Posudek oponenta bakalářské práce	
Název:	Glivenkova-Cantelliho věta a její zobecnění
Autor:	Zdeněk Pustějovský

Shrnutí obsahu práce

Předložená bakalářská práce se věnuje vybraným tématům z teorie empirických procesů. Zaměřuje se na Glivenkovu-Cantelliho větu, a to nejprve na podrobný důkaz klasického znění věty pro empirickou distribuční funkci a důkaz stejnoměrné konvergence výběrových kvantilů ke skutečným, a dále na zobecněnou verzi věty pro třídy funkcí s konečným bracketing number.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Zadané téma je vhodné pro bakalářskou práci. Způsob zpracování považuji za zdařilý, zadání práce bylo splněno.

Vlastní příspěvek. Vlastní příspěvek autora práce spočívá v podrobném rozepsání důkazů vět 2, 5 a 6, které jsou v dostupné literatuře provedeny velmi stručně. Dále autor na několika příkladech spojitých i diskrétních rozdělení ilustruje, jak může vypadat množina I z věty 5 (stejnoměrná konvergence výběrových kvantilů). Stejně tak autor diskutuje (s podrobným odvozením) některé zajímavé případy tříd funkcí, které mají konečné bracketing number. Velmi pěkné zpracování příkladů stejně tak jako časté vysvětlující poznámky v textu mě utvrzují v dojmu, že autor práce tématu porozuměl a nečiní mu problém ovládat i složitější matematické techniky.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je velmi dobrá, text je formulován rigorózně, korektně a srozumitelně. K drobným prohřeškům patří následující: nekonzistence značení (dva různé symboly pro střední hodnotu na straně 3, dva způsoby označení náhodného výběru, $X_1, \dots, X_n$ vs $X_1, X_2, \dots, X_n$), na začátku sekce 1.1 se bez dalšího vysvětlení vyskytuje symbol Ω, o domovském pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se mluví až o dvě strany později, $u_X(\alpha)$ je na začátku sekce 1.3 definováno pro α z $(0,1)$, ale později se v práci vyskytuje $u_X(\alpha)$ pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$, v kapitole 2 mluvíme o náhodných veličinách s hodnotami v obecném měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, v definici 1 ovšem bez vysvětlujícího komentáře uvažujeme $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, a poté opět přecházíme k obecnému $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$.

Práce se zdroji. Zdroje jsou náležitě citovány v souladu se standardy bakalářských prací.

Formální úprava. Po formální stránce je práce na dobré úrovni. Občas se vyskytují překlepy, chybějící slova či čárky ve větě. Po typografické stránce je třeba hlídat mezery v matematickém textu a výrazech typu „Věta 2" (které se v českém textu nepíší s velkým písmenem).

Připomínky a otázky

1. Nad lemmatem 3 se vyskytuje formulace: „Z teorie míry víme, že supremum přes spočetnou množinu měřitelných funkcí je měřitelné". Je možné uvést odkaz na relevantní literaturu?
2. Můžete prosím okomentovat, jak se v důkazu věty 5 v odvození nad rovností (1.14) přejde od první rovnosti ke druhé nerovnosti?
3. V příkladu na straně 11 chceme z množiny I vyloučit α ve tvaru $e^{-1}\sum_{K}^{k=1}\frac{1}{k!}$, proč zde suma nezačíná od $k = 0$?

4. Ve větě 6 se mluví o funkci $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$, přitom v úvodu kapitoly mluvíme o měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$. Obdobně v sekci 2.2.1 se vyskytuje výraz $x \in \mathcal{C}$, ale chceme pracovat s x v prostoru $\mathcal{X}$.

5. V poznámce za větou 6 se využívá silného zákona velkých čísel pro nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny. Jaké jsou předpoklady této věty? Jsou v tomto případě splněny? V obdobném duchu srovnejte výklad bodové konvergence skoro jistě empirického rozdělení $\mathbb{P}_n f$ k Pf z třetího odstavce úvodní kapitoly a začátku 2. kapitoly.

6. V důkazu Glivenkovy-Cantelliho věty pro reálné náhodné vektory za pomoci věty 6 chceme za definicí bracketu $[L_{ij}, U_{ij}]$ index i z množiny $\left\{1, \ldots, N_{[\,]}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}_{d-1}, L_1(P)\right)\right\}$.

7. Ve větě 7 požadujete, aby funkce z třídy $\mathcal{F}$ měly integrabilní majorantu. Vůči jaké míře? Dále uvádíte, že tvrzení věty platí pro libovolnou pravděpodobnostní míru P. Jak souvisí tato míra P s výše zmíněnou integrabilní majorantou?

8. V důkazu věty 7 pracujete se spočetnou hustou množinou $D \subset B$, kde B je otevřená koule v metrickém prostoru (Θ, ϱ). Vůči jakému prostoru je množina D hustá?

9. V prvním příkladu za větou 7 je bráno supremum přes všechna a reálná, má být ovšem nejspíš bráno přes všechna $a \in A$, kde A je omezená a uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$. Zároveň věta 7 vyžaduje existenci společné integrabilní majoranty, jak by tato majoranta vypadala v prvním a třetím příkladu?

10. V příkladu nad větou 8 se při úpravě výrazu $\sup\limits_{t \in T} \left|\mathbb{P}_n\left(f_1^t + i f_2^t\right) - P\left(f_1^t + i f_2^t\right)\right|$ vytratila imaginární jednotka.

11. V příkladu nad větou 10 chcete ke konci důkazu použít postup z důkazu věty 2 na člen, který obsahuje $\mathbb{E}K\left(\frac{t-X}{h_n}\right)$ (a nikoliv G_n) místo F_n. Ve stejném příkladu výše v textu se mluví o spojitosti F_n a myslí se spojitost G_n.

12. V definici 6 se při zavedení množiny dělení D v textu místo α a β objevují písmena a a b.

Závěr

Práce přehledně a srozumitelně zpracovává zajímavé téma. Považuji ji za zdařilou a dobře zvládnutou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Mgr. Kateřina Koňasová
KPMS MFF UK
V Praze, 25. srpna 2021