H(r)$ z uvedené části testovat hypotézu

$$H_0^* : \alpha = \mathbf{A}\psi, \quad (4.36)$$

kde \mathbf{A} je známá matice rozměru $n \times m$ a ψ je $m \times r$ rozměrná matice parametrů ($m \geq r$). Všimněme si, že v případě, kdy $\mathbf{A} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})'$, testujeme hypotézu slabé exogenity vektoru $\mathbf{Y}_{2,t}$ pro parametry (β, α_1) , které nás zajímají. Hypotézu H_0^* lze také přeformulovat ve formě¹ $\mathbf{A}'_{\perp} \alpha = \mathbf{0}$. Odvození maximálně věrohodného odhadu je technickou záležitostí, kterou zde není možno ilustrovat. Při odvození jsou využívány obě matice, \mathbf{A} i \mathbf{A}_{\perp} . Kompletní postup je uveden v Johansen (1995, kap. 8.2). Výsledkem je opět odhad parametru β za platnosti nulové hypotézy H_0^* pomocí vlastních vektorů a testování podmodelu H_0^* v modelu $H(r)$ věrohodnostním poměrem. Testová statistika $-2 \ln Q(H_0^* | H(r))$ má v tomto případě stejný tvar jako (4.30) s asymptotickým rozdělením $\chi_{r(n-m)}^2$, avšak je potřeba použít vlastní čísla λ_i^* z řešení problému vlastních čísel v modelu H_0^* .

V případě, kdy $\mathbf{A} = (1, 0, \dots, 0)'$ je vektor délky n , testujeme hypotézu, zda je možné přejít k modelu jednorovnicovému bez ztráty eficeince. Velmi zajímavé

¹Mějme matici $n \times m$ rozměrnou matici \mathbf{A} , která má hodnost m , $0 < m < n$. Symbolem \mathbf{A}_{\perp} značíme ortogonální doplněk matice \mathbf{A} , pro který platí:

- \mathbf{A}_{\perp} je matice rozměru $n \times (n - m)$ a má hodnost $n - m$,
- $\mathbf{A}'_{\perp} \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}' \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{0}$.

vlastnosti má jednorovnicový autoregressive distributed lags model, který detailněji analyzujeme v části 4.5.

4.3 Triangular reprezentace

Další modelem, který používali někteří autoři v kointegrační analýze, je tzv. *triangular reprezentace*. S tímto modelem pracuje například Phillips (1991) nebo Park & Phillips (1988) a Park & Phillips (1989). Mějme n -rozměrný $I(1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ a stacionární proces $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim WN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$. Rozdělíme vektor \mathbf{Y}_t na dva podvektory $\mathbf{Y}_t^{(1)}$ a $\mathbf{Y}_t^{(2)}$ dimenzí n_1 a n_2 , přičemž platí $n_1 + n_2 = n$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$. Stejně rozdělíme také vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Triangular reprezentace kointegrovaného systému má pak tvar

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}_t^{(1)} &= \mathbf{B}\mathbf{Y}_t^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(1)}, \\ \Delta\mathbf{Y}_t^{(2)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

kde \mathbf{B} je matice koeficientů rozměru $n_1 \times n_2$. Předpokládáme, že mezi n_2 složkami \mathbf{Y}_{2t} neexistuje kointegrační vztah. Triangular reprezentace je v tomto případě normalizována vzhledem k $\mathbf{Y}_t^{(1)}$, reparametrizací lze docílit jiné normalizace.

Jednou z možností, jak model odhadnout, je použití metody nejmenších čtverců. Tento postup je kompletně popsán v Park & Phillips (1988) jak pro model (4.37), tak pro jeho rozšíření o konstantní člen a lineární trend. Asymptotické rozdělení je odvozeno pomocí vícerozměrné funkcionální centrální limitní věty a má tvar funkcionálu vícerozměrného Wienerova procesu. Odhad $\hat{\mathbf{B}}$ je *superkonzistentní* (OLS odhad $\hat{\mathbf{B}}$ konverguje ke skutečné hodnotě \mathbf{B} rychlostí T místo běžné konzistence \sqrt{T}), avšak asymptotické rozdělení je ovlivněno zahrnutím konstantního členu či lineárního trendu a přítomností autokorelace v chybovém členu. Jednou z možností, jak se aspoň částečně vyhnout zmiňovaným problémům je použití tzv. *fully modified metody nejmenších čtverců* (někdy se značí FM-OLS), kdy aplikujeme neparametrickou korekci na OLS odhad $\hat{\mathbf{B}}$. Tato metoda je popsána v Maddala & Kim (1998, kap. 5.4.1), zde se jí nebudeme podrobně zabývat.

Odlíšná metoda odhadu je uvedena Phillips (1991). Zde je k získání odhadu zapojena metoda maximální věrohodnosti, která je aplikována na error-correction reparametrizaci modelu (4.37). Tu získáme použitím diference na první rovnici v (4.37). Pak má error-correction model tvar

$$\Delta\mathbf{Y}_t = -\mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad (4.38)$$

kde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [\mathbf{I}_{n_1}, -\mathbf{B}], \quad \mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (4.39)$$

Tato forma error-correction modelu je odlišná od těch, které jsme zmiňovali v předešlé kapitole. Výhody, které skýtá použití reparametrizace (4.38) jsou široce diskutovány v citovaném článku. Autor poukazuje na možnosti, které dává speciální parametrická forma chybového vektoru \mathbf{v}_t a také na způsob, jak je v tomto modelu řešena krátkodobá dynamika. Předpokládejme, že $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$, kde $\mathbf{\Omega}$ je pozitivně definitní matice. Rozdělme tuto matici v souladu s dělením vektoru \mathbf{Y}_t na

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}'_{21} \\ \mathbf{\Omega}_{21} & \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}$$

a definujme $\mathbf{\Omega}_{11.2} = \mathbf{\Omega}_{11} - \mathbf{\Omega}_{12}\mathbf{\Omega}_{22}^{-1}\mathbf{\Omega}_{21}$. K odhadu je využívána logaritmická věrohodnostní funkce

$$\ln L(\mathbf{B}, \mathbf{\Omega}) \propto -\frac{T}{2} \ln |\mathbf{\Omega}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\Delta \mathbf{Y}_t + \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{Y}_{t-1})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\Delta \mathbf{Y}_t + \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{Y}_{t-1}) \quad (4.40)$$

Za použití rozpisu matice $\mathbf{\Omega}$ lze zapsat (4.40) jako sumu podmíněné logaritmické věrohodnostní funkce

$$\begin{aligned} -\frac{T}{2} \ln |\mathbf{\Omega}_{11.2}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{Y}_t^{(1)} - \mathbf{B} \mathbf{Y}_{t-1}^{(2)} - \mathbf{\Omega}_{12} \mathbf{\Omega}_{22}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_t^{(2)} \right)' \\ \cdot \mathbf{\Omega}_{11.2}^{-1} \left(\mathbf{Y}_t^{(1)} - \mathbf{B} \mathbf{Y}_{t-1}^{(2)} - \mathbf{\Omega}_{12} \mathbf{\Omega}_{22}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_t^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

a marginální věrohodnostní funkce

$$-\frac{T}{2} \ln |\mathbf{\Omega}_{22}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \Delta \mathbf{Y}_t^{(2)'} \mathbf{\Omega}_{22}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_t^{(2)}. \quad (4.42)$$

Vzhledem k vlastnostem triangular reprezentace nezávisí (4.42) na matici \mathbf{B} a proto k odhadu kointegrační vztahu stačí využít (4.41). Výsledný odhad matice \mathbf{B} metodou maximální věrohodnosti je ekvivalentní s odhadem metodou nejmenších čtverců v lineárním modelu

$$\mathbf{Y}_t^{(1)} = \mathbf{B} \mathbf{Y}_{t-1}^{(2)} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{Y}_t^{(2)} + \mathbf{v}_{1.2t}, \quad (4.43)$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{\Omega}_{12} \mathbf{\Omega}_{22}^{-1}$ a $\mathbf{v}_{1.2t} = \mathbf{v}_t^{(1)} - \mathbf{\Omega}_{12} \mathbf{\Omega}_{22}^{-1} \mathbf{v}_t^{(2)}$. V uvedené notaci jsme využili rozkladu vektoru \mathbf{v}_t na $\mathbf{v}_t^{(1)}$ a $\mathbf{v}_t^{(2)}$, který odpovídá rozdělení vektoru \mathbf{Y}_t na dvě části.

Detaily týkající se odhadu, včetně asymptotických vlastností, jsou kompletně popsány v Phillips (1991). Přestože má triangular reprezentace mnohé zajímavé vlastnosti, využívá se k analýze kointegračních vztahů spíše vektorový error-correction model, kterým jsme se zabývali v kapitole 4.2.

4.4 Statický regresní model kointegrovaných veličin

Uvažujme $n + 1$ -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{X}_t\} = \{(Y_t, \mathbf{Z}_t')'\}$, který je $CI(1, 1)$. Rozložíme jej na n -rozměrný vektor \mathbf{Z}_t a jednorozměrný Y_t . Jedním z přístupů modelování kointegrovaných časových řad je použití *statického regresního modelu* tvaru

$$Y_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Z}_t + \varepsilon_t, \quad (4.44)$$

kde $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Tento statický model nevyužívá zpožděných proměnných (na rozdíl od dynamického, který uvažujeme v další sekci). Krátce se o problematice použití tohoto modelu zmínil Bittner (2005). O problému zdánlivé regrese, který nastává v případě, kdy mezi vyšetřovanými veličinami neexistuje kointegrační vztah, jsme se už zmiňovali. Avšak v případě, kdy kointegrační vztah existuje, lze tento model použít. Jeho hlavní omezení spočívá v tom, že je to model jednorovnicový, a tudíž umožňuje modelovat pouze jeden kointegrační vztah. Víme, že v případě n -rozměrného modelu, kde $n > 2$, může existovat více kointegračních vektorů. Předpoklad existence jediného kointegračního vztahu v tomto případě vede k neeficientnímu odhadu, neboť můžeme dostat pouze jednu lineární kombinaci kointegračních vektorů z modelu vícerozměrného. Nicméně i v situaci, kdy existuje pouze jeden kointegrační vektor, bylo ukázáno, že je použití modelu (4.44) problematické. Korektní odhad dlouhodobého vztahu je možný pouze v případě, kdy složky vektoru \mathbf{Z}_t jsou slabě exogenní vzhledem k parametrům modelu. Při použití endogenních regresorů, které mohou být korelované s reziduální složkou, dochází ke ztrátě informace. Navíc modelujeme pouze dlouhodobý vztah a krátkodobá dynamika je zahrnuta v reziduální složce. Podrobněji jsou tyto problémy shrnuty v Harris (1995).

Odhadujeme-li parametry modelu (4.44) metodou nejmenších čtverců, dostaneme superkonzistentní odhad. Tento výsledek ukázal Stock (1987). I přesto ale dochází k vychýlení odhadu pro malé výběry [Banerjee a kol. (1993)] a je lepší použít model dynamický. Odhad má nestandardní asymptotické rozdělení (většinou funkce Wienerova procesu), avšak za předpokladu slabé exogenity a dalších požadavků na nekorelovanost reziduí lze dosáhnout asymptotické normality.

Residual based test kointegrace

Velmi často bývá kointegrační regrese (4.44) využívána v testu kointegrace založeném na analýze reziduí z modelu. Proto také bývají tyto testy nazývány *residual based testy* kointegrace. Model odhadneme konzistentně metodou nejmenších čtverců a dostaneme

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{Z}_t. \quad (4.45)$$

Testujeme pak nulovou hypotézu nepřítomnosti kointegrace použitím testů na přítomnost jednotkového kořene v odhadnutých reziduích $\hat{\varepsilon}_t$. Ty považujeme za kon-

zistentní odhad chybové složky ε_t . Pokud zamítneme nulovou hypotézu, že $\hat{\varepsilon}_t$ obsahuje jednotkový kořen, zamítáme také nulovou hypotézu, že mezi veličinami neexistuje kointegrační vztah. Nejčastěji bývají k testování použity zobecněné Dickey-Fullerovy testy a Z -testy které navrhnul Phillips. Asymptotické vlastnosti těchto testů vyšetřoval Phillips & Ouliaris (1990). Kromě modelu (4.45) uvažuje také kointegrační regresi s konstantním členem μ . Vzhledem k tomu, že tato problematika byla velmi komplexně shrnuta a realizována na datech v diplomové práci Juráška (2007, kap. 3.1), nebudeme se jí zde dále zabývat. Poznamenejme pouze, že residual based testy lze aplikovat opět za obecných předpokladů na vyšetřovaný vícerozměrný proces, které jsou vícerozměrnou obdobou předpokladů 2.1 z kapitoly o testování jednotkového kořene v jednorozměrné řadě. K získání asymptotických rozdělení testových statistik se využívá vícerozměrná funkcionální centrální limitní věta, kterou jsme zmínili v části 1.6.

Kritické hodnoty testů jednotkového kořene v residual based testech jsou odlišné od kritických hodnot, které mají ADF a Z -testy v kapitole 2. Kritické hodnoty závisí na počtu regresorů n a na zahrnutí konstanty či lineárního trendu. Jsou tabelovány například v Phillips & Ouliaris (1990).

4.5 ADL reprezentace

Autoregressive distributed lag modely (označovány jako *ADL modely*) patří do třídy *dynamických lineárních regresních modelů*. Jedná se o regresní modely, které v sobě vedle současných hodnot vysvětlujících a vysvětlované proměnné mohou obsahovat také hodnoty zpožděné. Díky obecné struktuře ADL modelů je jejich použití pro analýzu kointegračního vztahu vhodnější než použití kointegrační regrese, kterou jsme se zabývali v předchozí části. Velmi stručně se o těchto modelech zmínil už Bittner (2005). Zde si jejich souvislost s kointegrací zkusíme probrat podrobněji. Ukážeme si úzkou souvislost s error-correction modely a předpoklady pro eficientní odhad kointegračního vztahu.

V předchozí sekci jsme si nastínili nedostatky statického regresního modelu. Některé z nich jsou odstraněny použitím zpožděných proměnných. Tyto modely dávají lepší výsledky při testování kointegrace, umožňují modelovat vedle dlouhodobých vztahů i vztahy krátkodobé, které v případě statické regrese byly zahrnuty v reziduální složce. Je potřeba si uvědomit, že se jedná také o model jednorovnicový, tudíž zůstává zde problematika s odhadem více kointegračních vztahů. V tom případě je nutné použít model vícerozměrný, např. error correction model. Nicméně za určitých předpokladů ohledně exogenity vysvětlujících proměnných lze

tento vícerozměrný systém redukovat na jednorovnicový model, jak jsme viděli v části 4.2.5.

Přehledné základy ADL modelů byly shrnuty v Hendry a kol. (1984). Uvažujme $n + 1$ rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{X}_t\}$. Zajímáme se o případ, kdy je $\mathbf{X}_t \sim I(1)$ a mezi složkami existuje kointegrační vztah. Náhodný vektor \mathbf{X}_t rozdělíme na dva podvektory - jednorozměrný proces Y_t a n -rozměrný proces $\mathbf{Z}_t = (Z_{1,t}, \dots, Z_{n,t})'$. V uvedené literatuře je uvažován velmi obecný tvar ADL modelu:

$$\alpha(L)Y_t = \mu + \sum_{j=1}^n \beta_j(L)Z_{j,t} + \varepsilon_t, \quad (4.46)$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha(L) &= 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p, \\ \beta_j(L) &= \beta_{j,0} + \beta_{j,1} L - \dots - \beta_{j,q_j} L^{q_j}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.47)$$

V tomto modelu jsou reálné parametry $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ a $\{\beta_{j,k}\}_{(j,k)=(1,0)}^{n,q_j}$, μ je konstantní člen a $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Takový model bývá označován jako $ADL(p, q_1, \dots, q_n)$. Častěji se v literatuře uvažuje situace, kdy $q_1 = \dots = q_n = q$. Lze tak učinit bez ztráty na obecnosti, neboť q lze zvolit jako maximální zpoždění u Z_j , a v případě potřeby mohou být některé parametry $\beta_{i,j}$ rovny nule. Takový model pak bývá označován jako $ADL(p, q, n)$. S využitím $\beta_j(L) = \sum_{i=0}^q \beta_{j,i} L^i$, $j = 1, \dots, n$ lze model rozepsat následovně:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^q \beta_{j,i} Z_{j,t-i} + \varepsilon_t \\ &= \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \beta_j(L) Z_{j,t} + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Tyto modely mají velkou výhodu, že je lze přepsat v mnoha různých formách při zachování OLS odhadu parametrů a bez ovlivnění jejich schopnosti popisovat data. V Hendry a kol. (1984, kapitola 2.6) je ukázka devíti rozdílných modelů, které spadají do třídy ADL modelů. Jsou značně odlišné v tom, jaké zpožděné proměnné obsahují a jak pracují s dlouhodobými vztahy mezi veličinami. Uveďme, že do třídy ADL modelů patří například běžný regresní model ($Y_t = \sum_{j=1}^n \beta_j Z_{j,t} + \varepsilon_t$), distributed lag model ($Y_t = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^q \beta_{j,i} Z_{j,t-i} + \varepsilon_t$), modely s diferencovanými členy a také modely, kde vystupuje error correction člen. Souvislost $ADL(1, 1, 1)$ modelu s EC modelem už demonstroval Bittner (2005). Zde si ukážeme vztah pro obecný model $ADL(p, q, n)$ daný rovnicí (4.46). Využijeme analogického rozkladu operátorů jako v (4.4). Pro $\alpha(L)$ a $\beta_j(L)$ definovaných v (4.47) lze jednoduchými úpravami dostat

rozklady:

$$\alpha(L) = \alpha(1)L + \Delta\alpha^*(L),$$

$$\text{kde } \alpha^*(L) = 1 - \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j^* L^j, \quad \alpha_j^* = - \sum_{k=j+1}^p \alpha_k, \quad j = 1, \dots, p-1$$

a

$$\beta_j(L) = \beta_j(1)L + \Delta\beta_j^*(L),$$

$$\text{kde } \beta_j^*(L) = \sum_{k=0}^{q-1} \beta_{j,k}^* L^k, \quad \beta_{j,0}^* = \beta_{j,0}, \quad \beta_{j,k}^* = - \sum_{i=k+1}^q \beta_{j,i}, \quad k = 1, \dots, q-1.$$

Pomocí těchto rozkladů lze $ADL(p, q, n)$ model upravit na:

$$\alpha^*(L)\Delta Y_t = \mu - \alpha(1)Y_{t-1} + \sum_{j=1}^n \beta_j(1)Z_{j,t-1} + \sum_{j=1}^n \beta_j^*(L)\Delta Z_{j,t} + \varepsilon_t. \quad (4.49)$$

Toto vyjádření lze rozepsat podrobněji:

$$\Delta Y_t = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{q-1} \beta_{j,i}^* \Delta Z_{j,t-i} - \alpha(1) \left[Y_{t-1} - \frac{\mu}{\alpha(1)} - \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j(1)}{\alpha(1)} Z_{j,t-1} \right] + \varepsilon_t.$$

Dostáváme tak error-correction formu ADL modelu. Jedná se o jednorovnicový model, kde jsou obsaženy současné a zpožděné diferencované členy (obdobně jako v EC modelu představeném v dřívějších kapitolách) a error-correction člen

$$-\alpha(1) \left[Y_{t-1} - \frac{\mu}{\alpha(1)} - \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j(1)}{\alpha(1)} Z_{j,t-1} \right] = -\alpha(1)\eta_{t-1}, \quad (4.50)$$

který vyjadřuje dlouhodobý rovnovážný stav. Odchylky od dlouhodobého rovnovážného stavu v čase $t-1$ jsou v tomto případě vyjádřeny členem η_{t-1} . Velkou důležitost v této reparametrizaci hraje člen $\alpha(1)$, který ovlivňuje rychlost v dosažení rovnovážného stavu a vyjadřuje míru odlišnosti mezi dlouhodobými a krátkodobými vztahy. Poznamenejme, že existují další reparametrizace ADL modelu, které obsahují error correction člen a diferencované složky. Některé z nich jsou uvedeny v Banerjee a kol. (1993, kap. 2.4). Jedná se například o Bewleyovu transformaci a Bårdsenovu transformaci. Odhady parametrů na základě těchto rozdílných transformací jsou ekvivalentní. To je ukázáno například v kapitole 2.6 uvedeného zdroje. U každé transformace se zajímáme o odhad dlouhodobého rovnovážného stavu. Označíme-li θ_j jako dlouhodobý efekt, který má změna v Z_j na Y , dostáváme pro všechny transformace včetně (4.49) vztah

$$\theta_j = \frac{\beta_j(1)}{\alpha(1)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.51)$$

Přesně tento výraz vidíme u $Z_{j,t-1}$ v error-correction členu (4.50). Pro error-correction reparametrizaci je nutné zavést předpoklad, že $\alpha(1) \neq 0$ (požadujeme, aby operátor $\alpha(L)$ neobsahoval jednotkové kořeny). Dále také požadujeme, aby $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$, abychom zaručili konvergenci modelu k dlouhodobému řešení.

V kapitole 4.2.5 jsme ilustrovali, že k přechodu z plného vícerozměrného systému k modelu méně rovnicovému (v tomto případě jednorovnicovému) potřebujeme předpoklad slabé exogenity na vysvětlující proměnné. Pak lze eficientně odhadnout dlouhodobý kointegrační vztah. Samostatným ADL modelem se podrobně zabývají články Pesaran & Shin (1995) a Hassler & Wolters (2006). K analýze využijeme error-correction přepis ADL modelu, který jsme odvodili v rovnici (4.49). Zajímáme se tedy o odhad dlouhodobého kointegračního vztahu v modelu

$$\Delta Y_t = \mu + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^n \varphi_j Z_{j,t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{q-1} \beta_{j,i}^* \Delta Z_{j,t-i} + \varepsilon_t, \quad (4.52)$$

kde $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\gamma = -\alpha(1)$ a $\varphi_j = \beta_j(1)$, $j = 1, \dots, n$, podle předchozích odvození. Uvedené materiály kromě požadavků na exogenitu \mathbf{Z}_t vzhledem k chybovému členu ε_t uvažují předpoklad, že samotné $I(1)$ regresory \mathbf{Z}_t nejsou kointegrované. V Pesaran & Shin (1995) je dokázána konzistence a asymptotické rozdělení odhadu v modelu (4.52) metodou nejmenších čtverců. Za uvedených předpokladů dostáváme asymptoticky normální rozdělení odhadu koeficientů dlouhodobého vztahu. Jak jsme výše uváděli, odhad dlouhodobého kointegračního vztahu $\hat{\theta}_j = \hat{\varphi}_j / \hat{\gamma}$, $j = 1, \dots, n$ je shodný s odhadem v jiných reparametrizacích ADL modelu.

V předchozí sekci jsme zmiňovali vychýlení odhadu kointegrační regrese při konečném výběru. Toto vychýlení bylo způsobeno zanedbáváním krátkodobé dynamiky v modelu. Použití ADL modelů je v kointegrační analýze mnohem vhodnější, neboť díky přidání zpožděných proměnných a diferencí v error-correction reparametrizaci lze pokrýt krátkodobou i dlouhodobou dynamiku. Opět je potřeba určit délky zpoždění p a q . V Pesaran & Shin (1995) je využíváno informačních kritérií, o kterých jsme se zmiňovali v předešlých sekcích.

4.6 Grangerova kauzalita v kointegrovaných systémech

Často se zajímáme o vzájemné působení mezi složkami kointegrovaného vícerozměrného systému. Jednou z používaných metod je ověření Grangerovy kauzality, kterou jsme zavedli v kapitole 1.2. Granger (1988) ukázal, že pokud mezi dvěma $I(1)$ proměnnými existuje kointegrační vztah, pak musí být alespoň v jednom směru kauzální působení. Bittner (2005) ilustroval analýzu kauzality pouze na stacionárním VAR modelu. Lütkepohl (2005, kap. 6.6) ukázal, že pro kointegrovaný VAR model dostáváme stejná omezení na Grangerovu nekauzalitu, jako ve stacionárním případě.

Mějme n rozměrný $I(1)$ proces $\{\mathbf{Y}_t\}$, který lze rozdělit na m rozměrný proces $\{\mathbf{Y}_{1,t}\}$ a $n - m$ rozměrný proces $\{\mathbf{Y}_{2,t}\}$. Předpokládáme, že složky procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$ jsou kointegrované a využijeme $\text{VAR}(p)$ zápisu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,t} \\ \mathbf{Y}_{2,t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} \Phi_{11,i} & \Phi_{12,i} \\ \Phi_{21,i} & \Phi_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,t-i} \\ \mathbf{Y}_{2,t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

kde jsou parametry rozděleny ve shodě s \mathbf{Y}_t . Pak není obtížné nahlédnout, že $\mathbf{Y}_{2,t}$ nepůsobí kauzálně na $\mathbf{Y}_{1,t}$ v Grangerově smyslu právě tehdy, když $\Phi_{12,i} = \mathbf{0}$ pro všechna $i = 1, \dots, p$.

Pro odpovídající vektorový error-correction model

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Y}_{1,t} \\ \Delta \mathbf{Y}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{12} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,t-1} \\ \mathbf{Y}_{2,t-1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{11,i} & \Gamma_{12,i} \\ \Gamma_{21,i} & \Gamma_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Y}_{1,t-i} \\ \Delta \mathbf{Y}_{2,t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

dostaneme jednoduše obdobná omezení. V modelu (4.54) $\mathbf{Y}_{2,t}$ nepůsobí kauzálně na $\mathbf{Y}_{1,t}$ v Grangerově smyslu právě tehdy, když $\Pi_{12} = \mathbf{0}$ a $\Gamma_{12,i} = \mathbf{0}$ pro všechna $i = 1, \dots, p-1$. K testování Grangerovy kauzality je tedy využíván soubor lineárních omezení. Při testování ve stacionárním modelu lze bez problémů použít standardní Waldův test nebo test věrohodnostním poměrem. Avšak v případě kointegrovaných veličin se objevují potenciální problémy při testování, neboť zmíněné testy nemusí mít asymptotické rozdělení χ^2 , jako mívají obvykle.

Tento problém se někdy řeší tím, že se k testování Grangerovy kauzality používá dvourozměrný VAR proces pro každou dvojici z vícerozměrného systému. Tuto metodu navrhli Lütkepohl & Reimers (1992) a ukázali, že v tomto případě Waldova statistika asymptotické rozdělení χ^2 . Autoři uvažují dva náhodné procesy, $\{Y_t\}$ a $\{Z_t\}$, jejichž diference jsou stacionární. Dále předpokládají, že procesy jsou generovány dvourozměrným $\text{VAR}(p)$ procesem

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} \Phi_{11,i} & \Phi_{12,i} \\ \Phi_{21,i} & \Phi_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-i} \\ Z_{t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$ je dvourozměrný bílý šum s nulovou střední hodnotou a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$. K odhadu parametrů je v článku využívána reparametrizace systému (4.55) na error-correction formu. Opět platí, že v tomto systému proces $\{Z_t\}$ nepůsobí kauzálně na $\{Y_t\}$ právě tehdy, když $\Phi_{12,i} = 0$ pro všechny $i = 1, \dots, p$. Obráceně proces $\{Y_t\}$ nepůsobí kauzálně na $\{Z_t\}$ právě tehdy, když $\Phi_{21,i} = 0$ pro všechny $i = 1, \dots, p$.

Označme

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{11,i} & \Phi_{12,i} \\ \Phi_{21,i} & \Phi_{22,i} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\varphi} = \text{vec}[\Phi_1, \dots, \Phi_p],$$

kde $\boldsymbol{\varphi}$ představuje vektor všech VAR koeficientů modelu (4.55) rozměru $4p$. Nyní lze omezení na Grangerovu nekauzalitu zapsat jako $\mathbf{R}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, kde \mathbf{R} je odpovídající

matice omezení, která má plnou řádkovou hodnost. Testujeme hypotézu

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \text{ proti alternativě } H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}. \quad (4.56)$$

Pro odhad $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ parametru $\boldsymbol{\varphi}$ platí

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}),$$

kde T je velikost výběru a $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$ je regulární varianční matice asymptotické distribuce, a k testování hypotézy H_0 lze použít standardní Waldovu statistiku

$$\lambda_w = T\hat{\boldsymbol{\varphi}}' \mathbf{R}' (\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}\mathbf{R}')^{-1} \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (4.57)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$ je konzistentní odhad $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$.

Obecně pro kointegrovaný systém, kde $\boldsymbol{\varphi}$ odhadneme buď metodou nejmenších čtverců nebo Johansenovou procedurou, má Waldova statistika nestandardní asymptotické rozdělení. Avšak v našem případě bylo ukázána standardní χ_p^2 asymptotické rozdělení Waldovy statistiky za platnosti nulové hypotézy. Výsledky jsou platné i v případě, kdy do modelu (4.55) přidáme konstantní člen. Dostáváme asymptoticky validní test Grangerovy kauzality v dvourozměrném systému. Pokud používáme tuto metodu ve vícerozměrném systému, tak vyšetřujeme zvlášť každou dvojici proměnných.

Existují také další způsoby, jak se vypořádat s testováním kauzality ve vícerozměrném systému. Zájemci mohou nalézt jiné návrhy v Lütkepohl (2005, kap. 7.6)

Kapitola 5

Numerická aplikace na reálná data

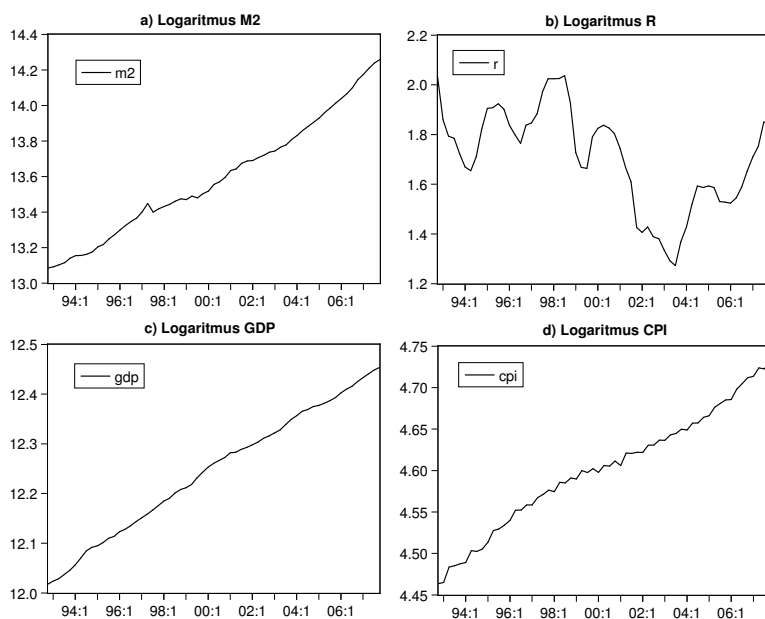
V této části se pokusíme ilustrovat postup při analýze reálných dat a poukázat na problémy, které jsou s ní spojeny. Velmi důležitá je volba analyzovaného modelu. Při analýze ekonomických časových řad je snahou zvolit proměnné v modelu tak, aby mezi nimi existoval určitý ekonomický vztah, který chceme potvrdit. Finálně jsme se rozhodli pro analýzu dlouhodobého vztahu v *modelu poptávky po penězích* ve Spojeném království Velké Británie a Severního Irska (dále už jen UK). V ekonomické teorii se předpokládá, že poptávka po penězích je funkcí reálného příjmu, cenové hladiny a příležitosti plynoucí z držení peněz. Tímto modelem už se zabývaly například práce Juráška (2007), Johansen (1992b), Johansen & Juselius (1990) a Arlt & Arltová (2007). Model poptávky po penězích umožňuje širokou volbu reálných proměnných, neboť každý z uvažovaných ukazatelů lze aproximovat několika odlišnými způsoby. Samozřejmě také záleží na tom, jaké řady se v dané lokalitě dají reálně sehnat. Naše finální volba vychází z Arlt & Arltová (2007, kap. 6.4), kde je také podrobněji vysvětlena. Poptávku po penězích představuje reálné $M2$ a dále do modelu vstupuje reálný hrubý domácí produkt (označ. HDP) jako míra reálného příjmu, mezičtvrtletní míra inflace (označ. CPI) a tříměsíční úroková sazba na peněžním trhu (označ. R). V tabulce 5.1 je souhrn uvedených proměnných včetně jejich jednotky, zdroje a případně základny, ke které jsou data vztažena.

Proměnná	Jednotka / Základ	Zdroj
$M2$	Mil. GBP	Bank of England
R	Procenta	Eurostat
HDP	Mil. GBP / Základ r. 1995	Eurostat
CPI	Základ r. 2000 = 100	OECD

Tabulka 5.1: Proměnné finálního modelu.

Uvažujeme kvartální data, kde proměnné $M2$ a HDP používáme sezónně

očištěné, neboť vykazovaly silnou kvartální sezónnost. Při použití očištěných řad bylo možné uvažovat model bez sezónních dummy proměnných. Dále jsme pro analýzu všechny řady logaritmicky transformovali, abychom získali model v souladu s ekonomickou teorií. Logaritmicky transformované řady budeme v dalším textu značit malými písmeny ($m2$, r , gdp , cpi). Důležitá je také správná volba délky analyzovaných řad. Obecně je vhodné uvažovat delší období, neboť kointegrace se zabývá dlouhodobým vztahem. Na druhou stranu se při delším časovém vzorku objevují problémy s nekonzistencí dat, strukturální změnou a podobně. V praxi tedy jde o kompromis mezi délkou a kvalitou modelu. Po podrobné analýze jsme dospěli k finálnímu modelu, kde uvažujeme hodnoty proměnných od 2. kvartálu roku 1993 do 4. kvartálu roku 2007. Jedná se o 59 pozorování. Navíc pro každý ze zkoumaných modelů bylo potřeba použít příslušný počet počátečních hodnot podle volby zpoždění. K tomu účelu jsme používali příslušný počet pozorování před 2. kvartálem roku 1993. Vzorek stejné nebo menší velikosti na podobném modelu uvažovali Arlt & Arltová (2007), Johansen (1995, kap. 7.3.1) a také několik dalších Johansenových prací. Řady, které uvažujeme v modelu, jsou vykresleny na obrázku 5.1 (ve finálním error-correction modelu uvažujeme jedno zpoždění diferencované složky, tudíž první 2 pozorování v grafu bereme jako počáteční).



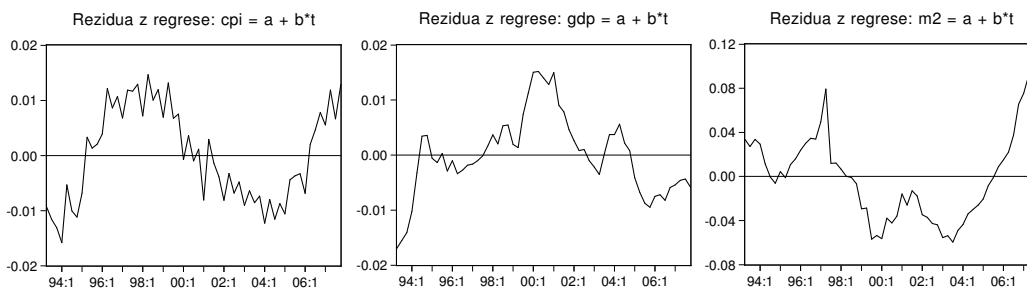
Obrázek 5.1: Čtvrtletní zlogaritmovaná data pro finální model (období 1993:2 - 2007:4).

Poznamenejme, že jsme před finální volbou zkoušeli analyzovat také mnohé další typy modelů. Mezi nimi uvedme například pětirozměrné modely pro analýzu vztahů *purchasing power parity* a *uncovered interest rate parity* mezi UK a Dánskem,

UK a OECD, Dánskem a USA apod. Obdobnou analýzu s velmi pěknými výsledky prováděli Johansen & Juselius (1992). Dále jsme zkoušeli analýzu modelu poptávky po penězích pro OECD a Dánsko. Bohužel se nám nepodařilo získat uspokojivé odhady dlouhodobých vztahů pro žádný ze zmíněných modelů. Přestože v mnohých případech trace test i λ -max test poukazyvaly na existenci kointegračního vztahu, stacionarita výsledného dlouhodobého vztahu nebyla uspokojivá. Při analýze těchto modelů jsme se setkali s problémy jako významné porušení předpokladů na rezidua, v některých případech nebyla zamítnuta hypotéza $I(2)$ pro některou z analyzovaných řad nebo kointegrační testy neprokázaly existenci kointegračního vztahu. Další problémy mohly být způsobeny strukturální změnou v analyzovaném období.

5.1 Analýza integrovanosti

Před samotnou kointegrační analýzou je potřeba ověřit, zda jsou zkoumané řady integrované řádu 1. Po prohlédnutí obrázku 5.1 vyvstává otázka, zda jsou řady *cpi*, *gdp* a *m2* trendově stacionární. K tomuto účelu jsme provedli regresi zmiňovaných proměnných na čase. Odečtením trendu od zkoumaných řad dostaneme rezidua, která jsou zakreslena na obrázku 5.2. Už z grafu je vidět, že rezidua nejsou stacionární, což potvrdily také testy jednotkového kořene, který nebyl v reziduiích zamítnut. Lze tedy očekávat, že řady obsahují stochastický trend.



Obrázek 5.2: Rezidua z regrese *cpi*, *gdp* a *m2* v závislosti na čase.

K testování jednotkového kořene v řadách *m2*, *r*, *gdp* a *cpi* ve vyšetřovaném období použijeme testy, které jsme zavedli v kapitole 2. Konkrétně se zde pokusíme ilustrovat neparametrické Phillips-Perronovy testy, které lze použít za obecnějších předpokladů 2.1. Postupujeme podle doporučené strategie, kterou jsme uvedli na konci části 2.4. K získání testových statistik Z_{α}^{μ} , Z_t^{μ} , $Z_{\alpha}^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$ jsme použili funkci `ur.pp`, která už je naiplementována ve statistickém programu R. Hodnoty testových statistik $Z(\Phi_1)$, $Z(\Phi_2)$ a $Z(\Phi_3)$ jsme získali pomocí funkce `ur.jh`, kterou pro prostředí R naprogramoval a publikoval Michal Juráška (viz. Juráška (2007, kap. 4.3)). Výsledky spolu s kritickými hodnotami jsou shrnuty v tabulce 5.2.

Z tabulky vidíme, že pro žádnou z analyzovaných řad nezamítáme na 5% hladině nulovou hypotézu $(\mu, \beta, \alpha) = (\mu, 0, 1)$ v modelu (2.22), neboť hodnota testové statistiky $Z(\Phi_1)$ je menší než příslušná 5% kritická hodnota. Nezamítáme tedy existenci jednotkového kořene a k dalšímu testování lze použít statistiky $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$ v nejbohatším modelu (2.22) bez ztráty síly. Obě tyto statistiky nezamítají nulovou hypotézu jednotkového kořene ($Z_\alpha^{\mu\beta} > 5\%$ k.h. i $Z_t^{\mu\beta} > 5\%$ k.h. pro všechny proměnné). Dále se zajímáme, zda lze k testování použít statistiky Z_α^μ a Z_t^μ . K tomu je nutné ověřit platnost sdružené hypotézy $(\mu, \beta, \alpha) = (0, 0, 1)$ v modelu (2.21), jak jsme uváděli v teoretické části. Z výsledků je vidět, že u proměnných *m2*, *gdp* a *cpi* zamítá $Z(\Phi_2)$ statistika tuto hypotézu s přehledem na 1% hladině (1% k.h. = 7.02). Pro uvedené proměnné bychom tedy měli zůstat u výsledku z testů $Z_\alpha^{\mu\beta}$ a $Z_t^{\mu\beta}$. Finálně jsme došli k závěru, že všechny zkoumané řady obsahují jednotkový kořen, přičemž pro proměnné *m2*, *gdp* a *cpi* je nejvhodnější model (2.21) s vychýlením a pro řadu *r* lze použít model (2.11). Dostáváme tak stejné výsledky jako Juráška (2007) v praktické části. Poznamenejme, že existenci jednotkového kořene jsme analyzovali také ADF testy, které jsou přehledně naimplementovány v programu **EViews**. Zde jsme také nezamítli přítomnost jednotkového kořene v žádné ze zkoumaných řad.

Dále bylo nutné ověřit, zda není některá ze zkoumaných řad $I(2)$. K tomu jsme používali běžný postup, kdy testujeme jedenkrát diferencovanou časovou řadu na přítomnost jednotkového kořene. Phillips-Perronovy testy zamítají hypotézu jednotkového kořene ve všech diferencovaných řadách na 1% hladině. Nyní lze přejít ke kointegrační analýze.

H_0	Test	m2	r	gdp	cpi	5% k.h.
$(\mu, \beta, \alpha) = (\mu, 0, 1)$	$Z(\Phi_3)$	4.761	3.014	3.876	5.417	6.73
$\alpha_{\mu\beta} = 1$	$Z_\alpha^{\mu\beta}$	-0.538	-7.498	-6.458	-7.043	-19.80
$\alpha_{\mu\beta} = 1$	$Z_t^{\mu\beta}$	-0.196	-1.730	-1.945	-2.201	-3.50
$(\mu, \beta, \alpha) = (0, 0, 1)$	$Z(\Phi_2)$	44.031**	2.032	111.952**	33.331**	5.13
$\alpha_\mu = 1$	Z_α^μ	0.834	-7.768	-0.286	-0.260	-13.30
$\alpha_\mu = 1$	Z_t^μ	2.555	-2.134	-1.439	-0.763	-2.93
$(\mu, \alpha) = (0, 1)$	$Z(\Phi_1)$	69.129**	2.807	161.379**	71.204**	4.86

* zamítáme na 5% hladině, ** zamítáme na 1% hladině.

5% kritické hodnoty pro 50 pozorování, které publikoval např. Juráška (2007, tab. 2.1, 2.3).

Tabulka 5.2: Phillips-Perronovy testy jednotkového kořene.

5.2 Kointegrační analýza vícerozměrného systému

V této části se budeme zabývat analýzou modelu v rámci vícerozměrného systému. Připomeňme si, že v praxi bývá nejčastěji používán error-correction model, který lze převést na VAR a VMA model, jak jsme viděli v teoretické části. Také jsme si už popsali široké možnosti této reprezentace, které umožňují zvláště analyzovat dlouhodobý vztah v rámci celého systému a testování kointegrace založené na metodě maximální věrohodnosti. Navíc lze dále pohodlně testovat hypotézy ohledně tvaru kointegračního vektoru a exogenity proměnných. Veškerá další kointegrační analýza byla prováděna v programu **EViews** verze 5.1, který se na tuto problematiku specializuje. Pouze okrajově byl používán volně šiřitelný software **JMulTi** verze 4.22, který podporuje také Helmut Lütkepohl, autor mnoha cenných materiálů na téma kointegrace.

Při testování nesmíme opomenout, že by měly být splněny *předpoklady nezávislosti a normality reziduí* v odhadnutém modelu. Dále je nutné stanovit řád zpoždění p . K tomuto účelu lze použít informační kritéria, která jsme zavedli v části 4.2.3. V praxi se většinou tato kritéria vyhodnocují na VAR(p) modelu (4.7), do kterého přidáváme konstantní člen. V programu **EViews** je k tomuto účelu VAR(p) model odhadován metodou nejmenších čtverců. Poznamenejme, že dostaneme opravdu pouze informační hodnotu. Ve finálním error-correction modelu je někdy nutné přidat či ubrat zpoždění v závislosti na reálných výsledcích a vlastnostech reziduí. V našem případě jsme zvolili pro výpočet kritérií maximální zpoždění $M = 10$ a dostali jsme výsledky, které jsou shrnuty v tabulce 5.3.

$\hat{p}(AIC)$	$\hat{p}(SC)$	$\hat{p}(HQ)$
10	2	2

Tabulka 5.3: Řád modelu VAR(p) odhadnutý na základě Akaikeho, Schwarzova a Hannan-Quinnova kritéria.

Vzhledem k tomu, že odhad Akaikeho kritériem není konzistentní, je vhodnější uvažovat hodnotu zpoždění $p = 2$, kterou pro VAR proces odhadly zbylá dvě kritéria. Z teoretické části víme, že v tomto případě bychom v error-correction modelu navrhovali použít pouze jedno zpoždění. Ve finálním modelu jsme také k této volbě dospěli na základě porovnání výsledků pro různá zpoždění. Navíc bylo možné použitím tzv. *Lag Exclusion Testu*, který je založen na χ^2 Waldově statistice, ukázat, že není potřeba do error-correction modelu zahrnout vyšší zpoždění než 1. Tento test je naimplementován v programu **EViews**.

Označíme-li $\mathbf{Y}_t = (m2_t, r_t, gdp_t, cpi_t)'$ jako vektor zkoumaných veličin v čase t , lze odhadovaný error-correction model zapsat ve formě

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \mathbf{\Pi} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Phi} \mathbf{D}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, \dots, 59 \quad (5.1)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je čtyřrozměrný vektor reziduí, který by měl splňovat předpoklady normality a nekorelovanosti. Navíc uvažujeme dvě počáteční pozorování \mathbf{Y}_0 a \mathbf{Y}_{-1} . Připomeňme si, že chceme v tomto modelu testovat hypotézu $H(r)$ o existenci r kointegračních vztahů, kterou jsme uvažovali v (4.12). Dále je potřeba zvolit tvar deterministického členu $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{D}_t$. Jako nejvhodnější se ukázala volba, kdy uvažujeme konstantní člen jak v kointegračním vztahu, tak mimo něj. Při použití ortogonálního doplňku k zátěžové matici $\boldsymbol{\alpha}$ lze námi uvažovanou volbu zapsat ve tvaru

$$\Pi\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{D}_t = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\alpha}_\perp\boldsymbol{\gamma}, \quad (5.2)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou matice rozměru $4 \times r$ a hodnoti r , $\boldsymbol{\rho}$ je vektor konstant v kointegračním vztahu a $\boldsymbol{\gamma}$ je vektor konstant mimo kointegrační vztah. Tento tvar deterministického členu je doporučován v případě, kdy řady vykazují stochastický trend. Detaily o tomto a dalších tvarech deterministického členu lze nalézt v Johansen (1995, kap. 5). Poznamenejme, že jsme testovali kointegraci i v modelech s jinou strukturou deterministického členu, avšak výsledný odhad dlouhodobého vztahu nebyl uspokojivý. Přestože nám např. v modelu s konstantou pouze v kointegračním vztahu trace test odhadoval na 5% hladině dva kointegrační vztahy, výsledné kointegrované procesy $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y}_t$ nebyly prokazatelně $I(0)$. Výsledná volba (5.2) se zdá nejvhodnější také z toho hlediska, že řady $m2$, gdp a cpi obsahují stochastický trend, jak jsme viděli v úvodu části 5.1.

Prvotní analýzy na daném modelu vykazovaly velmi silné porušení předpokladu normality reziduí v první rovnici, kde je na levé straně proměnná $\Delta m2_t$. Po podrobném prozkoumání bylo zjištěno, že normalita je porušena kvůli jedinému odlehlému pozorování v řadě $m2$ v 2. kvartálu roku 1997. Tuto skutečnost lze pozorovat také na obrázku 5.1. Tato odlehlá hodnota mohla být způsobena například nějakým šokem v ekonomickém dění v UK, ale stejně tak se může jednat o chybu v prepisu. Bohužel se nám nepovedlo dohledat ekonomickou souvislost. Nicméně použijeme běžný postup, že do modelu zahrneme deterministickou pomocnou proměnnou, která má všude 0 a pouze jednu 1 ke korekci odlehlého rezidua. Po této úpravě je s přehledem dosažena normalita reziduí $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Přidání této proměnné nemělo na odhadnutý kointegrační vztah významný vliv.

K testování řádu kointegrace ve finálním modelu používáme *trace test* a *λ -max test*, které jsme zavedli na konci části 4.2.2. Výsledky jsou shrnuty v tabulkách 5.4 a 5.5. Z výsledků je patrné, že trace test indikuje na 5% hladině jeden kointegrační vztah. Při použití λ -max testu nezamítáme na 5% hladině hypotézu nepřítomnosti kointegrace v modelu, avšak není obtížné ověřit, že na 10% hladině už i tento test indikuje jeden kointegrační vztah. K jednomu kointegračnímu vztahu dospěl také Juráška (2007) v modelu poptávky po penězích v USA a Johansen (1995) v modelu pro UK. V analýze pro Českou republiku prováděné v Arlt & Arltová (2007) dokonce autoři prokázali 2 kointegrační vztahy. Nicméně výsledné odhady kointegračního vektoru jsou odlišné v každém z uvedených materiálů a nelze je přímočaře srovnávat.

Rozdíly mohou být způsobeny odlišnou ekonomickou situací v analyzovaných zemích, jinou volbou proměnných či změnou kointegračního vztahu v závislosti na analyzovaném intervalu. Níže se pokusíme určité podobnosti otestovat restrikcemi aplikovanými na kointegrační vztah. Vzhledem k naší výsledné volbě deterministického členu a řádu kointegrace $r = 1$ označme kointegrační vektor v analyzovaném modelu $\beta'_{ec} = (\beta_{m2}, \beta_r, \beta_{gdp}, \beta_{m2}, \rho)$. Chceme odhadovat kointegrační vztah $\beta'_{ec}[\mathbf{Y}'_t, 1]'$.

Hypotéza	$\hat{\lambda}_i$	λ_{trace}	5% k. h.	p -hodnota
$r = 0$	0.370	51.839	47.856	0.020*
$r \leq 1$	0.207	24.623	29.797	0.175
$r \leq 2$	0.133	10.949	15.495	0.215
$r \leq 3$	0.042	2.512	3.841	0.113

* zamítáme na 5% hladině.

5% kritické hodnoty které jsou použity v EViews vycházející z MacKinnon a kol. (1990).

Tabulka 5.4: Trace test řádu kointegrace.

Hypotéza	$\hat{\lambda}_i$	λ_{max}	5% k. h.	p -hodnota
$r = 0$	0.370	27.216	27.584	0.056
$r \leq 1$	0.207	13.673	21.131	0.392
$r \leq 2$	0.133	8.438	14.265	0.336
$r \leq 3$	0.042	2.512	3.841	0.113

* zamítáme na 5% hladině.

5% kritické hodnoty které jsou použity v EViews vycházející z MacKinnon a kol. (1990).

Tabulka 5.5: λ -max test řádu kointegrace.

Johansenovou procedurou dostaneme odhad kointegračního vektoru, který označíme $\hat{\beta}'_{ec} = (\hat{\beta}_{m2}, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_{gdp}, \hat{\beta}_{m2}, \hat{\rho})$. Použitím těchto odhadnutých hodnot lze zapsat kointegrační vztah ve tvaru

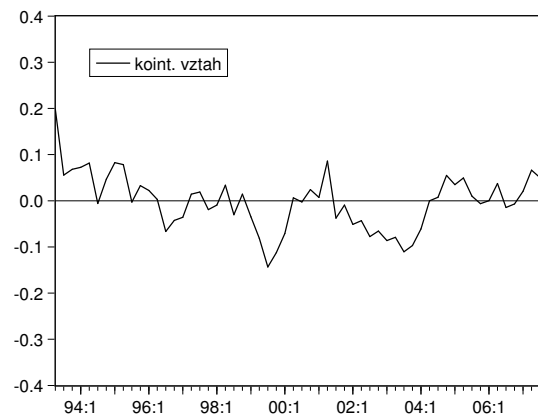
$$\hat{\beta}'_{ec} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ 1 \end{bmatrix} = m2_t + 0.282 * r_t + 1.732 * gdp_t - 7.562 * cpi_t - 0.480. \quad (5.3)$$

Je zde použita normalizace vzhledem k parametru $\hat{\beta}_{m2}$. Dále dostáváme odhadnutý vektor zátěží $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_{m2}, \hat{\alpha}_r, \hat{\alpha}_{gdp}, \hat{\alpha}_{cpi})'$ tvaru

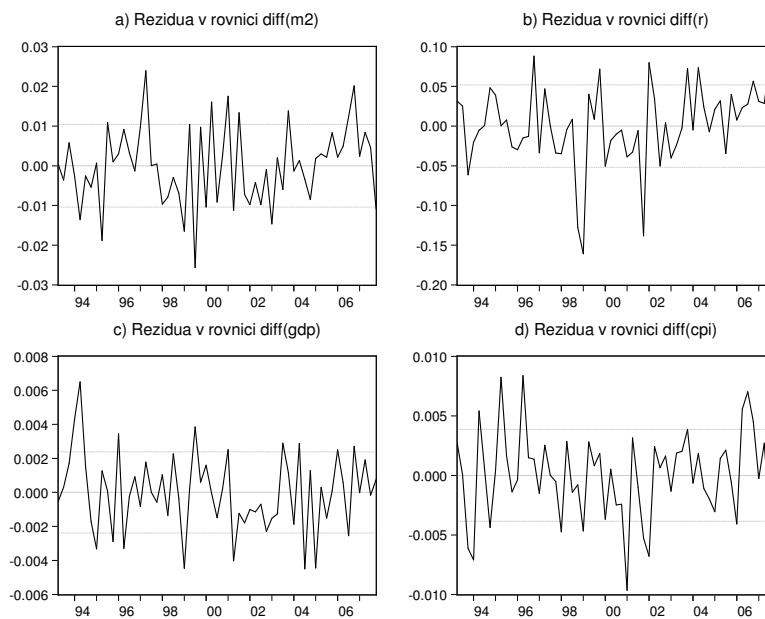
$$\hat{\alpha} = (0.0049, -0.0936, -0.0094, 0.04039)'. \quad (5.4)$$

Kandidát na kointegrovaný proces daný vztahem (5.3) je vykreslen na obrázku 5.3. Pro tyto hodnoty jsme Phillips-Perronovými testy na 5% hladině zamítli hypotézu

přítomnosti jednotkového kořene. Lze tedy předpokládat, že jsme dostali dlouhodobý rovnovážný stav v modelu poptávky po penězích.



Obrázek 5.3: Odhadnutý kointegrační vztah $\hat{\beta}'_{ec}(\mathbf{Y}'_t, 1)'$.



Obrázek 5.4: Vypočtená rezidua ve finálně zvoleném error-correction modelu.

Pro úplnost poznamenejme, že byly splněny předpoklady, které klademe na rezidua ε_t v modelu (5.1). Vypočtená rezidua pro příslušnou rovnici error-correction

modelu jsou k vidění na obrázku 5.4. Používaný program **EViews** má přehledně naimplementovány testy sloužící k ověření předpokladů kladených na rezidua. Detailnější popis těchto testů lze nalézt v manuálu programu Quantitative Micro Software (2005). Normalita chybového členu byla ověřena pomocí *Jarqueova-Berrova testu vícerozměrné normality*, který je založen na křivosti a špičatosti normálního rozdělení. Tento test používal také Juráška (2007), v jehož práci byl předpoklad normality zamítnut. V našem modelu výsledná p -hodnota (0.7619) svědčí o tom, že na 5% hladině nezamítáme nulovou hypotézu normality reziduí. K ověření nekorelovanosti reziduí jsme použili *Portmonteau test*, kterým ve vícerozměrném případě testujeme nulovou hypotézu, že rezidua nejsou autokorelovaná do zpoždění h . Test jsme prováděli pro $h = 1, \dots, 12$, přičemž pro žádné h jsme nezamítli nulovou hypotézu nekorelovanosti na 5% hladině. Na závěr jsme k testování heteroskedasticity použili *Whiteův test*, který je v **EViews** naimplementován. Nulovou hypotézu, že se v modelu nevyskytuje heteroskedasticita jsme také na 5% hladině nezamítli. Tím jsme ověřili splnění předpokladů kladených na rezidua potřebných pro použití Johansenovy metody odhadu error-correction modelu metodou maximální věrohodnosti.

5.3 Testování restrikcí na parametr β a testování exogenity

V předchozí části jsme získali odhad error-correction modelu (5.1) za platnosti nulové hypotézy $H(1)$, že model obsahuje jeden kointegrační vektor. Zde budeme ilustrovat použití lineárních omezení na kointegrační vektor β_{ec} , které jsme zmínili v části 4.2.4. Dále budeme testovat hypotézu slabé exogenity jednotlivých proměnných pomocí restrikcí na zátěžovou matici (v našem případě vektor, neboť $r = 1$) α . Tomu jsme se věnovali v teoretické části v sekci 4.2.5.

Testováním restrikcí v modelu poptávky po penězích se zabývali Arlt & Arltová (2007, kap. 6.4) a Johansen (1995, kap. 7.3). Jedním z možných omezení, které lze testovat, je hypotéza $H_0 : \beta_{m2} = -\beta_{gdp}$. Jedná se o test, že poptávka po penězích a reálný hrubý domácí produkt, kterým měříme příjem, mají stejnou hodnotu s opačným znaménkem. Testujeme tedy lineární omezení $H_0 : \beta_{ec} = \mathbf{H}\varphi$, kde φ je čtyřrozměrný vektor parametrů a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Možnost testování restrikcí poměrem věrohodností je opět naimplementována v programu **EViews**. Pro testování hypotézy H_0 dostáváme hodnotu testové stati-

stiky (4.30):

$$-2 \ln Q(H_0|H(1)) = 4.458661 .$$

V našem případě by měla mít testová statistika asymptotické rozdělení χ^2 o jednom stupni volnosti (neboť $r(n-s) = 1$). Dostáváme p -hodnotu 0.034725, tudíž na 5% hladině významnosti zamítáme hypotézu H_0 (5% k. h. = 3.84). Nepodařilo se nám tedy potvrdit očekávání, která pramení z ekonomické teorie pro model poptávky po penězích. Poznamenejme, že v modelu poptávky po penězích, který analyzoval Juráška (2007), měl obdobně jako v naší analýze kointegrační vektor stejné znaménko u analyzovaného $M1$ agregátu jako u proměnné, kterou byly měřeny reálné příjmy. Zamítnutí nulové hypotézy H_0 by mohlo poukazovat na to, že ve finálně obdrženém modelu je kromě poptávky po penězích modelován ještě jiný teoretický vztah, který je možná v použitých datech ještě silněji přítomen.

Dále se nabízí využití restrikcí k testování hypotézy nulovosti některého z parametrů kointegračního vektoru. V publikaci Arlt & Arltová (2007, kap. 6.4) se autorům podařilo prokázat nulový koeficient u mezičtvrtletní míry inflace v rovnici, kterou modelovali kointegrační vztah v modelu poptávky po penězích. Poznamenejme, že pracovali se dvěma kointegračními vektory, což jim umožnilo modelovat poptávku po penězích v prvním vztahu a tzv. *Fisherův efekt* v druhém vztahu. Více podrobností lze nalézt přímo v citované publikaci. V našem modelu jsme zkusili ověřit hypotézu $H_1 : \beta_{cpi} = 0$. Není obtížné odvodit tvar matice \mathbf{H} pro tento typ restrikcí. Výsledná p -hodnota 0.001339 indikuje, že v našem případě nelze vliv proměnné cpi v modelu zanedbat. Zamítáme hypotézu H_1 na 1% hladině významnosti.

Dále jsme se zabývali testováním slabé exogenity proměnných vzhledem k parametrům dlouhodobého vztahu. Podle závěrů v teoretické části lze tuto skutečnost testovat restrikcemi na parametry zátěžové matice popř. vektoru. Nejprve jsme provedli test zvlášť pro jednotlivé proměnné. Připomeňme si, že chceme-li testovat slabou exogenitu například u proměnné cpi , budeme testovat hypotézu $H_0^* : \alpha_{cpi} = 0$. I v tomto případě lze hypotézu testovat poměrem věrohodností. V tabulce 5.6 je hodnota testové statistiky $-2 \ln Q(H_0^*|H(r))$ a p -hodnota pro jednotlivé proměnné. Testová statistika má asymptotické rozdělení χ^2 o jednom stupni volnosti.

	$m2$	r	gdp	cpi
Hodnota testové statistiky	0.047	0.370	2.183	10.974
p -hodnota	0.828	0.465	0.140	0.001**

** zamítáme na 1% hladině.

Tabulka 5.6: Test exogenity jednotlivých proměnných.

Z výsledků je patrné, že na 5% hladině nezamítáme exogenitu proměnných $m2$, r a gdp v analyzovaném modelu. Nicméně hypotézu exogenity proměnné cpi zamítáme už na 1% hladině. Dostáváme velmi překvapující výsledek, který v podstatě vysvětluje zamítnutí hypotéz, jež by měli platit v modelu poptávka po penězích. Potvrzuje se naše domněnka, že finální kointegrovaný proces spíše ilustruje jinou ekonomickou hypotézu, která je v datech silněji přítomná než původně uvažovaná poptávka po penězích. Lze usuzovat, že by se mohlo jednat o zmiňovaný Fisherův efekt, což je hypotéza, že mezi očekávanou mírou inflace a nominální úrokovou sazbou je dlouhodobý vztah.

Dle předešlých výsledků nás bude velmi zajímat ověření hypotézy na všechny exogenní proměnné $H_1^* : \alpha_{m2} = 0, \alpha_r = 0, \alpha_{gdp} = 0$. K otestování opět použijeme testovou statistiku založenou na poměru věrohodností, která má v tomto případě asymptotické rozdělení χ^2 o třech stupních volnosti. Dostaneme p -hodnotu 0.487, což indikuje, že nezamítáme hypotézu slabé exogenity proměnných $m2$, r a cpi vzhledem k dlouhodobému vztahu. Dle teoretické části tedy lze přejít i k modelu jednorovnicovému, kde bychom měli dostat eficientní odhad metodou nejmenších čtverců. Tuto skutečnost budeme ověřovat v části 5.5. Odhad z jednorovnicového modelu by měl být stejný jako odhad z error-correction modelu za platnosti výše uvedené hypotézy H_1^* . Tento odhad lze získat přímo v EViews. Označíme-li jej jako $\hat{\beta}_{ec}^*$, dostáváme

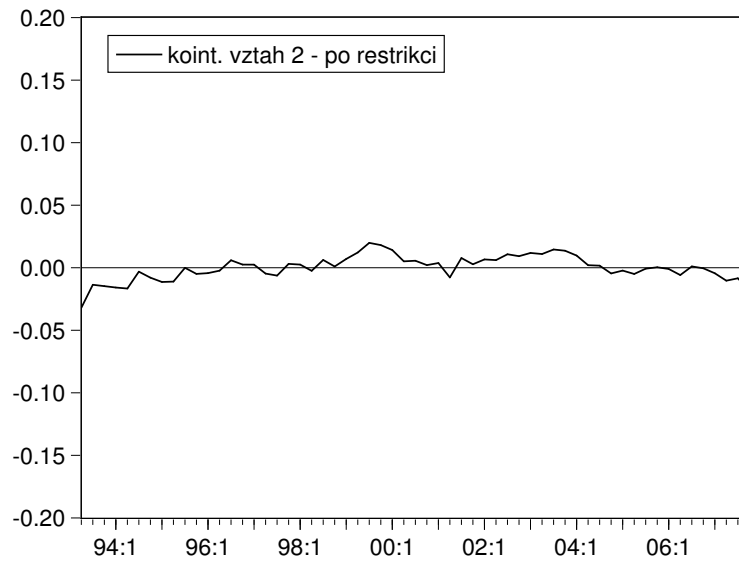
$$\hat{\beta}_{ec}^* \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ 1 \end{bmatrix} = -0.182 * m2_t - 0.029 * r_t - 0.084 * gdp_t + *cpi_t - 1.048, \quad (5.5)$$

který jsme v tomto případě normalizovali vzhledem k proměnné cpi , která není exogenní. Dostaneme také odhad příslušného zátěžového vektoru ve tvaru $\alpha_{ec}^* = (0, 0, 0, -0.264)'$. Kointegrační vztah 5.7 při uvažovaných restrikcích je vykreslen na obrázku 5.5.

5.4 Závěry z vícerozměrné error-correction analýzy

Při analýze vícerozměrného error correction systému jsme při splnění všech předpokladů dostali odhad jednoho kointegračního vztahu. Tím jsme ukázali, že existuje lineární kombinace vyšetřovaných řad, která má nižší řád integrovanosti než původní veličiny. V praxi se snažíme najít ekonomickou interpretaci výsledného dlouhodobého vztahu. My jsme během analýzy zjistili, že v datech je silněji přítomen jiný vztah, než původně očekávaný model poptávky po penězích. K tomuto výsledku by se nepodařilo dojít, kdybychom nepoužili k přesnější identifikaci restrikcí na kointegrační a zátěžový vektor. Pomocí nich jsme ověřili, že v modelu je primárně modelována proměnná cpi , což je logaritmus mezičtvrtletní míry inflace. U ostatních proměnných jsme prokázali exogenitu vzhledem ke kointegračnímu vektoru.

Zůstává otázkou, jakou interpretaci má výsledný dlouhodobý vztah. Přesná identifikace je bez podrobnější znalosti ekonomických zákonitostí obtížná. Jednou



Obrázek 5.5: Odhadnutý kointegrační vztah $\hat{\beta}_{ec}^2 (\mathbf{Y}'_t, 1)'$ v modelu s restrikcemi $\alpha_{m2} = 0$, $\alpha_r = 0$, $\alpha_{gdp} = 0$.

z uvažovaných možností je hypotéza, že primárně je v modelu potvrzen dlouhodobý vztah mezi očekávanou mírou inflace a nominální úrokovou sazbou. Jedná se o tzv. Fisherův efekt, který je detailněji popsán a analyzován vedle modelu poptávky po penězích v publikaci Arlt & Arltová (2007).

Provedli jsme také analýzu Grangerovy kauzality mezi jednotlivými dvojicemi proměnných podle teorie, kterou jsme ilustrovali v části 4.6. Shrňme si zde pouze základní výsledky, které jsou zajímavé z hlediska finální volby modelu. Není překvapením, že na 5% hladině zamítáme hypotézu, že $m2$, r či gdp nepůsobí kauzálně na cpi v Grangerově smyslu. Opět to potvrzuje fakt, že veličina cpi je modelována uvnitř systému. Dále nelze zamítnout hypotézu, že cpi kauzálně působí na gdp . Vzájemné působení mezi inflací a reálným hrubým domácím příjmem by se nejspíš v ekonomické teorii také dalo očekávat.

5.5 Analýza v jednorovnicovém modelu

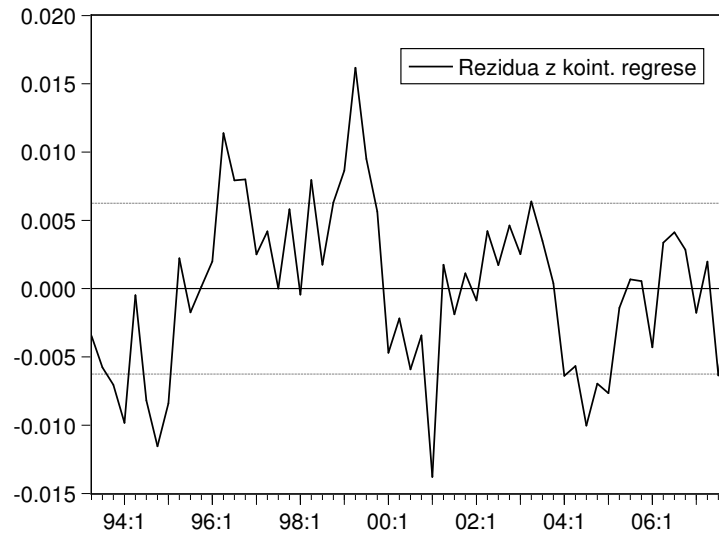
V této sekci se pokusíme odhadnout výsledný kointegrační vztah v jednorovnicovém modelu dle teorie, kterou jsme zavedli v částech 4.4 a 4.5. Nejprve jsme získali odhad metodou nejmenších čtverců v kointegrační regresi tvaru:

$$cpi_t = \mu + \beta_{m2}^{reg} * m2_t + \beta_r^{reg} * r_t + \beta_{gdp}^{reg} * gdp_t + \phi * d + \varepsilon_t, \quad (5.6)$$

kde kromě analyzovaných proměnných zahrnujeme konstantu μ a dummy proměnnou d , kterou jsme zavedli už v části vícerozměrné analýzy k eliminaci odlehlého pozorování v řadě $m2$. Dostaneme odhad kointegračního vztahu

$$\hat{\beta}'_{reg} \mathbf{Y}_t = -0.073 * m2_t - 0.022 * r_t - 0.374 * gdp_t + cpi_t, \quad (5.7)$$

Z pouhého srovnání tohoto vztahu s odhadem z vícerozměrného modelu (5.7) je vidět, že výsledné parametry u zkoumaných proměnných jsou odlišné. Na obrázku 5.6 jsme si vykreslili rezidua z kointegrační regrese. V souladu s teorií víme, že rezidua obsahují krátkodobou dynamiku, která je v modelu, a výsledný kointegrační vztah není tak kvalitní, jako v případě odhadu z vícerozměrného systému.



Obrázek 5.6: Rezidua z kointegrační regrese (5.6).

Jako vhodnější v rámci jednorovnicové analýzy se jeví použití ADL modelu, který zahrnuje zpožděné proměnné. Umožňuje tak lépe reagovat na krátkodobou dynamiku. Nejvhodnější se ukázala volba zpoždění, která odpovídá jedné rovnici z finálního error-correction modelu. Využijeme error-correction přepis ADL modelu, který jsme odvodili v sekci 4.5. Zajímáme se o odhad parametrů v modelu:

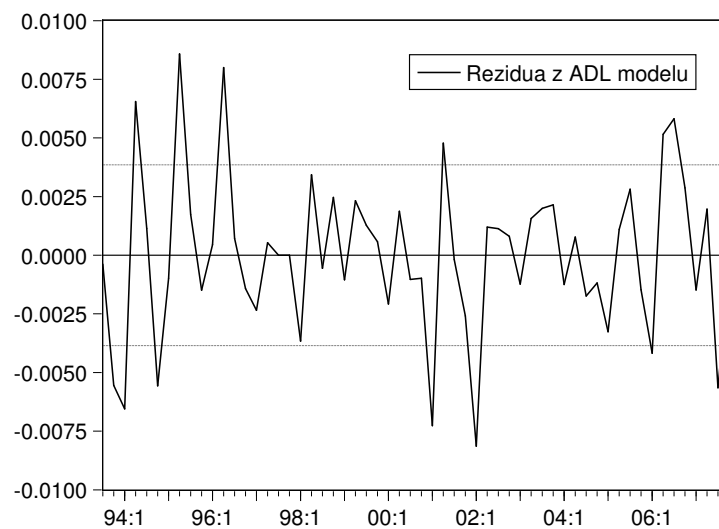
$$\begin{aligned} \Delta cpi_t = & \mu + \gamma * cpi_{t-1} + \varphi_1 * m2_{t-1} + \varphi_2 * r_{t-1} + \varphi_3 * gdp_{t-1} + \\ & + \alpha_1^* * \Delta cpi_{t-1} + \beta_{1,0}^* * \Delta m2_t + \beta_{2,0}^* * \Delta r_t + \beta_{3,0}^* * \Delta gdp_t + \\ & + \beta_{1,1}^* * \Delta m2_{t-1} + \beta_{2,1}^* * \Delta r_{t-1} + \beta_{3,1}^* * \Delta gdp_{t-1} + \phi * d + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Poznamenejme, že odhad metodou nejmenších čtverců v tomto modelu je shodný s odhadem v příslušném $ADL(2, 2, 4)$ modelu tvaru (4.48). Dle vztahů uvedených v

části 4.5 získáme následující odhad kointegračního vztahu v tomto modelu:

$$\hat{\beta}'_{adl} \mathbf{Y}_t = -0.1896 * m2_t - 0,0287 * r_t - 0,0630 * gdp_t + cpi_t. \quad (5.9)$$

Vidíme, že až na konstantu dostáváme téměř totožný odhad, jako v případě error-correction modelu (5.7). Rezidua z odhadnutého modelu (5.8) jsou k vidění na obrázku 5.7. Byla potvrzena teorie, že v případě exogenity vysvětlujících proměnných lze bez ztráty informace přejít k modelu jednorovnicovému. Také byla v tomto případě potvrzeno vhodné užití ADL modelů, které lze snadno převádět na různé reprezentace při zachování OLS odhadu parametru.



Obrázek 5.7: Rezidua z odhadnutého ADL modelu (5.8).

Analyzovaná data jsou přiložena na CD nosiči na zadní straně diplomové práce.

Kapitola 6

Shrnutí

V práci jsme navázali na diplomové práce Bittner (2005) a Juráška (2007). V teoretické části jsme podali přehledné shrnutí nejpoužívanějších modelů pro kointegrační analýzu a poukázali na jejich výhody a nevýhody související s jejich použitím. V první části jsme zdefinovali nejdůležitější pojmy, které pomohou čtenáři lépe pochopit téma kointegrace a umožní snadnější orientaci v problematice. Shrnutí jsme nejpoužívanější metody pro testování jednotkového kořene. Po zdefinování kointegrace a příslušné motivaci jsme se podrobněji věnovali jednotlivým kointegračním modelům a vztahům mezi nimi. Vzhledem k tomu, že error-correction model je jeden z nejvhodnějších nástrojů kointegrační analýzy, věnujeme se mu velmi detailně. Zabývali jsme se také problematikou exogenity a testováním lineárních omezení na kointegrační a zátěžovou matici. Ukázali jsme provázanost ADL modelů s error-correction modely a předpoklady k eficientnímu odhadu v jednorovnicovém modelu.

Velkou část teoretických výsledků jsme ilustrovali v analýze reálných dat, kde jsme získali zajímavý kointegrační vztah. Navíc jsme se setkali s mnohými problémy, které se v praktické aplikaci objevují. Vhodná volba modelu nám umožnila ukázat důležitost ekonomické teorie v rámci analýzy dlouhodobých vztahů. Navíc jsme mohli úspěšně srovnat výsledky z analýzy ADL modelu s výsledky z EC modelu.

Na závěr poznamenejme, že téma kointegrace je velmi široké a existuje k němu nespočetné množství materiálů. Přestože jsme v práci ilustrovali mnoho výsledků, jedná se pouze o malou část kointegrační problematiky. Existují mnohé další přístupy a problémy, které se v praxi řeší. Pouze na ukázkou lze některé z nich zmínit. Často bývá diskutován problém strukturální změny v modelu, která má negativní vliv v klasické kointegrační analýze. Objevují se přístupy k analýze $I(2)$ proměnných. Mnohé publikace se zabývají kointegrací v případě panelových dat. Široce jsou diskutovány různé metody analýzy proměnných, které vykazují sezónnost atp. Poznamenejme, že mnohé z těchto problémů jsou popsány a ilustrovány v Maddala & Kim (1998). V menší míře se autoři věnují problematice stochastické kointegrace. Pro ilustraci lze zájemce o tuto problematiku odkázat na články Harris a kol. (2002) a McCabe a kol. (2006).

Literatura

- Arlt, J. (1999), *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*, Grada, Praha.
- Arlt, J. & Arltová, M. (2007), *Ekonomické časové řady: vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*, Grada Publishing, Praha.
- Banerjee, A., Dolado, J. J., Galbraith, J. W. & Hendry, D. F. (1993), *Co-integration, Error Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, Oxford University Press, New York.
- Billingsley, P. (1968), *Convergence of probability measures*, John Wiley, New York.
- Bittner, O. (2005), *Vybrané modely nestacionárních časových řad*, Diplomová práce MFF UK, Praha.
- Cipra, T. (1986), *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- Cochrane, J. H. (1988), 'How big is the random walk in gnp?', *The Journal of Political Economy* **96**(5), 893–920.
- Davidson, R. & MacKinnon, J. G. (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press, New York.
- Dhrymes, P. (1998), *Time series, Unit roots and Cointegration*, Academic Press, San Diego.
- Dickey, D. A. & Fuller, W. A. (1979), 'Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root', *Journal of the American Statistical Association* **74**, 427–431.
- Dickey, D. A. & Fuller, W. A. (1981), 'Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root', *Econometrica* **49**, 1057–1072.
- Engle, R. F., Hendry, D. F. & Richard, J.-F. (1983), 'Exogeneity', *Econometrica* **51**(2), 277–304.

- Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley, New York.
- Granger, C. W. J. (1969), 'Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods', *Econometrica* **37**(3), 424–438.
- Granger, C. W. J. (1988), 'Some recent development in a concept of causality', *Journal of Econometrics* **39**, 199–211.
- Granger, C. W. J. & Engle, R. F. (1987), 'Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing', *Econometrica* **55**(2), 251–276.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Harris, D., McCabe, B. & Leybourne, S. (2002), 'Stochastic cointegration: estimation and inference', *Journal of Econometrics* **111**(2), 363–384.
- Harris, R. (1995), *Using Cointegration Analysis in Econometric Modelling*, Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, London.
- Hassler, U. & Wolters, J. (2006), 'Autoregressive distributed lag models and cointegration', *AStA Advances in Statistical Analysis* **90**(1), 59–74.
- Hendry, D. F., Pagan, A. R. & Sargan, J. D. (1984), Dynamic specification, in Z. Griliches & M. D. Intrilligator, eds, 'Handbook of Econometrics', Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, chapter 18, pp. 1023–1100.
- Johansen, S. (1988), 'Statistical analysis of cointegration vectors', *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 231–254.
- Johansen, S. (1991), 'Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models', *Econometrica* **59**, 1551–1580.
- Johansen, S. (1992a), 'Cointegration in partial systems and the efficiency of single-equation analysis', *Journal of Econometrics* **52**(3), 389–402.
- Johansen, S. (1992b), 'Testing weak exogeneity and the order of cointegration in uk money demand data', *Journal of Policy Modeling* **14**(3), 313–334.
- Johansen, S. (1995), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, New York.
- Johansen, S. & Juselius, K. (1990), 'Maximum likelihood estimation and inference on cointegration - with applications to the demand for money', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **52**, 169–210.
- Johansen, S. & Juselius, K. (1992), 'Testing structural hypothesis in a multivariate cointegration analysis of the ppp and the uip for uk', *Journal of Econometrics* **53**, 211–244.

- Juráška, M. (2007), *Kointegrace ekonomických časových řad*, Diplomová práce MFF UK, Praha.
- Juselius, K. (2006), *Základy náhodných procesů II.*, Oxford University Press, New York.
- Lo, A. W. & MacKinlay, A. C. (1988), 'Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test', *The Review of Financial Studies* **1**(1), 41–66.
- Lütkepohl, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- Lütkepohl, H. & Reimers, H. (1992), 'Granger-causality in cointegrated var processes the case of the term structure', *Economics Letters* **40**, 263–268.
- MacKinnon, J. G., Haug, A. A. & Michelis, L. (1990), 'Numerical distribution functions of likelihood ratio tests for cointegration', *Journal of Applied Econometrics* **14**, 563–577.
- Maddala, G. S. & Kim, I. (1998), *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge University Press, Cambridge.
- McCabe, B., Leybourne, S. & Harris, D. (2006), 'A residual-based test for stochastic cointegration', *Econometric Theory* **22**(03), 429–456.
- Newey, W. K. & West, K. D. (1987), 'A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix', *Econometrica* **55**(3), 703–708.
- Park, J. Y. & Phillips, P. C. B. (1988), 'Statistical inference in regressions with integrated processes: Part 1', *Econometric Theory* **4**(3), 468–497.
- Park, J. Y. & Phillips, P. C. B. (1989), 'Statistical inference in regressions with integrated processes: Part 2', *Econometric Theory* **5**(1), 95–131.
- Perron, P. (1986), *Tests of joint hypotheses for time series regression with a unit root*, Cahier de recherche no. 2086, (C.R.D.E., University of Montreal, Montreal).
- Pesaran, M. H. & Shin, Y. (1995), *An Autoregressive Distributed Lag Modelling Approach to Cointegration Analysis*, Cambridge Working Papers in Economics, University of Cambridge.
- Phillips, P. C. B. (1986), 'Understanding spurious regressions in econometrics', *Journal of Econometrics* **33**, 311–340.

- Phillips, P. C. B. (1987a), 'Asymptotic expansions in nonstationary vector autoregressions', *Econometric Theory* **3**(1), 45–68.
- Phillips, P. C. B. (1987b), 'Time series regression with a unit root', *Econometrica* **55**, 277–301.
- Phillips, P. C. B. (1991), 'Optimal inference in cointegrated systems', *Econometrica* **59**(2), 283–306.
- Phillips, P. C. B. & Ouliaris, S. (1990), 'Asymptotic properties of residual based tests for cointegration', *Econometrica* **58**(1), 165–193.
- Phillips, P. C. B. & Perron, P. (1988), 'Testing for a unit root in time series regression', *Biometrika* **75**, 335–346.
- Prášková, Z. (2004), *Základy náhodných procesů II.*, Karolinum, Praha.
- Quantitative Micro Software (2005), *EViews 5.1 User's Guide*.
- Said, S. E. & Dickey, D. A. (1984), 'Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order', *Biometrika* **71**(3), 599–607.
- Sargan, J. D. & Bhargava, A. (1983), 'Testing residuals from least squares regression for being generated by the gaussian random walk', *Econometrica* **51**(1), 153–174.
- Stock, J. H. (1987), 'Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors', *Econometrica* **55**(5), 1035–1056.
- Stock, J. H. & Watson, M. W. (1988), 'Testing for common trends', *Journal of the American Statistical Association* **83**(404), 1097–1107.