

Bc. Matúš Proner: **Kombinatorické úlohy o klobúkoch** (posudek vedoucího diplomové práce)

Diplomová práce je věnována úlohám, které se v anglicky psané literatuře nazývají „hat guessing games“ a v posledních cca 20 letech jsou velmi populární (viz např. zdroje citované v seznamu literatury). Na první pohled se zdánlivě jedná o úlohy z rekreační matematiky, ve kterých se jistý počet osob snaží uhádnout, jakou barvu má klobouk na jejich hlavě. Úloha má mnoho variant lišících se např. počtem barev a osob, skutečností, zda osoby hádají najednou nebo postupně, a zda mají případně k dispozici některé dodatečné informace. Ukazuje se, že k řešení některých variant úlohy lze využít netriviální matematiku, zejména teorii grafů.

Autor samostatně prostudoval velké množství zdrojů včetně časopiseckých článků, jejichž četba je poměrně obtížná. Vybrané úlohy pak shromáždil a uspořádal v kapitole 1 své diplomové práce. Zformuloval je velmi poutavou a zábavnou formou jako příběhy o uvězněných trpaslících, kteří se snaží řešit čarodějem překládané úkoly. Řešení některých úloh je vyloženo hned v kapitole 1, zatímco v případě úloh, kde řešení vyžaduje netriviální matematiku, je pouze nastíněno a poté důkladně rozebráno v kapitole 2. V ní je popsána souvislost mezi úlohami o kloboucích a teorií grafů, jsou zavedeny některé základní pojmy a odvozeny výsledky potřebné k řešení úloh.

Práci hodnotím velmi kladně především z didaktického hlediska. Jednodušší úlohy jsou zajímavé hlavolamy, ve kterých je situace trpaslíků na první pohled dost pesimistická, avšak poměrně elementární matematika na úrovni střední školy jim dokáže poskytnout velmi účinné strategie. U komplikovanějších úloh je pak čtenář zábavnou a přirozenou formou doveden ke studiu pojmů a výsledků z teorie grafů, které by samy o sobě působily poněkud nezajímavě.

Práce odpovídá úrovni magisterského studia učitelství na MFF UK, přičemž autor musel samostatně nastudovat některé partie teorie grafů. Formální úpravu považuji za zdařilou, text je pěkně vysázen a na několika místech doplněn vhodnými ilustracemi. Jazykovou správnost slovenského textu se neodvážuji hodnotit, našel jsem pouze několik zjevných překlepů ( $8^{23}$ : trpalíkov  $\rightarrow$  trpaslíkov,  $17^{17}$ : fšetkých  $\rightarrow$  všetkých,  $24^{16}$ : indruktívne  $\rightarrow$  induktívne,  $27^{12}$ : konštrunkciou  $\rightarrow$  konštrukciou,  $28^6$ : algoritmom  $\rightarrow$  algoritmom,  $32_9$ : farbieb  $\rightarrow$  farieb,  $32_8$ : odmedzené  $\rightarrow$  obmedzené,  $33_5$ : získlame  $\rightarrow$  získame,  $33_4$ : premurácia  $\rightarrow$  permutácia,  $35^9$ : požedované  $\rightarrow$  požadované,  $41^4$ : molo  $\rightarrow$  bolo).

K obsahu práce mám několik drobnějších připomínek:

- Z řešení úlohy 1.2 vypadla důležitá informace: Na str. 4, 8. řádek zdola, má být věta „Každý zakričí v čase  $100 - c$ , že je jeho klobúk zelený.“ (chybí slovo „zelený“).
- Na začátku řešení úlohy 4.2 (str. 18) je chybně napsáno, že trpaslíky číslujeme od nuly. Z dalšího postupu je ale zřejmé, že číslujeme od jedničky.
- V kapitole 2 autor omylem několikrát zaměnil písmena  $V$  a  $T$  označující množinu vrcholů grafu, které reprezentují trpaslíky (str. 20, 24).
- Na str. 24, 8. řádek, bych preferoval zápis  $\Phi'_l = \{\varphi_{l_1}, \dots, \varphi_{l_f}\}$  místo  $\Phi'_l = \varphi_{l_1} \dots \varphi_{l_f}$ , neboť se jedná o množinu.
- Důkaz věty 6 na str. 25 obsahuje odkaz na poznámku 8, ale zdá se, že tato poznámka nemá s problémem nic společného. Pravděpodobně zde měl být odkaz na poznámku 9. Totéž platí pro důkaz věty 8 na str. 26.
- V důkazu věty 9 (str. 27–28) bych uvítal zdůvodnění, proč popsáný algoritmus vede k nalezení orientace hran, kde do každého vrcholu v  $i$ -tém poschodí vede shora  $\lfloor h_i/2 \rfloor$  hran a zdola  $\lfloor d_i/2 \rfloor$  hran.
- V důkazu věty 11 (str. 32) vlastnost (ii) asi neplyne z věty 3, ale přímo z definice, neboť v tomto případě jsou počty klobouků jednotlivých barev dány přímo čísly  $o_1, \dots, o_f$  a každý trpaslík tak ihned ví, jakou barvu má jeho klobouk.
- Str. 34: Ve 2., 3. a 4. odstavci mají být všechny výskyty konstanty  $k$  nahrazeny konstantou  $f$ . Ve 2. odstavci by místo „každý vrchol“ mělo být „každé barvení“. Ve 3. odstavci sestrojujeme bipartitní graf, kde každý vrchol má stupeň 2. Autor píše, že jsme zkonstruovali jeden velký cyklus, ale myslím, že obecně může jít o několik disjunktních cyklů. To naštěstí nevádí, protože hrany každého cyklu můžeme orientovat zvlášť.
- Na str. 36, 5. řádek zdola, jsou přehozené čitatele zlomků, tj.  $d_1$  a  $d_2$ .
- Důkaz věty 14 (str. 37): V části (ii)  $\Leftarrow$  bych doplnil, že využíváme větu 13 (ze samotného faktu, že  $V_1$  je  $k$ -dominantní, plyne pouze nerovnost  $P_{t,k} \geq 1 - \frac{|V_1|}{t+k} = \frac{t}{t+k}$ ). V části (iii) má být  $\Phi_{nt}$  místo  $\Phi^{nt}$ .
- U položek [4], [6] v seznamu literatury chybí název sborníku.

Předložený text je podle mého názoru atraktivní pro čtenáře a může dobře posloužit jako motivace pro studium některých partií matematiky. Je za ním vidět netriviální množství práce. Doporučuji uznat jej za diplomovou práci a domnívám se, že i přes výše zmíněné nedostatky si zaslouží hodnocení *výborně*.

V Praze dne 24. 8. 2021

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. (KDM MFF UK)