MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniela Hrbáčová

Efektivita systémů bonus–malus

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 20.7.2021

Daniela Hrbáčová

Ráda bych touto cestou poděkovala RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D. za její cenné rady, věcné připomínky a trpělivost při vedení mé bakalářské práce.

Název práce: Efektivita systémů bonus–malus

Autor: Daniela Hrbáčová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá systémy bonus–malus v pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem motorového vozidla. Bonus–malus systém se užívá k upravení apriorně stanoveného tarifního pojistného na základě individuálního škodního průběhu. Tato další úprava sazby pojistného slouží k tomu, aby byly náklady na pojistná plnění ještě spravedlivěji rozloženy mezi pojistníky v jedné tarifní třídě. Průchod řidiče systémem modelujeme pomocí homogenních markovských řetězců. Výsledkem práce je posouzení efektivnosti systémů užívaných dvěma pojišťovnami v České republice na modelovém pojistném kmeni.

Klíčová slova: systém bonus–malus, Loimarantova efektivita, De Prilova efektivita

Title: Efficiency of bonus–malus systems

Author: Daniela Hrbáčová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with bonus–malus systems during motor third party liability insurance. Bonus–malus system is used to adjust apriori set tariff premium according to the individual claims. This fruther adjustment of premium rate serves to make claim costs even more fair distributed among policyholders in one tariff class. We model driver's passage through the system as a homogenous Markov chain. The result of this thesis is the assessment of the efficiency of the systems used by two insurance companies in the Czech Republic on a model insurance portfolio.

Keywords: bonus–malus system, Loimaranta efficiency, De Pril efficiency

Obsah

Úvod

V automobilovém pojištění se ke stanovení výše pojistného užívá segmentace klientů prvotně do tarifních tříd na základě apriorních (předem daných) informací jako je typ vozidla, značka, k čemu jej užíváme, výkon motoru, objem válců atd.

Další faktory jako zkušenosti, opatrnost, či rychlost reakce řidiče nám nejsou známé. Proto je zavedeno následné členění do bonusových tříd dle systému slev a přirážek (bonusů a malusů) ze základního (tarifního) pojistného, které zohledňují škodní historii klienta v dané tarifní třídě. Bonus–malus systém (BMS) se používá zejména v pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem motorového vozidla, které je lidově známé jako povinné ručení, a jak již pojem napovídá, je ze zákona povinné. Pojistník si může pouze vybrat pojišťovnu, u které toto pojištění sjedná.

Pojistitel je povinen promítnout celkový předcházející škodní průběh pojistníka, respektive provozovatele vozidla, do výše pojistného (dle zákona č. 168/1999 Sb.). Tento systém byl zaveden proto, aby ještě spravedlivěji rozložil břemeno nákladů mezi pojistníky skrze takzvané škodní třídy. BMS též motivuje pojistníky k bezpečnější jízdě a nehlášení drobných škod.

Cílem této bakalářské práce je popsat základní principy BMS s využitím markovských řetězců a kvantitativně porovnat pojišťovnami užívané systémy pomocí různých měr efektivity.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole se seznámíme se základními pojmy, které se týkají markovských řetězců. Vyjádříme si BMS v řeči markovských řetězců a uvedeme ilustrační příklad.

Druhá kapitola definuje Loimarantovu a De Prilovu efektivitu. Nastíní výpočet obou efektivit, jak pro jednoho řidiče[1] s danou očekávanou roční frekvencí škod, tak pro portfolio složené z řidičů s různými očekávanými ročními škodními frekvencemi.

Praktické výpočty efektivit budou provedeny ve třetí kapitole pro BMS dvou velkých pojišťoven působících v České republice. Též zde provedeme srovnání všech uvedených systémů.

Hlavním teoretickým zdrojem práce je odborná publikace *Actuarial Modelling of Claim Counts* (Denuit a kol., 2007), všechny praktické výpočty byly provedeny v softwaru *Wolfram Mathematica* (v. 12.0).

[1] Dále budeme považovat za synonyma označení pojistník, řidič, či klient.

1. Modelování BMS pomocí markovských řetězců

Zde se seznámíme se základními definicemi, které se týkají zavedení markovských řetězců. Zavedeme si značení a několik vět. Budeme vycházet z práce Denuita a kol. (Denuit a kol., 2007, Kapitola 4.2 – 4.4).

1.1 Markovské řetězce

Definice 1. *Stochastický proces* $\{S_t, t \geq 0\}$ *se spočetnou množinou stavů* $\mathcal{S}$ *nazveme* markovský řetězec, *pokud pro každou konečnou množinu časů* $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ *a stavy* $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{S}$ *takové, že*

$$\mathsf{P}\left(S_{t_0} = i_0 \wedge \cdots \wedge S_{t_{n-1}} = i_{n-1} \wedge S_{t_n} = i_n\right) > 0,$$

platí, že

$$\mathsf{P}\left(S_{t_n} = i_n | S_{t_0} = i_0 \wedge \cdots \wedge S_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) = \mathsf{P}\left(S_{t_n} = i_n | S_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right). \tag{1.1}$$

Markovský řetězec (MŘ) popisuje stochastický proces, ve kterém budoucí vývoj závisí na současném stavu (ne na historii – způsobu dosažení aktuálního stavu), proto jej také nazýváme proces bez paměti. Rovnost 1.1 nazýváme markovská vlastnost.

Označme pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase t do stavu j v čase u jako

$$p_{ij}(t,u) = \mathsf{P}(S_u = j | S_t = i).$$

Ta zřejmě splňuje pro časy $0 \leq t \leq u$ následující podmínky:

$$0 \leq p_{ij}(t,u) \leq 1, \; i, j \in \mathcal{S},$$

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(t,u) = 1, \; i \in \mathcal{S}.$$

Definice 2. *Markovský řetězec nazveme* homogenní a diskrétní, *pokud má diskrétní množinou časů a pro všechny časy* u, t *platí, že*

$$p_{ij}(t,u) = p_{ij}(u - t).$$

Dále budeme vždy uvažovat pouze homogenní, diskrétní markovské řetězce s konečnou množinou stavů $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, s\}$. Označme pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v n krocích jako

$$p_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}(S_{t+n} = j | S_t = i) \text{ pro } n = 0,1,\ldots.$$

Tvrzení 1. *Pro* i, $j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}_0$ *lze zapsat* n*-krokovou pravděpodobnost přechodu ze stavu* i *do stavu* j *jako*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=0}^{s} p_{i\ell}^{(n-1)} p_{\ell j}. \tag{1.2}$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí dle n. Pro $n = 1$ a $i, j \in \mathcal{S}, m \in \mathbb{N}_0$ zřejmě platí

$$p_{ij}^{(1)} = \mathsf{P}(S_{m+1} = j | S_m = i) = p_{ij}.$$

Pokud pro $n = k$ vztah 1.2 platí, platí i pro $n = k + 1$?
Rozepišme si $(k + 1)$-krokovou pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j pomocí věty o úplné pravděpodobnosti (Zvára a Štěpán, 2012, Věta 2.1) jako

$$p_{ij}^{(k+1)} = \mathsf{P}(S_{m+k+1} = j | S_m = i) = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} \mathsf{P}(S_{m+k+1} = j,\, S_{m+k} = \ell | S_m = i).$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti je

$$p_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} \mathsf{P}(S_{m+k+1} = j | S_{m+k} = \ell,\, S_m = i) \cdot \mathsf{P}(S_{m+k} = \ell | S_m = i).$$

Dále využijeme markovskou vlastnost a indukční předpoklad:

$$p_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} \mathsf{P}(S_{m+k+1} = j | S_{m+k} = \ell) \cdot \mathsf{P}(S_{m+k} = \ell | S_m = i) = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} p_{\ell j} \cdot p_{i\ell}^{(k)}.$$

Tedy vztah 1.2 platí i pro $n = k + 1$.

□

Definice 3. *Pro množinu stavů $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, s\}$ a přirozené n je n-*kroková matice přechodu *definována následujícím způsobem:*

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & \cdots & p_{0s}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s0}^{(n)} & \cdots & p_{ss}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 2. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n. \tag{1.3}$$

Důkaz. n-krokovou pravděpodobnost přechodu lze dle tvrzení 1 rozepsat jako

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} p_{i\ell}^{(n-1)} \cdot p_{\ell j},$$

což odpovídá maticovému násobení. Odtud plyne indukcí rovnost 1.3.

□

Z hlediska dlouhodobého chování uvažme stacionární rozdělení

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\pi_0, \ldots, \pi_s\right)^\top,$$

kde

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Vezmeme-li limitu obou stran rovnosti 1.2 pro $n \to \infty$, vidíme, že vektor $\boldsymbol{\pi}$ je jediným řešením soustavy lineárních rovnic

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{s} \pi_k p_{kj}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, s\},$$

splňujícím $\sum_{j=0}^{s} \pi_j = 1$.

Což v maticovém zápise můžeme přepsat jako

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{e} = 1, \qquad \text{kde } \mathbf{e} \text{ je sloupcový vektor jedniček.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Pro ověření existence stacionárního rozdělení je potřeba zavést několik pojmů, které se týkají klasifikace MŘ. Využíváme zde studijní text Dvořák (2016).

Definice 4. *Stav $i \in \mathcal{S}$ je* dosažitelný *ze stavu $j \in \mathcal{S}$, pokud existuje $n > 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Definice 5. *Markovský řetězec nazveme* nerozložitelný*, pokud je každý stav dosažitelný z každého stavu.*

Definice 6. *Buď $i \in \mathcal{S}$, potom $\nu_i = \inf\{n > 0 : S_t = i\}$ nazveme* dobou prvního vstupu *řetězce do stavu i.*

Definice 7. *Stav $i \in \mathcal{S}$ se nazývá* trvalý nenulový*, pokud*

$$\mathsf{P}_i(\nu_i < \infty) = \mathsf{P}(\nu_i < \infty | S_0 = i) = 1 \;\wedge\; \mathsf{E}_i\, \nu_i = \mathsf{E}(\nu_i | S_0 = i) < \infty.$$

Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce existuje, má-li řetězec všechny stavy trvalé nenulové, viz Dvořák (2016, Věta 13).

1.2 Modelování BMS

Uvažujeme systém s konečně mnoha třídami, kde přechod mezi nimi závisí pouze na počtu řidičem nahlášených škod v předchozím roce. Pravidla přechodu takového systému můžeme reprezentovat následující posloupností matic:

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} t_{00}(k) & \cdots & t_{0s}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s0}(k) & \ldots & t_{ss}(k) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

kde $t_{ij}(k)$ je rovno 1, nastane-li přesun ze třídy i do třídy j při nahlášení k škod v minulém roce, jinak je rovno 0.

Dále potřebujeme znát pravděpodobnostní rozdělení počtů nahlášených škod jedním řidičem v jednotlivých letech. Nechť se tyto náhodné veličiny řídí Poissonovým rozdělením s parametrem ϑ, jsou nezávislé a stejně rozdělené. Pak můžeme jednokrokovou matici přechodu zapsat jako

$$\mathbf{P}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N = k) \cdot \mathbf{T}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, \mathbf{T}_k.$$

Příklad. Mějme BMS složený ze šesti bonusových tříd označených pro jednoduchost 0, 1, 2, 3, 4, 5. Řidič ve třídě 0 má největší bonus – platí nejmenší pojistné a ve třídě 5 je tomu naopak. V systému platí tato pravidla přechodu: pokud za daný rok není nahlášena škoda, v roce následujícím se řidič posune o jednu třídu směrem dolů (resp. zůstane v nejlepší třídě), pokud je hlášeno k škod za daný rok, v roce následujícím se naopak řidič posune o $3k$ tříd směrem nahoru (resp. do nejhorší třídy). Zkráceně značíme tato pravidla přechodu jako $-1/+3$ a reprezentujeme je maticemi $T_k,\ k \in \mathbb{N}_0$.

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pro } k \geq 2.$$

Jednokroková matice přechodu pro pojistníka s očekávanou roční frekvencí škod ϑ je

$$\mathbf{P}(\vartheta) = \begin{pmatrix} e^{-\vartheta} & 0 & 0 & \vartheta e^{-\vartheta} & 0 & 1 - e^{-\vartheta}(1+\vartheta) \\ e^{-\vartheta} & 0 & 0 & 0 & \vartheta e^{-\vartheta} & 1 - e^{-\vartheta}(1+\vartheta) \\ 0 & e^{-\vartheta} & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\vartheta} \\ 0 & 0 & e^{-\vartheta} & 0 & 0 & 1 - e^{-\vartheta} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\vartheta} & 0 & 1 - e^{-\vartheta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\vartheta} & 1 - e^{-\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Jelikož se pojistník může v uvažovaných systémech pohybovat mezi všemi třídami, které reprezentují množinu stavů řetězce, je MŘ popisující BMS nerozložitelný. Všechny stavy tedy musí být stejného typu (Dvořák, 2016, Věta 10). Vzhledem k tomu, že máme konečný počet tříd, tak nemohou být všechny stavy přechodné a neexistují zde stavy trvalé nulové (Dvořák, 2016, Věta 11). Tudíž musíme mít všechny stavy trvalé nenulové a stacionární rozdělení řetězce reprezentující BMS existuje.

Definice 8 (relativita). *Relativita spojená s třídou ℓ (r_ℓ) určuje násobek základního pojistného, který platí pojistník v dané bonusové třídě.*

Pojistné ve třídě ℓ můžeme vyjádřit jako $r_\ell \cdot ZP$, kde ZP je základní pojistné.

2. Míry efektivity

V této kapitole definujeme dvě míry efektivity v souladu s hlavním zdrojem práce (Denuit a kol., 2007, Kapitola 5.3). Pro jednoduchost nebudeme uvažovat apriorní segmentaci klientů do tarifních tříd, ale budeme chápat celý pojistný kmen jako jedinou tarifní třídu.

2.1 Loimarantova efektivita

Definice 9. *Označme $\bar{r}(\vartheta)$ průměrnou relativitu, jakmile byl dosažen stacionární stav pojistníkem s roční očekávanou frekvencí škod ϑ, formálně vyjádřenou jako*

$$\bar{r}(\vartheta) = \sum_{j=0}^{s} \pi_j(\vartheta) r_j.$$

Definice 10 (Loimarantova efektivita)**.** *$Eff_{Loi}(\vartheta)$ je definována jako*

$$Eff_{Loi}(\vartheta) = \frac{\frac{\mathrm{d}\bar{r}(\vartheta)}{\bar{r}(\vartheta)}}{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta}} = \frac{\mathrm{d}\ln \bar{r}(\vartheta)}{\mathrm{d}\ln \vartheta}.$$

Pokud by byla $Eff_{Loi}(\vartheta) = 1$, znamenalo by to, že změna očekávané škodní frekvence způsobí procentuálně stejnou změnu ve vybraném pojistném. Jinými slovy změna očekávané škodní frekvence o $1\,\%$ způsobí $Eff_{Loi}(\vartheta)\%$ změnu ve vybraném pojistném. V ideálním případě bychom chtěli obdržet hodnotu efektivity jednotkovou, aby bylo břemeno nákladů na pokrytí nahlášených škod spravedlivě rozloženo mezi pojistníky.

Pro výpočet $Eff_{Loi}(\vartheta)$ potřebujeme určit derivaci $\bar{r}(\vartheta)$ vzhledem k očekávané roční frekvenci škod ϑ. Tato derivace je dána vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \sum_{j=0}^{s} \frac{\mathrm{d}\pi_j(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\, r_j. \tag{2.1}$$

Zaveďme náhodnou veličinu Θ reprezentující heterogenitu pojistného kmene ve smyslu různých individuálních parametrů jednotlivých řidičů.

Efektivitu portfolia spočteme jako globální Loimarantovu efektivitu

$$Eff_{Loi} = \mathsf{E}\left[Eff_{Loi}\big(\Theta\big)\right].$$

2.2 De Prilova efektivita

Nyní budeme uvažovat časovou hodnotu peněz. Označme jako $V_\ell^{(n)}(\vartheta)$ *očekávanou současnou hodnotu zaplaceného pojistného během následujících n let pojistníkem s očekávanou roční škodní frekvencí ϑ, který se aktuálně nachází ve škodní třídě ℓ.* $V_\ell^{(n)}(\vartheta)$ splňuje následující rekurentní vztah:

$$V_\ell^{(n)}(\vartheta) = b_\ell + v \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N = k | \Theta = \vartheta) V_{T_k(\ell)}^{(n-1)}(\vartheta), \quad \ell = 0, 1, \ldots, s, \tag{2.2}$$

kde $v < 1$ je diskontní faktor a b_ℓ značí pojistné placené pojistníkem se škodní frekvencí ϑ ve třídě ℓ a lze jej vyjádřit jako $r_\ell \cdot ZP$ a $T_k(l)$ značí třídu, do které se dostaneme, jsme-li ve třídě l a nahlásíme-li k škod, respektive sloupcový index jednotkového prvku matice T_k nacházejícího se v l-tém řádku.

Limitním přechodem pro n jdoucí do nekonečna z rovnosti 2.2 dostaneme za předpokladu Poissonova rozdělení počtu škod nahlášených řidičem s očekávanou roční škodní frekvencí ϑ

$$V_\ell(\vartheta) = b_\ell + v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta) V_{T_k(\ell)}(\vartheta), \quad \ell = 0, 1, \ldots, s. \tag{2.3}$$

Tato soustava rovnic má právě jedno řešení. Důkaz viz Lemaire (1995, s. 87).

Definice 11 (De Prilova efektivita)**.** *$Eff_{DeP}(\ell, \vartheta)$ je definována jako*

$$Eff_{DeP}(\ell, \vartheta) = \frac{\mathrm{d} \ln V_\ell(\vartheta)}{\mathrm{d} \ln C_\ell(\vartheta)}, \tag{2.4}$$

kde $V_\ell(\vartheta)$ je očekávaná současná hodnota celkově zaplaceného pojistného během následujících let (bereme-li v úvahu nekonečný časový horizont) pojistníkem s očekávanou roční frekvencí škod ϑ, který je ve třídě ℓ a $C_\ell(\vartheta)$ je očekávaná současná hodnota všech úhrnů škod pro pojistníka s očekávanou roční frekvencí škod ϑ, který je ve třídě ℓ.

Zde způsobí 1% změna očekávané současné hodnoty celkového úhrnu škod změnu o $Eff_{DeP}(\ell, \vartheta)\,\%$ v očekávané současné hodnotě celkově zaplaceného pojistného.

Definice 12. Složené Poissonovo rozdělení *je rozdělení náhodné veličiny*

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

kde $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin a N je náhodná veličina nezávislá na $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$, která má Poissonovo rozdělení.

Předpokládáme-li, že celkový roční úhrn škod má složené rozdělení z definice 12, pak očekávaný celkový roční úhrn škod můžeme vyjádřit jako

$$\mathsf{E}\, S = \vartheta \cdot \mathsf{E}\, X, \tag{2.5}$$

kde $\mathsf{E}\, X$ nezávisí na ϑ. Očekávanou současnou[1] hodnotu všech úhrnů škod pak můžeme rozepsat jako

$$C_\ell(\vartheta) = \sum_{t=1}^{\infty} \vartheta\, \mathsf{E}\, X \cdot v^t = \vartheta\, \mathsf{E}\, X \cdot \frac{1}{i}.$$

Vztah 2.4 můžeme zredukovat na

$$Eff_{DeP}(\ell, \vartheta) = \frac{\mathrm{d}V_\ell(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}C_\ell(\vartheta)} \cdot \frac{C_\ell(\vartheta)}{V_\ell(\vartheta)} = \frac{\mathrm{d}V_\ell(\vartheta)}{V_\ell(\vartheta)} \cdot \frac{\vartheta}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d} \ln V_\ell(\vartheta)}{\mathrm{d} \ln \vartheta}, \tag{2.6}$$

[1] Uvažujeme výplatu pojistných plnění na konci roku, ve kterém byla škoda nahlášena.

pro $\ell = 0, 1, \ldots, s$. Došli jsme k obdobné formulaci jako pro Loimarantovu efektivitu s tím rozdílem, že závisí na počáteční třídě a že místo průměrně vybraného pojistného při dosažení stacionárního stavu se zaměřujeme na očekávanou hodnotu diskontovaného pojistného.

Globální efektivitu opět vypočteme jako střední hodnotu

$$Eff_{DeP}(\ell) = \mathsf{E}\left[Eff_{DeP}\Big(\ell, \Theta\Big)\right].$$

3. Aplikace v praxi

Budeme se zabývat výpočtem efektivit z definice 10 a 11 pro BMS užívané v praxi. Pro srovnání jsme vybrali dvě velké pojišťovny působící v České republice, a to Kooperativu pojišťovnu, a.s., V. I. G. (dále jen Kooperativa) a Generali Českou pojišťovnu, a.s. (dále jen Česká pojišťovna). Všechny numerické výsledky jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa.

3.1 BMS Kooperativy v roce 2021

Při stanovení základního pojistného pojistitel vychází z údajů poskytnutých Českou kanceláří pojistitelů (ČKP). Stupeň bonusu, či malusu pro první období je uveden v pojistné smlouvě a dále se mění podle počtu nahlášených škod – nenastane-li žádná během 12 měsíců, pak se BM zvyšuje o jeden stupeň (resp. zůstává největší bonus) a za každou nastalou škodu se snižuje o tři stupně (resp. se nastaví největší malus) – s platností od počátku pojistného období, které následuje (viz Kooperativa pojišťovna, 2019a, s. 3).

V tabulce 3.1 jsou uvedeny aktuální (platné od roku 2019) stupně bonusů a malusů s pravidly přechodu $-1/+3$. Ve třídě s nejvyšším bonusem pojistníci platí pouze polovinu základního pojistného, kdežto na opačném konci je placen více než dvojnásobek základního tarifního pojistného (viz Kooperativa pojišťovna, 2019b, s. 16).

Třída	**Bonus**	**Malus**
B10	50 %	
B9	45 %	
B8	40 %	
B7	35 %	
B6	30 %	
B5	25 %	
B4	20 %	
B3	15 %	
B2	10 %	
B1	5 %	
B0	0 %	0 %
M1		10 %
M2		20 %
M3		30 %
M4		50 %
M5		80 %
M6		120 %

Tabulka 3.1: Bonus–malus systém Kooperativy 2021

Máme tedy následující relativity:

$$\mathbf{r} = (0{,}5\ \ 0{,}55\ \ 0{,}6\ \ 0{,}65\ \ 0{,}7\ \ 0{,}75\ \ 0{,}8\ \ 0{,}85\ \ 0{,}9\ \ 0{,}95\ \ 1\ \ 1{,}1\ \ 1{,}2\ \ 1{,}3\ \ 1{,}5\ \ 1{,}8\ \ 2{,}2)^\top.$$

3.1.1 Výpočet Loimarantovy efektivity

Pro přehlednost uvedeme podrobněji pouze výpočet pro jeden konkrétně zvolený parametr $\vartheta = 0{,}1$ i s mezivýsledky. Nejprve dle rovnic 1.4 vypočteme stacionární rozdělení (výsledky jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa):

$$\boldsymbol{\pi} \doteq \begin{pmatrix} 0{,}669 \\ 0{,}070 \\ 0{,}078 \\ 0{,}086 \\ 0{,}028 \\ 0{,}024 \\ 0{,}019 \\ 0{,}009 \\ 0{,}007 \\ 0{,}004 \\ 0{,}002 \\ 0{,}002 \\ 0{,}001 \\ 0{,}001 \\ 0{,}000 \\ 0{,}000 \\ 0{,}000 \end{pmatrix}.$$

Z definice 9 vypočteme průměrnou relativitu jako $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{r}$, tedy $\bar{r}(0{,}1) \doteq 0{,}554$. Loimarantovu efektivitu vypočteme z definice 10, kde za $\mathrm{d}\bar{r}(\vartheta)/\mathrm{d}\vartheta$ dosadíme pomocí vzorce 2.1. Dosazením za $\vartheta = 0{,}1$ obdržíme hodnotu

$$Eff_{Loi}(0{,}1) \doteq 0{,}169.$$

Taková by byla efektivita pro jednoho řidiče s očekávanou roční škodní frekvencí 0,1. Nás ale bude zajímat celková efektivita portfolia, ve kterém jsou zastoupeni řidiči s různými očekávanými škodními frekvencemi.

Definice 13 (Portfolio P)**.** *Uvažujme portfolio složené ze 75,4 % dobrých řidičů s očekávanou frekvencí škod 0,1, z 19,8 % průměrných řidičů s frekvencí 0,3 a ze 4,8 % špatných řidičů s očekávanou škodní frekvencí 0,5. Nechť jsou tito všichni řidiči umístěni v jedné tarifní třídě.*

Definice 14. *Uvažujme diskrétní náhodnou veličinu N a spojitou náhodnou veličinu Θ s distribuční funkcí $U(y)$, pro $y > 0$, je-li podmíněné rozdělení náhodné veličiny N při dané realizaci $\Theta = \vartheta$ Poissonovo s parametrem ϑ, pak N má* smíšené Poissonovo rozdělení *s pravděpodobnostní funkcí*

$$\mathsf{P}(N = n) = \int_0^\infty \frac{y^n}{n!} e^{-y} \mathrm{d}U(y),\ n = 0{,}1, \ldots .$$

Při odvození složení portfolia P jsme předpokládali, že roční počet škod nahlášených jedním řidičem má smíšené Poissonovo rozdělení odvozené jako Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem, který se řídí gama rozdělením. Denuit a kol. (2007) používají pro náhodnou veličinu Φ reprezentující zbytkovou heterogenitu jedné tarifní třídy gama rozdělení se shodnými parametry, konkrétně pro portfolio 14 505 belgických řidičů z roku 1997 odhadnutými hodnotou $a = 1{,}065$, tj. s hustotou

$$f_\Phi(x) = \frac{a^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} \exp(-ax),\ \text{pro } x \in (0,\infty),\ \text{jinak } f_\Phi(x) = 0.$$

V našem případě jediné tarifní třídy provedeme transformaci $\Theta = \lambda\Phi$, kde λ je konstanta vyjadřující průměrnou očekávanou roční škodní frekvenci celého pojistného kmene. Odvoďme nyní rozdělení náhodné veličiny Θ reprezentující heterogenitu pojistného kmene. Pro distribuční funkci platí

$$F_\Theta(x) = \mathsf{P}\left(\Theta \le x\right) = \mathsf{P}\left(\Phi \le \frac{x}{\lambda}\right) = F_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Zřejmě tedy Θ má gama rozdělení s hustotou

$$f_\Theta(x) = \frac{\left(\frac{a}{\lambda}\right)^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} \exp\left(-\frac{a}{\lambda}x\right),\ \text{pro } x \in (0,\infty),\ \text{jinak } f_\Theta(x) = 0. \tag{3.1}$$

Za λ dosadíme 0,1474 – vážený průměr očekávaných ročních škodních frekvencí jednotlivých tarifních tříd z Tabulky 2.7 (Denuit a kol., 2007). Provedeme diskretizaci, kdy hodnoty větší než 0,6 neuvažujeme, protože mají zanedbatelnou pravděpodobnost $\mathsf{P}(\Theta > 0{,}6) < 0{,}0151$. Interval $(0; 0{,}6]$ rozdělíme na tři stejně velké podintervaly, přes které zintegrujeme hustotu z 3.1, výsledné hodnoty podělíme $\int_0^{0,6} f_\Theta(x)\mathrm{d}x$ a dostaneme diskrétní rozdělení, pro které platí

$$\mathsf{P}\left(\Theta = 0{,}1\right) = 0{,}754,\quad \mathsf{P}\left(\Theta = 0{,}3\right) = 0{,}198,\quad \mathsf{P}\left(\Theta = 0{,}5\right) = 0{,}048.$$

Bez újmy na obecnosti lze tento model jednoduše rozšířit i pro více různých škodních frekvencí, ale my se zde pro jednoduchost budeme zabývat pouze tímto příkladem se třemi kategoriemi řidičů.

Řidič	**dobrý**	**průměrný**	**špatný**
ϑ	0,1	0,3	0,5
$Eff_{Loi}(\vartheta)$	0,169	1,060	0,407
Eff_{Loi}		0,357	

Tabulka 3.2: Loimarantova efektivita BMS Kooperativy 2021 pro portfolio P

Kód pro výpočet globální Loimarantovy efektivity je uveden v příloze A.1.

3.1.2 Výpočet De Prilovy efektivity

Nejprve vyřešíme soustavu rovnic 2.3 o 17 neznámých. Numerické výsledky jsou uvedeny diskontované úrokovou mírou 1 % se základním tarifním pojistným 1 000 Kč pro parametr $\vartheta = 0{,}1$:

$$V_0 \doteq 55\,688,\ V_1 \doteq 55\,769,\ V_2 \doteq 55\,930,\ V_3 \doteq 56\,171,\ V_4 \doteq 56\,490,\ V_5 \doteq 56\,888,$$

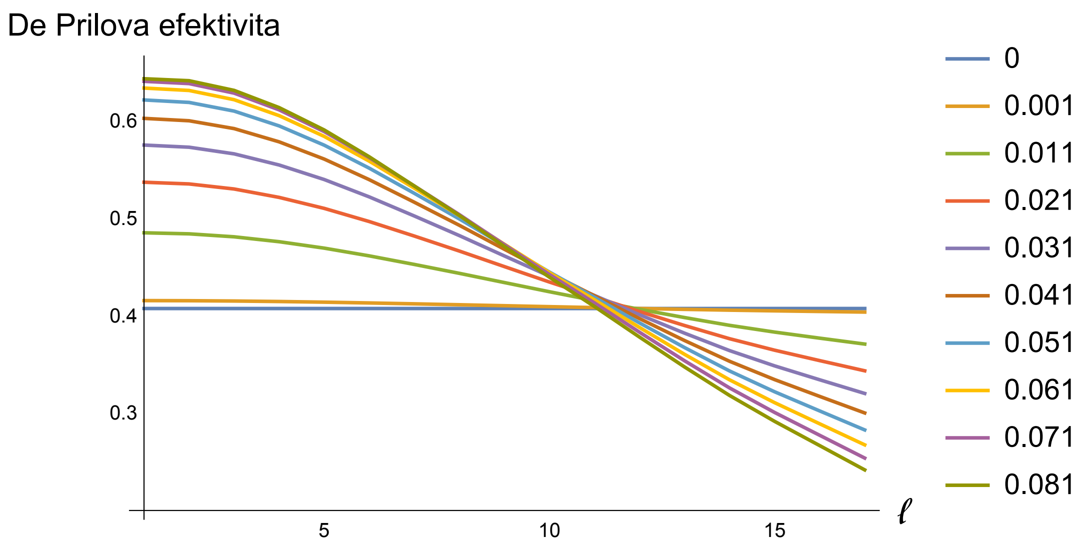
$$V_6 \doteq 57\,364,\ V_7 \doteq 57\,919,\ V_8 \doteq 58\,558,\ V_9 \doteq 59\,283,\ V_{10} \doteq 60\,099,\ V_{11} \doteq 61\,047,$$

$$V_{12} \doteq 62\,126,\ V_{13} \doteq 63\,346,\ V_{14} \doteq 64\,639,\ V_{15} \doteq 66\,097,\ V_{16} \doteq 67\,803.$$

Tedy například pro pojistníka v nejlepší bonusové třídě je očekávaná současná hodnota zaplaceného pojistného během následujících let, má-li očekávanou škodní frekvenci 0,1, zhruba 55 688 Kč. Následně obecné vyjádření v proměnné ϑ zderivujeme podle této proměnné a vynásobíme $\vartheta/V_\ell(\vartheta)$ pro všechna $\ell \in \mathcal{S}$. Na závěr dosadíme za ϑ, b_ℓ, v.

Třída	$Eff_{DeP}(\ell, 0{,}1)$	$Eff_{DeP}(\ell, 0{,}3)$	$Eff_{DeP}(\ell, 0{,}5)$
B10	0,157	1,005	**0,479**
B9	0,157	**1,006**	0,478
B8	0,159	1,005	0,475
B7	0,161	1,004	0,471
B6	0,163	1,000	0,465
B5	0,166	0,994	0,457
B4	0,170	0,986	0,449
B3	0,174	0,975	0,441
B2	0,179	0,963	0,432
B1	0,184	0,948	0,423
B0	0,190	0,932	0,415
M1	0,195	0,915	0,407
M2	0,199	0,897	0,399
M3	0,203	0,878	0,392
M4	**0,204**	0,861	0,385
M5	0,202	0,845	0,379
M6	0,197	0,828	0,374

Tabulka 3.3: De Prilova efektivita BMS Kooperativy 2021 se zvýrazněnými maximálními hodnotami pro různé očekávané škodní frekvence



Obrázek 3.1: Graf závislosti De Prilovy efektivity na počáteční třídě ℓ pro různé úrokové míry znázorněné v legendě s parametrem $\vartheta = 0{,}5$, kde 1 odpovídá třídě B10, atd. až 17 odpovídá třídě M6 pro BMS Kooperativy 2021

Pokud bychom hypoteticky znali očekávanou roční škodní frekvenci nového klienta, počáteční třídu budeme volit tak, abychom maximalizovali De Prilovu efektivitu. Konkrétně pro škodní frekvenci 0,1 by to byla třída M4 (viz Tabulka 3.3).

Třída	$Eff_{DeP}(\ell)$
B10	0,340
B9	0,341
B8	0,342
B7	0,342
B6	0,343
B5	0,344
B4	0,345
B3	0,346
B2	0,346
B1	0,347
B0	0,348
M1	**0,348**
M2	0,347
M3	0,346
M4	0,343
M5	0,338
M6	0,331

Tabulka 3.4: Globální De Prilova efektivita BMS Kooperativy 2021 pro portfolio P

Nejvyšší hodnoty De Prilovy efektivity by bylo dosaženo, pokud bychom všechny pojistníky na začátku zařadili do třídy M1[1] (viz Tabulka 3.4). Jak můžeme vidět z tabulky 3.2 a 3.4, Loimarantova efektivita portfolia P vychází nepatrně vyšší.

Pro úrokovou míru i jdoucí k nule, a tedy diskontní faktor v jdoucí k jedničce, přestává De Prilova efektivita záviset na počáteční třídě (viz Obrázek 3.1).

[1] Před zaokrouhlením má třída B0 nižší efektivitu, numerický výsledek je k nalezení v příloze A.2.

3.2 BMS České pojišťovny v roce 2013

Pro Českou pojišťovnu bohužel nebylo možné zjistit aktuální data, proto byly údaje převzaty z bakalářské práce Novák (2013, s. 27). Česká pojišťovna se tehdy řídila také pravidly přechodu $-1/+3$, ovšem s tím rozdílem, že se rozdělení do tříd řídilo podle tzv. rozhodné doby. [2]

Česká pojišťovna		
Třída	**Bonus**	**Malus**
B10	50 %	
B9	45 %	
B8	40 %	
B7	35 %	
B6	30 %	
B5	25 %	
B4	20 %	
B3	15 %	
B2	10 %	
B1	5 %	
B0	0 %	0 %
M1		10 %
M2		20 %
M3		40 %
M4		70 %
M5		100 %

Tabulka 3.5: Bonus–malus systém České pojišťovny 2013

Všimněme si, že od systému Kooperativy (Tabulka 3.1) se BMS České pojišťovny liší pouze relativitami ve třídách M3–M5 a absencí třídy M6 (viz Tabulka 3.5).

Řidič	**dobrý**	**průměrný**	**špatný**
$Eff_{Loi}(\vartheta)$	0,168	0,969	0,396
Eff_{Loi}		0,337	
ℓ	M3	B9	B10
$Eff_{DeP}(\ell,\vartheta)$	0,195	0,920	0,456

Tabulka 3.6: Efektivity BMS České pojišťovny 2013 pro portfolio P

Srovnáme-li výsledky pro portfolio P BMS České pojišťovny 2013 a Kooperativy 2021, tak o něco málo efektivnější systém má Kooperativa.

[2] Za každý rok trvání pojištění bez nehody se pojistníkovi navýšila rozhodná doba o 12 měsíců, kdežto za každou nahlášenou nehodu se tato rozhodná doba snížila o 36 měsíců. Podle hodnoty rozhodné doby se pak určila bonusová třída. Abychom dostali homogenní MŘ s konečnou množinou stavů je nutné ještě udělat úpravu: stanovit, že z nejhorší, resp. nejlepší třídy se klient po roku beze škody, resp. po nahlášení škody přesouvá do jiné třídy bez ohledu na rozhodnou dobu.

Třída	$Eff_{DeP}(\ell)$
B10	0,321
B9	0,322
B8	0,323
B7	0,324
B6	0,325
B5	0,325
B4	0,326
B3	0,327
B2	0,328
B1	0,328
B0	**0,328**
M1	0,328
M2	0,327
M3	0,324
M4	0,320
M5	0,313

Tabulka 3.7: Globální De Prilova efektivita BMS České pojišťovny 2013 pro portfolio P

3.2.1 Srovnání se systémem Kooperativy 2013

Pro porovnání zde bude uveden BMS Kooperativy z téhož roku jako byl uveden pro Českou pojišťovnu zdroj Novák (2013, s. 28). Řídí se pravidly přechodu $-1/+2$ a sazby i třídy má stejné jako v roce 2021 (viz Tabulka 3.1).

Řidič	**dobrý**	**průměrný**	**špatný**
$Eff_{Loi}(\vartheta)$	0,064	1,311	0,770
Eff_{Loi}		0,345	
ℓ	M5	B2	B10
$Eff_{DeP}(\ell,\vartheta)$	0,107	1,109	0,870

Tabulka 3.8: Efektivity BMS Kooperativy 2013 pro portfolio P

Opět nám vyšla maximální hodnota De Prilovy efektivity pro portfolio P nižší než Loimarantova efektivita pro stejné portfolio. Pokud bychom volili třídu M2 jako počáteční, měli bychom o něco málo spravedlivější systém, co se týká rozložení břemene nákladů na pojistná plnění mezi pojistníky. Ovšem stále jsme hodně daleko od jednotkové hodnoty. Ve srovnání s Českou pojišťovnou v témže roce (Tabulka 3.6 a 3.7) má Kooperativa (Tabulka 3.8 a 3.9) méně efektivnější systém pro naše portfolio P z hlediska Loimarantovy efektivity. Nicméně, hodnoty De Prilovy efektivity nám říkají opak. Kooperativa za 8 let zefektivnila BMS tak, že je o něco lepší než systém České pojišťovny z roku 2013, co se obou efektivit týká.

Třída	$Eff_{DeP}(\ell)$
B10	0,298
B9	0,299
B8	0,301
B7	0,303
B6	0,306
B5	0,308
B4	0,311
B3	0,313
B2	0,315
B1	0,317
B0	0,318
M1	0,318
M2	**0,319**
M3	0,318
M4	0,316
M5	0,312
M6	0,305

Tabulka 3.9: Globální De Prilova efektivita BMS Kooperativy 2013 pro portfolio P

Závěr

V této práci jsme se zabývali systémy bonus–malus dvou významných pojišťoven působících v České republice. Zkoumali jsme pouze systémy z oblasti povinného ručení. Po stručném uvedení markovských řetězců v první kapitole jsme si uvedli jednoduchý ilustrační příklad, který jsme převedli formálně do maticového zápisu. Bonus–malus se skládá z určitého počtu tříd a pravidel přechodu mezi nimi. Pro každou třídu je dána určitá relativní sazba pojistného, která upravuje sazbu základního pojistného tak, abychom dostali z dlouhodobého hlediska spravedlivější výslednou sazbu s ohledem na klientovu aktuální nehodovost, resp. rizikovost. Zvolili jsme si dvě míry účinnosti, pomocí kterých jsme porovnávali jednotlivé systémy. Loimarantovu i De Prilovu efektivitu jsme si vyjádřili jako elasticitu, představující citlivost průměrné sazby pojistného placeného ve stacionárním stavu, respektive celkově zaplaceného diskontovaného pojistného v nekonečném časovém horizontu, na změnu očekávané škodní frekvence.

V praktické části jsme představili aktuálně používaný systém Kooperativy a na něm do detailu popsali postup výpočtu obou efektivit. Pro další dva systémy z roku 2013 od České pojišťovny a Kooperativy jsme uvedli pouze konečné výsledky. Vypočetli jsme, že hodnoty obou efektivit se od sebe příliš neliší a jsou vzdálené od hodnoty 1. Celkově nejlepší systém, hodnotíme-li efektivitu, je ten aktuálně používaný Kooperativou. Ovšem v roce 2013 nemůžeme jednoznačně říci, která pojišťovna měla lepší systém, vzhledem k tomu, že výsledné hodnoty Loimarantovy efektivity tvrdily opak, než tomu bylo u hodnot efektivity De Prilovy. V závěrečném srovnání můžeme říct, že ve všech systémech platí pojistníci s nižším rizikovým parametrem za ty s vyšším, jelikož zvýšení rizikovosti o 10% se promítne maximálně jako 3,57% růst[3] v placeném pojistném. Takový systém je výhodnější pro horší řidiče, kteří hlásí více nehod, než pro ty dobré.

Další práce v této oblasti by se mohly v praktické části zaměřit na pojistný kmen rozdělený do několika tarifních tříd, kde v každé z nich reprezentuje náhodná veličina s jednotkovou střední hodnotou zbytkovou heterogenitu tarifní třídy. Případně tím, jak upravit BMS, aby byl co nejspravedlivější – zvolit jiná pravidla přechodu a optimální relativity. I kdybychom ale vymysleli dokonalý systém, bude jej těžké v praxi implementovat, kvůli zákaznické nespokojenosti s nárůstem sazeb, či přísnějšími pravidly a kvůli zachování konkurenceschopnosti.

[3]Systém Kooperativy pro rok 2021.

Seznam použité literatury

Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S. a Walhin, J. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*. Chichester: Wiley. ISBN 978-0-470-02677-9.

Dvořák, J. (2016). Markovovy řetězce [online]. [cit. 2021-07-13]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~dvorak/teaching/2015_2016/NMFM310/NMFM310_2016_kap4.pdf.

Kooperativa pojišťovna, a.s., V. I. G. (2019a). Sazebník s/7517-2 pro pojištění vozidla [online]. [cit. 2021-06-28]. Dostupné z: https://www.klikpojisteni.cz/pojistne-podminky/kooperativa/car/2020_08/Sazebnik_pro_pojisteni_vozidla.pdf.

Kooperativa pojišťovna, a.s., V. I. G. (2019b). Soubor pojistných podmínek pro pojištění vozidel [online]. [cit. 2021-06-28]. Dostupné z: https://www.koop.cz/dokumenty/pojisteni-vozidel-zakladni-dokumenty/soubor-dokumentu-k-pojisteni-vozidel-2/Soubor%20dokumentu%20k%20poji%c5%a1t%c4%9bn%c3%ad%20vozidel.pdf.

Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance*. II. Series. New York: Springer. ISBN 978-94-010-42758.

Novák, T. (2013). *Bonus–malus systém v pojištění automobilů*. Brno. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Ekonomicko-správní fakulta, Katedra financí. Vedoucí bakalářské práce Silvie Kafková.

Zvára, K. a Štěpán, J. (2012). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 5. vydání. Praha: Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-388-4.

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

BMS	bonus–malus systém
BM	bonus–malus
MŘ	Markovův řetězec
ČKP	Česká kancelář pojistitelů

A. Přílohy

A.1 Výpočet Loimarantovy efektivity portfolia pro BMS Kooperativy 2021

t	parametr vyjadřující očekávanou škodní frekvenci
$P(t)$	matice přechodu pro příslušný BMS (čtvercová řádu 17)
$StacRoz$	vektor stacionárního rozdělení v proměnné t (dimenze 17)
$DerStacRoz$	vektor derivací StacRoz vzhledem k t
r	vektor relativit
$DRpruhDtheta$	derivace průměrné relativity podle t
$LoiEfPf$	Loimarantova efektivita portfolia P

Pomocné:
$x\dots$ vektor dimenze 17

```
StacRoz = Solve[{x == x.P[t], Total[x] == 1}, x];
DerStacRoz = D[StacRoz // Values, t];
DRpruhDtheta = (iDerStacRoz.r);
(LoiEfvTheta = DRpruhDtheta t/(Values[StacRoz].r));
thety = {0.1, 0.3, 0.5};
rozlozeni = {0.754, 0.198, 0.048};
LoiEfPf = Sum[rozlozeni[[i]] LoiEfvTheta/.t -> thety[[i]], {i, 1, 3}]

{0.356622}
```

A.2 Výpočet De Prilovy efektivity portfolia pro BMS Kooperativy 2021

t	parametr vyjadřující očekávanou škodní frekvenci
$P(t)$	matice přechodu pro příslušný BMS (čtvercová řádu 17)
r	vektor relativit
Vl	vektor $V_\ell \ \forall \ell \in \mathcal{S}$ (dimenze 17)
Bl	vektor $b_\ell \ \forall \ell \in \mathcal{S}$
$DepEf$	De Prilova efektivita v závislosti na t, Bl a v
$dobri$	De Prilova efektivita pro $v = \frac{1}{1{,}01}$, $t = 0{,}1$ a $Bl = 1000\,r$
$prumerni$, $spatni$	viz výše pro $t = 0{,}3$ a $0{,}5$
$DePEfPf$	De Prilova efektivita portfolia P

Pomocné:
$VV \ldots$ vektor dimenze 17

```
Vl = Solve[Thread[VV == Bl + v*P[t].VV], VV];
DepEf = ((D[Vl // Values, t]*t)/Values[Vl]);
dobri = N[Flatten[
       dlnVdlnTheta/.v->1/1.01/.t->0.1/.Thread[Bl->xX r]/.xX->1000]];
prumerni = N[Flatten[
       dlnVdlnTheta/.v->1/1.01/.t->0.3/.Thread[Bl->xX r]/.xX->1000]];
spatni = N[Flatten[
       dlnVdlnTheta/.v->1/1.01/.t->0.5/.Thread[Bl->xX r]/.xX->1000]];
DePEfPf = 0.754*dobri + 0.198*prumerni + 0.048*spatni

{0.340194, 0.340743, 0.341558, 0.342464, 0.343371, 0.344212, 0.344978,
 0.345706, 0.346355, 0.346952, 0.347546, 0.347576, 0.346992, 0.345794,
 0.342759, 0.337757, 0.330601}
```