MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Lebeda

Kolmogorovova-Čencovova věta

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval RNDr. Petru Čoupkovi, Ph.D., za vstřícný přístup v průběhu vzniku celé této práce, za čas, který věnoval revizi postupně vznikající práce či přínosným konzultacím, a za spoustu cenných rad a podnětů. Také bych chtěl poděkovat své rodině za podporu při studiu i při psaní bakalářské práce.

Název práce: Kolmogorovova-Čencovova věta

Autor: Matěj Lebeda

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Existuje postačující podmínka pro spojitost trajektorií náhodného procesu? Nebo lze alespoň náhodný proces modifikovat tak, aby jeho trajektorie již spojité byly? Odpověď nám dává Kolmogorovova-Čencovova věta, s jejímž tvrzením a důkazem se v této práci seznámíme. Nejprve zavedeme pojem reálného náhodného procesu, určitou pozornost věnujeme tzv. gaussovským procesům. Hlavním bodem druhé kapitoly jsou Kolmogorovova-Čencovova věta s důkazem a tvrzení, o která se důkaz věty opírá. V závěrečné třetí kapitole si ukážeme aplikace věty na známých gaussovských procesech, jako je třeba Wienerův proces, ale i další. Naopak ze skupiny procesů, které podmínku věty nesplňují, se na závěr zaměříme na Poissonův proces.

Klíčová slova: Kolmogorovova-Čencovova věta, náhodný proces, spojitost

Title: Kolmogorov-Chentsov Theorem

Author: Matěj Lebeda

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Is there a sufficient condition for continuity of sample paths of a random process? Or, is it at least possible to modify the process so that the paths would already be continuous? An affirmative answer is given by the Kolmogorov-Chentsov theorem, whose statement and proof are the subject of this thesis. First, we introduce the notion of a random process and briefly focus on the so-called Gaussian processes. The main focus of the second chapter is the Kolmogorov-Chentsov theorem, its proof and some auxiliary assertions are given. In the final third chapter, we deal with the applications of the theorem to some well-known Gaussian processes such as the Wiener process or the Brownian bridge. Finally, we look into the Poisson process, which on the contrary does not satisfy the condition of the theorem.

Keywords: Kolmogorov-Chentsov theorem, random process, continuity

Obsah

Úvod

Předložená práce se zabývá Kolmogorovovou-Čencovovou větou. Její tvrzení můžeme rozdělit na dvě části: v první části se tvrdí, že za jistých podmínek je zaručena existence spojité modifikace náhodného procesu, což dokázal ruský matematik A. N. Kolmogorov (poprvé publikováno v [1]). Tvrzení věty později rozšířil ruský matematik N. N. Čencov, který dokázal, že trajektorie modifikovaného procesu jsou navíc lokálně hölderovské (poprvé publikováno v [2]).

V práci se nejdříve seznámíme se samotným pojmem náhodného procesu, přičemž se zaměříme na tzv. gaussovské procesy, které pro nás v souvislosti s aplikacemi věty budou užitečné.

Obsahem druhé kapitoly je již zmíněná Kolmogorovova-Čencovova věta, která je zde uvedena spolu s důkazem; důkaz věty se mj. opírá o pomocné lemma a větu, které jsou zde zformulovány a též dokázány.

V poslední, třetí, kapitole použijeme větu k důkazu existence spojité modifikace Wienerova a dvou dalších gaussovských procesů - Ornstein-Uhlenbeckova procesu a Brownova mostu. Na závěr se ještě zaměříme na proces, který se této skupině vymyká, a tím je Poissonův proces. Ukážeme si přímo, proč Poissonův proces nesplňuje podmínku Kolmogorovovy-Čencovovy věty.

Symboly

- $\lfloor \cdot \rfloor \ldots$ dolní celá část čísla
- $L^p,\ p \in [1, \infty) \ldots L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$
- X, Y náhodné veličiny; $X \overset{D}{=} Y \ldots$ rozdělení X se shoduje s rozdělením Y
- s.j. …skoro jistě
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ pravděpodobnostní prostor; pro $\omega \in \Omega,\ D \in \mathcal{A}$ je

$$\mathbb{I}_{\{\omega \in D\}} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \omega \in D, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- X náhodná veličina, $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$; $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \ldots$ X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2
- gama-funkce $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt,\ y \in \mathbb{C},\ \mathsf{Re}\, y > 0$
- $n!! = \begin{cases} n(n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2, & \text{je-li } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ n(n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, & \text{je-li } n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 Náhodný proces

V sekci 1.1 se nejprve seznámíme s pojmem reálného náhodného procesu a jeho trajektoriemi a následně zadefinujeme gaussovský náhodný proces. Řekneme si také, jakou roli v souvislosti s gaussovskými procesy hrají střední hodnota a autokovarianční funkce náhodného procesu. V sekci 1.2 pak uvedeme vybrané příklady náhodných procesů, konkrétně gaussovské procesy, o kterých ve třetí kapitole ukážeme, že splňují podmínku Kolmogorovovy-Čencovovy věty, a zmíníme i Poissonův proces, o kterém si ve třetí kapitole zase řekneme, proč podmínku věty splňovat nemůže.

1.1 Základní pojmy

Není-li uvedeno jinak, obsah této podkapitoly byl čerpán z [3], str. 9, 10, 11.

Definice 1 (Náhodný proces)**.** *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $T \neq \emptyset$ je indexová množina a pro každé $t \in T$ buď $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ reálná náhodná veličina. Potom rodinu náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme* reálný náhodný proces*.*

Podle toho, jak indexová množina T vypadá, pak rozlišujeme náhodné procesy následovně: Je-li $T \subset \mathbb{Z}$, často $T = \mathbb{N}$ nebo $T = \mathbb{N}_0$, jedná se o náhodný proces s *diskrétním časem.* Je-li $T \subset \mathbb{R}$ interval, často $T = [a,b]$, $T = (a,b), a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, případně $T = \mathbb{R}$ anebo $T = [0, +\infty)$, hovoříme o náhodném procesu se *spojitým časem.*

Definice 2 (Trajektorie náhodného procesu)**.** *Buď $X = \{X_t, t \in T\}$ reálný náhodný proces definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak pro pevné $\omega \in \Omega$* trajektorií *náhodného procesu X rozumíme funkci*

$$\xi_\omega : T \to \mathbb{R},$$
$$t \mapsto X_t(\omega), t \in T.$$

Definice 3 (Gaussovský náhodný proces)**.** *Řekneme, že reálný náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je* gaussovský*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny $t_1,...,t_n \in T$ platí, že náhodný vektor $X = (X_{t_1},...,X_{t_n})^T$ má n-rozměrné normální rozdělení, to jest $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \mathbf{\Sigma})$, kde $\mu = \mathsf{E}X = (\mathsf{E}X_{t_1},...,\mathsf{E}X_{t_n})^T$ a*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{var}X_{t_1} & \mathsf{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \dots & \mathsf{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \mathsf{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \mathsf{var}X_{t_2} & \dots & \mathsf{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \dots & \dots & \mathsf{var}X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

V následujícím si řekneme, jak se takový gaussovský proces dá definovat; ještě předtím ale bude třeba zavést pojmy jako střední hodnota a autokovarianční funkce náhodného procesu:

Definice 4. *Nechť $X = \{X_t, t \in T\}$ je reálný náhodný proces.*

(i) Je-li $X_t \in L^1$ pro každé $t \in T$, potom definujeme střední hodnotu *náhodného procesu X jako funkci $\mu : T \to \mathbb{R}$ danou předpisem $\mu(t) = \mathsf{E}X_t,\ t \in T$.*

(ii) *Je-li* $X_t \in L^2$ *pro každé* $t \in T$, *potom definujeme* autokovarianční funkci $R : T^2 \to \mathbb{R}$ *náhodného procesu* X *předpisem* $R(t,s) = \mathsf{cov}(X_t, X_s), t, s \in T$.

Následující tvrzení i s myšlenkou důkazu nalezneme v [4], str. 10, 11.

Tvrzení 1. *Gaussovský proces* $\{X_t, t \in T\}$, *kde* $T \neq \emptyset$, *lze jednoznačně definovat autokovarianční funkcí* $(s,t) \mapsto \mathsf{cov}(X_s, X_t),\ s,t \in T$, *a střední hodnotou* $t \mapsto \mathsf{E}\, X_t,\ t \in T$.

Za tímto tvrzením stojí fakt, že každý náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je jednoznačně určen svými konečně-rozměrnými rozděleními, tj. rozděleními náhodných vektorů $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechny časy $t_1, \ldots, t_n \in T$. V případě gaussovských procesů jsou všechna tato rozdělení normální, a tedy jednoznačně určena vektorem středních hodnot a kovarianční maticí, a ty jsou zase určeny právě střední hodnotou a autokovarianční funkcí procesu.

1.2 Příklady

Nyní se podívejme na příklady náhodných procesů. Procesy zde uvedené jsou definovány dle [3] a [5]. Začneme právě s gaussovskými procesy:

(i) **Wienerův proces.** ([3], str. 16) Jedná se o náhodný proces $W = \{W_t, t \in [0, \infty)\}$ splňující následující podmínky:

- $W_0 = 0$ s.j. a $\{W_t, t \in [0, \infty)\}$ má spojité trajektorie.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, náhodné veličiny $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ jsou nezávislé.
- Pro všechny $0 \leq t < s$, $W_s - W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(s - t))$, kde σ^2 je kladná konstanta.

(ii) **Brownův most.** ([5], str. 359) Brownův most definujeme jako gaussovský náhodný proces $\{X_t, t \in [0,1]\}$ s následující střední hodnotou a autokovarianční funkcí:

- $\mathsf{E}\ X_t = 0$ pro všechna $t \in [0,1]$,
- $R(s,t) = \min\{s,t\} - st,\ s,t \in [0,1]$.

(iii) **Ornstein-Uhlenbeckův proces.** ([5], str. 358) Tento proces je definován jako gaussovský náhodný proces $\{U_t, t \in [0,\infty)\}$, jehož střední hodnota a autokovarianční funkce jsou dány následovně:

- $\mathsf{E}\ X_t = 0$ pro všechna $t \geq 0$,
- $R(s,t) = e^{-|t-s|},\ s,t \geq 0$.

Mezi náhodnými procesy samozřejmě ale také najdeme i takové, které gaussovské nejsou - pro představu si uvedeme

(iv) **Poissonův proces.** ([3], str. 16) Čítací náhodný proces $\{N_t, t \geq 0\}$ nazveme Poissonovým procesem s parametrem $\lambda > 0$, jestliže

- $N_0 = 0$ s.j.,
- má nezávislé přírůstky, to znamená pro všechny $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou přírůstky

$$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \ldots, N_{t_1} - N_{t_0}$$

  nezávislé náhodné veličiny,
- má stacionární přírůstky, tj. pro všechny $t_1, t_2, h \geq 0$ platí, že přírůstky $N_{t_1+h} - N_{t_1},\ N_{t_2+h} - N_{t_2}$ mají stejné rozdělení,
- $N_t \sim Po(\lambda t),\ t > 0$, neboli

$$\mathsf{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k \in \mathbb{N}_0, t > 0.$$

2 Kolmogorovova-Čencovova věta

V této kapitole si představíme znění a důkaz Kolmogorovovy-Čencovovy věty a také formulujeme a dokážeme pomocná tvrzení, o která se důkaz věty opírá. Budeme postupovat dle [6] a [5] za pomoci [7]. Začneme s následujícím lemmatem, které jsme formulovali a dokázali s využitím [6], str. 18 a 19.

Lemma 2. *Buď $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ deterministická funkce. Dále předpokládejme, že existují $a > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že platí*

$$|x_{(i+1)/2^m} - x_{i/2^m}| \leq 2^{-ma} \qquad \forall\ m \geq n,\ \forall\ 0 \leq i \leq 2^m - 1.$$

Potom pro všechny dyadické zlomky $t,s \in [0,1]$ splňující $|t - s| \leq 2^{-n}$ platí:

$$|x_t - x_s| \leq N(a)|t - s|^a,$$

kde $N(a) = 2^{2a+1}(2^a - 1)^{-1}$.

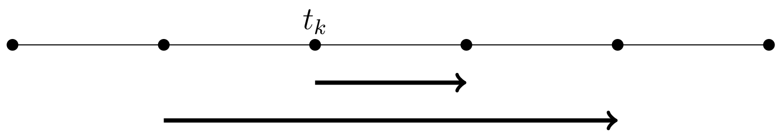
Důkaz. Nechť $t, s \in [0,1]$ jsou dyadické zlomky. To znamená, že

$$t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_1(i) \cdot 2^{-i}, \qquad s = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2(i) \cdot 2^{-i},$$

kde $\varepsilon_k(i) = 0$ nebo 1 pro všechna $i \in \mathbb{N}_0,\ k = 1, 2$. Navíc tyto sumy jsou konečné. Dále nechť

$$t_k = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_1(i) \cdot 2^{-i}, \qquad s_k = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_2(i) \cdot 2^{-i},\ k \in \mathbb{N}.$$

Nyní si všimněme, že kdykoli $|t - s| \leq 2^{-k},\ k \in \mathbb{N}$, potom buď $t_k = s_k$, nebo $|t_k - s_k| = 2^{-k}$, anebo $|t_k - s_k| = 2 \cdot 2^{-k}$. To plyne z následujícího obrázku, ve kterém $\bullet$ představuje číslo tvaru $r \cdot 2^{-k}$ pro jisté $r \in \mathbb{N}_0$.



Pokud se t_k nachází jako na obrázku, pak t může ležet pouze v oblasti vyznačené kratší černou šipkou. Skutečně,

$$0 \leq t - t_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_1(i) \cdot 2^{-i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k-1} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2^{-k}.$$

Potom nutně s leží v oblasti vyznačené delší šipkou, a jelikož $0 \leq s - s_k \leq 2^{-k}$ (ze stejného důvodu, proč to platí pro rozdíl $t - t_k$), dostáváme $t_k = s_k$, nebo $|t_k - s_k| = 2^{-k}$, nebo $|t_k - s_k| = 2 \cdot 2^{-k}$.

Nechť tedy $k \geq n$ a $|t - s| \leq 2^{-k}$. Potom můžeme psát

$$x_t = x_{t_k} + \sum_{m=k}^{\infty} (x_{t_{m+1}} - x_{t_m}), \qquad x_s = x_{s_k} + \sum_{m=k}^{\infty} (x_{s_{m+1}} - x_{s_m}).$$

Odečtením obou vztahů a postupným uplatněním trojúhelníkové nerovnosti obdržíme následující nerovnost:

$$\begin{aligned}
|x_t - x_s| &= |x_{t_k} - x_{s_k} + \left[\sum_{m=k}^{\infty}(x_{t_{m+1}} - x_{t_m}) - \sum_{m=k}^{\infty}(x_{s_{m+1}} - x_{s_m})\right]| \\
&\leq |x_{t_k} - x_{s_k}| + |\sum_{m=k}^{\infty}(x_{t_{m+1}} - x_{t_m}) - \sum_{m=k}^{\infty}(x_{s_{m+1}} - x_{s_m})| \\
&\leq |x_{t_k} - x_{s_k}| + |\sum_{m=k}^{\infty}(x_{t_{m+1}} - x_{t_m})| + |\sum_{m=k}^{\infty}(x_{s_{m+1}} - x_{s_m})| \\
&\leq |x_{t_k} - x_{s_k}| + \sum_{m=k}^{\infty}[|x_{t_{m+1}} - x_{t_m}| + |x_{s_{m+1}} - x_{s_m}|]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Zde $t_k = r \cdot 2^{-k}$ pro jisté $r \in \mathbb{N}_0$, což nám dává pro s_k tyto možnosti:

1. buď $s_k = r \cdot 2^{-k}$, nebo
2. $s_k = (r \pm 1) \cdot 2^{-k}$, anebo
3. $s_k = (r \pm 2) \cdot 2^{-k}$.

Nastane-li možnost 1. nebo 2., potom $|t_k - s_k| \leq 2^{-k}$, a tedy dle předpokladu lemmatu platí

$$|x_{t_k} - x_{s_k}| \leq 2^{-ka}.$$

Nastane-li možnost 3., pak opět dle předpokladu lemmatu obdržíme nerovnost

$$\begin{aligned}
|x_{t_k} - x_{s_k}| &= |x_{r/2^k} - x_{(r\pm2)/2^k}| \\
&= |x_{r/2^k} - x_{(r\pm1)/2^k} + x_{(r\pm1)/2^k} - x_{(r\pm2)/2^k}| \\
&\leq |x_{r/2^k} - x_{(r\pm1)/2^k}| + |x_{(r\pm1)/2^k} - x_{(r\pm2)/2^k}| \\
&\leq 2^{-ka} + 2^{-ka} \\
&= 2 \cdot 2^{-ka}.
\end{aligned}$$

Tím pádem určitě platí odhad

$$|x_{t_k} - x_{s_k}| \leq 2 \cdot 2^{-ka}. \qquad (2)$$

Dále pro $m \geq k$ platí, že $|t_{m+1} - t_m| \leq 2^{-(m+1)}$, neboť $t_{m+1} = t_m$, nebo $t_{m+1} = t_m + 2^{-(m+1)}$. Stejně tak $|s_{m+1} - s_m| \leq 2^{-(m+1)}$. Tudíž opět dle předpokladu

$$|x_{t_{m+1}} - x_{t_m}| \leq 2^{-(m+1)a}, \qquad |x_{s_{m+1}} - x_{s_m}| \leq 2^{-(m+1)a}. \qquad (3)$$

Spojením nerovností (1), (2) a (3) tedy dostáváme tuto nerovnost:

$$\begin{aligned}
|x_t - x_s| &\leq 2 \cdot 2^{-ka} + 2\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-(m+1)a} \\
&= 2\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-ma} \\
&= 2^{-ka} \cdot \frac{2^{a+1}}{2^a - 1}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že tato nerovnost platí, kdykoli $k \geq n, \ |t-s| \leq 2^{-k}$.

Nyní nechť $t,s \in [0,1]$ jsou libovolné dyadické zlomky splňující $|t-s| \leq 2^{-n}$. Položme $k = \lfloor \log_2 \left(\frac{1}{|t-s|}\right) \rfloor$. Potom $k \geq n$. Skutečně,

$$\log_2 \left(\frac{1}{|t-s|}\right) \geq \log_2 \left(\frac{1}{2^{-n}}\right) = \log_2(2^n) = n.$$

Dle definice dolní celé části čísla tudíž i $k \geq n$. Dále $|t-s| \leq 2^{-k}$; to ukážeme následovně: Platí $k = \log_2 \left(\frac{1}{|t-s|}\right) - r$ pro nějaké $r \in [0,1)$. Potom

$$|t-s| \leq |t-s| \cdot 2^r = 2^{\log_2(|t-s|)} \cdot 2^r = 2^{-\log_2(1/|t-s|)} \cdot 2^r = 2^{-[\log_2(1/|t-s|)-r]} = 2^{-k}.$$

Tudíž platí odhad (4):

$$\begin{aligned} |x_t - x_s| &\leq \frac{2^{a+1}}{2^a - 1} \cdot 2^{-ka} \\ &= \frac{2^{a+1}}{2^a - 1} \cdot \left(2^{\log_2(|t-s|)}\right)^a \cdot 2^{ar} \\ &= \frac{2^{a+1}}{2^a - 1} \cdot |t-s|^a \cdot (2^a)^r \\ &\leq \frac{2^{a+1}}{2^a - 1} \cdot |t-s|^a \cdot 2^a \\ &= N(a)|t-s|. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□

Nyní zavedeme definici lokálně hölderovské funkce jako v [7], str. 6, a poté již konečně formulujeme Kolmogorovovu-Čencovovu větu. Její důkaz si rozdělíme do dvou částí: nejprve dokážeme část tvrzení o existenci spojité modifikace. Abychom mohli provést důkaz druhé části věty, tj. hölderovskosti, tak nejprve formulujeme a dokážeme větu 4. Následně důkaz věty 3 dokončíme.

Definice 5. *Nechť* $\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *je funkce a buď* $0 < \gamma < 1$. *Řekneme, že* ξ *je lokálně* γ*-hölderovská na* $[0,\infty)$, *jestliže pro každé* $t \geq 0$ *existuje* $0 < \varepsilon < 1$ *a* $0 < C < \infty$ *tak, že pro všechna* $t_1, t_2 \geq 0$ *splňující, že* $|t_1 - t| < \varepsilon, \ |t_2 - t| < \varepsilon$, *platí*

$$|\xi(t_1) - \xi(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\gamma.$$

Ve zbytku kapitoly uvažujeme reálné náhodné procesy definované na úplném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Následující věta byla formulována a kompletní důkaz proveden za pomoci [6], str. 20 a 21, a [5], str. 53, 54 a 55. Čerpáno bylo také z [7], str. 8 a 9.

Věta 3 (Kolmogorovova-Čencovova). *Nechť* $X = \{X_t, \ t \in [0,\infty)\}$ *je reálný náhodný proces. Jestliže existují konstanty* $\alpha > 0, \beta > 0, \ N < \infty$ *takové, že*

$$\mathsf{E}\,|X_t - X_s|^\alpha \leq N|t-s|^{1+\beta} \qquad \forall\ t,\ s \geq 0,$$

potom existuje spojitá modifikace X, tj. náhodný proces $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in [0,\infty)\}$ takový, že jeho trajektorie jsou spojité a pro všechna $t \in [0,\infty)$ je $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1$. Navíc, trajektorie $\tilde{X}$ jsou lokálně γ-hölderovské pro všechna $0 < \gamma < \beta/\alpha$.

Důkaz spojitosti. Zvolme $a = \frac{\beta}{2\alpha}$ a pro $k, n \in \mathbb{N}$ definujme

$$\Omega_{kn} = \{\omega \in \Omega : \sup_{m \geq n} \max_{i=0,\ldots,k2^m-1} 2^{ma} |X_{(i+1)/2^m}(\omega) - X_{i/2^m}(\omega)| \leq 1\}.$$

Dále definujme $\Omega' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}$. Jestliže $\omega \in \Omega'$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme, že $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}$, tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\omega \in \Omega_{kn}$. Formálněji vyjádřeno,

$$\forall\ \omega \in \Omega'\ \forall\ k \in \mathbb{N}\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \geq n\ \forall\ i = 0, \ldots, k2^m - 1 :$$
$$|X_{(i+1)/2^m}(\omega) - X_{i/2^m}(\omega)| \leq 2^{-ma}.$$

Z lemmatu 2 nyní vyplývá, že pro každé $\omega \in \Omega'$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechny dyadické zlomky $t,s \in [0,k]$ splňující $|t-s| \leq 2^{-n}$ platí nerovnost

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq N(a)|t-s|^a, \tag{5}$$

kde $N(a)$ je jako v lemmatu 2. Jinými slovy, pro každé $\omega \in \Omega'$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ je trajektorie $t \mapsto X_t(\omega)$ stejnoměrně spojitá na $\mathcal{D} \cap [0,k]$, kde $\mathcal{D}$ značí množinu všech dyadických zlomků na $\mathbb{R}$. To ukážeme následovně:

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}, m \geq n$ tak, že $N(a)2^{-ma} < \varepsilon$. Potom dle (5) platí

$$\forall\ t,s \in \mathcal{D}, |t-s| \leq 2^{-m} : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq N(a)|t-s|^a \leq N(a)2^{-ma} < \varepsilon. \tag{6}$$

Nyní zvolme $t \in [0,\infty)$. Potom pro všechna $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ taková, že $|z_1 - t| < 2^{-m-1}, |z_2 - t| < 2^{-m-1}$, platí:

$$|z_1 - z_2| = |(z_1 - t) + (t - z_2)| \leq |z_1 - t| + |t - z_2| < 2^{-m-1} + 2^{-m-1} = 2^{-m},$$

a tedy dle (6) získáváme nerovnost

$$|X_{z_1}(\omega) - X_{z_2}(\omega)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Tím pádem je splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce ([8], str. 547), a tedy existuje limita

$$\lim_{z \to t,\ z \in \mathcal{D}} X_z(\omega) =: Y_t(\omega). \tag{8}$$

Takto platí, že $Y_t(\omega)$ je spojitá na $[0,\infty)$. Navíc, kdykoli $t \in \mathcal{D}$, tak platí $Y_t(\omega) = X_t(\omega)$.

Tímto způsobem jsme definovali $Y_t(\omega)$ pro $\omega \in \Omega'$. Pro $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ dodefinujme $Y_t(\omega) \equiv 0$. To nám dává spojitý náhodný proces $Y = \{Y_t, t \in [0,\infty)\}$.

Zbývá tedy dokázat, že Y je modifikací X.

Nejprve dokážeme, že $\mathsf{P}(\Omega') = 1$. Za tímto účelem ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}) = 1$. Tedy zvolme $k \in \mathbb{N}$. Potom $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn})^C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}^C$. Dále

$$\begin{aligned}\Omega_{kn}^C &= \{\omega \in \Omega : \exists\ m \geq n\ \exists\ i \in \{0,1,\ldots,k2^m - 1\} : |X_{\frac{i+1}{2^m}}(\omega) - X_{\frac{i}{2^m}}(\omega)| > 2^{-ma}\} \\ &= \bigcup_{m=n}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{k2^m-1} [|X_{(i+1)/2^m}(\omega) - X_{i/2^m}(\omega)| > 2^{-ma}].\end{aligned}$$

Označíme-li

$$A_m = \bigcup_{i=0}^{k2^m-1} [|X_{(i+1)/2^m} - X_{i/2^m}| > 2^{-ma}],$$

pak

$$\mathsf{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}\right)^C\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn}^C\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \tag{9}$$

Nyní pro $n \in \mathbb{N}$ počítejme:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_n) &= \mathsf{P}(\bigcup_{i=0}^{k2^n-1} [|X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n}| > 2^{-na}]) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k2^n-1} \mathsf{P}(|X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n}| > 2^{-na}) \\ &= \sum_{i=0}^{k2^n-1} \mathsf{P}(|X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n}|^{\alpha} > 2^{-na\alpha}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k2^n-1} \frac{\mathsf{E}\ |X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n}|^{\alpha}}{2^{-na\alpha}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k2^n-1} N \cdot \frac{|\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}|^{1+\beta}}{2^{-na\alpha}} \\ &= \sum_{i=0}^{k2^n-1} N \cdot \frac{2^{-n(1+\beta)}}{2^{-na\alpha}} = kN2^{-n\beta/2},\end{aligned}$$

přičemž ve druhé nerovnosti jsme použili Markovovu nerovnost ([9], str. 75) a pak ve třetí nerovnosti předpoklad věty. A tudíž

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) \leq kN \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\beta/2} = kN\frac{2^{-\beta/2}}{1 - 2^{-\beta/2}} < \infty.$$

Dle Borelova-Cantelliho lemmatu ([9], str. 132) proto $\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, a tedy z (9) dostaneme $\mathsf{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{kn}) = 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Jelikož pro každé $n \geq 1$ a každé $k \geq 1$ platí $\Omega_{kn} \supset \Omega_{(k+1)n}$, tak také $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{kn} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{(k+1)n}$, a tedy ze spojitosti pravděpodobnostní míry máme

$$\mathsf{P}(\Omega') = \mathsf{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{kn}) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{kn}) = 1.$$

Jak jsme již poznamenali výše, tak pro každé $\omega \in \Omega'$ a pro každé $t \in \mathcal{D}$ je $Y_t(\omega) = X_t(\omega)$. Jinými slovy, pro každé $t \in \mathcal{D}$ platí $\mathsf{P}(Y_t = X_t) = 1$. Konečně, je-li $t \in [0, \infty) \setminus \mathcal{D}$, pak si připomeňme, že $Y_t(\omega) := \lim_{z \to t,\ z \in \mathcal{D}} X_z(\omega)$. Z Fatouova lemmatu ([10], str. 140) proto plyne

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,|Y_t - X_t|^\alpha &= \mathsf{E}\,[\lim_{z \to t,\ z \in \mathcal{D}} |X_z - X_t|^\alpha] \\
&\leq \liminf_{z \to t,\ t \in \mathcal{D}} \mathsf{E}\,|X_z - X_t|^\alpha \\
&\leq N \liminf_{z \to t,\ z \in \mathcal{D}} |z - t|^{1+\beta} \\
&\leq N \lim_{z \to t,\ z \in \mathcal{D}} |z - t|^{1+\beta} = 0,
\end{aligned}$$

přičemž ve druhé nerovnosti jsme ještě použili předpoklad věty. To nám tedy dává $|Y_t - X_t|^\alpha = 0$ s.j. neboli $\mathsf{P}(Y_t = X_t) = 1$. A tedy pro každé $t \in [0, \infty)$ jsme ukázali, že $\mathsf{P}(Y_t = X_t) = 1$.

□

Nyní se přesuňme k důkazu poslední části věty 3, tedy k důkazu hölderovskosti. K tomu bude zapotřebí následující věty, jejíž tvrzení a důkaz byly napsány na základě [5], str. 54 a 55, a [7], str. 8 a 9.

Věta 4. *Buď $\{Y_t, t \in [0, \infty)\}$ reálný náhodný proces, pro nějž existují konstanty $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $N < \infty$ tak, že*

$$E\,|Y_t - Y_s|^\alpha \leq N|t - s|^{1+\beta} \qquad \forall\ t,\ s \geq 0. \tag{10}$$

Dále nechť pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ je trajektorie $t \mapsto Y_t(\omega)$, $t \geq 0$, spojitá. Potom pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ je $t \mapsto Y_t(\omega)$, $t \geq 0$, lokálně γ-hölderovská pro každé $0 < \gamma < \beta/\alpha$.

Důkaz. Dle předpokladu existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(N) = 0$, taková, že pro každé $\omega \in \Omega \setminus N$ je funkce $t \mapsto Y_t(\omega)$ spojitá na $[0, \infty)$. Zvolme $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ a pro $k, n \in \mathbb{N}$ definujme

$$\Omega^\gamma_{kn} = \{\omega \in \Omega : \sup_{m \geq n} \max_{i=0,\dots,k2^m-1} 2^{m\gamma} |Y_{(i+1)/2^m}(\omega) - Y_{i/2^m}(\omega)| \leq 1\}$$

a

$$\Omega^\gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^\gamma_{kn}.$$

Obdobně jako v důkazu věty 3, str. 11, (s γ namísto a), ukážeme, že $\mathsf{P}(\Omega^\gamma) = 1$. Proto existuje $N^\gamma \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(N^\gamma) = 0$, tak, že $\Omega^\gamma = \Omega \setminus N^\gamma$.

Stejným způsobem jako v důkazu věty 3, str. 10, dospějeme k tomu, že pro každé $\omega \in \Omega \setminus N^\gamma$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze nalézt $m_k(\omega) \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechny $t, s \in \mathcal{D} \cap [0,k]$ splňující $|t - s| \leq 2^{-m_k(\omega)}$ platí, že

$$|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq N(\gamma)|t - s|^\gamma, \tag{11}$$

kde $N(\gamma) = 2^{2\gamma+1}(2^\gamma - 1)^{-1}$. Položme $M^\gamma = N \cup N^\gamma$. Buďte $\omega \in \Omega \setminus M^\gamma$ a $k \in \mathbb{N}$. K nim nalezneme $m_k(\omega)$ tak, že (11) platí. Volme tedy $t, s \in [0,k]$

splňující $|t-s| \le 2^{-m_k(\omega)}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $s \le t$. Dále buďte $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotónní posloupnosti dyadických zlomků takových, že $s \le s_n \le t,\ n \in \mathbb{N},\ s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$, a $s \le t_n \le t,\ n \in \mathbb{N},\ t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Potom platí $t_n, s_n \in \mathcal{D} \cap [0,k]$ a $|t_n - s_n| \le |t-s| \le 2^{-m_k(\omega)}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy dle (11) máme nerovnost

$$|Y_{t_n}(\omega) - Y_{s_n}(\omega)| \le N(\gamma)|t_n - s_n|^\gamma \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ze spojitosti trajektorie $t \mapsto Y_t(\omega)$ máme, že $Y_{t_n}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_t(\omega)$ a $Y_{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_s(\omega)$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\begin{aligned} |Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| &\le |Y_t(\omega) - Y_{t_n}(\omega)| + |Y_{t_n}(\omega) - Y_{s_n}(\omega)| + |Y_{s_n}(\omega) - Y_s(\omega)| \\ &\le |Y_t(\omega) - Y_{t_n}(\omega)| + N(\gamma)|t_n - s_n|^\gamma + |Y_{s_n}(\omega) - Y_s(\omega)|, \end{aligned}$$

a tím pádem také musí platit, že

$$\begin{aligned} |Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| &\le \lim_{n\to\infty} (|Y_t(\omega) - Y_{t_n}(\omega)| + N(\gamma)|t_n - s_n|^\gamma + |Y_{s_n}(\omega) - Y_s(\omega)|) \\ &= N(\gamma)|t-s|^\gamma. \end{aligned}$$

Neboli, trajektorie $t \mapsto Y_t(\omega)$ je lokálně γ-hölderovská na $[0,k]$ pro pevně zvolené $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.

Naším cílem teď bude najít množinu M pravděpodobnosti 1 tak, že pro každé $\omega \in M$ bude trajektorie $t \mapsto Y_t(\omega), t \ge 0$, lokálně γ-hölderovská pro každé $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.

Zvolme monotónní posloupnost $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že $0 < \gamma_n < \beta/\alpha$ a $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta/\alpha$, a definujme

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\gamma_n}.$$

Potom $\mathsf{P}(M) = 0$, neboť jde o spočetné sjednocení množin nulové pravděpodobnosti. Nechť $\omega \in \Omega \setminus M$ a $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. Pak nalezneme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\gamma_n \ge \gamma$. Protože $\omega \in \Omega \setminus M$, tak $t \mapsto Y_t(\omega)$ je lokálně γ_n-hölderovská, a jelikož $\gamma_n \ge \gamma$, tak je i lokálně γ-hölderovská. Tím je důkaz dokončen.

□

S využitím věty 4 již můžeme provést důkaz hölderovskosti ve větě 3:

Důkaz hölderovskosti.

Nyní si uvědomme, že náhodný proces $\{Y_t, t \ge 0\}$, definovaný výrazem (8) pro $\omega \in \Omega'$ a $Y_t(\omega) \equiv 0$ pro $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$, byl zkonstruován tak, že splňuje (10). Navíc dokonce všechny jeho trajektorie jsou spojité, a tedy splňuje předpoklady věty 4. Proto jsou skoro všechny trajektorie $\{Y_t, t \ge 0\}$ γ-hölderovské pro každé $0 < \gamma < \beta/\alpha$. Tedy existuje $D \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(D) = 0$, taková, že pro každé $\omega \in \Omega \setminus D$ je trajektorie $t \mapsto Y_t(\omega), t \ge 0$, lokálně γ-hölderovská pro každé $0 < \gamma < \beta/\alpha$.

Pro $t \ge 0$ definujme

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} Y_t(\omega), & \text{je-li } \omega \in \Omega \setminus D, \\ 0, & \text{je-li } \omega \in D. \end{cases}$$

Potom můžeme psát $\tilde{X}_t(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega \in \Omega \setminus D\}} Y_t(\omega)$ pro každé $t \geq 0$ a pro každé $\omega \in \Omega$, a tedy zobrazení

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t : \Omega &\to \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \tilde{X}_t(\omega) \end{aligned}$$

je měřitelné pro každé $t \geq 0$. Tedy $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ je reálný náhodný proces.

Zřejmě trajektorie $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega), t \geq 0$, jsou spojité pro každé $\omega \in \Omega$ (neboť pro $\omega \in \Omega \setminus D$ je $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega) = Y_t(\omega)$ je spojitá a pro $\omega \in D$ je funkce $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega) = 0$, $t \geq 0$, též spojitá). Dále pro každé $\omega \in \Omega$ je $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ lokálně γ-hölderovská pro každé $0 < \gamma < \beta/\alpha$, neboť pro $\omega \in \Omega \setminus D$ je $\tilde{X}_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pro všechna $t \geq 0$ a pro $\omega \in D$ je $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega) = 0, t \geq 0$, též lokálně γ-hölderovské zobrazení.

Co zbývá ověřit, je, že $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ je modifikací $\{X_t, t \geq 0\}$.

Nechť $t \geq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} [X_t \neq \tilde{X}_t] &= [X_t \neq \tilde{X}_t,\ X_t = Y_t] \cup [X_t \neq \tilde{X}_t,\ X_t \neq Y_t] \\ &\subset [\tilde{X}_t \neq Y_t] \cup [X_t \neq Y_t]. \end{aligned}$$

Dle definice $\tilde{X}_t$ máme $\mathsf{P}(\tilde{X}_t \neq Y_t) = 0$ a díky tomu, že Y je modifikace X, platí, že také $\mathsf{P}(X_t \neq Y_t) = 0$. Tedy i $\mathsf{P}(X_t \neq \tilde{X}_t) = 0$. Tudíž $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ je hledaná modifikace s požadovanými vlastnostmi. Tvrzení věty je dokázáno.

$\square$

3 Aplikace Kolmogorovovy-Čencovovy věty

V první kapitole jsme si uvedli příklady gaussovských náhodných procesů. Jedná se mj. právě o ty procesy, které splňují podmínku Kolmogorovovy-Čencovovy věty. O tom, že tomu tak je, se přesvědčíme v následujícím.

3.1 Aplikace věty na Wienerův proces

Buď $\{W_t, t \geq 0\}$ Wienerův proces. Využijeme toho, že pro všechna $t > s \geq 0$ platí $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$, $\sigma^2 > 0$. Naopak, je-li $0 \leq t < s$, pak platí $W_t - W_s = -(W_s - W_t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(s-t))$. Tedy, pro $s, t \geq 0$ máme, že $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|)$.

Tedy nechť $t, s \geq 0, t \neq s$ a $\alpha > 0$. Potom

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,|W_t - W_s|^\alpha &= \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2|t-s|}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2|t-s|}\right\} dx \\
&= 2\int\limits_0^\infty x^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2|t-s|}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2|t-s|}\right\} dx \\
&= \frac{(2|t-s|)^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2|t-s|}} \frac{x^{\alpha-1}}{(2\sigma^2|t-s|)^{(\alpha-1)/2}} \cdot \frac{x}{\sigma^2|t-s|} dx \\
&= \frac{(2|t-s|)^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{(\alpha-1)/2} dy \\
&= \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) |t-s|^{\alpha/2},
\end{aligned} \tag{12}
$$

kde ve čtvrté rovnosti byla užita substituce tvaru $y = \frac{x^2}{2\sigma^2|t-s|}$. Nyní označme $N := \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$. Pak pro $\alpha > 2$ dostáváme

$$
\mathsf{E}\,|W_t - W_s|^\alpha = N|t-s|^{1+\beta} \;\forall\; t,s \geq 0,
$$

kde $\beta = \alpha/2 - 1$. Podle věty 3 má Wienerův proces modifikaci se spojitými trajektoriemi.

Pojďme se nyní podívat, jak je to s hölderovskostí těchto trajektorií. Věta 3 dále říká, že jsou lokálně γ-hölderovské pro každé $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha/2-1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$. Z toho snadno plyne, že jsou γ-hölderovské pro každé $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Skutečně, nechť $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Potom $\gamma = \frac{1}{2} - \varepsilon$ pro jisté $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. K tomuto ε nalezneme $\alpha > 2$ tak, že $\frac{1}{\alpha} < \varepsilon$. Tím pádem $\gamma = \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$.

Poznámka. Uvědomme si, že výsledek (12) se dá zobecnit. Je-li $Y \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$, pak pro $\alpha > 0$ platí

$$
\mathsf{E}\,|Y|^\alpha = \frac{2^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) (\gamma^2)^{\alpha/2}.
$$

Speciálně, při volbě $\alpha = 2n,\ n \in \mathbb{N}$, obdržíme rovnost

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\ |Y|^{2n} &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(\gamma^2)^n \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\sqrt{\pi}(\gamma^2)^n \\
&= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(\gamma^2)^n \\
&= (2n-1)!!(\gamma^2)^n. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

3.2 Aplikace věty na Brownův most

Ve výpočtu využijeme následujícího vztahu: Je-li $\{W_t, t \in [0,\infty)\}$ Wienerův proces, pak pro Brownův most $\{X_t, t \in [0,1]\}$ platí: $X_t \overset{D}{=} W_t - tW_1,\ t \in [0,1]$.

Zvolme $t,s \in [0,1], t \neq s$ a $\alpha > 0$. Potom platí

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\ |X_t - X_s|^\alpha &= \mathsf{E}\ |W_t - tW_1 - W_s + sW_1|^\alpha \\
&= \mathsf{E}\ |W_t - W_s + (s-t)W_1|^\alpha \\
&\leq \mathsf{E}\left(|W_t - W_s| + |(s-t)W_1|\right)^\alpha \\
&\leq \mathsf{E}\left(2\max\{|W_t - W_s|, |(s-t)W_1|\}\right)^\alpha \\
&= \mathsf{E}\ 2^\alpha \max\{|W_t - W_s|^\alpha, |(s-t)W_1|^\alpha\} \\
&\leq \mathsf{E}\ 2^\alpha(|W_t - W_s|^\alpha + |(s-t)W_1|^\alpha) \\
&= 2^\alpha(\mathsf{E}\ |W_t - W_s|^\alpha + |s-t|^\alpha\, \mathsf{E}\ |W_1|^\alpha). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Volbou $t = 1,\ s = 0$ plyne z (12), že

$$
\mathsf{E}\ |W_1|^\alpha = \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \qquad (15)
$$

Dosadíme-li (12) a (15) do (14), získáváme odhad

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\ |X_t - X_s|^\alpha &\leq 2^\alpha\left(\frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|t-s|^{\alpha/2} + \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|t-s|^\alpha\right) \\
&\leq 2^\alpha\left(\frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)|t-s|^{\alpha/2}.
\end{aligned}
$$

Označíme-li $K := 2^\alpha\left(\frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + \frac{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)$, pak $K < \infty$ a obdržíme následující nerovnost:

$$
\mathsf{E}\ |X_t - X_s|^\alpha \leq K|t-s|^{\alpha/2}\ \forall\ t,s \in [0,1].
$$

Tedy opět, pro $\alpha > 2$ platí podmínka Kolmogorovovy-Čencovovy věty s volbou $\beta = \alpha/2 - 1$ a trajektorie jsou γ-hölderovské pro každé $0 < \gamma < 1/2$.

3.3 Aplikace věty na Ornstein-Uhlenbeckův proces

Uvažujme Ornstein-Uhlenbeckův proces $\{U_t, t \geq 0\}$. Pro účely výpočtu si uvědomme následující vlastnosti:

(i) Proces $\{U_t, t \geq 0\}$ je gaussovský, a tedy $U_t - U_s$ má normální rozdělení pro všechna $t,\ s \geq 0$.

(ii) Proces $\{U_t, t \geq 0\}$ je centrovaný, tudíž $\mathsf{E}\,(U_t - U_s) = 0$ pro všechna $t,\ s \geq 0$.

(iii) Pro $t, s \geq 0$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}(U_t - U_s) &= \mathsf{E}\,(U_t - U_s)^2 \\
&= \mathsf{E}\,U_t^2 - 2\,\mathsf{E}\,(U_t U_s) + \mathsf{E}\,U_s^2 \\
&= R(t,t) - 2R(t,s) + R(s,s) \\
&= 1 - 2e^{-|t-s|} + 1 \\
&= 2 - 2e^{-|t-s|}.
\end{aligned}$$

Z těchto vlastností vyplývá, že $U_t - U_s \sim \mathcal{N}(0, 2 - 2e^{-|t-s|}),\ t, s \geq 0$.

Zvolme $t, s \geq 0, t \neq s$, a $n \in \mathbb{N}$. Potom dle (13) platí:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,|U_t - U_s|^{2n} &= (2n-1)!!(2 - 2e^{-|t-s|})^n \\
&= 2^n(2n-1)!!(1 - e^{-|t-s|})^n.
\end{aligned} \tag{16}$$

Dále si všimněme, že pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$ je

$$e^{-|t-s|} \geq 1 - |t-s| \Rightarrow 1 - e^{-|t-s|} \leq |t-s|,$$

a tedy dle (16) máme odhad

$$\mathsf{E}\,|U_t - U_s|^{2n} \leq 2^n(2n-1)!!|t-s|^n \quad \forall\ t, s \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Nyní pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, zvolme $\alpha = 2n > 0,\ N = 2^n(2n-1)!! < \infty$ a $\beta = n - 1 > 0$. Pak dle (17) platí

$$\mathsf{E}\,|U_t - U_s|^{\alpha} \leq N|t-s|^{1+\beta} \quad \forall t, s \geq 0,$$

tedy dle věty 3 existuje spojitá modifikace Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Zaměřme se ještě na hölderovskost trajektorií této modifikace. Věta 3 nám říká, že trajektorie jsou lokálně γ-hölderovské pro každé $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. Zde $\beta/\alpha = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Z toho plyne, že trajektorie jsou lokálně hölderovské až do řádu $\frac{1}{2}$. Skutečně, nechť $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Potom máme, že $\gamma = \frac{1}{2} - \varepsilon$ pro jisté $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. K tomuto ε nalezneme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, a tudíž $\gamma = \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

3.4 Poissonův proces

Již v úvodu práce bylo řečeno, že Poissonův proces podmínku věty 3 nesplňuje. Toto je samozřejmé, neboť je známo, že Poissonův proces spojité trajektorie nemá, a tedy podmínku věty 3 splňovat nemůže. My si ale tuto skutečnost ukážeme přímo.

Uvažujme libovolné $t \in (0,1]$ a $\alpha > 0$. Potom máme, že

$$\mathsf{E}\,|N_t|^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\alpha}\,\mathsf{P}(N_t = k) \geq \mathsf{P}(N_t = 1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Podělíme-li nerovnost t, dostaneme, že

$$\frac{\mathsf{E}\,|N_t|^{\alpha}}{t} \geq \lambda e^{-\lambda t}.$$

Odtud plyne následující:

$$c := \inf_{t\in(0,1]} \frac{\mathsf{E}\ |N_t|^\alpha}{t} \geq \inf_{t\in(0,1]} e^{-\lambda t}\lambda = e^{-\lambda}\lambda > 0.$$

Tím pádem

$$\mathsf{E}\ |N_t|^\alpha = t\frac{\mathsf{E}\ |N_t|^\alpha}{t} \geq ct \tag{18}$$

platí pro každé $t \in (0,1]$. Z toho vyplývá, že pro každé $C > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ nalezneme $t \in (0,1]$ tak, že $\mathsf{E}\ |N_t|^\alpha \geq Ct^{1+\beta}$. To dokážeme sporem. Víme, že platí (18), a pro spor nechť tedy existují $\tilde{c} > 0, \alpha > 0$ a $\beta > 0$ tak, že pro všechna $t \in (0,1]$ je splněna nerovnost $\mathsf{E}\ |N_t|^\alpha \leq \tilde{c}t^{1+\beta}$. Potom ale platí $ct \leq \tilde{c}t^{1+\beta}$ pro každé $t \in (0,1]$. Neboli, máme $t \leq \tilde{c}/ct^{1+\beta},\ t \in (0,1]$. Z vlastností funkcí $f : t \mapsto t, t \in (0,1]$, a $g : t \mapsto \tilde{c}/ct^{1+\beta}, t \in (0,1]$, jsme schopni najít $\delta > 0$ tak, že pro všechna $0 < t < \delta$ platí, že $t > \tilde{c}/ct^{1+\beta}$. To je spor, tedy Poissonův proces nesplňuje podmínku věty 3.

Závěr

V této práci jsme se zabývali Kolmogorovovou-Čencovovou větou a jejími aplikacemi. Zpracovali jsme důkaz této věty a podpůrných tvrzení s pomocí citovaných zdrojů; důkazy byly rozšířeny, doplněny a upřesněny. Dalším směrem práce by mohlo být studium mnohých rozšíření Kolmogorovovy-Čencovovy věty, např. rozšíření pro náhodná pole.

Reference

[1] E. E. Slutsky. Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie. *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, 8:183–199, 1937.

[2] Nikolai N. Chentsov. Weak convergence of stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind and the "heuristic" approach to the Kolmogorov-Smirnov tests. *Theory of Probability & Its Applications*, 1(1):140–144, 1956.

[3] Zuzana Prášková. *Základy náhodných procesů II*. Univerzita Karlova v Praze, Karolinum Press, 2016. 2., upravené vydání. ISBN 978-80-246-3516-3.

[4] Jean-François Le Gall. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, volume 274 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2016. 1. edice. ISBN 978-3-319-80961-8.

[5] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, 1996. 2. edice. ISBN 0-387-97655-8.

[6] N. V. Krylov. *Introduction to the Theory of Random Processes*, volume 43 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Soc., 2002. ISBN 0-8218-2985-8.

[7] Jordan Bell. The Kolmogorov Continuity Theorem, Hölder Continuity, and the Kolmogorov-Chentsov theorem. Červen 2015. [cit. 28.4.2021]. Dostupné z https://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/kolmogorovcontinuity.pdf.

[8] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, and M. Zelený. Skripta z matematické analýzy. Skripta, říjen 2020. [cit. 5.4.2021]. Dostupné z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ pick/analyza.pdf.

[9] Yuri Suhov and Mark Kelbert. *Probability and Statistics by Example: Basic Probability and Statistics*, volume 1. Cambridge University Press, 2005. ISBN 978-0-511-13283-4.

[10] Onesimo Hernandez-Lerma and Jean-Bernard Lasserre. Fatou's Lemma and Lebesgue's convergence theorem for measures. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 13, 01 2000.