MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aleš Bartolomějev

Charakterizace funkcí první Baireovy třídy

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., Dsc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji vedoucímu své práce prof. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D., Dsc. za jeho rady, vedení a flexibilní přístup v době pandemie.

Název práce: Charakterizace funkcí první Baireovy třídy

Autor: Aleš Bartolomějev

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., Dsc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Práce je zaměřena na funkce funkce první Baireovy třídy, v první kapitole jsou dokazovány jejich vybrané vlastnosti. Druhá kapitola je zaměřena na charakterizaci funkcí první Baireovy třídy mezi úplnými separabilními metrickými prostory s pomocí $\varepsilon - \delta$ formalismu.

Klíčová slova: Baire 1 funkce borelovské množiny Arens - Eellsova věta Dugundjiho věta

Title: Characterization of functions of the first Baire class

Author: Aleš Bartolomějev

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., Dsc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In the present work we study the functions of the first Baire class. In the first chapter we prove some of their properties. Second chapter focuses on characterizing the functions of the first Baire class on separable metric spaces using the $\varepsilon - \delta$ formalism.

Keywords: Baire1 function borel sets Arens - Eells theorem Dugundji theorem

Obsah

Úvod

Hlavním cílem práce je přehledně zpracovat charakterizační větu pro funkce první Baireovy třídy a některá související tvrzení.

V první části práce se zabýváme definicí multiplikativních a aditivních tříd borelovských množin. Oba tyto systémy představují popis celého systému borelovských množin jako sjednocení rostoucí posloupnosti množin. S pomocí těchto systémů definujeme Baireovy třídy borelovských funkcí. Soustředíme se na tvrzení potřebná pro důkaz charakterizační věty. Dokazujeme existenci bodu spojitosti $\mathcal{B}_1$ funkcí na uzavřené množině potřebnou pro charakterizaci. Dále dokazujeme aproximaci $\mathcal{B}_1$ funkcí spojitými funkcemi. K tomu používáme několik tvrzení o vlastnostech tříd borelovských množin. Dále používáme Dugundjiho rozšiřovací větu, což je zobecnění Tietzeho rozšiřovací věty, pro obecnější cílový prostor. Z důvodu její náročnosti ji uvádíme bez důkazu.

Druhá kapitola obsahuje Arens - Eellsovu větu o vnoření a její speciální verzi pro separabilní prostory. Závěrečná sekce je věnována důkazu charakterizace pro separabilní úplné metrické prostory a obsahuje zobecnění pro cílový prostor, který není úplný.

1. Baireovy třídy a jejich vlastnosti

V této kapitole definujeme multiplikativní a aditivní třídu borelovské množiny, Baireovu třídu funkce a uvedeme některé vlastnosti funkcí první Baireovy třídy.

1.1 Definice

Definice 1. *Nechť X je metrický prostor. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \xi < \omega_1$ definujeme systémy množin $\Sigma_\xi(X)$ a $\Pi_\xi(X)$ induktivně takto:*

Pokud $\xi = 1$ volme

$$\Sigma_1(X) = \{U \subset X : U \textit{ otevřená v } X\},$$

$$\Pi_1(X) = \{A \subset X : X \setminus A \in \Sigma_1(X)\}$$

a dále pro $1 < \xi < \omega_1$ jako

$$\Sigma_\xi(X) = \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \Pi_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \textit{ pro } n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\Pi_\xi(X) = \{A \subset X : X \setminus A \in \Sigma_\xi(X)\}.$$

Množinu $A \in \Sigma_\xi(X)$, resp. $A \in \Pi_\xi(X)$, nazveme množinou aditivní, resp. multiplikativní, třídy ξ.

Lemma 1. *Nechť (X, d) je metrický prostor, tak platí:*

1. *Systém $\Pi_\xi(X)$ lze ekvivalentně konstruovat jako*

$$\Pi_\xi(X) = \left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \Sigma_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \textit{ pro } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. *$\Sigma_\xi(X) \subset \Sigma_\eta(X)$, $\Pi_\xi(X) \subset \Pi_\eta(X)$ pro $1 \leq \xi \leq \eta < \omega_1$.*

3. *$\Pi_\xi(X) \subset \Sigma_\eta(X)$ a $\Sigma_\xi(X) \subset \Pi_\eta(X)$ pro $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$.*

4. *Systém $\Sigma_\xi(X)$ je uzavřený na spočetná sjednocení a konečné průniky, systém $\Pi_\xi(X)$ je uzavřený na spočetné průniky a konečná sjednocení.*

5. *Systém $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$ je uzavřený na doplňky a na konečná sjednocení a průniky.*

Důkaz. Dokážeme 1.

Nechť $A \in \Pi_\xi(X)$, potom z definice je množina $X \setminus A \in \Sigma_\xi(X)$ a tedy lze psát

$$X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ kde } A_n \in \Pi_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \textit{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Přechodem k doplňkům dostaneme popis A jako průnik $\Sigma_{\xi_n}(X)$ množin.

$$A = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n.$$

Nyní ukážeme, že platí 2.

Nejprve nechť $\xi = 1$ a $\eta = 2$. Nechť $G \in \Sigma_1(X)$, označme $F = X \setminus G$. Konstruujeme posloupnost otevřených množin

$$G_n = \left\{x \in X : dist(x,F) < \frac{1}{n}\right\}$$

a posloupnost uzavřených množin $F_n = X \setminus G_n$.

Ukážeme, že $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Z konstrukce je $F_n \subset G$, tedy i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset G$. Nechť $x \in G$, ukážeme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in F_{n_0}$. Položme $\varepsilon = dist(x,F) > 0$ a zvolme n_0 takové, že platí $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom platí $x \notin G_{n_0}$ a tedy $x \in F_{n_0}$. Platí $G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ a celkem dostaneme $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ a tedy množina G je typu $\Sigma_2(X)$.

Přechodem k doplňkům dostaneme $\Pi_1(X) \subset \Pi_2(X)$, pokud totiž
$H \in \Pi_1(X)$, tak $X \setminus H \in \Sigma_1(X)$ a z předchozího $X \setminus H \in \Sigma_2(X)$, tedy $H \in \Pi_2(X)$.

Nyní pro $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$ ukážeme $\Sigma_\xi(X) \subset \Sigma_\eta(X)$. Pokud je $E \in \Sigma_\xi(X)$, tak potom platí

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \text{ kde } E_n \in \Pi_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Z $\xi < \eta$ platí

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \text{ kde } E_n \in \Pi_{\xi_n}(X), \xi_n < \eta \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$

a tedy $E \in \Sigma_\eta(X)$.

Analogicky k prvnímu kroku získáme přechodem k doplňkům vztah $\Pi_\xi(X) \subset \Pi_\eta(X)$.

Dokážeme 3.

Nechť $A \in \Pi_\xi(X)$, potom $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \in \Sigma_\eta(X)$ a tedy $\Pi_\xi(X) \subset \Sigma_\eta(X)$.

Přechodem k doplňkům dostáváme $\Sigma_\xi(X) \subset \Pi_\eta(X)$.

Ukážeme, že platí 4.

Nyní nechť $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je posloupnost množin z $\Sigma_\xi(X)$, ukážeme,že $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ je také typu $\Sigma_\xi(X)$. Z definice pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje

$$A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{kn} : A_{kn} \in \Pi_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \ pro \ n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{kn}.$$

Toto sjednocení je spočetné a tedy $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ je také typu $\Sigma_\xi(X)$.

Opět přechodem k doplňkům dostaneme tvrzení pro spočetné průniky prvků $\Pi_\xi(X)$.

Nyní ukážeme uzavřenost $\Sigma_\xi(X)$ na konečné průniky a uzavřenost $\Pi_\xi(X)$ na konečná sjednocení. Nechť nejprve $\xi = 1$, potom pro $C_1, \ldots, C_N \in \Sigma_1(X)$ máme konečný průnik otevřených množin $\bigcap_{n=1}^{N} C_n$, nechť $x \in \bigcap_{n=1}^{N} C_n$ je pevné, pak z otevřenosti C_n existuje pro každé $n \in \{1, \ldots, N\}$ číslo r_n takové, že koule $B(x, r_n) \subset C_n$. Vezmeme $r = \min\{r_1, \ldots, r_N\}$, potom platí $B(x, r) \subset \bigcap_{n=1}^{N} C_N$, tedy $\bigcap_{n=1}^{N} C_N$ je otevřená. Přechodem k doplňkům dostaneme uzavřenost $\Pi_1(X)$ na konečná sjednocení.

Nyní nechť $1 < \xi < \omega_1$. Mějme $C_1, \ldots, C_N \in \Sigma_\xi(X)$, z definice pro každé $n \in \{1, \ldots, N\}$ existují množiny C_{nk_n} typu $\Pi_{\eta_{k_n}}(X), \eta_k < \xi$ takové, že $C_n = \bigcup_{k_n \in \mathbb{N}} C_{nk_n}$. Pak platí

$$\bigcap_{k=1}^{N} C_n = \bigcap_{k=1}^{N} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{nk} = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{N}} \cdots \bigcup_{k_N \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=1}^{N} C_{nk_n}.$$

Vezměme nyní pevné indexy $\{k_1, \ldots, k_N\}$ a označme $\nu = \max_{k_n \in \{k_1, \ldots, k_N\}} \eta_{k_n} < \xi$. Z uzavřenosti $\Pi_\nu(X)$ na spočetné a tedy i konečné průniky plyne, že $\bigcap_{k=1}^{N} C_n$ je typu $\Sigma_\xi(X)$. Přechodem k doplňkům dostaneme uzavřenost $\Pi_\xi(X)$ na konečná sjednocení.

Dokážeme 5.

Nyní nechť $B \in \Sigma_\xi(X) \cap \Pi_\xi(X)$, potom z $B \in \Sigma_\xi(X)$ plyne z definice $X \setminus B \in \Pi_\xi(X)$. Zároveň z $B \in \Pi_\xi(X)$ plyne také $X \setminus B \in \Sigma_\xi(X)$, celkem tedy $X \setminus B \in \Sigma_\xi(X) \cap \Pi_\xi(X)$.

Mějme nyní $C_1, \ldots, C_N \in \Sigma_\xi(X) \cap \Pi_\xi(X)$, z uzavřenosti $\Pi_\xi(X)$ na spočetné průniky a z uzavřenosti $\Sigma_\xi(X)$ na konečné průniky potom plyne, že $\bigcap_{k=1}^{N} C_n$ je typu $\Sigma_\xi(X) \cap \Pi_\xi(X)$. Z uzavřenosti $\Pi_\xi(X)$ na konečná sjednocení a z uzavřenosti $\Sigma_\xi(X)$ na spočetná sjednocení potom plyne, že $\bigcup_{k=1}^{N} C_n$ je typu $\Sigma_\xi(X) \cap \Pi_\xi(X)$.

$\square$

Definice 2. *Nechť X, Y jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Řekneme, že f je Baireovy třídy α, pokud pro každou $F \subset Y$ uzavřenou platí že $f^{-1}(F)$ je $\Pi_{\alpha+1}(X)$. Množinu těchto funkcí značíme $\mathcal{B}_\alpha(X, Y)$.*

Z definice $\mathcal{B}_0(X, Y)$ jsou právě spojité funkce z X do Y.

Poznámka. Baireovy třídy lze ekvivalentně definovat pomocí vzorů otevřených množin.

Nechť X, Y jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Řekneme, že f je Baireovy třídy α, pokud pro každou $G \subset Y$ otevřenou platí že $f^{-1}(G)$ je $\Sigma_{\alpha+1}(X)$.

1.2 Vlastnosti Baireových tříd funkcí

V této sekci uvedeme vlastnosti $\mathcal{B}_1$ funkcí použité v důkazu charakterizační věty.

Věta 2. *Nechť X je separabilní metrický prostor, potom každá transfinitní nerostoucí posloupnost uzavřených množin $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ je od určitého indexu konstantní.*

Důkaz. Nechť pro spor neexistuje α_0 takové, že pro každé $\gamma > \alpha_0$ platí $F_{\alpha_0} = F_\gamma$ a tedy nechť pro každé α existuje $\gamma_\alpha > \alpha$ takové, že $F_{\gamma_\alpha} \subset F_\alpha$ a $F_{\gamma_\alpha} \neq F_\alpha$. Vybereme striktně klesající transfinitní posloupnost F_{α_β}. Položme $\alpha_0 = 0$, dále pro $\beta + 1$ zvolme

$$F_{\alpha_{\beta+1}} = F_{\gamma_{\alpha_\beta}},$$

a pro β limitní ordinál, položíme $\eta = \sup\limits_{\nu<\beta} \alpha_\nu$ a vezmeme

$$F_{\alpha_\beta} = F_{\gamma_\eta}.$$

Nechť nyní G_n je spočetná báze X. Pak existuje pro každé β bod $x_\beta \in F_{\alpha_\beta} \setminus F_{\alpha_{\beta+1}}$ a z otevřenosti $X \setminus F_{\alpha_{\beta+1}}$ existuje pro každé x_β bázová množina G_{n_β} taková, že $G_{n_\beta} \cap F_{\alpha_{\beta+1}} = \emptyset$ a $x_\beta \in G_{n_\beta}$. Z konstrukce jsou tyto množiny různé, to je ale spor se spočetností báze, tedy musí existovat α_0 jako výše.

$\square$

Věta 3. *Nechť X je separabilní metrický prostor a Y je metrický prostor. Funkce $f : X \to Y$ je $\mathcal{B}_1(X, Y)$, pokud pro každou $J \subset X$ uzavřenou má $f|_J$ bod spojitosti.*

Důkaz. Nechť $F \subset Y$ je uzavřená množina, ukážeme, že $f^{-1}(F)$ je typu $\Pi_2(X)$. Z lemmatu 1 lze existují uzavřené množiny F_n takové, že platí $Y \setminus F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Nechť je $n \in \mathbb{N}$ pevné. Pro spor předpokládejme, že existuje Z neprázdná množina taková, že platí:

$$Z = \overline{Z \cap f^{-1}(F)} \cap \overline{Z \cap f^{-1}(F_n)}.$$

Protože Z je uzavřená, tak $g = f|_Z$ má podle předpokladu bod spojitosti $z \in Z$. Platí

$$z \in Z \subset \overline{Z \cap f^{-1}(F)} = \overline{g^{-1}(F)} \text{ a } g(z) \in \overline{gg^{-1}(F)}.$$

Protože $g(z) = f(z)$ a $\overline{gg^{-1}(F)} \subset \overline{F} = F$, tak $f(z) \in F$. Analogickým postupem pro F_n dostaneme $f(z) \in F_n$, to je ale spor s počáteční disjunktní volbou F a F_n. Nutně tedy jediné Z pro které je rovnost splněna je triviálně $Z = \emptyset$.

Nyní ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze najít $D_n \in \Pi_2(X)$ takovou, že $f^{-1}(F) \subset D_n \subset X \setminus f^{-1}(F_n)$. Označme $H = f^{-1}(F)$ a $H_n = f^{-1}(F_n)$. Konstruujeme za tímto účelem následující transfinitní posloupnost množin: $Z_0 = X$ a dále pro $\alpha < \omega_1$ položme

$$Z_\alpha = \begin{cases} \bigcap\limits_{\xi<\alpha} Z_\xi & \text{pro } \alpha \text{ limitní ordinál} \\ \overline{Z_\beta \cap H} \cap \overline{Z_\beta \cap H_n} & \text{pro } \alpha = \beta + 1. \end{cases}$$

Toto je transfinitní nerostoucí posloupnost uzavřených množin, proto od určitého indexu musí být podle předchozí věty $Z_{\alpha_0+1} = Z_{\alpha_0}$, z konstrukce tedy platí

$$Z_{\alpha_0} = Z_{\alpha_0+1} = \overline{Z_{\alpha_0} \cap f^{-1}(F)} \cap \overline{Z_{\alpha_0} \cap f^{-1}(F_n)}.$$

Podle předchozího je toto splněno pouze pro prázdnou množinu a tedy $Z_{\alpha_0} = \emptyset$.

Definujme pro $\xi < \alpha_0$ množiny $P_\xi = Z_\xi \setminus \overline{Z_\xi \cap H}$ a $R_\xi = Z_\xi \setminus \overline{Z_\xi \cap H_n}$. Vidíme, že platí $Z_\xi \setminus Z_{\xi+1} = P_\xi \cup R_\xi$, z volby $Z_0 = X$ a $X = \bigcup_{\xi<\alpha_0} Z_\xi \setminus Z_{\xi+1}$, že $X = \bigcup_{\xi<\alpha_0} (P_\xi \bigcup R_\xi)$. Z toho plyne $X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi \subset \bigcup_{\xi<\alpha_0} R_\xi$. Dále

$$P_\xi = Z_\xi \setminus \overline{Z_\xi \cap H} \subset Z_\xi \setminus (Z_\xi \cap H) = Z_\xi \setminus H \subset X \setminus H$$

a tedy $\bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi \subset X \setminus H$. Celkem tedy $H \subset X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi \subset \bigcup_{\xi<\alpha_0} R_\xi$. Analogickým postupem dostaneme $\bigcup_{\xi<\alpha_0} R_\xi \subset X \setminus H_n$. Zkonstruujeme $G_{m,\xi}$ otevřené, aby platilo $\overline{Z_\xi \cap H} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} G_{m,\xi}$. Z toho plyne, že

$$X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi = X \setminus (\bigcup_{\xi<\alpha_0} Z_\xi \setminus \overline{Z_\xi \cap H}) = \bigcap_{\xi<\alpha_0} X \setminus (Z_\xi \cap X \setminus \overline{Z_\xi \cap H})$$

$$= \bigcap_{\xi<\alpha_0} (X \setminus Z_\xi) \cup (\overline{Z_\xi \cap H}) = \bigcap_{\xi<\alpha_0} (X \setminus Z_\xi) \cup (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} G_{m,\xi})$$

$$= \bigcap_{\xi<\alpha_0} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (X \setminus Z_\xi) \cup G_{m,\xi}.$$

Označme $D_n = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi$, ukážeme, že množina D_n je typu $\Pi_2(X)$.

$$D_n = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} P_\xi = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} Z_\xi \setminus \overline{Z_\xi \cap H} = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} Z_\xi \cap (X \setminus \overline{Z_\xi \cap H})$$

Z lemmatu 1 existují uzavřené množiny E_k takové, že $X \setminus \overline{Z_\xi \cap H} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ a tedy platí

$$D_n = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} Z_\xi \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha_0} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z_\xi \cap E_k.$$

Množina D_n je tedy doplněk spočetného sjednocení uzavřených množin (což je $\Sigma_2(X)$ množina) a tedy D_n je typu $\Pi_2(X)$.

Platí vztah $f^{-1}(F) \subset D_n \subset X \setminus f^{-1}(F_n)$. Dále

$$f^{-1}(F) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus f^{-1}(F_n)) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = X \setminus (f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n))$$

$$= X \setminus (f^{-1}(Y \setminus F)) = X \setminus (X \setminus f^{-1}(F)) = f^{-1}(F),$$

tedy $f^{-1}(F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F)$ množina typu $\Pi_2(X)$ a tedy f je z definice $\mathcal{B}_1(X,Y)$.

□

Věta 4. *Nechť X je metrický prostor a nechť $G_1, G_2, \ldots$ je posloupnost $\Sigma_\alpha(X)$ množin, pak existuje posloupnost disjunktních $\Sigma_\alpha(X)$ množin $H_1, H_2, \ldots$ takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $H_n \subset G_n$ a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Navíc pokud $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, pak jsou množiny H_n zároveň $\Pi_\alpha(X)$.*

Důkaz. Z definice platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují množiny multiplikativní třídy menší než α takové, že $G_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{ni}$. Podle lemmatu 1 platí $F_{ni} \in \Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$. Přeznačíme posloupnost F_{ni} na jednoduchou posloupnost $\left\{F_{\varphi(n,i)}\right\}_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ s indexy $\varphi(n,i)$.

Položme nyní

$$F^*_{ni} = F_{ni} \setminus \bigcup_{\varphi(k,l) < \varphi(n,i)} F_{kl}.$$

Toto je množina ze systému $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$, navíc platí $F^*_{ni} \subset F_{ni} \subset G_n$. Označme $F^*_{\varphi(n,i)} = F^*_{ni}$. Potom pro každé $ni \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ platí $F_{\varphi(n,i)} \subset \bigcup_{\varphi(k,l) \leq \varphi(n,i)} F^*_{kl}$ a tudíž $\bigcup_{\varphi(k,l) \leq \varphi(n,i)} F_{kl} = \bigcup_{\varphi(k,l) \leq \varphi(n,i)} F^*_{kl}$.

Položme nyní $H_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^*_{ni}$. Nyní $H_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^*_{ni} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{ni} = G_n$, F_n jsou z konstrukce disjunktní, tedy i H_n jsou disjunktní, z uzavřenosti $\Sigma_\alpha(X)$ na spočetná sjednocení jsou $\Sigma_\alpha(X)$ a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{ni} = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{N}} F_\varphi = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{N}} F^*_\varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n.$$

Pokud navíc $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, pak díky disjunktnosti H_n je lze pro každé $n \in \mathbb{N}$ zapsat jako

$$H_{n_0} = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}} H_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}} X \setminus H_n$$

a tedy je zároveň i $\Pi_\alpha(X)$.

□

Lemma 5. *Nechť X je metrický prostor a nechť $D_1, D_2, \ldots$ je posloupnost $\Pi_\alpha(X)$ množin, pro kterou platí $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$, pak existuje posloupnost $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$ množin $E_1, E_2, \ldots$ takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $D_n \subset E_n$ a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$.*

Speciálně pro dvě disjunktní množiny A a B z $\Pi_\alpha(X)$ existuje množina F z $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$ taková, že platí $A \subset F \subset X \setminus B$.

Důkaz. Označme $G_n = X \setminus D_n$, G_n jsou typu $\Sigma_\alpha(X)$. Z $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$ plyne, že pro každé $x \in X$ existuje $n_x \in \mathbb{N}$ takové, že $x \notin D_n$ a tedy $x \in G_n$ a tedy platí $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Z předchozí věty existují H_n z $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$ takové, že $H_n \subset G_n$. Položme $E_n = X \setminus H_n$, ty jsou podle lemmatu 1 ze systému $\Sigma_\alpha(X) \cap \Pi_\alpha(X)$. Platí $D_n \subset E_n$ a z $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ platí $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \emptyset$.

Pro druhou část tvrzení volíme posloupnost jako $A, B, B, B, \ldots$, množiny A a B jsou disjunktní, můžeme tedy použít první část lemmatu. Množinu F potom volíme jako E_1. Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí $B \subset E_n$. Aby platilo $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$ musí být $E_1 \cap B = \emptyset$, celkem tedy $A \subset F \subset X \setminus B$.

□

Definice 3. *Nechť X je metrický prostor, řekneme, že množina $A \subset X$ je diskrétní, pokud pro každé $x \in X$ existuje $r_x > 0$ takové, že $B(x, r_x) \cap A = \{x\}$.*

Věta 6. *Nechť X je metrický prostor a Y je separabilní Banachův prostor. Potom každá funkce $f : X \to Y$ z $\mathcal{B}_\alpha(X,Y), \alpha > 0$ je limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti f_n $\mathcal{B}_\alpha(X,Y)$ funkcí takových, že jejich obory hodnot jsou diskrétní množiny.*

Důkaz. Ze separability Y existuje spočetná hustá množina I. Zkonstruujeme pro $\varepsilon > 0$ diskrétní spočetnou množinu I_ε takovou, že pro každý bod $y \in Y$ platí $dist(I_\varepsilon, y) < \varepsilon$. Seřadíme si prvky I do posloupnosti $I^0 = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Položme $I^1_\varepsilon = \{y_1\}$ a položíme $I^1 = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \setminus B(y_1, \frac{\varepsilon}{2})$. Pokud $I^1 = \emptyset$, tak jsme vybrali spočetnou hustou množinu, jak je ukázáno níže. Jinak vezmeme $y_{k_2} \in I^1$ s nejmenším indexem k_2 a položíme $I^2 = I^1 \setminus B(y_{k_2}, \frac{\varepsilon}{2})$, $I^2_\varepsilon = I^1_\varepsilon \cup \{y_{k_2}\}$. Opakováním tohoto postupu dostaneme nejvýše spočetnou diskrétní množinu I_ε.

Ukážeme, že splňuje požadovanou vlastnost. Nechť $x \in Y$, z hustoty množiny I existuje $y_x \in I : dist(x, y_x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pokud $y_x \in I_\varepsilon$, pak $dist(I_\varepsilon, y) < \varepsilon$, jinak existuje $y_{n_0} \in I_\varepsilon : dist(y_x, y_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ a celkem tedy $dist(x, y_{n_0}) \leq dist(x, y_x) + dist(y_x, y_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Přeznačíme I_ε jako posloupnost $y_1, y_2, \ldots$ a položíme

$$A_k = \{x \in X : |f(x) - y_k| \leq \varepsilon\}, B_k = \{x \in X : |f(x) - y_k| \geq 2\varepsilon\}.$$

Množiny A_k a B_k jsou disjunktní množiny multiplikativní třídy $\alpha + 1$. Podle předchozí věty víme, že existuje množina $F_k \in \Pi_{\alpha+1}(X) \cap \Sigma_{\alpha+1}(X)$ taková, že $A_k \subset F_k \subset X \setminus B_k$. Konstruujeme funkci f_ε následujícím způsobem:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} y_1 & x \in F_1 \\ y_n & x \in F_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k \\ \vdots & \end{cases}$$

Množiny z definice f_ε jsou podle lemmatu 1 ze systému $\Pi_{\alpha+1}(X) \cap \Sigma_{\alpha+1}(X)$. Nechť $G \subset Y$ je otevřená množina, potom platí $f_\varepsilon^{-1}(G) = f_\varepsilon^{-1}(G \cap I_\varepsilon) = \bigcup_{y_m \in G \cap I_\varepsilon} f_\varepsilon^{-1}(y_m)$, což je nejvýše spočetné sjednocení množin ze systému $\Pi_{\alpha+1}(X) \cap \Sigma_{\alpha+1}(X)$ a tedy z uzavřenosti systému $\Sigma_{\alpha+1}(X)$ na spočetná sjednocení je také $\Sigma_{\alpha+1}(X)$. Funkce f_ε je tedy $\mathcal{B}_\alpha(X,Y)$ a má diskrétní obor hodnot. Navíc z vlastnosti $F_k \subset X \setminus B_k$ plyne, že pro každé $x \in F_k$ platí $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < 2\varepsilon$. Protože $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$, tak platí $\|f - f_\varepsilon\| < 2\varepsilon$. Volbou $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dostaneme posloupnost f_n, která stejnoměrně konverguje k f.

□

Věta 7. *Nechť X je metrický prostor a $A \subset X$ je uzavřená. Nechť Y je normovaný lineární prostor a $f : A \to Y$ je spojitá. Potom existuje $F : X \to Y$ spojité rozšíření f a $f(X)$ je podmnožina konvexního obalu $f(A)$.*

Důkaz. Lze nalézt v [3].

□

Věta 8. *Nechť X je metrický prostor a Y je separabilní Banachův prostor. Potom každá funkce $f : X \to Y$ z $\mathcal{B}_1$ je limita posloupnosti spojitých funkcí.*

Důkaz. Nejdříve nechť obor hodnot f je diskrétní množina $D = \{y_1, y_2, \dots\}$. Z definice diskrétní množiny najdeme G_j takové, že $G_j \bigcap D = \{y_j\}$. Potom množiny $f^{-1}(G_j)$ jsou typu $\Sigma_2(X)$, tedy existují $F_{n,j}$ typu $\Pi_1(X)$, což jsou z definice uzavřené množiny, a platí $f^{-1}(G_j) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,j}$. Bez újmy na obecnosti požadujeme $F_{n,j} \subset F_{n+1,j}$ (jinak konstruujeme $F^*_{n,j} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{k,j}$).

Použijeme rozšiřovací větu na f restringovanou na $\bigcup_{k=1}^{n} F_{n,k}$. Tyto množiny jsou uzavřené a restrikce je konstantní na disjunktních uzavřených množinách $F_{n,k}$ a tedy je spojitá. Získáme posloupnost spojitých funkcí f_n. Pro každý bod $x \in X$ existuje j takové, že $x \in f^{-1}(G_j)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x \in F_{n,j}$. Pro každé $n \geq \max\{n_0, j\}$ tedy platí $f_n(x) = f(x)$ a celkem tedy $f_n \to f$.

Nyní nechť f je libovolná $\mathcal{B}_1$ funkce. Podle věty 6 sestrojíme posloupnost $\mathcal{B}_1$ funkcí f_n s diskrétním oborem hodnot, které stejnoměrně konvergují k f. Bez újmy na obecnosti požadujeme ať navíc pro $n \geq 2$ platí $\|f_n - f_{n-1}\| < \frac{1}{2^n}$, jinak vezmeme vybranou posloupnost, která toto splňuje. Podle první části důkazu vezmeme posloupnosti spojitých funkcí f_{nm} takovou, že $f_{nm} \to f_n$. Definujme spojitou projekci $p_n : Y \to \left\{y \in Y : \|y\| \leq \frac{1}{2^n}\right\}$ jako

$$p_n(y) = \begin{cases} y & \|y\| \leq \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n}\frac{y}{\|y\|} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukážeme, že p_n je spojitá. Nechť $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost v Y a konverguje k y, ukážeme že $\{p_n(y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ konverguje k $p_n(y)$.

Pokud $\|y\| < \frac{1}{2^n}$, pak existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\|y_k\| \leq \frac{1}{2^n}$. Projekce $p_n(y_k)$ jsou potom identické a $p_n(y_k) = y_k$ tedy konvergují k $p_n(y) = y$.

Pokud $\|y\| > \frac{1}{2^n}$, pak existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\|y_k\| \geq \frac{1}{2^n}$. Z konvergence $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ k y platí, že $\{\|y_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ konverguje k $\|y\|$. Potom z aritmetiky limit $\left\{\frac{1}{2^n}\frac{y_k}{\|y_k\|}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ konverguje k $\frac{1}{2^n}\frac{y}{\|y\|}$.

Pokud $\|y\| = \frac{1}{2^n}$, pak alespoň jedna z posloupností $\left\{y_l : \|y_l\| \geq \frac{1}{2^n}\right\}$, $\left\{y_m : \|y_m\| \leq \frac{1}{2^n}\right\}$ je nekonečná a analogicky k předchozím krokům její projekce konverguje k $p_n(y) = y$.

Projekce p_n je tedy spojitá.

Položme pro každé $m \in \mathbb{N}$ $h_{1m} = f_{1m}$ a dále pro každé $m \in \mathbb{N}$ $h_{nm} = p_n \circ (f_{nm} - f_{n-1m})$. Označíme $h_1 = f_1$ a dále $h_n = f_n - f_{n-1}$. Z konstrukce platí $f_n = \sum_{k=1}^{n} h_k$. Funkce h_{nm} jsou ze spojitosti p_n spojité. Funkce $f_{nm} - f_{n-1m}$ jsou spojité a platí $f_{nm} - f_{n-1m} \to h_n$. Protože jsme vybrali $\|h_n\| = \|f_n - f_{n-1}\| < \frac{1}{2^n}$, tak $h_{nm} \to h_n$.

Z konstrukce p_n platí $\|h_{nm}\| \leq \frac{1}{2^n}$ pro každé $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Nyní nechť $x_0 \in X$ pevné a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že posloupnost $\sum_{k=1}^{m} h_{km}(x_0)$ konverguje k $f(x_0)$. Zvolme

n takové, že $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ a zároveň $\|f(x_0) - f_n(x_0)\| < \varepsilon$. Nyní najdeme $m_0 > n$ takové, že pro každé $m \geq m_0$ platí $\| \sum\limits_{k=1}^{n} h_k(x_0) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_{km}(x_0)\| < \varepsilon$.

Ukážeme, že takováto volba m dává dokazovanou konvergenci $\sum\limits_{k=1}^{m} h_{km}(x_0)$ k $f(x_0)$, odhadneme tedy

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=1}^{m} h_{km}(x_0) - f(x_0) \Big\| &\leq \Big\| \sum_{k=1}^{m} h_{km}(x_0) - \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0) \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0) - f(x_0) \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} h_{km}(x_0) \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n} h_{km}(x_0) - \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0) \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0) - f(x_0) \Big\| \\
&< \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Charakterizace funkcí první Baireovy třídy

V této kapitole uvedeme Arens - Eellsovu větu o vnoření a samotný důkaz ekvivalentní charakterizace funkcí první Baireovy třídy.

2.1 Arens - Eellsova věta

Lemma 9. *Nechť $X = Y \cup \{x_0\}$ metrický prostor s metrikou d, označme $Lip(X)$ množinu všech reálných funkcí na X takových, že pro každou $f \in Lip(X)$ platí $f(x_0) = 0$ a existuje $K \geq 0$ takové, že pro každé $x,y \in X$ platí $|f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y)$. Položme*

$$\|f\| = \inf \{K \geq 0 : \forall x,y \in X : |f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y)\}$$

Potom $Lip(X)$ je normovaný lineární prostor.

Důkaz. Množina $Lip(X)$ je uzavřená na sčítání, nechť $f, g \in Lip(X)$, potom $(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0$ a z existence $|f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y)$ a $|g(x) - g(y)| \leq Ld(x,y)$ dostaneme

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (K+L)d(x,y)$$

Množina $Lip(X)$ je uzavřená na násobení reálným číslem $a \in \mathbb{R}$, neboť $(af)(x_0) = a(f(x_0)) = a0 = 0$ a $|af(x) - af(y)| \leq |a|Kd(x,y)$

Ověříme vlastnosti normy. Nejprve ukážeme, že $\|f\|$ splňuje pro každé $x,y \in X$ nerovnost $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|d(x,y)$. Předpokládejme pro spor, že $\|f\|$ tuto nerovnost nesplňuje, pak z definice infima existuje klesající posloupnost $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, která konverguje k $\|f\|$. Z předpokladu sporu existuje $x,y \in X$ takové, že platí $|f(x) - f(y)| > \|f\|d(x,y)$. Potom z konvergence $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $|f(x) - f(y)| > K_n d(x,y)$. To je spor s volbou K_n, tedy $\|f\|$ musí pro každé $x, y \in X$ splňovat $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|d(x,y)$.

Pokud $\|f\| = 0$, pak f je konstantní na X a z $f(x_0) = 0$ je $f \equiv 0$. Naopak, pokud existuje $y_0 \in Y$ takové, že $f(y_0) \neq 0$, tak z $f \in Lip(X)$ nutně musí být $\|f\| \geq \frac{|f(y_0)|}{d(y_0,x_0)} > 0$.

Při násobení reálným číslem platí

$$|a||f(x) - f(y)| = |af(x) - af(y)| \leq |a|\|f\|d(x,y)$$

a tedy $\|af\| \leq |a|\|f\|$. Naopak

$$|a||f(x) - f(y)| = |af(x) - af(y)| \leq \|af\|d(x,y)$$

a tedy $\|af\| \geq |a|\|f\|$, celkem tedy $\|af\| = |a|\|f\|$.

Odhad

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (K+L)d(x,y)$$

pro uzavřenost na součty platí i pro $K = \|f\|$ a $L = \|g\|$, tedy je splněna trojúhelníková nerovnost.

□

Věta 10. *Každý metrický prostor (Y, ρ) lze izometricky vnořit do normovaného lineárního prostoru E tak, že obraz Y je uzavřená, lineárně nezávislá podmnožina E.*

Důkaz. Nechť X je množina, který obsahuje Y a bod $x_0 \notin Y$. Zvolme $y_0 \in Y$ a definujeme metriku d na X jako:

$$d(x{,}y) = \begin{cases} \rho(x{,}y) & x, y \in Y \\ 1 + \rho(x, y_0) & x \in Y, y = x_0 \\ 0 & x = y = x_0 \end{cases}$$

Zřejmě z předpisu a z toho, že ρ je metrika platí $d(x{,}y) = 0$, právě když $y = x$ a $d(x, y) = d(y, x)$. Trojúhelníková nerovnost platí pro $x, y, z \in Y$, neboť na techto bodech platí $d = \rho$, ukážeme, že platí i pro x_0 a $y, z \in Y$.

$$d(z, y) = \rho(z, y) \leq \rho(z, y_0) + \rho(y_0, y) = d(z, y_0) + d(y_0, y)$$

$$\leq d(z, y_0) + 1 + d(y_0, y) + 1 = d(z, x_0) + d(x_0, y)$$

$$d(z, x_0) = \rho(z, y_0) + 1 \leq \rho(z, y) + \rho(y, y_0) + 1 = d(z, y) + d(y, x_0)$$

Vezmeme $Lip(X)$ jako v lemmatu 9. Označme E jeho duál a definujme na něm standardní normu

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| : f \in Lip(X), \|f\| \leq 1\}$$

Definujme zobrazení $h : Y \to E$, které zobrazí y na $\hat{y}$ takové, že pro každé $f \in Lip(X)$ platí $f(y) = \hat{y}(f)$. Ukážeme, že h je izometrie, nechť $y_1, y_2 \in Y$ různé, pak

$$\|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\| = \sup\{|\hat{y_1}(f) - \hat{y_2}(f)| : f \in Lip(X), \|f\| \leq 1\}$$
$$= \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : f \in Lip(X), \|f\| \leq 1\} \leq d(y_1, y_2).$$

Zvolme $g(y) = d(y, y_2) - d(x_0{,}y_2)$, platí $g(x_0) = d(x_0, y_2) - d(x_0{,}y_2) = 0$ a pro každé $x, y \in X$ platí

$$|g(x) - g(y)| = |d(x, y_2) - d(x_0{,}y_2) - (d(y, y_2) - d(x_0{,}y_2))|$$

$$= |d(x, y_2) - d(y, y_2)| \leq d(x, y),$$

tedy funkce g je v $Lip(X)$ a $\|g\| \leq 1$. Volbou $x = y_1, y = y_2$ dostaneme díky volbě $y_1 \neq y_2$ odhad $0 \neq |g(y_1) - g(y_2)| = d(y_1, y_2) \leq \|g\| d(y_1, y_2)$, tedy $\|g\| \geq 1$. Celkem tedy $\|g\| = 1$.

$$\|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\| \geq \|\hat{y}_1(g) - \hat{y}_2(g)\| = \|g(y_1) - g(y_2)\|$$
$$= \|d(y_1, y_2) - d(x_0{,}y_2) - d(y_2, y_2) + d(x_0{,}y_2)\| = d(y_1, y_2)$$

Celkem $d(y_1, y_2) \geq \|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\| \geq d(y_1, y_2)$ a h je tedy izometrie.

Nyní ukážeme, že $h(Y)$ je lineárně nezávislý. Nechť $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ jsou různé prvky Y, pro spor nechť $\hat{y}_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \hat{y}_k, \alpha_k \neq 0$. Potom pro funkci $g(y) = d(y, \{x_0, y_1, \ldots, y_n\}) = \min\{d(y{,}x_0), d(y{,}y_1), \ldots, d(y{,}y_n)\}$, potom platí $g(x_0) = 0$ a pro libovolný prvek $a \in \{x_0, y_1, \ldots, y_n\}$ platí pro každé $z \in X : g(z) \leq$

$d(z,a)$. Nechť $x, y \in X$, bez újmy na obecnosti nechť $g(x) \geq g(y)$ a nechť $a \in \{x_0, y_1, \ldots, y_n\}$ takové, že $g(y) = d(y,a)$, potom platí $|g(x) - g(y)| \leq |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$. Tedy $g \in Lip(X)$ a platí

$$0 \neq d(y_{n+1}, \{x_0, y_1, \ldots, y_n\}) = \hat{y}_{n+1}(g) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \hat{y}_k(g) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g(y_k) = 0.$$

Tedy $h(Y)$ je lineárně nezávislá.

□

Lemma 11. *Nechť Y je separabilní metrický prostor, pak existuje separabilní normovaný lineární prostor Z takový, že do něj lze Y izometricky vnořit.*

Důkaz. Zkonstruujeme vnoření $h : Y \to E$ podle věty 10 a vezmeme Z jako lineární obal $h(Y)$. Potom Z je podprostor E a $\hat{h} : Y \to Z$ definované jako $\hat{h} = h$ je izometrické vnoření. Ukážeme, že Z je separabilní. Nechť $I \subset Y$ je hustá spočetná množina, konstruujeme množinu $D \subset Z$ jako $\left\{ \sum_{n=1}^{K} c_n a_n, c_n \in \mathbb{Q}, a_n \in \hat{h}(I) \right\}$, tato množina je spočetná, ukážeme, že je hustá.

Nechť tedy $z \in Z$, potom z definice $z = \sum_{n=1}^{K} c_n a_n, c_n \in \mathbb{R}, a_n \in \hat{h}(Y)$. Množina $\hat{h}(Y)$ je izometrická Y, tedy množina $\hat{h}(I)$ je hustá v $\hat{h}(Y)$. Z hustoty $\hat{h}(I)$ volíme aproximace $a_{ni} \to a_n, a_{ni} \in \hat{h}(I)$, reálné koeficienty c_n aproximujeme racionálními čísly $c_{ni} \to c_n$. Takto zkonstruovaná posloupnost konverguje k z a je složena z prvků D. Normovaný lineární prostor Z je tedy separabilní.

□

2.2 Charakterizační věta

Věta 12. *Nechť (X, d_X), (Y, d_Y) jsou úplné separabilní metrické prostory a nechť $f : X \to Y$ je funkce.*

Funkce f je $\mathcal{B}_1(X, Y)$, právě když pro každé $\epsilon > 0$ existuje funkce $\delta : X \to (0, \infty)$ taková, že pro každé $x, y \in X$ takové, že $d_X(x, y) < min\{\delta(x), \delta(y)\}$ platí $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že z podmínky ve znění plyne, že f je funkce první Baireovy třídy. Podle Věty 3 z první kapitoly stačí ukázat, že pro každou $F \subset X$ uzavřenou má $f|_F$ bod spojitosti.

Abychom toto ukázali, tak dokážeme, že existuje $x \in F$ takové, že platí

$$\omega_f(x, F) = \inf_{h>0} \sup \{|f(u) - f(v)| : u, v \in B(x, h) \cap F\} = 0.$$

Pro spor předpokládejme, že toto neplatí a tedy pro každé $x \in F$ je $\omega_f(x, F) > 0$. Položme $C_n = \left\{x \in F : \omega_f(x, F) \geq \frac{1}{n}\right\}$, potom $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Množiny C_n jsou uzavřené, abychom toto dokázali, tak ukážeme, že $F \setminus C_n$ jsou otevřené. Nechť $x \in F \setminus C_n$, což z definice C_n dává $\omega_f(x, F) < \frac{1}{n}$. Potom z definice ω_f existuje $h > 0$ takové, že $\sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in B(x,h) \cap F\} < \frac{1}{n}$. Pro každé $y \in B(x,h) \cap F$ existuje $h_y > 0$, že $B(y,h_y) \cap F \subset B(x,h) \cap F$ a tedy $\omega_f(y,F) < \frac{1}{n}$ a tedy $y \in F \setminus C_n$. Množina $F \setminus C_n$ tedy obsahuje otevřené okolí každého svého bodu a je tedy otevřená.

Protože prostor X je úplný a F je jeho uzavřená podmnožina, tedy také úplný metrický prostor, tak z Baireovy věty o kategoriích a z uzavřenosti C_n existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že C_{n_0} má neprázdný vnitřek U v F, označíme $I = \overline{U} \subset C_{n_0}$.

Nyní nechť je $\delta(x)$ funkce ze znění věty pro $\varepsilon = \frac{1}{6n_0}$.

Položme $F_n = \left\{x \in I : \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Protože δ je kladná, tak platí $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Protože prostor X je úplný a I je jeho uzavřená podmnožina, tedy I je také úplný metrický prostor, tak z Baireovy věty o kategoriích existuje $K \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{F_K}$ má neprázdný vnitřek v I, speciálně existuje $c \in F_K \cap U$ a $0 < r < \min\left\{\frac{1}{2K}, \delta(c)\right\}$ takové, že $B(c,r) \cap I \subset \overline{F_K}$.

Nechť $y \in B(c,r) \cap I$, pak existuje $x \in B(c,r) \cap B(y,\delta(y)) \cap F_K$. Provedeme následující odhady

$$d_X(x,y) < \min\{2r, \delta(y)\} \le \min\left\{\frac{1}{K}, \delta(y)\right\} \le \min\{\delta(x), \delta(y)\},$$

$$d_X(x,c) \le \min\{\delta(x), \delta(c)\}$$

Celkem tedy z předpokladu dostaneme

$$d_Y(f(y), f(c)) \le d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), f(c)) \le \frac{1}{6n_0} + \frac{1}{6n_0} = \frac{1}{3n_0}.$$

Z toho plyne

$$\sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in B(c,r) \cap F \cap I\} \le \frac{2}{3n_0}.$$

Platí potom, že $\omega_f(c,F) \le \frac{2}{3n_0}$, protože $B(c,r) \cap I$ obsahuje okolí bodu c v F. To je ale spor s tím, že $c \in C_{n_0}$. Tedy musí existovat $x \in F$ takové, že $\omega_f(x,F) = 0$. Tedy podle věty 3 je $f \in \mathcal{B}_1$.

Nechť naopak $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$. Nechť $\hat{h}$ je izometrické vnoření (Y, d_Y) do $(Z, \|\cdot\|_Z)$ zkonstruované podle lemmatu 11, tedy Z je separabilní normovaný lineární prostor. Funkce $\hat{h} \circ f$ je $\mathcal{B}_1(X,Z)$, neboť pro $G \subset Z$ je ze spojitosti $\hat{h}$ je množina $\hat{h}^{-1}(G)$ otevřená a tedy $f^{-1}(\hat{h}^{-1}(G))$ typu $\Pi_2(X)$. Podle věty 8 je $\hat{h} \circ f$ bodovou limitou posloupnosti spojitých funkcí $g_n : X \to Z, n \in \mathbb{N}$.

Ukážeme, že f splňuje podmínku ze znění. Nechť $\varepsilon > 0$ a $x \in X$. Z definice spojitosti platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists \delta_n(x) : X \to (0,\infty)\, \forall y \in X : d_X(x,y) < \delta_n(x) \Rightarrow \|g_n(x) - g_n(y)\|_Z < \frac{\varepsilon}{3}$$

Protože $g_n \to \hat{h} \circ f$, tak pro $x \in X$ platí:

$$\exists n_x \in \mathbb{N}\, \forall n \ge n_x : \|g_n(x) - \hat{h} \circ f(x)\|_Z < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definujme

$$\delta(x) = \min_{1 \le n \le n_x} \delta_n(x), x \in X.$$

Nyní nechť $x, y \in X$ takové, že platí $d_X(x,y) < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$ a předpokládejme, že $n_x \leq n_y$.

$$\begin{aligned} &\|\hat{h} \circ f(x) - \hat{h} \circ f(y)\|_Z \\ \leq &\|\hat{h} \circ f(x) - g_{n_y}(x)\|_Z + \|g_{n_y}(x) - g_{n_y}(y)\|_Z + \|g_{n_y}(y) - \hat{h} \circ f(y)\|_Z \\ < &\frac{\varepsilon}{3} + \|g_{n_y}(x) - g_{n_y}(y)\|_Z + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Navíc $d_X(x,y) < \delta(y) \leq \delta_{n_y}(y)$ a tedy ze spojitosti $\|g_{n_y}(x) - g_{n_y}(y)\|_Z < \frac{\varepsilon}{3}$. Protože h je izometrie, tak platí

$$d_Y(f(x), f(y)) = \|\hat{h} \circ f(x) - \hat{h} \circ f(y)\|_Z < \varepsilon.$$

□

Toto je rozpracovaný původní důkaz věty z [4]. Předpoklad na úplnost prostoru Y není v důkazu potřeba, stejný důkaz tedy funguje i pro obecnější tvrzení.

Věta 13. *Nechť (X, d_X) je úplný separabilní metrický prostor, (Y, d_Y) je separabilní metrický prostor a nechť $f : X \to Y$ je funkce. Funkce f je $\mathcal{B}_1(X,Y)$, právě když pro každé $\epsilon > 0$ existuje funkce $\delta : X \to (0, \infty)$ taková, že pro každé $x, y \in X$ takové, že $d_X(x,y) < min\{\delta(x), \delta(y)\}$ platí $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Seznam použité literatury

[1] Kuratowski, Kazimierz. *Topology.* Volume I. New edition, revised and augmented. New York: Academic Press, 1966. ISBN 1-48-324211-0.

[2] Michael, E. A short proof of the Arens-Eells embedding theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1964, 15(3), 415-416.

[3] Dugundji, James. An extension of Tietze's theorem. *Pacific Journal of Mathematics.* 1951, 1(3), 353-367.

[4] Lee, P.Y., Tang, W.K. and Zhao, D. An equivalent definition of functions of the first Baire class. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 2001, 2273-2275.