MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Magdaléna Bečková

Mnohorozmerné rozdelenia v kartézskych, polárnych a smerových súradniciach

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Bratislave dňa 22. 7. 2021 Magdaléna Bečková

Chcela by som sa poďakovať vedúcemu práce, doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D., za ochotu, cenné rady a poskytnuté poznámky k práci.

Název práce: Mnohorozmerné rozdelenia v kartézskych, polárnych a smerových súradniciach

Autor: Magdaléna Bečková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca sa venuje rozdeleniam náhodných vektorov v kartézskych, polárnych a smerových súradniciach. V práci sú odvodené vzťahy pre hustoty dvojrozmerných náhodných vektorov v polárnych a smerových súradniciach, trojrozmerných vektorov v sférických a smerových súradniciach a n-rozmerných vektorov v sférických súradniciach. Tieto vzťahy sú ilustrované na niekoľkých príkladoch normálneho a rovnomerného rozdelenia. Na záver práca diskutuje o rozdieloch medzi hustotami v jednotlivých súradnicových systémoch.

Klíčová slova: mnohorozměrná rozdělení, hustota rozdělení, transformace náhodného vektoru

Title: Multivariate distributions in Cartesian, polar and directional coordinates

Author: Magdaléna Bečková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis focuses on the distributions of random vectors in Cartesian, polar and directional coordinates. In the thesis we derive formulas for probability density functions of two-dimensional vectors in polar and directional coordinates, three-dimensional vectors in spherical and directional coordinates and n-dimensional vectors in spherical coordinates. These formulas are shown on several examples of normal and uniform distributions. Finally, the thesis discusses differences between the probability density functions in particular coordinates systems.

Keywords: multivariate distributions, probability density function, transformation of random vector

Obsah

Úvod

Rozdelenie náhodného vektora sa najčastejšie definuje združenou hustotou jeho kartézskych súradníc. Niekedy nás však viac ako celé rozdelenie vektora zaujíma iba rozdelenie jeho vzdialenosti od počiatku alebo jeho smeru. Tiež nás môže zaujímať podmienené rozdelenie náhodného vektora v konkrétnom smere alebo v konkrétnej vzdialenosti od počiatku. V takých prípadoch sa oplatí namiesto kartézskych súradníc použiť polárne (resp. sférické) či smerové súradnice.

S prevodom hustoty náhodného vektora do iného súradnicového systému sa viažu isté problémy. Pri prevode do polárnych súradníc vieme jednoducho použiť vetu o transformácii spojitých náhodných vektorov.

Veta 1 (Transformácia spojitých náhodných vektorov, Kulich (2018), str. 25)**.** *Nech náhodný vektor* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ *s nosičom rozdelenia* $S_{\boldsymbol{X}} \subseteq \mathbb{R}^n$ *má hustotu* $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ *vzhľadom k Lebesgueovej miere. Nech* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, kde* $g = (g_1, \ldots, g_n)^\top$*,* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $i = 1, \ldots, n$ *je prosté zobrazenie a nech jeho jakobián* $D_g(\boldsymbol{x})$ *existuje a je nenulový pre skoro všetky* $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{X}}$*. Potom* $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ *má hustotu*

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{x}))\,|D_{g^{-1}}(\boldsymbol{y})|\,\mathbb{I}_{g(S_{\boldsymbol{X}})}(\boldsymbol{y})$$

vzhľadom k Lebesgueovej miere.

Z tejto hustoty vieme ďalej integrovaním dostať marginálne a podmienené rozdelenia jednotlivých zložiek súradníc. Avšak pri vektoroch v troch a viacerých rozmeroch sa stane, že vetu 1 nemôžeme použiť pre niektoré smery, pretože je v nich jakobián rovný nule.

Riešenie na tento problém ponúkajú smerové súradnice. Na druhej strane, pri smerových súradniciach vo viac ako troch rozmeroch môže byť zložité spočítať integrály potrebné na vyjadrenie marginálnych hustôt zložiek smerových súradníc. Preto sa aj v tejto práci budeme smerovým súradniciam venovať len v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Cieľom práce je odvodiť vzťahy na výpočet hustôt polárnych (resp. sférických) a smerových súradníc náhodných vektorov, ilustrovať ich na niekoľkých základných rozdeleniach a porovnať výhody a nevýhody voľby polárnych či smerových súradníc.

Práca sa v prvej kapitole zaoberá polárnymi a smerovými súradnicami náhodného vektora z $\mathbb{R}^2$, vysvetľuje postup odvodenia hustôt polárnych a smerových súradníc náhodného vektora a všeobecné postupy ilustruje na základných rozdeleniach.

Druhá kapitola sa venuje sférickým a smerovým súradniciam v troch rozmeroch. Podobne ako prvá kapitola, dáva návod ako vyjadriť hustotu náhodného vektora v sférickom a smerovom súradnicovom systéme a na príklade ukazuje rozdiely a možné výhody a nevýhody oboch typov súradníc.

Posledná, tretia kapitola je venovaná hustote sférických súradníc n-rozmerného náhodného vektora. Hlavnou zložkou tejto kapitoly je odvodenie jakobiánu transformácie medzi kartézskymi a sférickými súradnicami náhodného vektora.

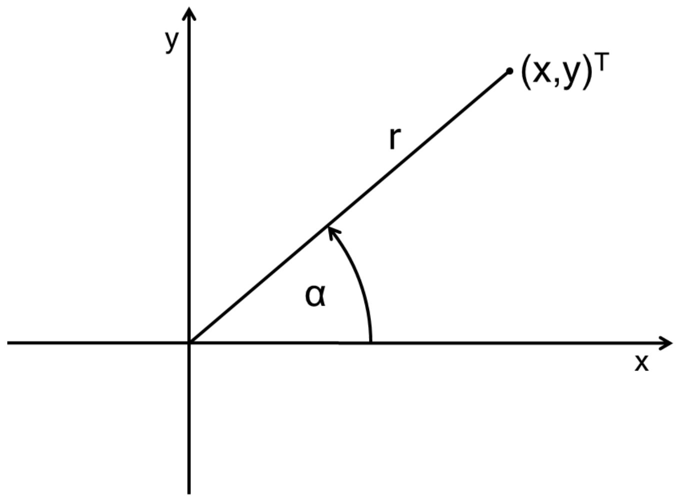
1. Hustota dvojrozmerného vektora v polárnych a smerových súradniciach

1.1 Hustota dvojrozmerného vektora v polárnych súradniciach

Definícia 1 (Polárne súradnice)**.** *Vektor* $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\}$ *má polárne súradnice* $(r, \alpha)^\top$*,* $r > 0$*,* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *práve vtedy, keď*

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \\ y &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

Hodnota r *je veľkosť vektora* $(x, y)^\top$ *a* α *je veľkosť uhla, ktorý zviera vektor* $(x, y)^\top$ *s kladnou* x*-ovou osou.*



Obr. 1.1: Polárne súradnice

Poznámka. Definícia 1 popisuje transformáciu z polárnych súradníc do kartézskych. Pre transformáciu z kartézskych súradníc do polárnych platí:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \alpha &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Interval hodnôt α môžeme voliť ľubovoľne v tvare $\alpha \in [k, k + 2\pi)$ alebo $\alpha \in (k, k + 2\pi]$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{R}$. Podľa voľby tohto intervalu definujeme výpočet hodnoty α pre vektor $(x, y)^\top$. Pre jednoduchosť budeme používať značenie $\alpha = \arccos x$, čím sa myslí zobrazenie uvedené vyššie v tejto poznámke.

Uvažujme náhodný vektor $(X, Y)^\top \neq (0,0)^\top$ s hustotou $f(x, y)$ vzhľadom k Lebesgueovej miere. Vyjadríme hustotu $f_P(r, \alpha)$ jeho polárnych súradníc $(R, A)^\top$. Označme transformáciu z kartézskych súradníc do polárnych ako

$$\begin{pmatrix} R \\ A \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \arccos \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{pmatrix}.$$

Pre inverznú transformáciu potom platí

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} R \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin A \\ R \cos A \end{pmatrix}.$$

Jakobián inverznej transformácie $g^{-1}(r, \alpha)$ je rovný

$$D_{g^{-1}}(r, \alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r.$$

Podľa vety 1 je hustota $f_P(r, \alpha)$ vektora $(R, A)^\top$ rovná

$$f_P(r, \alpha) = f(g^{-1}(r, \alpha))\, |D_{g^{-1}}(r, \alpha)| = r f(r\cos\alpha, r\sin\alpha), \quad r > 0,\, \alpha \in [0, 2\pi). \tag{1.1}$$

Príklad (Normované normálne rozdelenie). Uvažujme náhodný vektor z dvojrozmerného normovaného normálneho rozdelenia $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$. Jeho hustota je rovná

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right\}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Spočítame jeho združené, marginálne a podmienené rozdelenie v polárnych súradniciach. Združená hustota vektora $\boldsymbol{X} \neq (0,0)^\top$ v jeho polárnych súradniciach $(R, A)^\top$ je podľa vzťahu (1.1) rovná

$$\begin{aligned} f_P(r, \alpha) &= r f_{\boldsymbol{X}}(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{r^2}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \right\} = \\ &= \frac{r}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{r^2}{2} \right\}, \quad r > 0,\, \alpha \in [0,2\pi). \end{aligned}$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny R je

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{r^2}{2} \right\} d\alpha = r \exp\left\{ -\frac{r^2}{2} \right\}, \quad r > 0.$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny A je rovná

$$\begin{aligned} f_A(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{r}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{r^2}{2} \right\} dr \overset{\text{S}}{=} \begin{bmatrix} u = \frac{r^2}{2} \\ du = r\,dr \end{bmatrix} \overset{\text{S}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \\ &= \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha \in [0, 2\pi)\,. \end{aligned}$$

Normované normálne rozdelenie patrí medzi sféricky symetrické rozdelenia. Je rovnomerne rozdelené vo všetkých smeroch a jeho hustota je funkciou vzdialenosti od počiatku.

Podmienenú hustotu $f(r|\alpha)$ pre dané $\alpha \in [0, 2\pi)$ môžeme vyjadriť ako

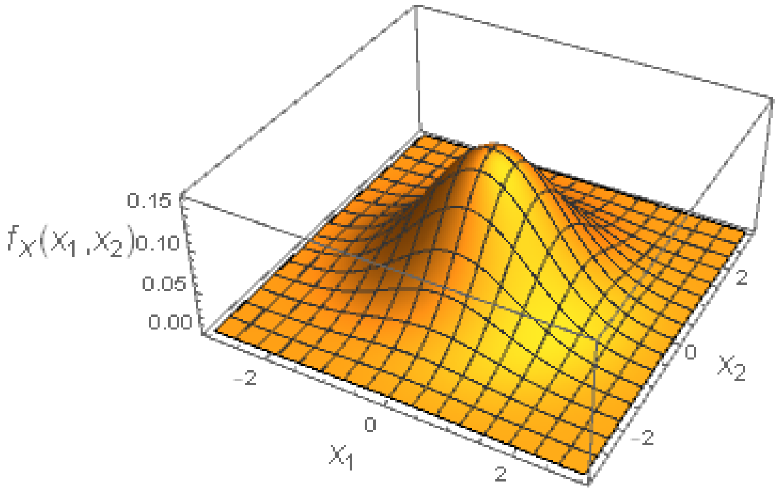
$$f(r|\alpha) = \frac{f_P(r,\alpha)}{f_A(\alpha)} = \frac{\frac{r}{2\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}}{\frac{1}{2\pi}} = r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r > 0$$

a podmienenú hustotu $f(\alpha|r)$ pre dané $r > 0$ môžeme vyjadriť ako

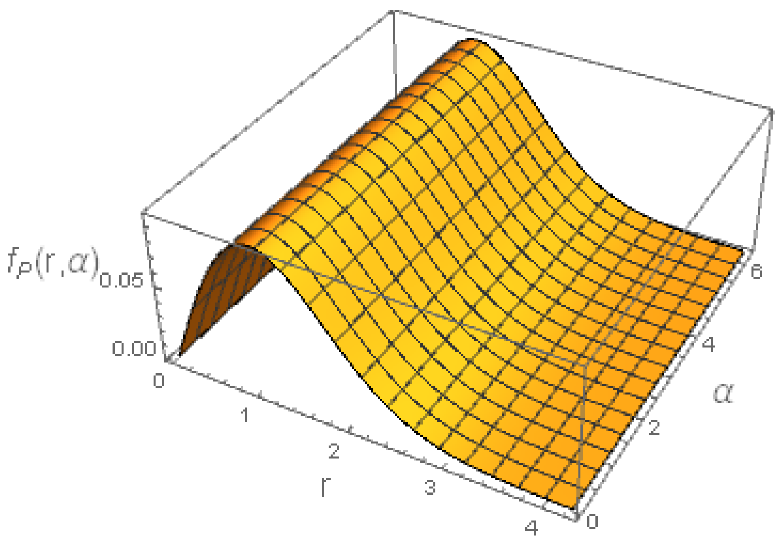
$$f(\alpha|r) = \frac{f_P(r,\alpha)}{f_R(r)} = \frac{\frac{r}{2\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}}{r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}} = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha \in [0, 2\pi)\,.$$

Môžeme si všimnúť, že $f(r|\alpha) = f_R(r)$ a $f(\alpha|r) = f_A(\alpha)$. To znamená, že R a A sú nezávislé náhodné veličiny.

Združenú hustotu normovaného normálneho rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ v kartézskych a polárnych súradniciach ilustrujú obrázky 1.2 a 1.3.



Obr. 1.2: Hustota rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ v kartézskych súradniciach



Obr. 1.3: Hustota rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ v polárnych súradniciach

Príklad (Normálne rozdelenie s rôznymi rozptylmi). Máme náhodný vektor z dvojrozmerného normálneho rozdelenia $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim N_2(\boldsymbol{0}, \Sigma)$, kde $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Hustota $\boldsymbol{X}$ je rovná

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(x_1,\, x_2\Big)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\exp\left\{-\frac{1}{8}\Big(4x_1^2 + x_2^2\Big)\right\}, \quad (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Združenú hustotu v polárnych súradniciach spočítame pre vektor $\boldsymbol{X} \neq (0,0)^\top$ podľa (1.1) ako

$$\begin{aligned} f_P(r, \alpha) = r f_{\boldsymbol{X}}(r\cos\alpha, r\sin\alpha) &= \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{1}{8}\Big(4r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha\Big)\right\} = \\ &= \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\Big(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\Big)\right\}, \quad r > 0,\, \alpha \in [0, 2\pi)\,. \end{aligned}$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny A sa rovná

$$\begin{aligned} f_A(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\Big(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\Big)\right\} dr \overset{\text{S}}{=} \\ &\overset{\text{S}}{=} \begin{bmatrix} u = \frac{r^2}{8}\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ du = \frac{r}{4}\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) dr \end{bmatrix} \overset{\text{S}}{=} \\ &\overset{\text{S}}{=} \frac{1}{\pi\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}\int_0^\infty e^{-u}\, du = \\ &= \frac{1}{\pi\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}, \quad \alpha \in [0, 2\pi)\,. \end{aligned}$$

Podmienená hustota $f(r|\alpha)$ náhodnej veličiny R za podmienky $A = \alpha \in [0, 2\pi)$ je rovná

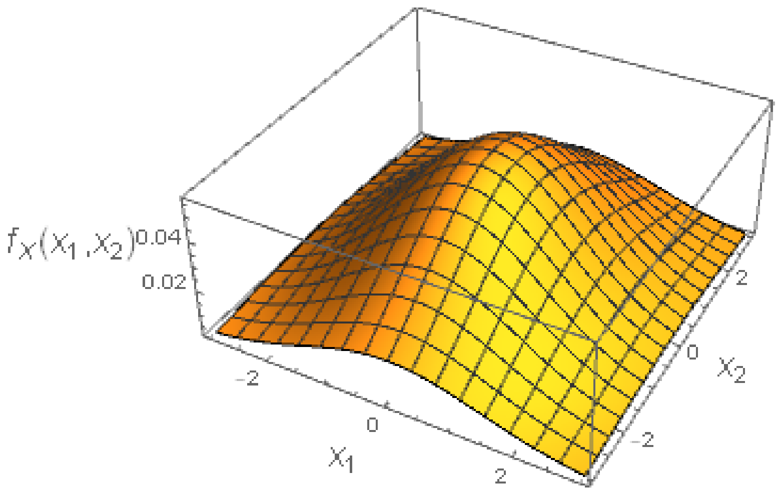
$$\begin{aligned} f(r|\alpha) &= \frac{f_P(r,\alpha)}{f_A(\alpha)} = \frac{\frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\right\}}{\frac{1}{\pi\left(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}} = \\ &= \frac{r}{4}\Big(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\Big)\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\Big(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\Big)\right\}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Marginálnu hustotu vzdialenosti od počiatku R spočítame ako

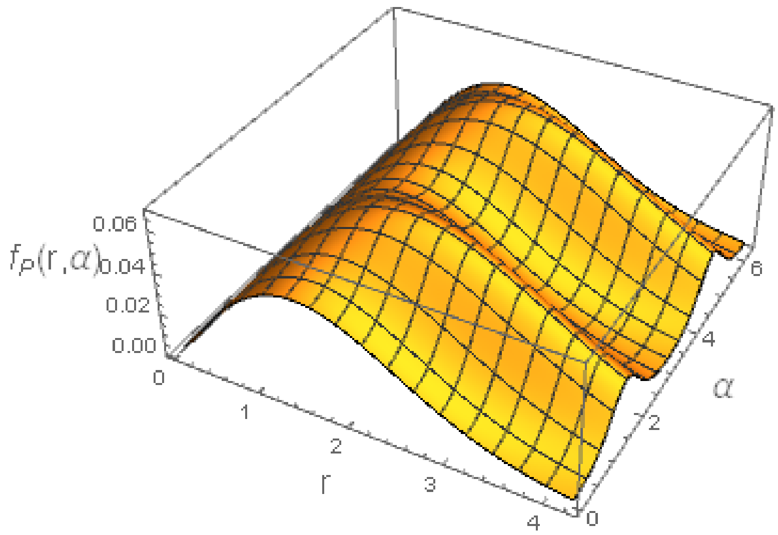
$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\Big(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\Big)\right\} d\alpha = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\Big(1 + 3\cos^2\alpha\Big)\right\} d\alpha = \\ &= \frac{r}{4\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{3r^2}{8}\cos^2\alpha\right\} d\alpha = \\ &= \frac{r}{\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{8}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left\{-\frac{3r^2}{8}\cos^2\alpha\right\} d\alpha, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva z periodicity a symetrie funkcie $\cos^2\alpha$. Tento integrál vieme spočítať numericky.

Združenú hustotu rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ v kartézskych a polárnych súradniciach ilustrujú obrázky 1.4 a 1.5.



Obr. 1.4: Hustota rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ v kartézskych súradniciach



Obr. 1.5: Hustota rozdelenia $N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ v polárnych súradniciach

Poznámka. Na vyjadrenie polárnych súradníc normálneho rozdelenia s rozptylovou maticou $\Sigma \neq \mathbb{I}_2$ sa oplatí miesto euklidovskej vzdialenosti využiť Mahalanobisovu vzdialenosť $R = \sqrt{\begin{pmatrix} X_1, X_2 \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}$. Definujeme transformáciu

$$\begin{pmatrix} R \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} \\ \arccos \frac{Y_1}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2}} \end{pmatrix},$$

kde $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Potom dostávame združenú hustotu náhodného vektora

$(R,A)^\top$ v tvare

$$f_P(r,\alpha) = \frac{r}{2\pi}\exp\left\{\frac{-r^2}{2}\right\}, \quad r>0,\, \alpha\in[0{,}2\pi),$$

ktorá zodpovedá združenej hustote polárnych súradníc normovaného normálneho rozdelenia pri použití euklidovskej vzdialenosti.

Príklad (Rovnomerné rozdelenie na jednotkovej kružnici). Uvažujme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$, ktorý má rovnomerné rozdelenie na jednotkovej kružnici, teda na množine $K = \left\{(x_1,x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$. Bod $(0,0)^\top$ do množiny K nezahŕňame preto, aby sme mohli vektoru $\boldsymbol{X}\in K$ definovať polárne súradnice $(R,A)^\top$. Množina K má obsah π, preto hustota $f(x_1,x_2)$ je rovná

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}, \quad 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Obrazom K v polárnych súradniciach je množina K' definovaná ako

$$\begin{aligned} K' &= \left\{(r,\alpha)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < (r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 \leq 1\right\} = \\ &= \left\{(r,\alpha)^\top \in \mathbb{R}^2 : r\in(0,1],\, \alpha\in[0,2\pi)\right\}. \end{aligned}$$

Podľa (1.1) má vektor $(R,A)^\top$ hustotu

$$f_P(r,\alpha) = rf(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r}{\pi}, \quad (r,\alpha)^\top \in K'.$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny R je rovná

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi}\, d\alpha = 2r, \quad r\in(0,1],$$

takže hustota náhodnej veličiny R je priamo úmerná obvodu kružnice s polomerom r, resp. samotnej vzdialenosti r od počiatku.

Marginálna hustota A je rovná

$$f_A(\alpha) = \int_0^1 \frac{r}{\pi}\, dr = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha\in[0,2\pi),$$

teda náhodná veličina A má rovnomerné rozdelenie vo všetkých smeroch $[0,2\pi)$.

Podmienenú hustotu náhodnej veličiny R, ak je dané $A=\alpha\in[0,2\pi)$, môžeme vyjadriť ako

$$f(r|\alpha) = \frac{f_P(r,\alpha)}{f_A(\alpha)} = \frac{\frac{r}{\pi}}{\frac{1}{2\pi}} = 2r, \quad r\in(0,1].$$

Podmienená hustota náhodnej veličiny A, ak je dané $R=r\in(0{,}1]$, je rovná

$$f(\alpha|r) = \frac{f_P(r,\alpha)}{f_R(r)} = \frac{\frac{r}{\pi}}{2r} = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha\in[0,2\pi).$$

Rovnako ako pri normovanom normálnom rozdelení vidíme, že $f(\alpha|r) = f_A(\alpha)$ a $f(r|\alpha) = f_R(r)$, teda R a A sú nezávislé veličiny.

Príklad (Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci). Máme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$, ktorý má rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci v norme ℓ_1, teda na množine $S = \left\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_1| + |x_2| \leq 1\right\}$. Bod $(0,0)^\top$ z množiny S vynechávame, aby sa vektoru $\boldsymbol{X} \in S$ dali vyjadriť jeho polárne súradnice $(R, A)^\top$. Štvorec S má obsah 2, preto hustota vektora $\boldsymbol{X}$ na množine S je rovná

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}, \quad 0 < |x_1| + |x_2| \leq 1.$$

Polárne súradnice vektora $\boldsymbol{X} \in S$ vytvárajú množinu S', ktorú môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} S' &= \left\{(r, \alpha)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < |r \cos \alpha| + |r \sin \alpha| \leq 1\right\} = \\ &= \left\{(r, \alpha)^\top \in \mathbb{R}^2 : r \in \left(0, \frac{1}{|\cos \alpha| + |\sin \alpha|}\right], \alpha \in [0, 2\pi)\right\}. \end{aligned}$$

Podľa (1.1) je hustota združeného rozdelenia $(R, A)^\top$ rovná

$$f_P(r, \alpha) = r f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \frac{r}{2}, \quad (r, \alpha)^\top \in S'.$$

Marginálnu hustotu náhodnej veličiny A vieme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} f_A(\alpha) &= \int_0^{\frac{1}{|\cos\alpha| + |\sin\alpha|}} \frac{r}{2}\, dr = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|)^2} - 0\right) = \\ &= \frac{1}{4(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|)^2}, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Pre výpočet marginálnej hustoty $f_R(r)$ potrebujeme vyjadriť medze náhodnej veličiny A pri danom $R = r$. Pre $r \in (0, \sqrt{2}/2]$ dostávame $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ak však $r \in (\sqrt{2}/2, 1]$, potom množina, do ktorej patrí α, má vyjadrenie v tvare $\alpha \in [0, \beta] \cup [\pi/2 - \beta, \pi/2 + \beta] \cup [\pi - \beta, \pi + \beta] \cup [3\pi/2 - \beta, 3\pi/2 + \beta] \cup [2\pi - \beta, 2\pi]$, kde $\beta = \arctan(y/x)$ a dvojica (x, y) rieši sústavu

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^2 + y^2 &= r^2, \\ x, y &> 0. \end{aligned}$$

Dostávame riešenie v tvare

$$x = \frac{1 + \sqrt{2r^2 - 1}}{2}, \quad y = \frac{1 - \sqrt{2r^2 - 1}}{2}, \quad \beta = \arctan \frac{1 - \sqrt{2r^2 - 1}}{1 + \sqrt{2r^2 - 1}}.$$

Potom marginálnu hustotu R vyjadríme ako

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\, d\alpha = \pi r, \quad r \in (0, \sqrt{2}/2], \\ f_R(r) &= \int_0^{\beta} \frac{r}{2}\, d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2} - \beta}^{\frac{\pi}{2} + \beta} \frac{r}{2}\, d\alpha + \int_{\pi - \beta}^{\pi + \beta} \frac{r}{2}\, d\alpha + \int_{\frac{3\pi}{2} - \beta}^{\frac{3\pi}{2} + \beta} \frac{r}{2}\, d\alpha + \int_{2\pi - \beta}^{2\pi} \frac{r}{2}\, d\alpha = \\ &= \frac{r}{2}\, 8\,\beta = 4r \arctan \frac{1 - \sqrt{2r^2 - 1}}{1 + \sqrt{2r^2 - 1}}, \quad r \in (\sqrt{2}/2, 1]. \end{aligned}$$

1.2 Hustota dvojrozmerného vektora v smerových súradniciach

Definícia 2 (Smerové súradnice)**.** *Nech $n \geq 2$. Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ z množiny $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}^n\}$ má smerové súradnice $(s, \boldsymbol{u}^\top)^\top$, $s > 0$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top \in [-1, 1]^n$ práve vtedy, keď*

$$s = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2},$$
$$u_i = \frac{x_i}{s} = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

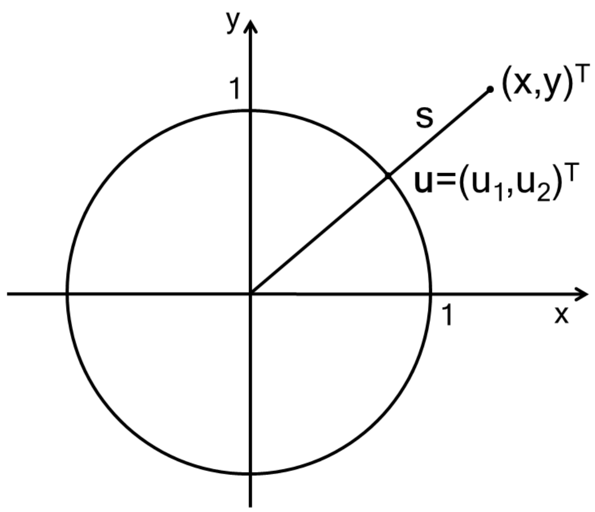
Hodnota s je veľkosť vektora $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$ je jednotkový vektor so smerom rovnakým ako vektor $\boldsymbol{x}$.

Poznámka. Definícia 2 popisuje transformáciu z kartézskych súradníc do smerových. Pre transformáciu zo smerových súradníc do kartézskych platí

$$x_i = s u_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poznámka. Pre $n = 2$ a vektor $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^\top\}$ platí

$$s = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$u_1 = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$u_2 = \frac{y}{s} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Obr. 1.6: Smerové súradnice v dvoch rozmeroch

Uvažujme náhodný vektor $(X, Y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^\top\}$ s hustotou $f(x, y)$ vzhľadom k Lebesgueovej miere. Vyjadríme marginálne hustoty jeho smerových súradníc S

a $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^\top$. Označme marginálnu hustotu vzdialenosti S od počiatku ako $f_S(s)$ a marginálnu hustotu smeru $\boldsymbol{U}$ ako $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$.

Pre hustotu $f(x, y)$ musí platiť

$$\int_0^\infty \int_{\mathcal{S}_s^1} f(x, y)\, d\gamma\, ds = 1,$$

kde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathcal{S}_s^1 = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = s^2\right\}$ a γ je miera merajúca dĺžku oblúka, teda $\int_{\mathcal{S}_s^1} 1\, d\gamma = 2\pi s$.

Pre marginálnu hustotu S musí platiť

$$\int_0^\infty f_S(s)\, ds = 1,$$

takže pomocou predchádzajúceho vzťahu dostávame, že

$$f_S(s) = \int_{\mathcal{S}_s^1} f(x, y)\, d\gamma.$$

Tento integrál spočítame parametrizáciou kružnice $\mathcal{S}_s^1$ pomocou krivky $\boldsymbol{\psi}(\theta) = (\psi_1(\theta), \psi_2(\theta))^\top$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\theta) \\ \psi_2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta \\ s\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

pre konštatntné $s > 0$. Potom pre deriváciu $\boldsymbol{\psi}'(\theta)$ platí

$$\boldsymbol{\psi}'(\theta) = \begin{pmatrix} \psi_1'(\theta) \\ \psi_2'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\sin\theta \\ -s\cos\theta \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\psi}'(\theta)| = \sqrt{s^2\sin^2\theta + s^2\cos^2\theta} = s.$$

Dostávame krivkový integrál

$$f_S(s) = \int_{\mathcal{S}_s^1} f(x, y)\, d\gamma = \int_0^{2\pi} s\, f(s\cos\theta, s\sin\theta)\, d\theta, \quad s > 0. \tag{1.2}$$

Marginálnu hustotu smeru $\boldsymbol{U}$ spočítame pomocou faktu, že kružnica $\mathcal{S}_s^1$ má s-krát väčší obvod ako kružnica $\mathcal{S}_1^1$, teda môžeme písať

$$\int_{\mathcal{S}_s^1} f(x, y)\, d\gamma = \int_{\mathcal{S}_1^1} s\, f(x, y)\, d\gamma.$$

Pre hustoty $f(x,y)$ a $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$ musí platiť

$$\int_{\mathcal{S}_1^1} \int_0^\infty s\, f(x, y)\, ds\, d\gamma = 1, \quad \int_{\mathcal{S}_1^1} f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})\, d\gamma = 1,$$

z čoho vyplýva, že

$$f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = \int_0^\infty s\, f(x, y)\, ds = \int_0^\infty s\, f(su_1, su_2)\, ds, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{1.3}$$

Príklad (Normované normálne rozdelenie). Nech náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ má normované normálne rozdelenie na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^\top\}$. Potom je jeho hustota rovná

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\}, \quad (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^\top\}.$$

Marginálna hustota vzdialenosti S od počiatku je podľa (1.2) rovná

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_0^{2\pi} s\, f_{\boldsymbol{X}}(s\cos\theta, s\sin\theta)\; d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, s\, \exp\left\{-\frac{s^2}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right\}\; d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, s\, \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\}\; d\theta = s\, \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Marginálnu hustotu smeru $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^\top$ spočítame podľa (1.3) ako

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) &= \int_0^\infty s\, f_{\boldsymbol{X}}(su_1, su_2)\; ds = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\, s\, \exp\left\{-\frac{s^2}{2}(u_1^2 + u_2^2)\right\}\; ds = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty s\, e^{-\frac{s^2}{2}}\; ds \overset{\mathrm{S}}{=} \begin{bmatrix} v = \frac{s^2}{2} \\ dv = s\; ds \end{bmatrix} \overset{\mathrm{S}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-v}\; dv = \\ &= \frac{1}{2\pi}, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Náhodný vektor $\boldsymbol{U}$ má rovnomerné rozdelenie na $\mathcal{S}_1^1$ a odpovedá rovnomernému rozdeleniu náhodnej veličiny A na $[0, 2\pi)$ v polárnych súradniciach. Tiež rozdelenie S je rovnaké ako rozdelenie R v polárnych súradniciach.

Príklad (Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu). Nech má náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu, teda na množine $K = \left\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$. Kruh K má obsah π, preto hustota $\boldsymbol{X}$ na K je rovná

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}, \quad (x_1, x_2)^\top \in K.$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny S sa podľa (1.2) spočíta ako

$$f_S(s) = \int_0^{2\pi} s\, f_{\boldsymbol{X}}(s\cos\theta, s\sin\theta)\; d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{s}{\pi}\; d\theta = 2s, \quad s \in (0, 1].$$

Podľa (1.3) má marginálna hustota smeru $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^\top$ tvar

$$f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = \int_0^1 s\, f_{\boldsymbol{X}}(su_1, su_2)\; ds = \int_0^1 \frac{s}{\pi}\; ds = \frac{1}{2\pi}, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Smer $\boldsymbol{U}$ má rovnomerné rozdelenie na $\mathcal{S}_1^1$ a vzdialenosť od počiatku S má hustotu, ktorá rastie spolu s obvodom kružnice o polomere s. Hustoty S a U sa zhodujú s hustotami R a A polárnych súradníc náhodného vektora $\boldsymbol{X}$.

Poznámka. Jedným z problémov, s ktorými sa stretávame pri polárnych a smerových súradniciach, je ten, že v niektorých prípadoch nastane, že marginálna hustota uhla A alebo smeru U vychádza rovná nekonečnu. Nastáva to v takých prípadoch, kedy pre hustotu $f(x, y)$ náhodného vektora $(X, Y)^\top$ diverguje integrál

$$\int_a^\infty r f(r\cos\alpha, r\cos\alpha)\; dr,$$

resp. integrál

$$\int_a^\infty s f(su_1, su_2)\; ds.$$

na nejakom okolí nekonečna. Ilustráciou je nasledujúci príklad.

Príklad. Uvažujme nezávislé náhodné veličiny X a Y s hustotami

$$f_X(u) = f_Y(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |u| \leq 1, \\ \frac{1}{4u^2}, & |u| > 1. \end{cases}$$

Potom náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má združenú hustotu rovnú

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & |x|, |y| \leq 1, \\ \frac{1}{16x^2}, & |x| > 1,\, |y| \leq 1, \\ \frac{1}{16y^2}, & |x| \leq 1,\, |y| > 1, \\ \frac{1}{16x^2y^2}, & |x|, |y| > 1. \end{cases}$$

Potom pre smerové vektory $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$ dostávame podľa (1.3) marginálnu hustotu smeru $\boldsymbol{U}$ rovnú

$$f_{\boldsymbol{U}}(1, 0) = f_{\boldsymbol{U}}(0, 1) = f_{\boldsymbol{U}}(-1, 0) = f_{\boldsymbol{U}}(0, -1) = \int_0^1 \frac{s}{16}\, ds + \int_1^\infty \frac{1}{16s}\, ds = \infty.$$

Pre polárne súradnice spočítame iba marginálnu hustotu pre uhol $\alpha = 0$, ktorý odpovedá smeru $(1, 0)^\top$. Združená hustota vektora polárnych súradníc je podľa (1.1) na polpriamke odpovedajúcej uhlu $\alpha = 0$ rovná

$$f_P(r, 0) = r\, f_{XY}(r \cos 0, r \sin 0) = r\, f_{XY}(r, 0) = \begin{cases} \frac{r}{16}, & r \in (0, 1], \\ \frac{1}{16r}, & r > 1. \end{cases}$$

a marginálna hustota A sa pre $\alpha = 0$ rovná

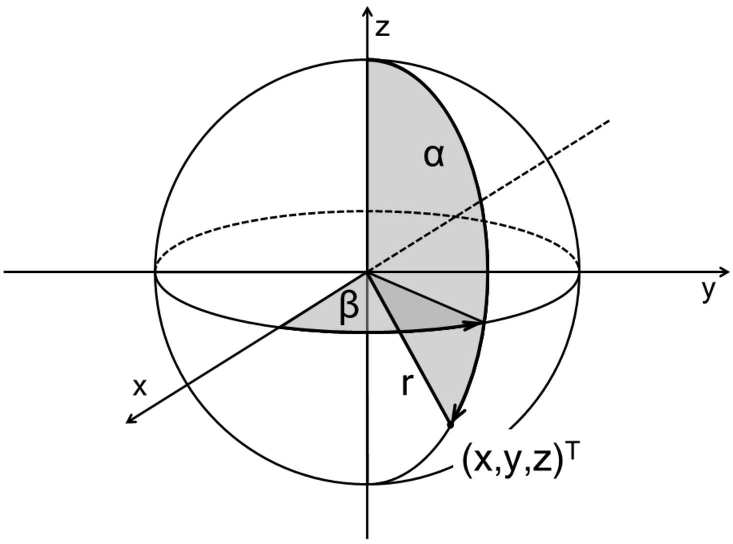
$$f_A(0) = \int_0^1 \frac{r}{16}\, dr + \int_1^\infty \frac{1}{16r}\, dr = \infty.$$

2. Hustota trojrozmerného vektora v sférických a smerových súradniciach

2.1 Hustota trojrozmerného vektora v sférických súradniciach

Definícia 3 (Sférické súradnice). *Vektor* $(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}$ *má sférické súradnice* $(r, \alpha, \beta)^\top \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, 2\pi)$ *práve vtedy, keď*

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\alpha \cos\beta, \\
y &= r \sin\alpha \sin\beta, \\
z &= r \cos\alpha.
\end{aligned}
$$



Obr. 2.1: Sférické súradnice

Poznámka. Definícia dáva návod, ako previesť sférické súradnice do kartézskych. Sférické súradnice vieme z kartézskych vyjadriť nasledovne:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
\alpha &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\
\beta &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pre jednoduchosť budeme značiť $\beta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Uvažujme náhodný vektor $(X, Y, Z)^\top \neq (0,0,0)^\top$ s hustotou $f(x, y, z)$ vzhľadom k Lebesgueovej miere. Vyjadríme hustotu $f_S(r, \alpha, \beta)$ jeho sférických súradníc $(R, A, B)^\top$. Označme transformáciu z kartézskych súradníc do sférických ako

$$\begin{pmatrix} R \\ A \\ B \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ \arccos \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \arccos \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{pmatrix}.$$

Pre inverznú transformáciu platí

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} R \\ A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin A \cos B \\ R \sin A \sin B \\ R \cos A \end{pmatrix}.$$

Jakobián inverznej transformácie $g^{-1}(r, \alpha, \beta)$ je rovný

$$\begin{aligned} D_{g^{-1}}(r, \alpha, \beta) = &\begin{vmatrix} \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & r\cos\alpha\sin\beta & r\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2\sin^3\alpha\sin^2\beta + r^2\sin\alpha\cos^2\alpha\cos^2\beta + \\ &\quad + r^2\sin\alpha\sin^2\beta\cos^2\alpha + r^2\sin^3\alpha\cos^2\beta = \\ &= r^2\sin^3\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta) + r^2\sin\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta) = \\ &= r^2\sin^3\alpha + r^2\sin\alpha\cos^2\alpha = \\ &= r^2\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \\ &= r^2\sin\alpha. \end{aligned}$$

$D_{g^{-1}}$ je nulový pre $\alpha \in \{0, \pi\}$, čomu odpovedajú vektory tvaru $(0,0,Z)^\top$ ležiace na osi z. Transformáciu potom definujeme len pre $\alpha \in (0, \pi)$, respektíve pre vektory $(X, Y, Z)^\top$ z množiny $\left\{(X, Y, Z)^\top \in \mathbb{R}^3 : X \neq 0 \vee Y \neq 0\right\}$.

Podľa vety 1 je hustota $f_S(r, \alpha, \beta)$ vektora $(R, A, B)^\top$ rovná

$$\begin{aligned} f_S(r, \alpha, \beta) &= f(g^{-1}(r, \alpha, \beta))\,|D_{g^{-1}}(r, \alpha, \beta)| = \\ &= r^2 \sin\alpha\, f(r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\sin\beta, r\cos\alpha), \\ &\quad r > 0,\ \alpha \in (0, \pi),\ \beta \in [0, 2\pi)\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Príklad (Normované normálne rozdelenie). Máme $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ s normovaným normálnym rozdelením na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)^\top, z \in \mathbb{R}\}$. Hustota $\boldsymbol{X}$ je potom rovná

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)^\top, z \in \mathbb{R}\}.$$

Podľa (2.1) má hustota $f_P(r, \alpha, \beta)$ sférických súradníc $(R, A, B)^\top$ náhodného vektora $\boldsymbol{X}$ tvar

$$\begin{aligned} f_P(r, \alpha, \beta) &= r^2 \sin\alpha \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha)\right\} = \\ &= r^2 \sin\alpha \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r > 0,\ \alpha \in (0, \pi),\ \beta \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Marginálna hustota náhodnej veličiny R je rovná

$$\begin{aligned} f_R(r) &= r^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} \int_0^{\pi} \sin\alpha \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\beta\right) d\alpha = \\ &= r^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} \int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^2 \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Združenú hustotu dvojice $(A, B)^\top$ môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sin\alpha \int_0^{\infty} r^2 \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} dr = \\ &= \frac{\sin\alpha}{4\pi}, \quad \alpha \in (0, \pi), \beta \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Odtiaľ dostaneme marginálne hustoty uhlov A a B ako

$$\begin{aligned} f_A(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{4\pi} \, d\beta = \frac{\sin\alpha}{2}, \quad \alpha \in (0, \pi), \\ f_B(\beta) &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha}{4\pi} \, d\alpha = \frac{1}{2\pi}, \quad \beta \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

2.2 Hustota trojrozmerného vektora v smerových súradniciach

Poznámka. Pre $n = 3$ a vektor $(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}$ platí

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_1 &= \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ u_2 &= \frac{y}{s} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ u_3 &= \frac{z}{s} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Uvažujme náhodný vektor $(X, Y, Z)^\top \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}$ s hustotou $f(x, y, z)$ voči Lebesgueovej miere. Nech vektor $(X, Y, Z)^\top$ má smerové súradnice $(S, \boldsymbol{U}^\top)^\top = (S, U_1, U_2, U_3)^\top$.

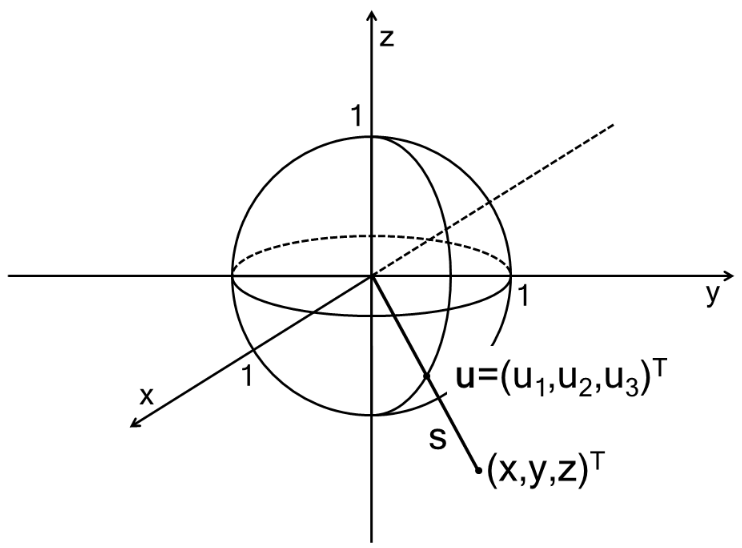
Pre hustotu $f(x, y, z)$ musí platiť

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathcal{S}_s^2} f(x, y, z) \, d\gamma \, ds = 1,$$

kde $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathcal{S}_s^2 = \left\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = s^2\right\}$ a γ je miera merajúca plochu časti povrchu gule, teda $\int_{\mathcal{S}_s^2} 1 \, d\gamma = 4\pi s^2$.

Marginálna hustota $f_S(s)$ vzdialenosti S od počiatku musí spĺňať

$$\int_0^{\infty} f_S(s) \, ds = 1,$$



Obr. 2.2: Smerové súradnice v troch rozmeroch

takže $f_S(s)$ musí byť rovná

$$f_S(s) = \int_{\mathcal{S}_s^2} f(x, y, z)\, d\gamma.$$

Tento integrál vypočítame pomocou parametrizácie plochy $\mathcal{S}_s^2$ funkciou $\boldsymbol{\psi}(\alpha, \beta)$ definovanou nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\alpha, \beta) \\ \psi_2(\alpha, \beta) \\ \psi_3(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin\alpha \cos\beta \\ s \sin\alpha \sin\beta \\ s \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, \pi], \beta \in [0, 2\pi),$$

kde $s > 0$ je konštanta. Smerové vektory plochy $\mathcal{S}_s^2$ sú rovné

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha} &= (s\cos\alpha\cos\beta, s\cos\alpha\sin\beta, -s\sin\alpha), \\ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \beta} &= (-s\sin\alpha\sin\beta, s\sin\alpha\cos\beta, 0). \end{aligned}$$

Normálový vektor plochy $\mathcal{S}_s^2$ je rovný

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \beta} = (s^2 \sin^2\alpha \cos\beta, s^2 \sin^2\alpha \sin\beta, s^2 \sin\alpha\cos\alpha)$$

a jeho veľkosť je

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \beta} \right\| &= \sqrt{s^4 \sin^4\alpha \cos^2\beta + s^4 \sin^4\alpha \sin^2\beta + s^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha} = \\ &= \sqrt{s^4 \left(\sin^4\alpha \left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)} = \\ &= \sqrt{s^4 \left(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)} = \\ &= \sqrt{s^4 \sin^2\alpha \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} = \\ &= s^2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

Veľkosť normálového vektora musí byť rôzna od nuly, preto upravíme hodnoty parametra α na $\alpha \in (0, \pi)$. Hustotu $f_S(s)$ spočítame plošným integrálom ako

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_{\mathcal{S}_s^2} f(x,y,z)\, d\gamma = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s^2 \sin\alpha\, f(s\sin\alpha\cos\beta, s\sin\alpha\sin\beta, s\cos\alpha)\, d\alpha\, d\beta, \quad s > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ďalej spočítame marginálnu hustotu $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$. Vieme, že plocha $\mathcal{S}_s^2$ má s^2-krát väčší obsah ako plocha $\mathcal{S}_1^2$, preto aj

$$\int_{\mathcal{S}_s^2} f(x,y,z)\, d\gamma = \int_{\mathcal{S}_1^2} s^2 f(x,y,z)\, d\gamma.$$

Hustoty $f(x,y,z)$ a $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$ musia spĺňať

$$\int_{\mathcal{S}_1^2} \int_0^{\infty} s^2 f(x,y,z)\, ds\, d\gamma = 1, \quad \int_{\mathcal{S}_1^2} f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})\, d\gamma = 1.$$

Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) &= \int_0^{\infty} s^2 f(x,y,z)\, ds = \\ &= \int_0^{\infty} s^2 f(su_1, su_2, su_3)\, ds, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Poznámka. V sférických súradniciach sme nevedeli spočítať hustotu pre náhodné vektory ležiace na priamke $\left\{(0,0,z)^\top,\ z \in \mathbb{R}\right\}$, teda také, ktoré prislúchajú uhlom $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$. Bolo to spôsobené tým, že pre $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$ je jakobián $r^2 \sin\alpha$ nulový. Nulovosť jakobiánu znamená, že transformácia v danom bode nie je bijekciou, teda daný vektor nemá jednoznačne definované sférické súradnice. V tomto prípade vektor ležiaci na polpriamke $\{(0,0,z)^\top,\ z > 0\}$ má sférické súradnice $(r,\alpha,\beta)^\top = (z, 0, \beta)^\top$, kde $\beta \in [0, 2\pi)$ a vektor ležiaci na polpriamke $\{(0,0,z)^\top,\ z < 0\}$ má sférické súradnice $(r,\alpha,\beta)^\top = (z,\pi,\beta)^\top$, $\beta \in [0,2\pi)$.

V smerových súradniciach tento problém nenastáva, pretože transformácia $(x,y,z)^\top = (su_1, su_2, su_3)^\top$ je bijekciou na $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)^\top$ a jediný bod, v ktorom nevieme vyjadriť hustotu, je počiatok.

Príklad (Normované normálne rozdelenie). Nech náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ má normované normálne rozdelenie na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}$. $\boldsymbol{X}$ má potom hustotu

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}.$$

Nech vektor $\boldsymbol{X}$ má smerové súradnice $(S, \boldsymbol{U}^\top)^\top = (S, U_1, U_2, U_3)^\top$.

Marginálnu hustotu náhodnej veličiny S spočítame podľa (2.2) ako

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} s^2 \sin\alpha \, f(s\sin\alpha\cos\beta, s\sin\alpha\sin\beta, s\cos\alpha) \; d\alpha \right) d\beta = \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} s^2 \sin\alpha \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{ \frac{-s^2}{2} (\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha) \right\} d\beta \right) d\alpha = \\
&= \frac{s^2}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} \right\} \int_0^{\pi} \sin\alpha \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\beta \right) d\alpha = \\
&= \frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} \right\} \int_0^{\pi} \sin\alpha \; d\alpha = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, s^2 \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} \right\}, \quad s > 0.
\end{aligned}
$$

Podľa (2.3) je marginálna hustota náhodného vektora $\boldsymbol{U}$ rovná

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) &= \int_0^{\infty} s^2 \, f(su_1, su_2, su_3) \; ds = \\
&= \int_0^{\infty} s^2 \, \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \right\} \; ds = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} s^2 \, \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} \right\} \; ds = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4\pi}, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Poznámka. Porovnajme hustoty $f_R(r)$ a $f(\alpha, \beta)$ sférických súradníc a hustoty $f_S(s)$ a $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$ smerových súradníc náhodného vektora $\boldsymbol{X}$, ktorý má normované normálne rozdelenie. Vidíme, že marginálne hustoty veličín R a S sa rovnajú. Vyplýva to z toho, že obe vyjadrujú to isté, teda veľkosť náhodného vektora $\boldsymbol{X}$.

Na druhej strane, hustota dvojice uhlov (A, B) a hustota smeru $\boldsymbol{U}$ sa líšia. Keďže hustota $f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u})$ je konštantná, rozdelenie smeru $\boldsymbol{U}$ je rovnomerné na povrchu jednotkovej gule. Keď sa však pozrieme na hustotu $f(\alpha, \beta)$, vidíme, že tá nie je konštantná, ale závisí na sínuse uhla A. Ďalej si môžeme všimnúť, že marginálna hustota uhla B je konštantná, ale hustota A je priamo úmerná $\sin\alpha$. Dôvod, prečo rozdelenie B je rovnomerné, ale rozdelenie A nie, je ten, že vektory $\boldsymbol{X}$, ktoré prislúchajú jednému konkrétnemu uhlu β, tvoria oblúk, ktorý má rovnakú dĺžku pre každý uhol $\beta \in [0, 2\pi)$, avšak množina vektorov $\boldsymbol{X}$, ktoré prislúchajú jednému uhlu α, tvorí kružnicu, ktorej obvod závisí na sínuse uhla α. Kružnice prislúchajúce rôznym uhlom α majú rôzne obvody, a preto marginálne rozdelenie A nie je rovnomerné.

3. Hustota n-rozmerného vektora v sférických súradniciach

Definícia 4 (Sférické súradnice v n rozmeroch)**.** *Nech $n \geq 2$. Potom vektor s kartézskymi súradnicami $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}^n\}$ má sférické súradnice $(r, \boldsymbol{\varphi}^\top)^\top$, kde $r > 0$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})^\top$, $\varphi_i \in [0, \pi]$ pre $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ a $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$, práve vtedy, keď platí*

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1, \\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\
&\ldots \\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Poznámka. Prevod kartézskych súradníc na sférické vieme zapísať ako

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \\
\varphi_1 &= \arccos\frac{x_1}{r} = \arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}, \\
\varphi_2 &= \arccos\frac{x_2}{r\sin\varphi_1} = \arccos\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}}, \\
&\ldots \\
\varphi_{n-2} &= \arccos\frac{x_{n-2}}{r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}} = \arccos\frac{x_2}{\sqrt{x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2}}, \\
\varphi_{n-1} &= \begin{cases} \arccos\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}, & x_n \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}, & x_n < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pri vyjadrení sme použili fakt, že $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ pre $x \in [-1, 1]$. Uvedená transformácia je dobre definovaná, pretože do funkcií arccos vstupujú hodnoty z intervalu $[0, 1]$, hodnoty $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ sú z intervalu $[0, \pi]$ a $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$.

Budeme používať zjednodušené značenie $\varphi_{n-1} = \arccos\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}$, čím sa myslí vyjadrenie uvedené vyššie v tejto poznámke.

Uvažujme n-rozmerný náhodný vektor s kartézskymi súradnicami rovnými $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, ktorý má hustotu $f(\boldsymbol{x})$ vzhľadom k Lebesgueovej n-rozmernej miere. Vyjadríme jeho hustotu v sférických súradniciach $f_S(r, \boldsymbol{\varphi}) = f_S(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ pomocou transformácie

$$\begin{pmatrix} R \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{n-2} \\ \Phi_{n-1} \end{pmatrix} = g_n \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \\ \arccos\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} \\ \vdots \\ \arccos\frac{X_2}{\sqrt{X_{n-2}^2 + X_{n-1}^2 + X_n^2}} \\ \arccos\frac{X_{n-1}}{\sqrt{X_{n-1}^2 + X_n^2}} \end{pmatrix}$$

a inverznej transformácie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = g_n^{-1} \begin{pmatrix} R \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{n-2} \\ \Phi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\Phi_1 \\ R\sin\Phi_1\cos\Phi_2 \\ \vdots \\ R\sin\Phi_1\sin\Phi_2\dots\sin\Phi_{n-2}\cos\Phi_{n-1} \\ R\sin\Phi_1\sin\Phi_2\dots\sin\Phi_{n-2}\sin\Phi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Jakobián inverznej transformácie $D_{g_n^{-1}}(r, \boldsymbol{\varphi})$ spočítame rekurentne pomocou nasledujúcich tvrdení.

Veta 2 (O rozvoji podľa stĺpca, Barto a Tůma (2019), str. 259)**.** *Nech* $A = (a_{ij})$ *je štvorcová matica rádu* $n \geq 2$ *a* $j \in \{1, \dots, n\}$*. Potom*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$*, pričom* M_{ij} *je matica rádu* $n-1$*, ktorá vznikla z* A *vynechaním* i*-teho riadku a* j*-teho stĺpca.*

Tvrdenie 3 (Barto a Tůma (2019), str. 252)**.** *Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu* A *platí* $\det A = \det A^\top$.

Tvrdenie 4 (Barto a Tůma (2019), str. 253)**.** *Nech* $n \in \mathbb{N}$*,* $A = (\boldsymbol{a_1}|\dots|\boldsymbol{a_n})$ *je štvorcová matica rádu* n *a* $t \in \mathbb{R}$*. Potom pre ľubovoľné* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí*

$$\det(\boldsymbol{a_1}|\dots|\boldsymbol{a_{i-1}}|t\boldsymbol{a_i}|\boldsymbol{a_{i+1}}|\dots|\boldsymbol{a_n}) = t\det A.$$

Dôsledok. Z tvrdení 3 a 4 vyplýva, že pre štvorcovú maticu $B = (\boldsymbol{b_1}^\top|...|\boldsymbol{b_n}^\top)^\top$ rádu n, pre $t \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_{i-1}}^\top \\ t\boldsymbol{b_i}^\top \\ \boldsymbol{b_{i+1}}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n}^\top \end{pmatrix} = t\det B.$$

Teraz môžeme vypočítať jakobián zobrazenia g_n^{-1}. Označme jakobián $D_{g_n^{-1}}$ ako D_n. Najprv odvodíme rekurentný vzorec pre D_{n+1}, ak poznáme D_n a potom s pomocou faktu, že $D_2 = r$, ktorý sme spočítali v kapitole 1, vyjadríme explicitný vzorec pre D_n.

Majme vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}^n\}$ so sférickými súradnicami $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})^\top$ a vektor $\boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_{n+1})^\top \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}^{n+1}\}$ so sférickými súradnicami $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$. Pre kartézske súradnice vektorov $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}'$ platí

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, & x'_1 &= r\cos\varphi_1, \\ &\dots & &\dots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & x'_{n-1} &= r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, & x'_n &= r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n, \\ & & x'_{n+1} &= r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_n. \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že prvých $n-1$ zložiek vektorov $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}'$ je rovnakých a tiež, že $x'_n = x_n \cos\varphi_n$ a $x'_{n+1} = x_n \sin\varphi_n$.

Označme Jacobiho maticu zobrazenia g_n^{-1} ako J_n pre počet rozmerov $n \geq 2$. Označme ďalej riadky matíc J_n a J_{n+1} ako

$$J_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{j_1}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{j_n}^\top \end{pmatrix}, \quad J_{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{j}'^\top_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{j}'^\top_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Riadok $\boldsymbol{j_i}^\top$ má tvar

$$\boldsymbol{j_i}^\top = (\frac{\partial x_i}{\partial r}, \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{n-1}})$$

a riadok $\boldsymbol{j}'^\top_i$ má tvar

$$\boldsymbol{j}'^\top_i = (\frac{\partial x'_i}{\partial r}, \frac{\partial x'_i}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial x'_i}{\partial \varphi_n}).$$

Ďalej vyjadríme riadky $\boldsymbol{j}'^\top_i$ matice J_{n+1} pomocou riadkov $\boldsymbol{j}_i^\top$ matice J_n. Pre $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ platí $x'_i = x_i$, preto aj

$$\frac{\partial x'_i}{\partial r} = \frac{\partial x_i}{\partial r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial x'_i}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_k} \quad \text{pre } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Posledný člen riadku $\boldsymbol{j}'^\top_i$ je rovný

$$\frac{\partial x'_i}{\partial \varphi_n} = \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_n} = 0.$$

Dostávame teda, že pre $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ máme

$$\boldsymbol{j}'^\top_i = (\boldsymbol{j}_i^\top, 0).$$

Teraz vyjadríme riadok $\boldsymbol{j}'^\top_n$ pomocou riadku $\boldsymbol{j}_n^\top$. Platí $x'_n = x_n \cos\varphi_n$, takže dostávame

$$\frac{\partial x'_n}{\partial r} = \frac{\partial x_n}{\partial r} \cos\varphi_n \quad \text{a} \quad \frac{\partial x'_n}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_k} \cos\varphi_n \quad \text{pre } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Posledný prvok riadku $\boldsymbol{j}'^\top_n$ sa rovná

$$\frac{\partial x'_n}{\partial \varphi_n} = \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(r \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n) = -r \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_n.$$

Pre n-tý riadok matice J_{n+1} dostávame, že

$$\boldsymbol{j}'^\top_n = (\cos\varphi_n \, \boldsymbol{j}_i^\top, \, -r \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_n).$$

Ako posledný vyjadríme riadok $\boldsymbol{j}'^\top_{n+1}$ pomocou riadku $\boldsymbol{j}_n^\top$. Vieme, že platí $x'_{n+1} = x_n \sin\varphi_n$, z čoho vyplýva, že

$$\frac{\partial x'_{n+1}}{\partial r} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial r} \sin\varphi_n \quad \text{a} \quad \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \varphi_k} \sin\varphi_n, \quad \text{pre } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Posledný prvok riadku $\boldsymbol{j'}^{\top}_{n+1}$ je rovný

$$\frac{\partial x'_{n+1}}{\partial \varphi_n} = \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_n) = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n.$$

Z toho vyplýva, že riadok $\boldsymbol{j'}^{\top}_{n+1}$ vieme vyjadriť pomocou riadku $\boldsymbol{j}_n^{\top}$ ako

$$\boldsymbol{j'}^{\top}_{n+1} = (\sin \varphi_n \, \boldsymbol{j}_n^{\top}, r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n).$$

Schematicky vieme maticu J_{n+1} zakresliť nasledujúcim spôsobom.

$$J_{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_1^{\top} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{j}_{n-1}^{\top} & 0 \\ \cos \varphi_n \, \boldsymbol{j}_n^{\top} & -r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_n \\ \sin \varphi_n \, \boldsymbol{j}_n^{\top} & r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n \end{pmatrix}$$

Označme prvky $(n+1)$-ho stĺpca matice J_{n+1} ako $j_{1,n+1}, \dots, j_{n+1,n+1}$. Podľa vety 2 je D_{n+1} rovný

$$D_{n+1} = \det J_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(i+n+1)} j_{i,n+1} \det M_{i,n+1},$$

kde $M_{i,n+1}$ je matica, ktorá vznikne z matice J_{n+1} vynechaním i-teho riadka a $(n+1)$-ho stĺpca. Keďže prvok $j_{i,n+1}$ je rovný nule pre $i \in \{1, \dots, n-1\}$, môžeme písať

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{(2n+1)} j_{n,n+1} \det M_{n,n+1} + (-1)^{(2n+2)} j_{n+1,n+1} \det M_{n+1,n+1} = \\ &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_n \det M_{n,n+1} + r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n \det M_{n+1,n+1}. \end{aligned}$$

Matice $M_{n,n+1}$ a $M_{n+1,n+1}$ majú tvar

$$M_{n,n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_1^{\top} \\ \vdots \\ \boldsymbol{j}_{n-1}^{\top} \\ \sin \varphi_n \, \boldsymbol{j}_n^{\top} \end{pmatrix}, \quad M_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_1^{\top} \\ \vdots \\ \boldsymbol{j}_{n-1}^{\top} \\ \cos \varphi_n \, \boldsymbol{j}_n^{\top} \end{pmatrix},$$

teda môžeme povedať, že matica $M_{n,n+1}$ vznikla z matice J_n prenásobením posledného riadka prvkom $\sin \varphi_n$ a matica $M_{n+1,n+1}$ vznikla z matice J_n prenásobením posledného riadka prvkom $\cos \varphi_n$. Podľa dôsledku tvrdení 3 a 4 platí

$$\begin{aligned} \det M_{n,n+1} &= \sin \varphi_n \det J_n = \sin \varphi_n D_n, \\ \det M_{n+1,n+1} &= \cos \varphi_n \det J_n = \cos \varphi_n D_n. \end{aligned}$$

Po dosadení $\det M_{n,n+1}$ a $\det M_{n+1,n+1}$ do vzťahu pre D_{n+1} nakoniec dostávame rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_n \sin \varphi_n D_n + r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n \cos \varphi_n D_n = \\ &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} (\sin^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n) D_n = \\ &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1} D_n. \end{aligned}$$

Pomocou faktu, že platí $D_2 = r$, ktorý sme spočítali v kapitole 1, dostávame explicitný vzorec pre výpočet D_n v tvare

$$D_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

Napríklad pre $n = 3$ a $n = 4$ máme

$$\begin{aligned} D_3 &= r^2 \sin \varphi_1, \\ D_4 &= r^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Jakobián D_n je nenulový práve vtedy, keď všetky z hodnôt $\sin \varphi_1, \dots, \sin \varphi_{n-1}$ sú nenulové, čo nastane práve vtedy, keď všetky z uhlov $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ ležia v intervale $(0, \pi)$. To znamená, že pre vektory $\boldsymbol{x}$ také, že $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, teda pre vektory ležiace na osi x_1, je jakobián transformácie rovný nule. Preto hustotu vektora $\boldsymbol{x}$ v jeho polárnych súradniciach $(r, \boldsymbol{\varphi}^\top)^\top$ vieme spočítať iba na množine $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0 \vee \dots \vee x_n \neq 0\}$.

Keď už poznáme jakobián $D_{g_n^{-1}} = D_n$ zobrazenia g_n^{-1}, môžeme podľa vety 1 vyjadriť hustotu $f_S(r,\boldsymbol{\varphi})$. Tá sa rovná

$$\begin{aligned} f_S(r,\boldsymbol{\varphi}) = f(g_n^{-1}(r,\boldsymbol{\varphi})) \left| D_{g_n^{-1}}(r,\boldsymbol{\varphi}) \right| &= \\ = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \, f(g_n^{-1}(r,\boldsymbol{\varphi})), \\ r > 0, \, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \in (0, \pi), \, \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Záver

Cieľom práce bolo odvodiť vzťahy na prevod hustoty náhodného vektora z kartézskych do polárnych a smerových súradníc a následne vzťahy aplikovať na niektoré základné rozdelenia a diskutovať možné problémy, s ktorými sa môžeme stretnúť.

V prvej kapitole sme definovali polárne súradnice a uviedli vzťah pre prevod hustoty dvojrozmerného náhodného vektora do polárnych súradníc. Venovali sme sa príkladom normovaného normálneho rozdelenia, normálneho rozdelenia s rôznymi rozptylmi, rovnomerného rozdelenia na jednotkovom kruhu a rovnomerného rozdelenia na jednotkovom štvorci v norme ℓ_1. Zistili sme, že polárne súradnice sa hodia najmä pre rozdelenia, ktoré sú stredovo symetrické a že pre rozdelenia, ktoré sú nie sú symetrické alebo sú definované na nesymetrickej množine, môže byť zdĺhavé spočítať hustotu ich polárnych súradníc. V príkladoch sme spočítali združené, marginálne a podmienené hustoty polárnych súradníc. Ďalej sme definovali smerové súradnice, odvodili vzťahy na výpočet marginálnych hustôt smerových súradníc a tie použili na príkladoch normovaného normálneho rozdelenia a rovnomerného rozdelenia na jednotkovom kruhu. Uviedli sme príklad, pre ktorý sme nevedeli nájsť hustotu polárnych ani smerových súradníc v niektorých smeroch.

Druhá kapitola sa venovala sférickým a smerovým súradniciam v troch rozmeroch. Vyjadrili sme vzťahy na výpočet združenej hustoty sférických a smerových súradníc a ilustrovali ich na príklade normovaného normálneho rozdelenia. Poznamenali sme, že v troch a viacerých rozmeroch sa oplatí používať smerové súradnice, keďže sférickým sa nedá vyjadriť hustota vo všetkých smeroch. Vysvetlili sme rozdiel medzi marginálnou hustotou smeru a združenou hustotou uhlov v troch rozmeroch.

V tretej kapitole sme definovali n-rozmerné sférické súradnice, uviedli sme podrobné odvodenie tvaru jakobiánu transformácie z kartézskych do sférických súradníc a pomocou neho uviedli vzťah na výpočet hustoty sférických súradníc n-rozmerného náhodného vektora.

Zoznam použitej literatúry

Barto, L. a Tůma, J. (2019). *Lineární algebra.* URL https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la6.pdf.

Kulich, M. (2018). *Základy teorie pravděpodobnosti.* URL https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kulich/vyuka/ms1/doc/pravdepodobnost_ms1.pdf.

Zoznam obrázkov