MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Pešek

Cramérova-Woldova věta

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Název práce: Cramérova-Woldova věta

Autor: Matěj Pešek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cramérova-Woldova věta říká, že každou d-rozměrnou (borelovskou) pravděpodobnostní míru P dokážeme plně charakterizovat P-pravděpodobnostmi všech poloprostorů (množin bodů ležících na jednu stranu od nějaké nadroviny). Ekvivalentně, rozdělení d-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je jednoznačně určeno všemi rozděleními projekcí $\langle \mathbf{X}, u \rangle$, pro u z jednotkové sféry. Cílem práce je detailní zpracování důkazu této důležité věty, a diskuze o jejích možných zobecněních. Potřebujeme znát skutečně všechny projekce $\langle \mathbf{X}, u \rangle$ pro každé u? Projekce v kolika směrech musíme znát, abychom dokázali určit míru P, která přiděluje n různým bodům pravděpodobnosti $1/n$? Jak souvisí Cramérova-Woldova věta s podobnými výsledky známými mimo teorii pravděpodobnosti?

Klíčová slova: míra, charakteristická funkce, projekce, charakterizace měr

Title: The Cramér-Wold theorem

Author: Matěj Pešek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The Cramér-Wold theorem asserts, that every d-dimensional (Borel) probability measure can be characterized by the P-probabilities of all halfspaces (sets of points lying on one side of a given hyperplane). Equivalently, the distribution of each d-dimensional random vector $\mathbf{X}$ is fully described by all distributions of projections $\langle \mathbf{X}, u \rangle$, for u from the unit sphere. The goal of this thesis is a detailed proof of this important theorem, and a discussion on its potential extensions. Do we really need to know all projections $\langle \mathbf{X}, u \rangle$ for each u? Projections in how many directions are necessary to be known to be able to determine a measure P, which assigns to n distinct points masses $1/n$? How does the Cramér-Wold theorem relate to similar results used outside of the probability theory?

Keywords: measure, characteristic function, projection, characterization of measures

Obsah

Úvod

Využití Fourierovy transformace v teorii pravděpodobnosti a definování charakteristických funkcí otevřelo dveře mnoha novým poznatkům. Jedním z nich je věta, kterou v roce 1936 publikovalo duo švédských matematiků Herman Wold a Harald Cramér. V jejich práci (Cramér a Wold, 1936) dokazují, že rozdělení náhodného vektoru o dvou a více složkách je jednoznačně určeno všemi jeho jednorozměrnými projekcemi.

Znění Cramérovy-Woldovy věty je krátké a srozumitelné, za jejím důkazem se ale skrývá spousta teorie, kterou se v této práci budeme zabývat. V první kapitole si ukážeme tři různé postupy, jak tuto větu dokázat. V dalších kapitolách prozkoumáme i problémy, které po vyslovení této věty vyvstaly. Cramérova-Woldova věta tvrdí, že pro jednoznačnost rozdělení potřebujeme znát všechny jeho jednorozměrné projekce, nicméně existuje několik rozdělení náhodného vektoru, pro jejichž jednoznačné určení nám stačí konečně či spočetně mnoho jednorozměrných projekcí. V druhé a třetí části této práce se budeme zabývat tím, jak vlastnosti rozdělení náhodného vektoru ovlivňují počet projekcí, který je na jednoznačné určení rozdělení nutný. Pokud nevyužíváme všechny projekce, nemůžeme pro rekonstrukci využít teorii z tvrzení Cramérovy-Woldovy věty, a tudíž kromě jednoznačnosti musíme řešit také problém rekonstrukce.

Ve druhé kapitole budeme řešit problém potřebného počtu projekcí a rekonstrukce pro diskrétně rozdělený náhodný vektor. Nejdříve se budeme zabývat potřebným počtem projekcí pro rovnoměrné rozdělení na diskrétní množině, poté budeme studovat další omezení na rozdělení, která sníží počet nutných projekčních přímek. Nakonec budeme problém řešit pro obecné diskrétní rozdělení.

Ve třetí kapitole budeme hledat podmínky, při kterých je obecné rozdělení náhodného vektoru charakterizováno spočetným nekonečnem projekcí. Jak totiž ukážeme, na určení většiny obecných nediskrétních rozdělení konečně mnoho projekcí nestačí. Při studii obecných rozdělení využijeme poznatky pro diskrétní rozdělení získané z druhé kapitoly.

Seznam použitých výrazů

$(x)^+$ kladná část x
$d(x,A)$ vzdálenost bodu x od množiny A
λ^d Lebesguova míra v dimenzi d
$\mathbf{1}_A(x)$ indikátorová funkce množiny A
$\mathbf{E}X$ střední hodnota náhodné veličiny X
$\mathcal{B}$ borelovská σ-algebra
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalární součin
$\operatorname{sgn}(x)$ funkce signum
$\partial(A)$ hranice množiny A
$\mathbf{I}_{n\times n}$ jednotková matice $n \times n$
$\Phi(x)$ chybová funkce
$\|\mathbf{x}\|$ Eukleidovská norma x
$\operatorname{Re}(x)$ reálná část x
$\operatorname{Im}(x)$ imaginární část x
$f|_A$ restrikce funkce f na množině A

1. Cramérova-Woldova věta a její důkaz

1.1 Charakteristická funkce

Abychom mohli Cramérovu-Woldovu větu dokázat, představíme si nejdříve teorii charakteristických funkcí. Ukážeme si postupně, že rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je jednoznačně určeno hodnotami $\mathbf{E}[f(\mathbf{X})]$, kde f je omezená a spojitá, jeho charakteristickou funkcí, a nakonec i rozdělením jeho projekcí do přímek.

Definice 1 (charakteristická funkce)**.** *Nechť* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^\top$ *je d-rozměrný reálný náhodný vektor. Potom funkce definovaná předpisem*

$$\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}[e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}\rangle}], \ \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d,$$

se nazývá charakteristická funkce *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$*. Charakteristickou funkcí* $\hat{\mu}(\mathbf{t})$ *pravděpodobnostní míry* μ *rozumíme charakteristickou funkci náhodného vektoru s rozdělením* μ*.*

Později si ukážeme, že pokud známe hodnoty charakteristické funkce na celém prostoru $\mathbb{R}^d$, pak už známe i rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Předtím ale potřebujeme ještě několik tvrzení.

Definice 2. *Pro* $r > 0$ *označme* Gon_r *množinu všech goniometrických polynomů definovaných na* $\mathbb{R}^d$*, které mají v každé složce* $\mathbf{x}$ *periodu* r*, tj. funkcí*

$$a(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \sin\left\{\frac{2\pi}{r}\langle \mathbf{k}_j, \mathbf{x}\rangle\right\} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_j \cos\left\{\frac{2\pi}{r}\langle \mathbf{l}_j, \mathbf{x}\rangle\right\} \ \textit{pro}\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

kde $\lambda_0, \ldots, \lambda_m, \varphi_0, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$*,* $\mathbf{k}_0, \ldots, \mathbf{k}_m, \mathbf{l}_0, \ldots, \mathbf{l}_n \in \mathbb{Z}^d$ *a* $m,n \in \mathbb{N}$*.*

Lemma 1 (Lachout, 2004, str. 84)**.** *Pokud je funkce* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *spojitá a omezená,* $r > 0$ *a* $1 \geq \varepsilon > 0$*, potom existuje funkce* $a \in Gon_{4r}$ *taková, že*

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |a(\mathbf{x})| \leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| + 1, \tag{1.2}$$

a

$$\max_{\mathbf{x}\in[-r,r]^d} |a(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Důkaz. Nechť máme zadány f, r, ε z předpokladů lemmatu, označme

$$\mathcal{P}_{4r|r} := \{h|_{[-r,r]^d}; h \in Gon_{4r}\}.$$

Pomocí věty 28 z přílohy ukážeme, že $\mathcal{P}_{4r|r}$ je hustá v množině spojitých funkcí z $[-r,r]^d$ do $\mathbb{R}$. Množina Gon_{4r} obsahuje funkci $\cos(\langle \mathbf{0},\mathbf{x}\rangle) \equiv 1$, takže $\mathcal{P}_{4r|r}$ obsahuje nenulovou konstantní funkci. Dále pro libovolné dvě různé funkce $h, g \in Gon_{4r}$ známe jejich tvar z (1.1), z čehož vidíme, že násobek $h(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ budou čtyři dvojité sumy, jejichž výrazy budou v jednom z tvarů

$$\lambda \sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle\right\} \varphi \sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}, \tag{1.4}$$

$$\lambda \sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle\right\} \varphi \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}, \tag{1.5}$$

$$\lambda \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle\right\} \varphi \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}. \tag{1.6}$$

Můžeme ale použít trigonomické vzorce a výrazy upravit. Dostáváme

$$(1.4) = \frac{\lambda\varphi}{2}\left(\cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}-\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\} - \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}+\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}\right),$$

$$(1.5) = \frac{\lambda\varphi}{2}\left(\sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}+\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\} + \sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}-\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}\right),$$

$$(1.6) = \frac{\lambda\varphi}{2}\left(\cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}-\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\} + \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}+\mathbf{l},\mathbf{x}\rangle\right\}\right).$$

Ve všech případech bude $h(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ suma, jejíž výrazy jsou tvaru $\phi F(\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{t},\mathbf{x}\rangle)$, kde F je buď sin nebo cos, $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ a ϕ je reálná konstanta. Bude tedy zapsatelná ve tvaru (1.1). To znamená, že Gon_{4r} je uzavřená na násobení, proto je i $\mathcal{P}_{4r|r}$, což z ní dělá subalgebru množiny spojitých funkcí z $[-r,r]^d$ do $\mathbb{R}$. Ukážeme, že $\mathcal{P}_{4r|r}$ dělí body v $[-r,r]^d$.

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [-r,r]^d$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Potom existuje index $j \in \{1, \ldots, d\}$ tak, že platí $x_j \neq y_j$. Nechť e_j označuje j-tý prvek kanonické báze $\mathbb{R}^d$. Potom

$$\sin\left\{\frac{\pi}{2r}\langle \mathsf{e}_j, \mathbf{x}\rangle\right\}|_{[-r,r]^d} \in \mathcal{P}_{4r|r},$$

a platí

$$\begin{aligned} &\sin\left\{\frac{\pi}{2r}\langle \mathsf{e}_j, \mathbf{x}\rangle\right\} - \sin\left\{\frac{\pi}{2r}\langle \mathsf{e}_j, \mathbf{y}\rangle\right\} \\ &= \sin\left\{\frac{\pi}{2r}x_j\right\} - \sin\left\{\frac{\pi}{2r}y_j\right\} \\ &\overset{\text{trig. vzorec}}{=} 2\cos\left\{\frac{\pi}{4r}(x_j+y_j)\right\}\sin\left\{\frac{\pi}{4r}(x_j-y_j)\right\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Výraz $\sin(\frac{\pi}{4r}(x_j - y_j))$ se rovná nule právě tehdy, když $\frac{x_j-y_j}{4r}$ je celé číslo. Výraz $x_j - y_j$ ale patří z definice do intervalu $[-2r,2r]$, takže $\frac{x_j-y_j}{4r}$ je celé číslo $\Leftrightarrow$ $x_j - y_j = 0$. To ale neplatí, neboť jsme vybrali index j tak, že $x_j \neq y_j$. Takže platí $\sin(\frac{\pi}{4r}(x_j - y_j)) \neq 0$.

Výraz $\cos(\frac{\pi}{4r}(x_j + y_j))$ se rovná nule právě tehdy, když $\frac{x_j+y_j}{2r}$ je liché celé číslo. Také $x_j + y_j$ patří z definice do intervalu $[-2r,2r]$, takže $\frac{x_j+y_j}{2r}$ je liché celé číslo $\Leftrightarrow$ $x_j + y_j = \pm 2r$. To by ale z definice x_j a y_j znamenalo $x_j = y_j = r$ nebo $x_j = y_j = -r$, což ale nemůže nastat, neboť víme, že $x_j \neq y_j$. Díky tomu zjišťujeme, že výraz $\cos(\frac{\pi}{4r}(x_j + y_j))$ i původní výraz (1.7) jsou nenulové, což implikuje

$$\sin\left\{\frac{\pi}{2r}\langle \mathsf{e}_j, \mathbf{x}\rangle\right\} \neq \sin\left\{\frac{\pi}{2r}\langle \mathsf{e}_j, \mathbf{y}\rangle\right\}.$$

Množina $\mathcal{P}_{4r|r}$ tedy opravdu dělí body v $[-r,r]^d$. Z věty 28 víme, že existuje $q \in Gon_{4r}$ takové, že $\max_{\mathbf{x}\in[-r,r]^d} |q(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/2$. Ve výrazu jsme místo suprema mohli použít maximum, neboť pracujeme se spojitými funkcemi na kompaktu. Položme dále $K := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| + \varepsilon/2$ a definujme funkci $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$z(y) = \begin{cases} -K & y \leq -K, \\ y & y \in (-K,K), \\ K & y \geq K. \end{cases} \tag{1.8}$$

Na $[-r,r]^d$ z předchozího platí $|q(\mathbf{x})| \leq K$, takže z (1.8) platí $z(q(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x})$. Funkce q je spojitá, $4r$-periodická a omezená, takže na $\mathbb{R}^d$ nabývá minima, maxima, i všech hodnot mezi nimi. Můžeme psát $\{q(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\} = [a,b]$. Z Weierstrassovy věty (věta 29 uvedená v příloze) existuje polynom p v $\mathbb{R}$ takový, že $\max_{y\in[a,b]} |z(y) - p(y)| < \varepsilon/2$. Položme $a(\mathbf{x}) = p(q(\mathbf{x}))$. Potom platí

1.
$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |a(\mathbf{x})| &= \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |p(q(\mathbf{x}))| \\ &= \max_{y\in[a,b]} |p(y)| \\ &\leq \max_{y\in[a,b]} |z(y)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\overset{(1.8)}{\leq} K + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| + 1. \end{aligned}$$

   Platí tedy (1.2).

2.
$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in[-r,r]^d} |a(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &\leq \max_{\mathbf{x}\in[-r,r]^d} |p(q(\mathbf{x})) - q(\mathbf{x})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \max_{y\in[a,b]} |z(y) - p(y)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

   Platí tedy (1.3).

Zbývá ještě ukázat, že funkce $a(x)$ je také goniometrický polynom z Gon_{4r}. Z výrazu (1.1) vidíme, že pokud použijeme goniometrický polynom z množiny Gon_{4r} jako argument polynomu p, výsledkem bude suma výrazů tvaru

$$c_0 \prod_{j=0}^{m} \left(\lambda_j \sin\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{k}_j,\mathbf{x}\rangle\right\}\right)^{n_j} \prod_{t=0}^{n} \left(\varphi_t \cos\left\{\frac{2\pi}{4r}\langle \mathbf{l}_t,\mathbf{x}\rangle\right\}\right)^{n_t}, \tag{1.9}$$

kde c_0 je reálná konstanta a n_j, n_t jsou čísla z $\mathbb{N} \cup \{0\}$, která záleží na tvaru polynomu p. Výraz (1.9) lze vytknutím a přeznačením konstant přepsat do příjemnějšího tvaru

$$c_1 \prod_{j=0}^{m} \left(\sin\left\{ \frac{2\pi}{4r} \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{x} \rangle \right\} \right)^{n_j} \prod_{t=0}^{n} \left(\cos\left\{ \frac{2\pi}{4r} \langle \mathbf{l}_t, \mathbf{x} \rangle \right\} \right)^{n_t}. \tag{1.10}$$

Tento výraz je produkt $\sum_{j=0}^{m} n_j$ sinů a $\sum_{t=0}^{n} n_t$ cosinů. Tyto řády ale můžeme postupně zmenšovat. Dokud platí $N := \sum_{j=0}^{m} n_j + \sum_{t=0}^{n} n_t > 1$, můžeme použít vzorce odvozené z rovnic (1.4), (1.5) a (1.6). Všechny převedou člen (1.10) o celkové mocnině N na součet dvou jiných členů ve stejném tvaru, obou o celkové mocnině $N - 1$. Tento proces můžeme rekurentně opakovat, který z vzorců použijeme záleží na konkrétních mocninách výrazů. Nakonec nám zbyde suma 2^{N-1} prvků, které bodou v jednom z tvarů

$$c_2 \sin\left\{ \frac{2\pi}{4r} \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle \right\},$$

$$c_3 \cos\left\{ \frac{2\pi}{4r} \langle \mathbf{l}, \mathbf{x} \rangle \right\},$$

kde c_2, c_3 jsou reálné konstanty, a $\mathbf{k}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^d$. Takový výraz už je ale goniometrický polynom. Zároveň je zřejmé, že součet goniometrických polynomů o stejné periodě je opět goniometrický polynom o téže periodě.

$\square$

V následující části si ukážeme, že hodnoty $\mathbf{E}[f(\mathbf{X})]$ pro všechny funkce f spojité omezené už jednoznačně určují rozdělení náhodného vektoru. Goniometrické polynomy potom použijeme pro aproximaci těchto funkcí f, neboť mají blízkou souvislost s charakteristickou funkcí.

Věta 2 (Lachout, 2004, str. 73)**.** *Nechť $E = (E, d)$ je metrický prostor, P, Q jsou dvě pravděpodobnostní míry definované na borelovské σ-algebře $\mathcal{B}(E)$, pro které platí:*

$$\int_E f \, dP = \int_E f \, dQ$$

pro každou funkci $f : E \to \mathbb{R}$ spojitou omezenou. Potom platí $P = Q$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{B}(E);\ P(B) = Q(B)\}$. Zřejmě nám pro důkaz tvrzení stačí ukázat $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}$. Označme $\mathcal{F}(E)$ systém všech uzavřených množin v E. Ověříme, že $\mathcal{M}$ obsahuje tento systém, tedy $\mathcal{F}(E) \subset \mathcal{M}$.

Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{M}$. Nechť $F \in \mathcal{F}(E)$ je neprázdná. Potom pro $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n(x) := (1 - n\ d(x,F))^+$, kde d je metrika prostoru E. Funkce f_n se na F rovnají jedné, a jejich funkční hodnota klesá s rostoucí vzdáleností od množiny F. Z definice vidíme, že platí $\mathbf{1}_F \le f_n \le 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, a také $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbf{1}_F(x)$ pro všechna $x \in E$. Funkce f_n jsou spojité omezené, tedy dle předpokladů platí:

$$\int_E f_n \, dP = \int_E f_n \, dQ \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem $\lim\limits_{n\to\infty}$ za použití Lebesgueovy věty (Billingsley, 1995, tvrzení 16.4), kde za integrovatelnou majorantu bereme konstantu 1, získáme:

$$P(F) = \int_E \mathbf{1}_F dP = \int_E \mathbf{1}_F dQ = Q(F),$$

a tedy i $F \in \mathcal{M}$.

Množina $\mathcal{F}(E)$ je uzavřená na konečné průniky, tedy je to π-systém, který je obsažený v $\mathcal{M}$. Z Dynkinovy věty (věta 30 v příloze) plyne požadovaný závěr $\sigma(\mathcal{F}(E)) = \mathcal{B}(E) = \mathcal{M}$.

□

Lemma 3 (Lachout, 2004, str. 56)**.** *Nechť $E = (E,d)$ je separabilní úplný metrický prostor a μ je pravděpodobnostní míra definovaná na $\mathcal{B}(E)$. Potom je μ těsná.*

Důkaz. Důkaz je popsán v práci Lachout (2004, str. 56), k dokázání těsnosti je ještě třeba ukázat regularitu μ a představit postačující podmínku pro těsnost regulárních měr.

□

Lemma 4. *Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $r > 0$ tak, že $\mu([-r,r]^d) > 1 - \varepsilon$.*

Důkaz. Lemma je přímým důsledkem lemmatu 3.

□

Nyní už máme dostatečnou teorii na to, abychom ukázali důležitost charakteristických funkcí. Základem je následující věta.

Věta 5 (Lachout, 2004, str. 84)**.** *Rozdělení reálného náhodného vektoru je jednoznačně určeno jeho charakteristickou funkcí.*

Důkaz. Známe-li charakteristickou funkci reálného náhodného vektoru $\mathbf{X}$, ukážeme, že potom známe hodnoty $\mathbf{E}[f(\mathbf{X})]$ pro všechny spojité omezené funkce, a tedy i rozdělení vektoru $\mathbf{X}$.

Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je omezená a spojitá funkce, $\varepsilon > 0$. Díky lemmatu 4 najdeme $r > 0$ takové, že $P(\mathbf{X} \notin [-r,r]^d) < \varepsilon$. Podle lemmatu 1 pak pro funkci f a nalezené r existuje goniometrický polynom $a \in Gon_{4r}$ splňující (1.2) a (1.3). Počítejme:

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{E}[f(\mathbf{X})] - \mathbf{E}[a(\mathbf{X})]| \\
\overset{\text{troj. nerovnost}}{\leq}\; & |\mathbf{E}[(f(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X}))\mathbf{1}_{[\mathbf{X}\in[-r,r]^d]}]| \;+\; |\mathbf{E}[(f(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X}))\mathbf{1}_{[\mathbf{X}\notin[-r,r]^d]}]| \\
\overset{(1.2)}{<}\; & \varepsilon \;+\; |\mathbf{E}[f(\mathbf{X})\mathbf{1}_{[\mathbf{X}\notin[-r,r]^d]}]| \;+\; |\mathbf{E}[a(\mathbf{X})\mathbf{1}_{[\mathbf{X}\notin[-r,r]^d]}]| \\
\overset{(1.3)+\text{lemma 4}}{<}\; & \varepsilon \;+\; \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|\, \varepsilon \;+\; (\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| + 1)\, \varepsilon \\
=\; & 2\,(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| + 1)\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pro nalezené $a \in Gon_{4r}$ platí z (1.1)

$$\mathbf{E}[a(\mathbf{X})] = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \operatorname{Im}\,(\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}(\frac{2\pi}{4r}\mathbf{k}_j)) \;+\; \sum_{j=0}^{n} \varphi_j \operatorname{Re}\,(\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}(\frac{2\pi}{4r}\mathbf{l}_j)).$$

Hodnotu $\mathbf{E}[f(\mathbf{X})]$ tedy dokážeme libovolně přesně aproximovat pomocí hodnoty $\mathbf{E}[a(\mathbf{X})]$, kterou známe díky znalosti charakteristické funkce. Funkce f byla libovolná spojitá omezená, takže podle věty 2 už známe i rozdělení $\mathbf{X}$.

□

Nyní už máme dostatečnou teorii pro dokázání Cramérovy-Woldovy věty.

Věta 6 (Cramérova-Woldova)**.** *Rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^\top$ je jednoznačně určeno rozděleními jeho projekcí do všech přímek, tj. rozděleními náhodných veličin $\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle$ pro všechna $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Jelikož známe rozdělení náhodné veličiny $X_t := \langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle$, známe i hodnotu její charakteristické funkce v 1, což je $\hat{\mathsf{P}}_{X_t}(1) = \mathbf{E}[e^{i\langle\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}\rangle, 1\rangle}] = \mathbf{E}[e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}\rangle}] = \hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, tedy známe hodnotu charakteristické funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ na celém prostoru $\mathbb{R}^d$. To podle věty 5 určuje rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

□

1.2 Inverzní vzorec pro charakteristické funkce

Je zřejmé, že Cramérova-Woldova věta je pouhým důsledkem faktu, že rozdělení je jednoznačně určeno charakteristickou funkcí. Je ale více způsobů, jak toto tvrzení dokázat. Jedním takovým důkazem je například nalezení inverzního vzorce, díky kterému z charakteristické funkce explicitně získáme pravděpodobnostní míru. V následující sekci uvidíme, jak tento vzorec vypadá, a dokážeme si jeho platnost.

Věta 7 (Billingsley, 1995, str. 382)**.** *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$ a $\hat{\mu}(\mathbf{x})$ její charakteristická funkce. Nechť je dále A omezený kvádr v $\mathbb{R}^d$ tvaru $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;\ a_j < x_j \le b_j,\ 1 \le j \le d\}$, kde $a_j \le b_j$ pro všechna j z množiny $\{1, \ldots, d\}$. Pokud hranice A má nulovou pravděpodobnost, tj. $\mu(\partial A) = 0$, tak platí*

$$\mu(A) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_T} \left[\prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} \right] \hat{\mu}(\mathbf{t}) d\mathbf{t},\ \ \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d), \qquad (1.11)$$

kde $B_T = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d;\ |t_j| \le T, 1 \le j \le d\}$, a $d\mathbf{t} = dt_1 \cdots dt_d$.

Důkaz. Položme

$$I_T = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_T} \left[\prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} \right] \hat{\mu}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Rozepišme si charakteristickou funkci do tvaru

$$I_T = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_T} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} d\mu(\mathbf{x}) d\mathbf{t}. \tag{1.12}$$

Výraz (1.12) je dvojitý integrál přes množinu $B_T \times \mathbb{R}^d$, která má konečnou $\lambda^d \times \mu$ míru. Navíc je integrand po dodefinování v $t_j = 0$ spojitý ($\lim_{t\to 0} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} = b - a$) a omezený, neboť pro x a α reálné, $\alpha > 0$ platí

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\alpha i x} dx &= -\frac{1}{\alpha i}[e^{-\alpha i t} - 1], \\ \Rightarrow \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| &= \frac{| - ai \int_0^t e^{-aix} dx + bi \int_0^t e^{-bix} dx|}{|t|} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|a| \int_0^t |e^{-aix}| dx + |b| \int_0^t |e^{-bix}| dx}{|t|} \leq \frac{|a||t||1| + |b||t||1|}{|t|} = |a| + |b|.$$

Dvojitý integrál v (1.12) tedy existuje a dle Fubiniho věty (Billingsley, 1995, tvrzení 18.3) můžeme vyměnit pořadí integrálů:

$$I_T = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{B_T} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} e^{it_j x_j} d\mathbf{t} \right] d\mu(\mathbf{x}).$$

Vnitřní integrál můžeme vyčíslit pomocí Fubiniho věty a rozepsání integrandu přes Eulerův vzorec

$$I_T = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{B_T} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j(x_j - a_j)} - e^{it_j(x_j - b_j)}}{it_j} d\mathbf{t} \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{B_T} \prod_{j=1}^{d} \frac{(\cos + i \sin)(t_j(x_j - a_j)) - (\cos + i \sin)(t_j(x_j - b_j))}{2\pi i t_j} d\mathbf{t} \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$\overset{\text{lichost}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{B_T} \prod_{j=1}^{d} \frac{i \sin(t_j(x_j - a_j)) - i \sin(t_j(x_j - b_j))}{2\pi i t_j} d\mathbf{t} \right] d\mu(\mathbf{x}) \tag{1.13}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\int_{-T}^{T} \frac{\sin(t_j(x_j - a_j)) - \sin(t_j(x_j - b_j))}{2\pi t_j} dt_j \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$\overset{\text{sudost}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\int_{0}^{T} \frac{\sin(t_j(x_j - a_j)) - \sin(t_j(x_j - b_j))}{\pi t_j} dt_j \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\int_{0}^{T} \frac{\sin(t_j(x_j - a_j))}{\pi t_j} dt_j - \int_{0}^{T} \frac{\sin(t_j(x_j - b_j))}{\pi t_j} dt_j \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\int_{0}^{T|x_j - a_j|} \frac{\sin(s_j \frac{(x_j - a_j)}{|x_j - a_j|})}{\pi s_j} ds_j - \int_{0}^{T|x_j - b_j|} \frac{\sin(s_j \frac{(x_j - b_j)}{|x_j - b_j|})}{\pi s_j} ds_j \right] d\mu(\mathbf{x}) \tag{1.14}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\frac{\operatorname{sgn}(x_j - a_j)}{\pi} S(T|x_j - a_j|) - \frac{\operatorname{sgn}(x_j - b_j)}{\pi} S(T|x_j - b_j|) \right] d\mu(\mathbf{x}), \tag{1.15}$$

$$\text{kde } S(y) := \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt \text{ pro } y \geq 0.$$

Ve výrazu (1.14) jsme pro dva vnitřní integrály použili substituce $s_j = t_j|x_j - a_j|$ pro první integrál a $s_j = t_j|x_j - b_j|$ pro druhý integrál. Cosiny nám z integrandu zmizely, neboť jsme ve výraze (1.13) integrovali přes množiny $[-T,T]$ a $\frac{\cos x}{x}$ je lichá funkce. Jelikož $\lim_{x\to\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$ (důkaz tohoto faktu můžeme najít například v Billingsley, 1995 na straně 235) a integrand v (1.15) je omezený, můžeme použít Lebesgueovu větu (Billingsley, 1995, tvrzení 16.4), a platí

$$\lim_{T\to\infty} I_T$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\operatorname{sgn}(x_j - a_j)}{\pi} S(T|x_j - a_j|) - \frac{\operatorname{sgn}(x_j - b_j)}{\pi} S(T|x_j - b_j|) \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\frac{\operatorname{sgn}(x_j - a_j)}{2} - \frac{\operatorname{sgn}(x_j - b_j)}{2} \right] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\mathbf{1}_{(a_j,b_j)}(x_j) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\{a_j\}} + \mathbf{1}_{\{b_j\}})(x_j) \right] d\mu(\mathbf{x}). \tag{1.16}$$

Z předpokladu $\mu(\partial A) = 0$ můžeme z integrandu ve (1.16) vynechat druhou a třetí indikátorovou funkci, protože jejich integrál vzhledem k μ bude nulový přes celé $\mathbb{R}^d$. Díky tomu už dostáváme požadovaný vzorec

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \left[\mathbf{1}_{(a_j,b_j)}(x_j) \right] d\mu(\mathbf{x}) = \mu(A).$$

□

Vzorec (1.11) z věty 7 jsme získali díky tomu, že charakteristická funkce $\hat{\mu}(\mathbf{t})$ je integrál goniometrických funkcí, u nichž jsme využili jejich lichost a sudost. Charakteristickou funkci jsme vynásobili vhodnou lichou funkcí tak, aby nám cosiny díky sudosti při integraci přes t vymizely (výraz (1.13)) a zbyl nám intergál sinu tvaru

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt.$$

Vzápětí jsme ale zjistili (výraz (1.15)), že pro a nulové je i $f(a)$ rovné nule, pro nenulové a hodnota $f(a)$ záleží pouze na znamínku a. Pokud je pro nenulový argument a absolutní hodnota $|f(a)|$ pevná a mění se pouze znaménko $f(a)$, lze takový výraz upravit na funkci signum (stačí funkci vynásobit vhodnou konstantou, proto je na začátku inverzního vzorce z věty 7 konstanta obsahující 2π). Siny a cosiny, které jsme v charakteristické funkci integrovali vzhledem k μ, jsme tímto převedli na indikátorové funkce, jejichž střední hodnota vzhledem k μ se rovná pravděpodobnosti množiny vystupující v indikátorové množině, tj.

$$\mathbf{E}\,\mathbf{1}_A = \int \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \mu(A).$$

Problém s hranicí ale nastává, protože $\operatorname{sgn}(0) = 0$, přičemž bychom chtěli $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Kvůli tomu nedokážeme kraje indikátorové funkce přesně vyjádřit pomocí funkcí signum, a vzorec (1.11) místo $\mu(\otimes(a_j, b_j])$ vyjadřuje

$$\mu(\otimes_{j=1}^d (a_j, b_j)) + \frac{1}{2}\,\mu(\partial(\otimes_{j=1}^d [a_j, b_j])) - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{x} \in K_{a,b}} \mu(\{\mathbf{x}\}),$$

kde $K_{a,b}$ je množina vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, které splňují $x_j = a_j$ nebo $x_j = b_j$ pro $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $d \geq 2$. Zdá se, že i znalost těchto pravděpodobností už určuje rozdělení, neboť nepřesnost pravděpodobnosti hranice můžeme odstranit, když najdeme hodnotu vzorce pro kvádr, jehož vnitřek obsahuje hranici předchozího. To také vede k následující úvaze. Pro měřitelný kvádr B zkonstruujeme posloupnost měřitelných kvádrů $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$, která konverguje k B, a navíc $B_{n+1} \subset B_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud označíme vzorec (1.11) jako funkci $V(A)$, potom ze spojitosti míry platí

$$\lim_{n\to\infty} V(B_n) \geq V(B). \tag{1.17}$$

Zároveň ale víme, že hodnota obou stran rovnice se bude lišit leda o nějaký násobek míry hranice B. Proto ve výraze (1.17) nastane nerovnost právě tehdy, když je míra hranice množiny B nenulová. Máme tedy cestu jak zkontrolovat, jestli vzorec (1.11) opravdu odpovídá míře množiny B. Ukazuje se ale, že místo práce s limitním přechodem je lehčí najít hustou množinu, na které nepřesnost na hranici mizí.

Odvozený vzorec (1.11) ještě neříká, že charakteristická funkce plně určuje rozdělení náhodné veličiny, a to kvůli předpokladu $\mu(\partial A) = 0$. Nicméně se dá ukázat, že tento předpoklad lze chytře obejít.

Lemma 8. *Pro každé dvě borelovské pravděpodobnostní míry μ, ν na $\mathbb{R}^d$ existuje $D \subset \mathbb{R}$ hustá v $\mathbb{R}$ taková, že $\mu(\partial A) = \nu(\partial A) = 0$ pro všechny kvádry $A \subset \mathbb{R}^d$ se souřadnicemi v D.*

Důkaz. Tvrzení nejdříve dokážeme pro případ $d = 1$. Položme $D = \{x \in \mathbb{R};\ \mu(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 0\}$. Předpokládejme, že D není hustá, tedy že $A := \mathbb{R} \setminus \overline{D}$ je neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}$. Průnik $D \cap A$ je prázdný a A je otevřená, takže obsahuje nespočetně mnoho bodů x, pro které platí buď $\mu(x) \neq 0$ nebo $\nu(x) \neq 0$. Protože sjednocení dvou spočetných množin je také spočetné, musí být buď $\{x \in \mathbb{R};\ \mu(x) \neq 0\}$ nebo $\{x \in \mathbb{R};\ \nu(x) \neq 0\}$ nespočetná. BÚNO předpokládejme $\{x \in \mathbb{R};\ \mu(x) \neq 0\}$ nespočetná. Potom $\exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $S_n := \{x \in \mathbb{R};\ \mu(x) \geq \frac{1}{n}\}$ je nespočetná a platí

$$1 = \mu(\mathbb{R}) \geq \mu(A) \geq \sum_{x \in S_n} \frac{1}{n} = \infty,$$

což je zřejmě spor. Tedy D je hustá v $\mathbb{R}$, a pro všechny kvádry v $\mathbb{R}$ se souřadnicemi v D, tedy tvaru $[a, b]$, $a, b \in D$, platí $\mu(\{a, b\}) = \nu(\{a, b\}) = 0$.

Nechť $d > 1$. Najdeme maximální $D \subset \mathbb{R}$ tak, že všechny měřitelné kvádry v $\mathbb{R}^d$ se souřadnicemi v D mají nulovou hranici vzhledem k obou mírám. Množina D je neprázdná. Pokud by tomu tak nebylo, pak pro každý kvádr tvaru $[a,b]^d$ je jeden z výrazů $\mu(\partial[a,b]^d)$, $\nu(\partial[a,b]^d)$ nenulový (jinak by $\{a,b\} \subset D$). Pak ale z libovolné nespočetné množiny v $\mathbb{R}$ dokážeme zkonstruovat nespočetnou množinu disjunktních měřitelných kvádrů v $\mathbb{R}^d$, jejichž hranice jsou vzhledem k nějaké z měr μ, ν nenulové. To stejnou úvahou jako v první části důkazu vede ke sporu.

Pokud D není hustá v D, pak $A := \mathbb{R} \setminus \overline{D}$ je otevřená, a pro každé $a \in A$ existuje měřitelný kvádr tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;\ a_j < x_j \leq b_j, 1 \leq j \leq d\}$ v $\mathbb{R}^d$ takový, že alespoň jedna jeho souřadnice je rovna a, a přitom jeho hranice vzhledem k μ nebo ν není nulová. Množina A je nespočetná, takže jedna z podmnožin $A_\mu, A_\nu \subset A$ bodů a v $\mathbb{R}$, pro které existuje měřitelný kvádr se souřadnicí v a o nenulové míře hranice buď vzhledem k μ nebo ν je také nespočetná. BÚNO buď A_μ nespočetná. Pro každé $b \in \mathbb{R}$ označme

$$L_b^j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;\ x_j = b\},$$

$$L_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;\ \exists j \in \{1, \dots, d\}, x_j = b\} = \bigcup_{j=1}^{d} L_b^j.$$

Nechť pro nějaké $a \in A_\mu$ platí $\mu(L_a) = 0$. Potom body v hranici libovolného kvádru se souřadnicemi v $D \cup \{a\}$ jsou buďto obsaženy v hranici jiného kvádru se souřadnicemi v D, nebo v L_a. Ve všech případech je potom míra hranice vzhledem k μ nulová, a tedy $a \in D$. To je ale spor. Pro všechny $a \in A_\mu$ tedy platí $\mu(L_a) > 0$. Také platí

$$0 < \mu(L_a) = \mu(\bigcup_{j=1}^{d} L_a^j) \leq \sum_{j=1}^{d} \mu(L_a^j),$$

kde jsme využili Booleovu nerovnost. Pro každé $a \in A_\mu$ tedy existuje index j takový, že $\mu(L_a^j) > 0$. Index může nabývat pouze d různých hodnot, a protože A_μ je nespočetná, musí alespoň pro jeden index $k \in \{1, \dots, d\}$ platit, že množina $\{a \in A_\mu;\ \mu(L_a^k) > 0\}$ je nespočetná. Uvažujme nyní k-té marginální rozdělení míry μ, označme ho μ_k. Pro $a \in A_\mu$ platí

$$\mu(L_a^k) > 0 \Rightarrow \mu_k(a) > 0.$$

Tvrzení už přímo plyne z případu pro dimenzi $d = 1$. Tedy jsme ukázali, že D je hustá v $\mathbb{R}$ i pro případ $d > 1$.

$\square$

Věta 9 (Cramérova-Woldova, druhý důkaz)**.** *Cramérova-Woldova věta (věta 6) je důsledkem věty 7 a lemmatu 8.*

Důkaz. Nechť μ a ν jsou dvě borelovské míry na $\mathbb{R}^d$, které mají identické projekce do všech přímek. Potom mají z tvrzení v důkazu věty 6 také identické charakteristické funkce. Z lemmatu 8 najdeme množinu D. Pokud A a B jsou měřitelné kvádry se souřadnicemi v D, pak jejich průnik je také měřitelný kvádr se souřadnicemi v D. Platí tedy, že množina $\square_D$, definovaná jako množina všech měřitelných kvádrů se souřadnicemi v D, je π-systém. Zároveň pro $\forall A \in \square_D$ platí $\mu(\partial A) = \nu(\partial A) = 0$ z vlastností množiny D. To ale podle věty 7 znamená, že $\mu(A) = \nu(A)$, neboť pro obě hodnoty máme vzorec, který je pro stejné charakteristické funkce také stejný. Máme tedy splněny všechny předpoklady věty 30 z přílohy, která už dokazuje $\mu = \nu$.

$\square$

1.3 Alternativní důkaz bez užití charakteristických funkcí

V předchozích sekcích jsme ukázali dva způsoby, jak dokázat větu 5, která tvrdila, že charakteristická funkce jednoznačně určuje rozdělení. Cramérova-Woldova věta (věta 6) potom byla zřejmým důsledkem. Dlouho se předpokládalo, že bez použití charakteristických funkcí větu 6 ani nelze dokázat. Že to není pravda ukázal v roce 1997 německý matematik Guenther Walther. V této sekci ukážeme, že Cramérova-Woldova věta plyne už z věty 2.

Lemma 10. *Nechť $\boldsymbol{Z}$ je n-rozměrný náhodný vektor, jehož prvky jsou nezávislé náhodné veličiny ze standardního normálního rozdělení, tj.*

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_{n\times n}).$$

Pak pro n-rozměrný vektor konstant $\mathbf{C}$ platí:

$$\mathbf{C}^\top \boldsymbol{Z} \sim N(0, \|\mathbf{C}\|^2).$$

Důkaz. Lemma plyne z následujícího faktu:

$$\mathbf{Z} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \ \Rightarrow \ \mathbf{C}^\top \mathbf{Z} \sim N(\mathbf{C}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C}).$$

$\square$

Lemma 11 (Walther, 1997, str. 315)**.** *Pro $m \in \mathbb{N}$ a $2m+1$ různých reálných čísel $\phi_1, \ldots, \phi_{2m+1}$ existují reálná čísla $a_1, \ldots, a_{2m+1}$ tak, že funkce*

$$g(t) := \sum_{i=1}^{2m+1} a_i \Phi(\phi_i t), \ t \geq 0, \tag{1.18}$$

kde Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení, je řádu $\mathcal{O}(t^{2m+1})$ pro $t \to 0$. Tedy $g(t)/t^{2m+1}$ je lebesgueovsky integrovatelná, a platí

$$\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{2m+1}} dt \neq 0. \tag{1.19}$$

Důkaz. Důkaz existence čísel $a_1, \ldots, a_{2m+1}$ lze nalézt v knize Pollard, 2010, strana 204. Důkaz s konstrukcí těchto čísel pro jednu konkrétní množinu čísel $\phi_1, \ldots, \phi_{2m+1}$, ve které ještě k funkci $g(t)$ přidáme konstantu, aby platilo $g(0) = 0$, se nachází v práci Walther, 1997, strana 316.

$\square$

K důkazu následující věty by nám stačil fakt, že existují čísla $\phi_1, \ldots, \phi_{2m+1}$, $a_1, \ldots, a_{2m+1}$ splňující závěry lemmatu 11, jelikož jejich konkrétní hodnoty nás zajímat nebudou. To, že $\phi_1, \ldots, \phi_{2m+1}$ můžeme volit libovolně, je ale příjemný fakt, který je vhodné zmínit.

Věta 12 (Pollard, 2010, str. 203)**.** *Nechť $h : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ je omezená spojitá funkce, a $\mathbf{X}$ je $2m$-rozměrný náhodný vektor s rozdělením μ. Potom je hodnota $\mathbf{E}[h(\mathbf{X})]$ jednoznačně určena rozděleními náhodných veličin $\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle$ pro $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{2m}$.*

Důkaz. Zvolme libovolné konstanty $\phi_1, \ldots, \phi_{2m+1}$, k nim najdeme $a_1, \ldots, a_{2m+1}$ z lemmatu 11. Definujme

$$F : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{x}) := g\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right),$$

kde g je definováno jako v (1.18). Platí:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} F \, d\lambda^{2m} &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} g\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) d\lambda^{2m}(\mathbf{x}) \\
&\overset{\text{Polární souřadnice}}{=} \int_0^\infty g\left(\frac{1}{r}\right) \int_{\|\mathbf{y}\|=r} 1 \, d\lambda^{2m-1}(\mathbf{y}) \, dr \\
&= \int_0^\infty g\left(\frac{1}{r}\right) C_{2m} r^{2m-1} \, dr \\
&\overset{t=1/r}{=} C_{2m} \int_0^\infty g(t)/t^{2m+1} \, dt \overset{(1.19)}{\neq} 0,
\end{aligned}$$

kde C_{2m} je plocha jednotkové koule v dimenzi $2m$. Můžeme tedy definovat $F_\lambda := \int_{\mathbb{R}^{2m}} F \, d\lambda^{2m}$, a víme, že je nenulové. Zabývejme se nyní výrazem

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mu(\mathbf{x}). \tag{1.20}$$

Funkce F a h jsou integrovatelné, můžeme použít Lebesgueovu větu

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \lim_{\alpha \to 0^+} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x})F(\mathbf{y})\; d\mathbf{y}\; d\mu(\mathbf{x}) \;\; = \mathbf{E}[h(\mathbf{X})]F_\lambda. \tag{1.21}$$

Jelikož výraz F_λ známe a je nenulový, můžeme jím dělit a pro znalost $\mathbf{E}[h(\mathbf{X})]$ podle (1.21) stačí znát hodnotu

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})F(\mathbf{y})\; d\mathbf{y}\; d\mu(\mathbf{x}) \text{ pro } \forall\, \alpha > 0. \tag{1.22}$$

Nechť $\alpha > 0$. Počítejme

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})F(\mathbf{y})\; d\mathbf{y}\; d\mu(\mathbf{x}) \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})F(\mathbf{y})\; d\lambda^{2m}(\mathbf{y})\; d\mu(\mathbf{x}) \\
\overset{\mathbf{y}=(\mathbf{t}-\mathbf{x})/\alpha}{=}\;& \alpha^{-2m} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{t})F\left(\frac{\mathbf{t}-\mathbf{x}}{\alpha}\right) d\lambda^{2m}(\mathbf{t})\; d\mu(\mathbf{x}) \\
\overset{\text{Fubini}}{=}\;& \alpha^{-2m} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} h(\mathbf{t})F\left(\frac{\mathbf{t}-\mathbf{x}}{\alpha}\right) d\mu(\mathbf{x})\; d\lambda^{2m}(\mathbf{t}).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Zkoumejme nejdříve vnitřní integrál ve výrazu (1.23). Pro pevné $\alpha > 0$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{2m}$ nás zajímá hodnota výrazu $\mathbf{E}_\mathbf{X}[F(\frac{\mathbf{t}-\mathbf{X}}{\alpha})]$. Rozepišme si funkci F podle její definice:

$$\mathbf{E}_\mathbf{X}\left[F\left(\frac{\mathbf{t}-\mathbf{X}}{\alpha}\right)\right] = \mathbf{E}_\mathbf{X}\left[g\left(\frac{\alpha}{\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|}\right)\right]$$

$$\overset{(1.18)}{=} \sum_{i=1}^{2m+1} a_i\, \mathbf{E}_\mathbf{X}\, \Phi\left(\frac{\alpha\phi_i}{\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{2m+1} a_i\, \mathbf{E}_\mathbf{X}\left[\mathsf{P}_{Z\sim N(0,1)}\left(\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|Z \le \alpha\phi_i\right)\right]. \tag{1.24}$$

V posledním výrazu jsme si rozepsali chybovou funkci Φ jako pravděpodobnost určitého jevu pro $Z \sim N(0,1)$ nezávislé na $\mathbf{X}$. Pokud máme $\mathbf{X}$ pevné, víme z vlastností normálního rozdělení, že $\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|Z$ má $N(0,\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|^2)$ rozdělení. To je ale podle lemmatu 10 stejné rozdělení jako rozdělení náhodné veličiny $\langle \mathbf{t}-\mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle$. Rozdělení tohoto vektoru ale podle předpokladů známe, protože pro každé $\mathbf{Z}$ pevné je $\langle \mathbf{t}-\mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle$ projekce. Zbývá nám upravit (1.24) do tvaru s projekcemi:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\mathbf{X}\left[\mathsf{P}_{Z\sim N(0,1)}\left(\|\mathbf{t}-\mathbf{X}\|Z \le \alpha\phi_i\right)\right] \\
=\;& \mathbf{E}_\mathbf{X}\left[\mathsf{P}_{\mathbf{Z}\sim N_{2m}(\mathbf{0},\mathbf{I})}\left(\langle \mathbf{t}-\mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle \le \alpha\phi_i\right)\right] \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \mathbf{1}_{\{\langle \mathbf{t}-\mathbf{x}, \mathbf{Z}\rangle \le \alpha\phi_i\}}\, d\,\mathsf{P}_\mathbf{Z}\;\; d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \mathbf{1}_{\{\langle \mathbf{t}-\mathbf{x}, \mathbf{Z}\rangle \leq \alpha\phi_i\}} \, d\mu(\mathbf{x}) \, d\,\mathsf{P}_{\mathbf{Z}} \,. \tag{1.25}$$

Vidíme, že vnitřní integrál dokážeme vyčíslit i bez znalosti μ, stačí nám znát rozdělení projekcí $\mathbf{X}$ do všech přímek. Díky tomu ale známe i (1.24), (1.23), a po limitním přechodu $\lim_{\alpha\to 0^+}$ a vydělení výrazem F_λ už známe i samotné $\mathbf{E}[h(\mathbf{X})]$. To jsme chtěli dokázat.

□

Crámerova-Woldova věta je důsledkem předchozí věty. Pro sudé dimenze nám říká, že rozdělení projekcí do přímek jednoznačně určuje $\mathbf{E}[h(\mathbf{X})]$ pro libovolnou spojitou a omezenou funkci h, což podle věty 2 už jednoznačně určuje rozdělení $\mathbf{X}$, tedy Crámerova-Woldova věta platí. Pokud ale platí v dimenzi $2m$, musí také platit v dimenzi $2m-1$. Pokud by to tak nebylo a existovaly by náhodné vektory $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ o $2m-1$ složkách, které mají stejné rozdělení projekcí do přímek, ale rozdílné celkové rozdělení, pak můžeme definovat $2m$-rozměrné náhodné vektory $\mathbf{X}', \mathbf{Y}'$, pro které platí $X'_{2m} = Y'_{2m} = 0$ s.j., a prvních $2m-1$ složek má stejné rozdělení jako vektory $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, tj.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} \; s.j., \;\; \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 1 \end{pmatrix} \; s.j.$$

Z konstrukce plyne, že $\mathbf{X}'$ a $\mathbf{Y}'$ mají stejné vlastnosti jako $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, totiž jejich projekce do přímek mají stejná rozdělení, ale celková rozdělení se nerovnají. To je ale spor, neboť pro sudou dimenzi už jsme Crámerovu-Woldovu větu dokázali.

Důkaz věty 12 na první pohled připomíná důkaz věty 7. V obou případech zjišťujeme hodnotu integrálu po vynásobení dalším integrálem, který potom pomocí Fubiniovy věty vyčíslíme dříve. Zatímco v prvním případě jsou funkce konstruovány s cílem vhodné hodnoty jejich integrálu, ve druhém případě nepoužíváme Fourierovu transformaci, proto si musíme přidat integraci vlastní, která má pravděpodobnostní inerpretaci. V případě důkazu věty 12 jde o konvoluci měr.

Definice 3. *Nechť μ, ν jsou dvě konečné borelovské míry na prostoru $\mathbb{R}^d$. Definujme borelovskou míru předpisem*

$$\mu * \nu(E) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(\mathbf{x}+\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{y})$$

pro každou borelovskou množinu E na $\mathbb{R}^d$. Výraz $\mu * \nu$ nazýváme konvoluce měr μ a ν.

Z definice 3 není těžké ověřit, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(\mathbf{x}) d(\mu * \nu)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} h(\mathbf{x}+\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{y}),$$

což připomíná výraz vyskytující se v (1.20). Sice v tomto výraze nejsou obě míry pravděpodobnostní (pracujeme s Lebesgueovou mírou), nicméně to ošetříme tím, že integrujeme funkci složenou z distribučních funkcí standardního normálního rozdělení, které nám postupně Lebesgueovu míru transformují na míru standardního normálního rozdělení, jak vidíme ve výraze (1.25). K takové transformaci obecně můžeme využít libovolnou distribuční funkci, my používáme Φ kvůli vlastnostem popsaným v lemmatu 10 a lemmatu 11. K úplnému pochopení idei důkazu ale musíme ještě lehce přeformulovat Cramérovu-Woldovu větu.

Věta 13 (Cramérova-Woldova, alternativní znění)**.** *Rozdělení pravděpodobnostní míry μ náhodného vektoru $\mathbf{X}$ definované na $\mathbb{R}^d$ je jednoznačně určeno pravděpodobnostmi poloprosturů, tj. hodnotami*

$$\mu(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \leq c)$$

pro všechny jednotkové vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ a všechny konstanty $c \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Potom známe výraz

$$\mu(\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} \rangle \leq c)$$

pro všechny konstanty c, takže známe distribuční funkci a tedy i rozdělení náhodné veličiny $\langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle$ pro všechny $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. To už je tvrzení věty 6.

□

Idea důkazu je místo střední hodnoty funkce h hledat střední hodnotu indikátorových funkcí poloprostorů, tedy funkcí tvaru

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{1}_{\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{t} \rangle \leq c\}}$$

pro pevné $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$. V našem konkrétním případě je $\mathbf{t}$ náhodný vektor z mnohorozměrného normálního rozdělení a c záleží na konstantách ϕ_i z lemmatu 11. Neboť známe rozdělení projekcí do přímek, známe i střední hodnoty funkcí tohoto tvaru.

2. Cramérova-Woldova věta pro diskrétní rozdělení

Pro náhodný vektor s diskrétním rozdělením si dokážeme projekce do přímek představit vizuálně. Pokud vektor v $\mathbb{R}^d$ může nabývat pouze n různých hodnot, může se zdát, že znalost všech projekcí je víc než potřebujeme pro jednoznačné určení rozdělení. V této kapitole se budeme zabývat, jak se Cramérova-Woldova věta zjednodušuje pro různá diskrétní rozdělení.

2.1 Rovnoměrné rozdělení na n bodech

Pokud je μ pravděpodobnostní míra s rovnoměrným rozdělením na n bodech v $\mathbb{R}^d$, můžeme ekvivalentně pracovat s mírou $n\mu$, která už pravděpodobnostní není, nicméně nosič míry a rovnoměrnost rozdělení jsou zachovány. Proto můžeme tento problém interpretovat jako problém rekonstrukce n bodů z projekcí do přímek. Rekonstrukcí geometrických objektů z jejich projekcí se zabývá obor zvaný geometrická tomografie. V následující sekci se budeme bavit o rekonstrukci bodů, které v původním problému s mírou μ tvoří její nosič.

Značení. Symbolem A_n budeme v této kapitole značit nějakou n-bodovou množinu v $\mathbb{R}^d$, tedy $A_n \subset \mathbb{R}^d$, $|A_n| = n$. Dimenze d bude zřejmá z dimenze konkrétního problému.

Definice 4. *Směrem u v této kapitole budeme rozumět jednotkový vektor v $\mathbb{R}^d$. Dva směry u_1, u_2 nazveme různé, pokud $u_1 \neq \pm u_2$.*

Projekci do přímky budeme v této kapitole označovat jako projekci do směru, který je s ní rovnoběžný. Neboť množina přímek rovnoběžných s daným směrem je nekonečná, budeme pro jednoznačnost uvažovat jen projekce do přímek procházejících počátkem. Směry jsme si definovali tak, aby různé směry odpovídaly různým přímkám.

Definice 5. *Řekneme, že směry $u_1, \dots, u_m$ projekčně určují množinu A_n, pokud pro každou n-bodovou množinu A'_n, která má stejné projekce do směrů $u_1, \dots, u_m$ jako množina A_n, platí $A'_n = A_n$.*

Zřejmě nás bude zajímat, jaký je vztah mezi čísly n a m z definice 5. Je ale zřejmé, že pro projekce nezáleží pouze na počtu směrů, ale také na jejich vzájemném položení. Například v dimenzi $d = 3$ můžeme vzít libovolně mnoho různých směrů s nulovou třetí souřadnicí, a z projekcí do nich nezjistíme nic o třetí souřadnici projektované množiny.

Definice 6. *Pro dimenzi $d > 1$ a směry $u_1, \dots, u_m$ v $\mathbb{R}^d$ definujeme*

$$f_d(u_1, \dots, u_m) := \max\{n;\ u_1, \dots, u_m \text{ projekčně určuje } \forall A_n \subset \mathbb{R}^d\}.$$

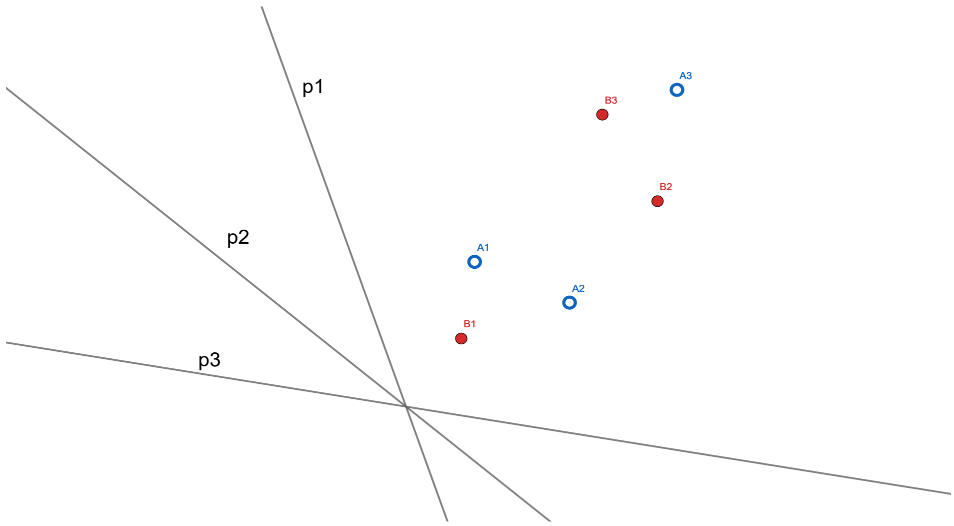
Dále definujme

$$F_d(m) := \sup_{u_1, \dots, u_m} f_d(u_1, \dots, u_m).$$

Pokud platí $F_d(m) = n$, víme, že na rekonstrukci n bodů v prostoru $\mathbb{R}^d$ nám stačí m projekcí do přímek. Konkrétní směry přímek nás v tomto případě nezajímají, zato hodnoty $F_d(m)$ ano. Začneme zkoumáním těchto hodnot pro dimenzi $d = 2$.

2.1.1 Případ n bodů v dimenzi 2

V dimenzi $d = 2$ dokážeme hodnoty $F_2(m)$ pro menší hodnoty m najít přesně. Pro jeden bod nám stačí pro rekonstrukci dva různé směry, pro dva body tři různé směry, pro 3 body 4 různé směry (na obrázku 2.1 vidíme, že 3 směry stačit nemusí). Obecně se zdá, že s každým novým směrem, do kterého zjišťujeme projekci, nám pomůže zrekonstruovat nový bod. Jinak řečeno, $F_2(m)$ je rostoucí funkce. Není jasné, jestli tato domněnka platí, zato ale víme, že $F_2(m)$ je neklesající, a je zdola omezená rostoucí funkcí. První fakt je zřejmý z definice $F_2(m)$, druhý dokazuje následující věta.



Obrázek 2.1: Tři směry neurčují tři body.

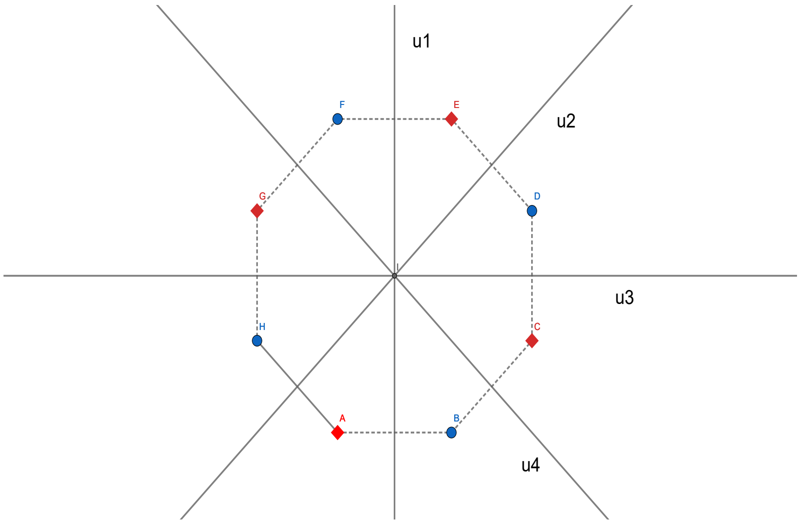
Věta 14 (Matoušek a kol., 2008, str. 1605)**.** *Platí* $F_2(m) \geq m - 1$.

Důkaz. Nechť máme pro spor množinu m různých směrů v $\mathbb{R}^2$ a dvě různé množiny A_{m-1}, B_{m-1} o $m - 1$ bodech, které mají stejné projekce v daných směrech. Zafixujme libovolný bod $a \in A_{m-1} \setminus B_{m-1}$. Pro i-tý směr musí existovat $b_i \in B_{m-1}$, které má stejnou projekci do i-tého směru jako a. Neboť směry jsou vzájemně různé, musí být i body b_i různé. Směrů je m, tedy bodů b_i musí být také m. To je ale ve sporu s tím, že B_{m-1} je množina o $m - 1$ bodech.

$\square$

Našli jsme tedy dolní odhad pro hodnotu $F_2(m)$. Další otázka by měla být, jestli existuje nějaký horní odhad. Existuje nějaká konečná množina bodů, která dokáže projekčně určit libovolnou spočetnou množinu bodů? Náhled na tento problém nám dá následující příklad.

Příklad. Nechť pracujeme v dimenzi $d = 2$, ve které máme m směrů, jejichž odpovídající přímky tvoří osy stran pravidelného $2m$-úhelníku. Pak můžeme rozdělit jeho vrcholy do dvou množin A a B o m prvcích tak, aby v žádné z množin neexistovali dva sousedící vrcholy. Vrchol, který patří do množiny A, pak sousedí jen s vrcholy z B, a opačně, jak můžeme vidět na obrázku 2.2, na kterém je vyobrazen případ $m = 4$. Protože body na obvodu střídají množinu, do které patří, pro libovolnou osu stran bude platit, že body z A jsou podle této přímky osově souměrné s body množiny B. To ale znamená, že do této přímky mají stejné projekce.



Obrázek 2.2: Rovnoběžníková konstrukce.

Konstrukci s rovnoběžníkem nemůžeme využít pro libovolnou množinu směrů, nicméně nám příklad dává návod na obdobnou konstrukci pro obecnou množinu směrů.

Věta 15 (Matoušek a kol., 2008, str. 1606)**.** *Platí* $F_2(m) < 2^{m-1}$.

Důkaz. Pro libovolnou množinu m směrů $u_1, \ldots, u_m$ zkonstruujeme dvě množiny $A_{2^{m-1}}$, $B_{2^{m-1}}$ o 2^{m-1} bodech, které mají ve všech směrech stejné projekce. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou nenulové konstanty, například volme $\alpha_i = 2^{i-1}$. Definujme vektory $\mathbf{v}_i := \alpha_i \mathbf{l}_i$ pro $i \in \{1, \ldots, m\}$, kde $\mathbf{l}_i$ je nějaký jednotkový vektor kolmý na směr u_i. Položme

$$A := \{ \sum_{i \in I} \mathbf{v}_i \ ; \ I \subset \{1, \ldots, m\}, \ |I| \text{ sudá } \},$$

$$B := \{ \sum_{i \in I} \mathbf{v}_i \ ; \ I \subset \{1, \ldots, m\}, \ |I| \text{ lichá } \}.$$

Vidíme, že množiny A a B jsou různé (například prvek tvořený součtem všech vektorů $\mathbf{v}_i$ dle naší volby konstant α_i může ležet jen v jedné množině), a počet prvků v jejich sjednocení se rovná počtu podmnožin množiny $\{1, \ldots, m\}$, tedy 2^m. Díky větě 31 uvedené v příloze víme, že obě množiny mají stejný počet prvků, tedy 2^{m-1}.

Pro nechť a je libovolný prvek množiny A. Pak pro každý směr u_i existuje právě jeden prvek B tvaru $a \pm \mathbf{v}_i$, který má stejnou projekci do směru u_i (znaménko záleží na tvaru prvku a, konkrétně na tom, jestli $\mathbf{v}_i$ je sčítanec v definici prvku a, pokud není, bude ve výrazu plus, jinak minus). V každém směru jsou tedy projekce bodů z A a B stejné. To jsme chtěli ukázat.

□

Dokázali jsme tedy, že platí $m-1 \leq F_2(m) \leq 2^{m-1}-1$. Horní i dolní mez ještě vylepšíme následujícími tvrzeními, které ale prezentujeme bez důkazů, neboť ty jsou podstatně složitější a neelementární.

Věta 16 (Matoušek a kol., 2008, str. 1606)**.** *Pro každé $m_0 > 0$ existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí*

$$F_2(m) > 2^{\frac{cm}{\log(m)}}$$

pro $\forall m > m_0$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v práci Matoušek a kol. (2008) na stranách 1608 až 1618. Ideou je využití teorie grafů, kde konkrétně pro m různých směrů obarvíme graf m barvami, a zkoumáme obarvení stromů.

□

Definice 7. *Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou dvě reálné funkce. Symbolem*

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

říkáme, že existuje pozitivní konstanta M a x_0 reálné takové, že pro všechna $x > x_0$ platí

$$|f(x)| \leq Mg(x).$$

Pokud jsou funkce $f(x)$, $g(x)$ definované na přirozených číslech, obdobná notace říká, že existuje pozitivní konstanta M a n_0 přirozené takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí

$$|f(n)| \leq Mg(n).$$

Věta 17 (Matoušek a kol., 2008, str. 1607)**.** *Platí $F_2(m) = \mathcal{O}(6^{\frac{m}{3}})$.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v práci Matoušek a kol. (2008) na stranách 1619 až 1621. Idea důkazu je podobná jako u důkazu věty 15, nicméně v tomto případě volíme konstanty α_i v závislosti na směrech tak, aby se některé body množin A a B překrývali. Potom je můžeme z obou množin odebrat bez toho, že by se změnil rozdíl mezi projekcemi těchto množin.

□

Vylepšili jsme tedy horní i dolní mez pro dimenzi $d = 2$, neboť platí $6^{\frac{1}{3}} \approx 1.817$. Lepší odhad $F_2(m)$ už ale neznáme.

2.1.2 Případ n bodů v obecné dimenzi d

Ukazuje se, že spoustu poznatků z dimenze $d = 2$ lze použít i ve vyšších dimenzích. Například v důkazech věty 14 a věty 15 nijak nevyužíváme dimenzi, a proto úplně stejným způsobem můžeme ukázat, že platí $m - 1 \leq F_d(m) \leq 2^{m-1} - 1$ pro libovolné přirozené $d > 1$. Prezentujeme ještě dvě tvrzení o horní mezi pro $F_d(m)$.

Věta 18 (Matoušek a kol., 2008, str. 1607)**.** *Platí $F_d(m) \leq F_2(m)$.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že platí $F_d(m) > F_2(m)$. Nechť je $u_1, \ldots, u_m$ je množina směrů, pro které platí $F_d(m) = f_d(u_1, \ldots, u_m)$, a nechť $\Pi_{1,2}$ je ortogonální projekce do prvních dvou souřadnic, tj. pro všechny body ve tvaru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d)$ v $\mathbb{R}^d$ platí

$$\Pi_{1,2}((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d)) = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0).$$

Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$ libovolná množina bodů, kterou nelze v $\mathbb{R}^2$ jednoznačně určit m směry, tedy těchto bodů je více než $F_2(m)$, nechť jich je $F_d(m)$. Když bereme množinu A jako množinu bodů v $\mathbb{R}^d$, pak víme, že směry $u_1, \ldots, u_m$ ji projekčně určují (z předpokladu $|A| = F_d(m)$). Neboť body z A mají nenulové jen první dvě souřadnice, dostáváme z jejich projekcí do $u_1, \ldots, u_m$ stejnou informaci jako z projekcí do $\Pi_{1,2}(u_1), \ldots, \Pi_{1,2}(u_m)$. Tyto směry ale můžeme chápat jako směry v $\mathbb{R}^2$, které v $\mathbb{R}^2$ určují množinu A. Směrů je ale m, což je ve sporu s tím, že A nelze určit m směry.

□

Věta 19 (Matoušek a kol., 2008, str. 1607)**.** *Pro každé $d > 1$ existuje reálné číslo $\rho_d > 0$ takové, že $F_d(m) = \mathcal{O}((2 - \rho_d)^m)$.*

Důkaz. Důkaz je založen na stejné myšlence jako důkaz věty 17. K tomu ale potřebujeme podmnožiny směrů, které jsou lineárně závislé. Počet směrů v největší lineárně nezávislé množině závisí na dimenzi d (přímo se jí rovná), proto vystupuje i v samotné horní mezi.

□

2.2 Vhodná omezení pro diskrétní rozdělení

Pro nerovnoměrná diskrétní rozdělení nemůžeme problém jejich rekonstrukce převést na rekonstrukci bodů. Přesto lze předpokládat, že pro vhodná diskrétní rozdělení lze využít teorii rekonstrukce bodů nebo jiné rekonstrukční metody. Představme si nějaké rozdělení blízké rovnoměrnému, například rozělení, ve kterém má $m - 1$ bodů pravděpodobnost $1/(m + 1)$, a jeden bod pravděpodobnost $2/(m + 1)$. Vidíme, že potřebujeme zobecnit naši představu o množině bodů.

Definice 8. *Multisetem v $\mathbb{R}^d$ o n bodech nazveme nějaké zobrazení z $\{1, \ldots, n\}$ do $\mathbb{R}^d$. Projekcemi multisetu do nějakého směru u rozumíme projekce obrazu tohoto zobrazení do směru, kdy započítáváme multiplicitu. To znamená, že do bodu b na projekční přímce p určené směrem u se promítne počet bodů odpovídající počtu čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$, které multiset zobrazí do bodu v $\mathbb{R}^d$, jehož projekce do přímky p je v bodě b.*

Jedním případem multisetu o n bodech je množina n různých bodů. Koncept je ale rozšířen o fakt, že multiset nemusí být prostý. Pak si můžeme představit, že každý bod v $\mathbb{R}^d$ z obrazu multisetu má sílu odpovídající velikosti vzoru tohoto bodu. Při projekci v nějakém směru má pak bod o síle m stejnou projekci jako m bodů o síle 1 ležících na kolmici ke směru. Pomocí tohoto konceptu si můžeme představit dřívější příklad jako multiset o $m+1$ bodech. Pokud dokážeme odvodit obdobné meze jako v případě n bodů, můžeme je využít pro diskrétní rozdělení, která sice nejsou rovnoměrná, ale pravděpodobnosti bodů v jejich nosiči jsou racionální, tedy mají největší společný dělitel. V tom případě musí být tvaru $1/n$ pro nějaké přirozené n. Pak problém určení rozdělení z projekcí můžeme interpretovat jako problém určení multisetu o n bodech, přičemž bodu s pravděpodobností l/n odpovídá bod multisetu o síle l.

Neboť předchozí kapitola byla speciálním případem multisetu, dává smysl, že pro rekonstrukci multisetu o n bodech budeme potřebovat minimálně tolik směrů jako pro rekonstrukci n různých bodů. Pokud tedy definujeme f_d^{multi} a F_d^{multi} pro multisety obdobně jako v definici 6, bude platit $F_d^{multi}(m) \leq F_d(m)$. Můžeme tedy pro $F_d^{multi}(m)$ použít horní meze odvozené pro $F_d(m)$. Pro případ $d = 2$ lze horní mez ještě upravit.

Věta 20 (Matoušek a kol., 2008, str. 1607). *Platí* $F_2^{multi}(m) = \mathcal{O}(198^{\frac{m}{9}})$*, přičemž* $198^{\frac{1}{9}} \approx 1.7996$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v práci Matoušek a kol. (2008) na straně 1621. □

Horní mez pro multisety v dimenzi $d = 2$ by se dala upravovat dále hledáním lepších konstrukcí podobných konstrukci ve větě 15, které přináší menší asymptotickou horní mez. Nicméně tento úkol se zdá být obtížný i s pomocí počítače, a zlepšení horní meze z věty 20 není výrazné. Co se týče dolní meze, ukážeme v další sekci, že idea multisetů nám v tomto případě více škodí, než pomáhá, a je jednodušší rozdělení nepřevádět na multiset.

Zajímavý je i případ, kdy některé body mají pravděpodobnost racionální, některé iracionální. V projekcích do vhodných přímek pak můžeme rozlišit body do těchto dvou skupin, což rekonstrukci výrazně urychlí. Problém je ale ten, že součet nějakých iracionálních pravděpodobností bude racionální (v opačném případě by součet všech pravděpodobností nemohl být roven 1). Pokud budou mít body s těmito pravděpodobnostmi stejnou projekci, tak z ní nepoznáme, že tyto body mají iracionální pravděpodobnosti. Je otázka, jestli se i přes tento problém dá najít vylepšení mezí, které by obecně platilo. Minimálně v nějakých případech mohou iracionální pravděpodobnosti pomoci s rekonstrukcí, ale je těžké určit, jak moc.

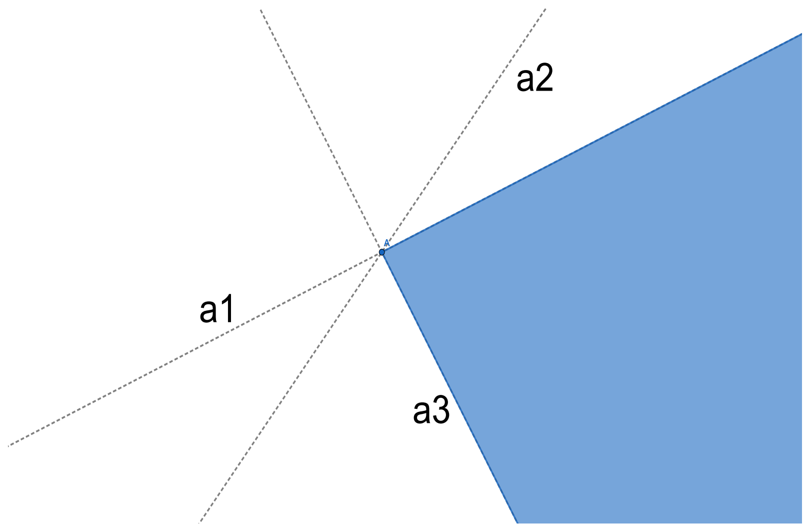
Vhodné je ještě zamyslet se na jednou věcí. Koncept rekonstrukce bodů a multisetů jsme mohli použít, pokud jsme zavedli vhodná omezení na pravděpodobnosti jednotlivých bodů. Dobrá otázka je, jestli lze zavést nějaká omezení na polohu těchto bodů, která nejsou příliš omezující, a přesto nám pomohou zmenšit počet potřebných projekcí na rekonstrukci tohoto rozdělení. Jeden případ, kdy se omezíme na konvexní podmnožiny $\mathbb{Z}^2$ (přesněji řečeno průniky konvexních množin v $\mathbb{R}^2$ s množinou $\mathbb{Z}^2$) ukazuje, že nám stačí 7 různých směrů na rekonstrukci každé množiny o konečně mnoha bodech. Více lze nalézt v práci Gardner a Gritzmann (1997).

2.3 Obecné diskrétní rozdělení

Předtím, než porovnáme a shrneme poznatky z předchozích dvou sekcí, měli bychom prezentovat tvrzení pro případy, kdy žádné z předchozích konceptů nemůžeme použít. Hledáme tvrzení, která platí pro všechna diskrétní rozdělení. Začneme tvrzením, které funguje jako silnější tvrzení k větě 14.

Věta 21 (Rényi, 1952, str. 137)**.** *V dimenzi $d = 2$ je každé diskrétní rozdělení na n bodech jednoznačně určeno projekcemi do $n + 1$ libovolných různých směrů.*

Důkaz. Pro $n = 1$ je důkaz zřejmý. Nechť tedy $n \geq 2$, a nosič rozdělení se skládá z n bodů. Zvolme $n + 1$ libovolných různých projekčních přímek. Pro každou z těchto přímek si označme dva nejkrajnější projektované body (jeden z každé strany) a představme si kolmice z těchto krajních bodů na danou projekční přímku, nazvěme je extrémní čáry. Jelikož máme $n+1$ projekčních přímek, máme minimálně $2n+1$ extrémních čar (pokud všechny body leží na jedné přímce, mohou se dvě extrémní čáry smrsknout do jedné). Neboť bodů v nosiči je n, musí alespoň jedním bodem procházet tři nebo více extrémních čar, označme množinu těchto čar U. Extrémní čáry náleží pouze krajním bodům (vrcholům konvexního obalu nosiče), tedy platí, že každá extrémní čára dělí $\mathbb{R}^2$ na dva poloprostory, a body rozdělení leží pouze v jednom z těchto poloprostorů. Jelikož jedním bodem procházejí alespoň tři extrémní čáry, dělí dohromady čáry z U prostor $\mathbb{R}^2$ na minimálně šest výsečí. Jeden takový případ vidíme na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Případ tří extrémních čar.

Ve všech případech bude existovat extrémní čára z množiny U, která má průnik s výsečí obsahující nosič rozdělení pouze v jednom bodě. Na obrázku 2.3 je to přímka $a2$. Na této přímce ale musí ležet jeden z bodů nosiče. Jediná možnost je, že tento bod leží na průsečíku extrémních čar z U. V tom případě známe i jeho pravděpodobnost, neboť jako jediný leží na dané extrémní čáře. Pokud známe umístění i pravděpodobnost daného bodu, nic nám nebrání ho z projekcí odebrat, a obdobným postupem hledat další body, dokud nezrekonstruujeme celý nosič.

□

Známe tedy dolní mez pro obecný případ i s postupem, jak rozdělení zpětně rekonstruovat. Všimněme si, že věta 21 je silnější verzí věty 14, tedy říká, že dolní mez, kterou jsme našli pro rovnoměrné rozdělení, lze použít i pro obecné diskrétní rozdělení. Z tohoto důvodu jsme nehledali dolní mez pro multisety, protože by byla vždy horší než dolní mez z věty 21. Obecně můžeme použít poznatky pro rekonstrukci bodů z předchozích sekcí pro nalezení nosiče, nicméně ještě nemáme zajištěné, že budeme znát i jednotlivé pravděpodobnosti těchto bodů. Pro začátek bychom chtěli dokázat obdobu věty 21 pro větší dimenze, tedy že pro n obecných bodů nám stačí $n+1$ projekčních přímek. Zdá se ale, že stejná vlastnost neplatí i ve vyšších dimenzích, narozdíl od případu rovnoměrného rozdělení. Namísto toho máme slabší větu.

Věta 22 (Heppes, 1956, str. 404)**.** *Diskrétní rozdělení v dimenzi d o n bodech je jednoznačně určeno projekcemi do $n+1$ libovolných vzájemně nerovnoběžných $(d-1)$-dimenzionálních ploch.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v práci Heppes (1956) na straně 404. Idea důkazu je obdobná jako u věty 21.

□

Vidíme, že pro vyšší dimenze už potřebujeme zvýšit i dimenze projekčních ploch. Šlo by ale využít větu 22 rekurentně pomocí věty 21. Například pro n bodů v třetí dimenzi potřebujeme $n+1$ projekčních ploch druhé dimenze. Projekci do jedné plochy ale dokážeme podle věty 21 zrekonstruovat pomocí $n+1$ projekcí do přímek. Dohromady tedy potřebujeme $(n+1)^2$ projekcí do přímek, které ale nevolíme náhodně, nějakých $n+1$ přímek musí ležet v jedné ploše o dimenzi 2, a ploch je také $n+1$. Postup můžeme pro vyšší dimenze opakovat, a v dimenzi d potom potřebujeme $(n+1)^{d-1}$ projekcí do přímek. Tento postup se ale zdá být přehnaný, neboť informaci z jedné přímky využijeme pouze pro jednu 2-dimenzionální plochu, pro další už ne.

Heppes se ve své práci snažil studovat i problém rekonstrukce diskrétního rozdělení při povolení nekonečné dimenze (konkrétně v prostoru ℓ^2) a nekonečně mnoha bodů. Jedním výsledkem jeho práce je tvrzení, že pro rekonstrukci diskrétního rozdělení o nekonečně spočetně mnoha bodech nestačí znát projekce do spočetně mnoha libovolných přímek. Takový výsledek je ale v kontextu předchozích tvrzení spíše zajímavostí nežli doplněním. V následující tabulce můžeme najít shrnutí, co všechno jsme v této kapitole zjistili. V tabulce nejsou uvedeny výsledky pro rozdělení s racionálními pravděpodobnostmi, protože tam počet potřebných projekčních přímek nezáleží jen na počtu bodů v nosiči, ale také na jednotlivých pravděpodobnostech těchto bodů.

Rozdělení	**Dimenze**	**Dolní mez**	**Horní mez**
Rovnoměrné	2	$2^{\frac{cm}{\log(m)}}$	$\mathcal{O}(6^{\frac{m}{3}})$
Rovnoměrné	d	$m-1$	$\mathcal{O}((2-\rho_d)^m)$
Obecné	2	$m-1$	$\mathcal{O}(6^{\frac{m}{3}})$
Obecné	d	$m-1$	$\mathcal{O}((2-\rho_d)^m)$

Tabulka 2.1: Horní a dolní mez počtu známých bodů při znalosti m projekcí.

3. Cramérova-Woldova věta pro obecné rozdělení

3.1 Obecné rozdělení v dimenzi 2

V minulé kapitole jsme zjistili, že pro určení diskrétního rozdělení v dimenzi 2 nám stačí dostatečně velká konečná množina. Tuto kapitolu je tedy vhodné začít tvrzením, které říká, že při slabé podmínce už nemůže stačit žádná konečná množina přímek. Budeme tedy pracovat výhradně s nekonečnými množinami projekčních přímek.

Věta 23 (Heppes, 1956, str. 410)**.** *Nechť pro pravděpodobnostní míru μ na $\mathbb{R}^2$ existuje hustota $f(x, y)$, která je kladná na nějakém okolí počátku. Pak pro jednoznačné určení míry μ je nutné znát její projekce do nekonečně mnoha přímek.*

Důkaz. Ukážeme, že při znalosti libovolných konečně mnoha projekcí míry μ do přímek existuje pravděpodobnostní míra ν se stejnými projekcemi. To ukážeme nalezením nenulové funkce $m(x, y)$ takové, že její projekcí do všech daných přímek je nulová funkce, a zároveň je $f(x, y) + m(x, y)$ hustota nějaké míry na $\mathbb{R}^2$.

Z předpokladů věty existují reálná $r, b > 0$ taková, že $f(x, y) > b$ pro všechna

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} < r.$$

Nechť k je počet přímek, do kterých známe projekci $f(x, y)$, a označme $\mathbf{e}_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ jednotkový vektor kolmý na i-tou projekční přímku. Z důkazu věty 15 existují dvě různé 2^{k-1}-bodové množiny C a D, které mají stejné projekce do všech projekčních přímek. Tyto množiny sestrojíme, přičemž za α_i z konstrukce bereme konstanty 2^{i-1}. Díky této volbě víme, že množiny C a D jsou obsaženy v kruhu o poloměru 2^{k-1} se středem v počátku, a vzdálenost libovolných dvou bodů z jejich sjednocení je minimálně 1. Nechť (c_j^1, c_j^2) jsou souřadnice j-tého bodu množiny C, obdobně (d_j^1, d_j^2) jsou souřadnice j-tého bodu množiny D. Nechť $t(x, y)$ je libovolná funkce splňující

$$0 \leq t(x, y) < b \text{ pro } \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}, \tag{3.1}$$

$$t(x, y) = 0 \text{ pro } \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Pokud body (c_j^1, c_j^2) a (d_l^1, d_l^2) mají stejnou projekci do i-té přímky, pak i funkce

$$t(x - c_j^1, y - c_j^2) \tag{3.3}$$

a

$$t(x - d_l^1, y - d_l^2) \tag{3.4}$$

mají stejné projekce do i-té přímky. Z (3.1) totiž víme, že funkce z (3.3) je nenulová pouze na kruhu o poloměru $1/2$ se středem v (c_j^1, c_j^2). Nechť (x', y') je libovolný bod v kruhu o poloměru 1/2 se středem v počátku. Potom platí, že $(x'+c_j^1, y'+c_j^2)$ a $(x'+d_l^1, y'+d_l^2)$ patří do kruhů o poloměrech 1/2 se středy v (c_j^1, c_j^2) a (d_l^1, d_l^2). Dosaďme bod $(x'+c_j^1, y'+c_j^2)$ do (3.3), bod $(x'+d_l^1, y'+d_l^2)$ do (3.4). Dostáváme

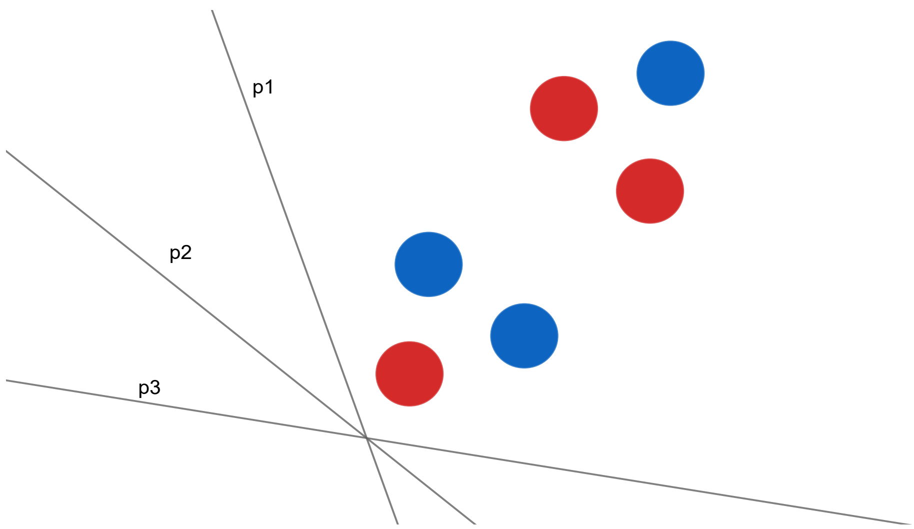
$$t(x'+c_j^1-c_j^1, y'+c_j^2-c_j^2) = t(x', y'),$$

$$t(x'+d_l^1-d_l^1, y'+d_l^2-d_l^2) = t(x', y').$$

Existuje tedy bijekce z bodů o nenulové hodnotě funkce (3.3) do bodů o nenulové hodnotě funkce (3.4), definovaná předpisem $(x,y) \mapsto (x - c_j^1 + d_l^1,\ y - c_j^2 + d_l^2)$. Tato bijekce zachovává funkční hodnoty v tom smyslu, že funkční hodnota funkce (3.3) v daném bodu je stejná jako funkční hodnota funkce (3.4) v obrazu tohoto bodu. Zároveň tato bijekce zachovává projekci do i-té přímky, neboť vektor mezi bodem a jeho obrazem se rovná vektoru

$$(d_l^1, d_l^2) - (c_j^1, c_j^2),$$

který je dle předpokladu kolmý na i-tou přímku. Tedy pro každý bod, ve kterém je funkce (3.3) nenulová existuje právě jeden bod, ve kterém je funkce (3.4) nenulová, a tyto body mají stejnou projekci do i-té přímky. Z toho už plyne, že $t(x-c_j^1, y-c_j^2)$ a $t(x-d_l^1, y-d_l^2)$ mají stejné projekce do i-té přímky. Na obrázku 3.1 vidíme případ $|C| = |D| = 3$. Počet bodů sice není ve tvaru 2^{k-1}, přesto ale příklad funguje a dobře ilustruje situaci. Začali jsme pouze s body z obrázku 2.1, našli nějakou funkci t a okolí bodů z množin C a D, na kterých jsou funkce nenulové. Konkrétně na obrázku 3.1 jsou červeně vyznačena okolí bodů množiny C a modře okolí bodů z množiny D. Na modrých kruzích jsou nenulové funkce tvaru (3.4), na červených funkce tvaru (3.3).



Obrázek 3.1: Tři směry neurčují tři body.

Uvažujme funkce

$$m_1(x,y) := \sum_{j=1}^{2^{k-1}} t(x-c_j^1, y-c_j^2),$$

$$m_2(x,y) := \sum_{l=1}^{2^{k-1}} t(x-d_l^1, y-d_l^2).$$

Z předchozího pozorování a faktu, že C a D mají stejné projekce do všech projekčních přímek, má funkce $m_3(x,y) := m_1(x,y) - m_2(x,y)$ nulovou projekci do všech projekčních přímek (má stejnou projekci jako nulová funkce). Položme

$$m(x,y) := m_3\left(\frac{2^k}{r}x, \frac{2^k}{r}y\right).$$

Všimněme si, že argument funkce m_3 jsme jen vynásobili konstantou, takže nulová projekce do všech přímek je zachována i pro $m(x,y)$. Nechť $\sqrt{x^2+y^2} \geq r$. Potom

$$\left\|\left(\frac{2^k}{r}x, \frac{2^k}{r}y\right)\right\| = \frac{2^k}{r}\sqrt{x^2+y^2} \geq 2^k. \tag{3.5}$$

Z definice funkce $t(x,y)$ víme, že $m_3(x,y)$ je nenulová pouze na kruzích o poloměru $1/2$ kolem všech bodů množin C a D (to plyne z (3.2)). Ty jsme konstruovali tak, aby maximální vzdálenost bodu od počátku byla 2^{k-1}. Funkce $m_3(x,y)$ tedy musí být nulová pro všechny body mimo okolí počátku o poloměru 2^k. Z toho a (3.5) ale plyne, že funkce $m(x,y)$ je nulová mimo kruh o poloměru r se středem v počátku. Nechť naopak $\sqrt{x^2+y^2} < r$. Potom pokud je v tomto bodě funkce $m(x,y)$ nenulová, tak musí být tento bod v kruhu kolem jednoho nebo více bodů z množin C a D o poloměru $1/2$. Vzdálenost těchto bodů je ale z konstrukce minimálně 1, takže můžeme být v okolí pouze jednoho bodu, BÚNO nechť to je bod $c_j \in C$. Potom je funkční hodnota $m(x,y)$ rovna funkční hodnotě

$$t\left(\frac{2^k}{r}x - c_j^1, \frac{2^k}{r}y - c_j^2\right).$$

Její absolutní hodnota je podle (3.1) omezena konstantou b, takže platí

$$|m(x,y)| < b \text{ pro } \sqrt{x^2+y^2} < r.$$

Z předpokladu je funkční hodnota hustoty $f(x,y)$ větší než b pro $\sqrt{x^2+y^2} < r$, takže $g(x,y) := f(x,y) + m(x,y)$ je nezáporná funkce. Z vlastností $m(x,y)$ ale mají funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ stejné projekce do všech projekčních přímek. To jsme chtěli dokázat.

□

Je zřejmé, že posunutí rozdělení o konstantní vektor jen posune jeho projekce, takže pokud určují projekce původní rozdělení, určují i rozdělení posunuté. Nutnost kladnosti hustoty na okolí počátku se tedy dá oslabit na podmínku kladnosti hustoty na libovolném okolí nějakého bodu. To je zřejmě splněné pro všechny hustoty vzhledem k Lebesguově míře. Když už nám nestačí konečná množina přímek, chtěli bychom aspoň, že za určitých podmínek nám bude stačit libovolná spočetná množina přímek. Za tímto cílem představíme koncept momentů pro náhodné vektory.

Definice 9 (Momenty náhodného vektoru)**.** *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$. Pro $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ definujeme $\mathbf{k}$-tý moment jako*

$$m_{\mathbf{k}} := \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d} \, d\mu(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ *a* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$*. Dále pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *definujeme* n*-tý absolutní moment jako*

$$M_n := \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^n \, d\mu(\mathbf{x}).$$

Momenty nemusí být vždy dobře definovány. Pokud ale víme, že míra μ má konečné všechny absolutní momenty, víme už, že dobře definované jsou. Ukážeme, že konečný n-tý absolutní moment implikuje konečný $\mathbf{k}$-tý moment pro každé $\mathbf{k}$, jehož součet složek je n. Zvolme tedy $n \in \mathbb{N}$, tvrzení plyne z

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n \\ k_i \in \mathbb{N}}} &= \sum_{k_1+\cdots+k_d=n} \left| \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d} \, d\mu(\mathbf{x}) \right| \\
&\leq \sum_{k_1+\cdots+k_d=n} \int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{k_1} \cdots |x_d|^{k_d} \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&\leq \sum_{k_1+\cdots+k_d=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_d} \int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{k_1} \cdots |x_d|^{k_d} \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k_1+\cdots+k_d=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_d} |x_1|^{k_1} \cdots |x_d|^{k_d} \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (|x_1| + \cdots + |x_d|)^n \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&\overset{*}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} d^{\frac{n}{2}} (|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{\frac{n}{2}} \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&= d^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^n \, d\mu(\mathbf{x}) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

V nerovnosti označené symbolem $*$ jsme využili Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, která tvrdí

$$\Big(\sum_{i=1}^{d} u_i v_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{d} u_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{d} v_i^2\Big),$$

kde u_i, v_i jsou libovolná reálná čísla. V našem případě jsme volili $u_i = 1$, $v_i = |x|_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Definice 10 (Carlemanova podmínka)**.** *Nechť* μ *je pravděpodobnostní míra na* $\mathbb{R}^d$*, která má konečné absolutní momenty všech řádů. Řekneme, že tato míra splňuje Carlemanovu podmínku, pokud platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_n)^{-\frac{1}{n}} = \infty.$$

Lemma 24 (Chafaï, 2014, str. 6)**.** *Nechť* μ *je pravděpodobnostní míra na* $\mathbb{R}^d$ *s konečnými absolutními momenty všech řádů splňující Carlemanovu podmínku. Potom je tato míra jednoznačně určena momenty* $m_{\mathbf{k}}$ *pro všechna* $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$*.*

Důkaz. Důkaz můžeme najít v práci Chafaï, 2014, kde je lemma formulováno jako tvrzení 2.8. Nejdříve je nutné dokázat větu pro případ $d = 1$, platnost ve vyšších dimenzích je poté důsledek Cramérovy-Woldovy věty.

□

V následující větě využijeme teorii analytických funkcí, což jsou funkce, které se dají rozvést do mocninné řady z každého bodu svého definičního oboru. Konkrétně budeme do mocninné řady chtít rozvést charakteristickou funkci. Její argument převedeme do polárních souřadnic, a zafixujeme poloměr r. Zbylá funkce bude z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, a její argument bude úhel. Po této funkci s úhlem v argumentu budeme chtít, aby byla analytická.

Věta 25 (Chafaï, 2014, str. 7)**.** *Nechť* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *jsou náhodné vektory na* $\mathbb{R}^2$ *a nechť platí alespoň jedna z následujích podmínek.*

1. *Restrikce charakteristických funkcí* $\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}$ *a* $\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{Y}}$ *na kružnici* $x^2 + y^2 = R$ *jsou analytické (jako funkce úhlu) pro všechna* $R > 0$.
2. *Oba náhodné vektory* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *mají konečné absolutní momenty všech řádů a jejich pravděpodobnostní míry splňují Carlemanovu podmínku.*

Pokud mají projekce $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *do libovolné nekonečné množiny různých přímek procházejících počátkem stejná rozdělení, pak platí* $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Důkaz. Nechť nejdříve platí první podmínka. Známe projekce do nekonečné množiny přímek, takže argumentací jako v důkazu věty 6 známe na těchto přímkách hodnoty obou charakteristických funkcí obou náhodných vektorů. Jinak řečeno, pokud známe projekci do přímky rovnoběžné s vektorem $\mathbf{u}$, pak známe hodnoty $\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{X}}(\alpha\mathbf{u})$ a $\hat{\mathsf{P}}_{\mathbf{Y}}(\alpha\mathbf{u})$ pro všechna reálná α. Pro pevné α jsou funkční hodnoty charakteristických funkcí stejné, neboť projekce, ze kterých jsme je odvodili, jsou stejné. Pro každé $R > 0$ tedy známe hodnoty obou charakteristických funkcí pro nekonečně mnoho bodů na kružnici o poloměru R se středem v počátku. Tato kružnice je kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$, tedy množina bodů, na kterých známe hodnoty charakteristických funkcí má hromadný bod. Neboť jsou charakteristické funkce analytické, můžeme je z tohoto hromadného bodu rozvést do mocninné řady (důkaz této vlastnosti můžeme najít například v knize Shastri, 2010 na straně 205). Z mocninné řady pak známe předpis charakteristické funkce na celé kružnici pro libovolný poloměr, tedy i na celém prostoru. Jelikož byly projekce, ze kterých jsme charakteristické funkce určovali stejné, pak jsou i samotné charakteristické funkce stejné. To podle věty 5 implikuje, že náhodné vektory $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ mají stejné rozdělení.

Nechť je splněna druhá podmínka. Podle lemmatu 24 stačí tedy ukázat, že projekce do nekonečně mnoha přímek určují všechny momenty $m_{\mathbf{k}} = m_{(k_1,k_2)}$, z rovnosti projekcí pak plyne i rovnost momentů pro oba vektory. Nechť $n \in \mathbb{N}$, zvolme nějakou $(n+1)$-bodovou množinu různých jednotkových vektorů $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}\}$ v $\mathbb{R}^2$, které jsou rovnoběžné s danými projekčními přímkami. Pro tyto vektory můžeme psát

$$\mathbf{u}_k = (\cos(\varphi_k), \sin(\varphi_k)) \tag{3.6}$$

pro $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ a $\varphi_k \in [0, \pi)$. Díky větě 32 z přílohy můžeme psát

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} \hat{\mathsf{P}}_{\langle \mathbf{X}, \mathbf{u}_k \rangle}(0) &\overset{(A.2)}{=} i^n \, \mathbf{E} \, [\langle \mathbf{X}, \mathbf{u}_k \rangle^n] \\
&\overset{(3.6)}{=} i^n \, \mathbf{E} \, [(X_1 \cos(\varphi_k) + X_2 \sin(\varphi_k))^n] \\
&= i^n \, \mathbf{E} \, [\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^j(\varphi_k) \sin^{n-j}(\varphi_k) X_1^j X_2^{n-j}] \\
&= i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^j(\varphi_k) \sin^{n-j}(\varphi_k) \mathbf{E} \, [X_1^j X_2^{n-j}] \\
&= i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^j(\varphi_k) \sin^{n-j}(\varphi_k) \, m_{(j,n-j)}.
\end{aligned}$$

Pokud známe rozdělení všech náhodných veličin ve tvaru $\langle \mathbf{X}, \mathbf{u}_k \rangle$, známe i jejich charakteristické funkce, tedy přirozeně i derivace jejich charakteristických funkcí všech řádů v nule, které se dají vyjádřit jako součty momentů $m_{(j,n-j)}$. Pro každé $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ tedy máme lineární rovnici obsahující hodnoty $m_{(j,n-j)}$ pro všechna $j \in \{0, \ldots, n\}$, což se dá zapsat jako soustava $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých, kde jako neznámé bereme hodnoty $\binom{n}{j} m_{(j,n-j)}$. Proč v neznámé necháváme konstantu bude jasné z dalšího odstavce. Označme A matici odpovídající tomuto systému lineárních rovnic. Pro prvky této matice platí

$$a_{k,j} = \cos^j(\varphi_k) \sin^{n-j}(\varphi_k).$$

Předpokládejme nejdříve, že neexistuje index $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ takový, že $\varphi_k = 0$. Potom jsou výrazy $\operatorname{cotg}(\varphi_k)$ dobře definované a můžeme psát

$$a_{k,j} = \operatorname{cotg}^j(\varphi_k) \sin^n(\varphi_k).$$

Výrazy $\sin^n(\varphi_k)$ jsou nenulové konstanty, takže můžeme definovat matici A', kde k-tý řádek matice A' se rovná k-tému řádku matice A, ze kterého vytkneme $\sin^n(\varphi_k)$. Z nenulovosti těchto konstant platí, že A má nenulový determinant $\Leftrightarrow$ A' má nenulový determinant. Matice A' je Vandermondova, tj. je v následujícím tvaru.

$$\begin{pmatrix}
1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\
1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\
1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^n \\
\vdots & \vdots & \vdots^2 & \ddots & \vdots \\
1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \cdots & \alpha_{n+1}^n
\end{pmatrix}$$

Vandermondovy matice mají nenulový determinant právě tehdy, když jsou prvky α_k po dvou různé pro všechna $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ (důkazy této vlastnosti můžeme najít na stránce `https://proofwiki.org/wiki/Vandermonde_Determinant`).

Platí ale $\alpha_k = \operatorname{cotg}(\varphi_k)$, a ty jsou pro různé $\varphi_k \in (0,\pi)$ také různé. Matice A', a tedy i A mají nenulový determinant $\Rightarrow$ jsou regulární $\Rightarrow$ dokážeme nalézt jednoznačně hodnoty $\binom{n}{j} m_{(j,n-j)}$ $\Rightarrow$ dokážeme nalézt jednoznačně hodnoty $m_{(j,n-j)}$. Číslo n bylo libovolné, takže touto cestou můžeme nalézt všechny momenty, což jsme chtěli ukázat.

Pokud by náhodnou existoval index k, pro který platí $\varphi_k = 0$, pak v rovnici odpovídající indexu k jsou siny nulové, a rovnice se zredukuje na

$$\frac{d^n}{dt^n}\hat{\mathsf{P}}_{\langle \mathbf{X},\mathbf{u}_k\rangle}(0) = i^n \ m_{(0,n)},$$

z čehož můžeme vyjádřit člen $m_{(0,n)}$ a odečíst ho ze zbylých rovnic. Zbyde nám n rovnic o n neznámých, na které můžeme využít postup jako v případě nenulových úhlů φ_k.

□

Vidíme, že pro obě podmínky se podstatně liší jejich důkaz. U první podmínky využíváme jednoznačnost pomocí charakteristické funkce, kterou rekonstruujeme díky hromadnému bodu. Tyto body ale pro každý poloměr leží na jedné nebo více přímkách. Nekonečně mnoho přímek nám tedy zajistí existenci obdoby hromadného bodu pro přímku, tedy přímky takové, že pro libovolně malý nenulový úhel θ známe projekci na přímku, která s touto „hromadnou“ přímkou svírá úhel menší než θ.

Pro druhou podmínku ale využíváme místo jednoznačnosti charakteristické funkce jednoznačnost momentů. Ta není vždy zajištěná, proto potřebujeme Carlemanovu podmínku, další podmínka už ale není nutná. Je zajímavé, že dokážeme momenty, což jsou integrály přes celý prostor, vyčíslit z pouhých projekcí do přímek. Z důkazu dokonce vidíme, že při konečném počtu přímek pořád dokážeme určit momenty menších řádů. Věta tedy působí i jako motivace hledání dalších charakteristik, které za daných podmínek jednoznačně určují rozdělení. Stejně jako u využití jednoznačnosti z momentů bychom takto mohli snížit počet možných projekcí pro rekonstrukci rozdělení z přímek.

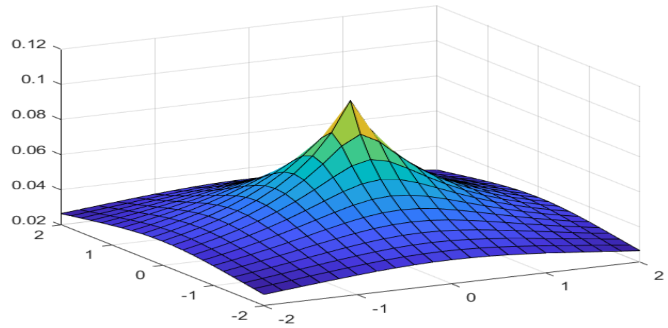
Jelikož obě podmínky věty 25 využívaly jinou teorii, není velkým překvapením, že tyto podmínky nejsou ekvivalentní.

Příklad. Prezentujme rozdělení inspirované prací Chafaï, 2014 připomínající Cauchyho rozdělení na prostoru $\mathbb{R}^2$. Nechť má náhodná veličina $\mathbf{X}$ na $\mathbb{R}^2$ hustotu $f(r,\theta) = \pi^{-2}(1+r^2)^{-1}$ v polárních souřadnich, kterou můžeme vidět na obrázku 3.2. Úhel θ v předpisu funkce nefiguruje, takže hustota je konstantní na každé kružnici se středem v počátku. Z toho zřejmě plyne, že rozdělení projekce veličiny $\mathbf{X}$ do přímky je stejné pro všechny přímky procházející počátkem. Přímky totiž můžeme od sebe odlišit úhlem svíraným s nějakou pevnou přímkou. Protože ale úhel nefiguruje v předpisu hustoty, nebude na úhlu záležet ani projekce do přímky. Už víme, že znalost rozdělení projekce $\mathbf{X}$ do přímky přináší i znalost charakteristické funkce $\mathbf{X}$ na této přímce. Všechny projekce jsou ale stejné, takže charakteristická funkce musí mít stejné předpisy na každé přímce. To ale znamená, že je stejně jako hustota konstantní na každé kružnici se středem v počátku. To ale implikuje, že je analytická jako funkce úhlu a splňuje první podmínku věty 25.

Zároveň pro absolutní momenty tohoto vektoru platí

$$M_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^n}{\pi^2(1+r^2)} r \ dr \ d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^2} \ dr = \infty$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Náhodný vektor tedy nemá konečné absolutní momenty a nesplňuje Carlemanovu podmínku.



Obrázek 3.2: Hustota náhodného vektoru z příkladu.

3.2 Obecné rozdělení v dimenzi d

V dimenzi $d > 2$ už z diskrétního případu víme, že bude potřeba zavést i omezení na množinu přímek, do kterých provádíme projekce. Pokud totiž všechny přímky budou patřit do netriviálního podprostoru, nezjistíme nic o rozdělení na podprostoru kolmém na všechny přímky. Nestačí se ale vyvarovat tomuto případu. Jak jsme viděli na příkladu v úvodu kapitoly, v případě dimenze $d = 2$ nestačí znát jakýkoliv konečný počet projekcí do přímek. To ale znamená, že v případě více dimenzí je pro libovolný podprostor dimenze $d - 2$ nutné znát projekce do nekonečně mnoha přímek ležících mimo tento podprostor. V opačném případě lze nalézt rozdělení s nosičem na 2-dimenzionálním prostoru kolmém na původní podprostor dimenze $d - 2$, které nelze určit konečně mnoha projekcemi. V dimenzi $d = 3$ tato podmínka ještě nic neznamená, nicméně pro vyšší dimenze nám ukazuje, že budeme potřebovat hustější množinu projekčních ploch, než jen libovolnou nekonečnou množinu přímek. Ukážeme ale, že za vhodných předpokladů pro projekční plochy můžeme využít postačující podmínky využívané v dimenzi $d = 2$.

Definice 11 (Projekční hyperplocha)**.** *Polynom $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme homogenní stupně m, pokud $p(t\mathbf{x}) = t^m p(\mathbf{x})$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Pod-*

množinu $S \subset \mathbb{R}^d$ nazveme projekční hyperplochou v $\mathbb{R}^d$, pokud existuje nenulový homogenní polynom p libovolného řádu takový, že

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; p(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Homogenní polynomy jsou například polynomy tvaru

$$\prod_{i=1}^{n} (a_{i,1}x_1 \pm \cdots \pm a_{i,d}x_d) \tag{3.7}$$

pro libovolné přirozené n a reálné konstanty $a_{i,j}$. Z homogenity platí

$$p(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow p(t\mathbf{x}) = 0$$

pro libovolné reálné t. Projekční hyperplochy jsou tedy množiny přímek v $\mathbb{R}^d$. Není lehké porozumět, jak přesně tyto množiny vypadají, nicméně víme, že projekční hyperplocha může obsahovat maximálně konečně mnoho různých netriviálních podprostorů $\{M_i\}$ stejné dimenze $d-1$. Kdyby tomu tak nebylo, a obsahovala jich nekonečně mnoho, můžeme pro každý podprostor M_i najít normálový vektor $\mathbf{v}_i$, pro který platí, že podprostor M_i je právě množina vektorů $\mathbf{x}$ splňujících $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x} \rangle = 0$. To je ale lineární kombinace souřadnic s koeficienty v_i, takže sjednocení n podprostorů o dimenzi $d-1$ je nutné zapsat jako množinu bodů, pro které je součin ve tvaru (3.7) nulový. Prostory jsou ale různé a je jich nekonečně mnoho, takže by činitelů v produktu z výrazu (3.7) muselo být nekonečně mnoho. Pak ale takový výraz není polynom. V práci Cuesta-Albertos a kol., 2007 se také tvrdí, že každá projekční plocha je Lebesgueovy míry 0. Tvrzení je bez důkazu, a pravděpodobně spočívá v tom, že projekční hyperplocha je maximálně konečně sjednocení ploch o dimenzi $d-1$. Z toho ale nelze zkonstruovat žádná otevřená koule v prostoru $\mathbb{R}^d$. Rigorózní důkaz jsem bohužel nikde nenašel. Je také vhodné podotknout, že v dimenzi $d = 2$ jsou projekční hyperplochy právě množiny konečně mnoha přímek procházejících počátkem. Projekční hyperplochy můžeme využít pro charakterizaci podmínek pro projekční přímky.

Věta 26 (Cuesta-Albertos a kol., 2007, str. 203)**.** *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$ splňující Carlemanovu podmínku. Pokud množina přímek, do kterých známe projekci μ není obsažena v žádné projekční hyperploše, je těmito projekcemi míra jednoznačně určena.*

Důkaz. Idea důkazu je následující. Nechť μ a ν splňují Carlemanovu podmínku. Definujme homogenní polynomy, které jsou nulové na celém prostoru právě tehdy, když jsou momenty těchto měr stejné. Dále zjistíme, že tyto polynomy jsou nulové na přímkách, na kterých jsou projekce měr μ a ν identické. Pokud by polynomy nebyly nulové na celém prostoru, tak by definovaly projekční hyperplochu, která by obsahovala množinu přímek, na kterých jsou projekce stejné. Pokud v předpokladech uvedeme, že takový případ se nemůže stát, musí být polynomy nulové na celém prostoru, a z jejich konstrukce jsou momenty všech řádů stejné pro obě míry. To už ale s pomocí lemmatu 24 říká, že jsou míry stejné. Přesný postup důkazu lze najít v práci Cuesta-Albertos a kol., 2007 na straně 204.

□

Z poznatků o projekčních hyperplochách také můžeme formulovat slabší tvrzení.

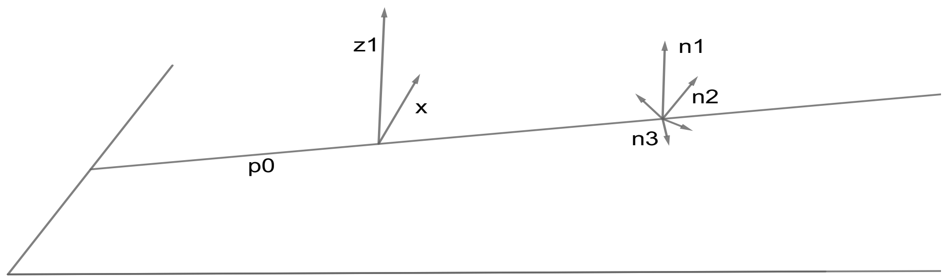
Důsledek. Pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$ splňující Carlemanovu podmínku je jednoznačně určena, pokud známe její projekce do nekonečné množiny $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů, nebo projekce do množiny přímek, která má kladnou Lebesgueovu míru.

Ukazuje se tedy, že nám při Carlemanově podmínce stačí spočetná množina projekcí do $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů. Obdobný výsledek, tedy nutnost maximální dimenze projekčních ploch, jsme viděli v diskrétním případě, konkrétně ve větě 22. Ukazuje se, že znalost nekonečně mnoha projekcí do $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů nám stačí i pro případ, kdy je charakteristická funkce analytická.

Věta 27 (Chafaï, 2014, str. 12)**.** *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^d$, jejíž charakteristická funkce je analytická na průniku každého 2-dimenzionálního prostoru s každou sférou v $\mathbb{R}^d$ se středem v počátku a libovolným poloměrem. Pokud množina všech přímek, do kterých známe projekci μ je nekonečná množina $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů, je těmito projekcemi míra jednoznačně určena.*

Důkaz. Nechť μ a ν jsou dvě různé pravděpodobnostní míry na $\mathbb{R}^d$, jejichž charakteristické funkce splňují podmínku ze zadání. Nechť mají dále stejné projekce do nekonečné množiny různých $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů, označme tuto množinu D. Míry jsou různé, tedy podle Cramérovy-Woldovy věty musí existovat přímka, do které se projekce liší. Nechť $\mathbf{x}$ je jednotkový vektor obsažený v této přímce. Nechť je dále $\mathbf{y}$ libovolný vektor obsažený v libovolné přímce, do které mají míry stejné projekce. Označme výrazem $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ podprostor o dvou dimenzích obsahující vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Pro libovolnou přímku v obsaženou ve $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ můžeme najít projekci měr μ a ν do v tak, že nejdříve zjistíme jejich projekci do $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, a potom do v. Použijeme případ pro dvě dimenze, tedy větu 25. Kdyby ve $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ bylo nekonečně mnoho různých přímek se stejnými projekcemi, tak podle této věty už jsou i projekce do $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ stejné, což neplatí. Pro každé $\mathbf{y}$, v jehož směru jsou projekce měr stejné platí, že $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ obsahuje maximálně konečně mnoho přímek se stejnými projekcemi.

Zafixujme nějaký vektor $\mathbf{y}$ rovnoběžný s přímkou, ve které mají míry stejné projekce. Platí, že $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ je podprostor v $\mathbb{R}^d$ o dimenzi 2, a každý podprostor M z množiny D má dimenzi $d-1$. Protože se pohybujeme v prostoru dimenze d, musí mít $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ a M průnik tvořící podprostor $\mathbb{R}^d$ o dimenzi minimálně 1. Jeho dimenze je právě 1 , neboť M neobsahuje vektor $\mathbf{x}$. Každá množina M tedy proniká $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ v jedné přímce. Z výše spočteného ale přímek, ve kterých jsou projekce měr μ a ν stejné, může být ve $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ jen konečně mnoho. Pokud má být D nekonečná množina, musí platit, že existuje přímka $p_0 \subset V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ a nekonečná podmnožina $D_0 \subset D$ taková, že průnik každé $M \in D_0$ a $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ je přímka p_0. Zároveň tato přímka není rovnoběžná s vektorem $\mathbf{x}$, jinak by měl identické projekce pro obě míry, což podle předpokladu neplatí. Neboť množiny M jsou podprostory o dimenzi $d-1$, můžeme je také charakterizovat pomocí jejich normálových vektorů. Pro každý podprostor $M \in D_0$ platí $p_0 \subset M$, což implikuje, že normálový vektor M je kolmý na p_0. Označme N_0 množinu normálových vektorů pro podprostory z množiny D_0. Nechť $\mathbf{z}_1$ je nějaký vektor v $\mathbb{R}^d$ kolmý na vektor $\mathbf{x}$ a přímku p_0.



Obrázek 3.3: Plocha $V_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ pro případ $d = 3$.

Na obrázku 3.3 vidíme, jak může vypadat dosavadní konstrukce pro případ $d = 3$. Vidíme přímku p_0 a vektor $\mathbf{x}$, na ně kolmý vektor $\mathbf{z}_1$, a normálové vektory $\mathbf{n}_i$ z množiny N_0. Zabývejme se teď množinou $V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1}$. To je plocha dimenze 2, takže má neprázdný průnik s libovolným podprostorem $M \in D$, do kterého mají míry μ a ν stejné projekce. Proto existuje vektor $\mathbf{y}' \subset V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1}$ rovnoběžný s nějakou přímkou v M. To také implikuje $V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1} = V_{\mathbf{x},\mathbf{y}'}$. Neboť $\mathbf{y}'$ je rovnoběžný s přímkou, do které mají obě míry stejnou projekci, platí z výše uvedeného, že $V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1}$ obsahuje maximálně konečně mnoho přímek, které mají stejné projekce měr μ a ν. Pokud to má platit, musí existovat přímka $p_1 \subset V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1}$ a nekonečná podmnožina $D_1 \subset D_0$ taková, že průnik každé $M \in D_1$ a $V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_1}$ je přímka p_1. To znamená, že pro množinu normálových vektorů podprostorů z D_1, kterou označíme N_1, platí $N_1 \perp \{p_0, p_1\}$. Navíc je množina $\{p_0, p_1\}$ z volby vektoru $\mathbf{z}_1$ lineárně nezávislá, protože platí $p_0 \perp \mathbf{z}_1$ a přímka p_1 patří do lineárního obalu vektorů $\mathbf{z}_1$ a $\mathbf{x}$, přičemž není rovnoběžná s $\mathbf{x}$.

Tuto konstrukci ale můžeme rekurentně opakovat. Nechť pro $m \in \mathbb{N}$, $m < d-2$ známe lineárně nezávislou množinu přímek $\{p_0, \dots, p_m\}$ a nekonečnou množinu podprostorů $D_m \subset D$ takovou, že množina normálových vektorů podprostorů z D_m je kolmá na množinu $\{p_0, \dots, p_m\}$. Zvolme nějaký vektor $\mathbf{z}_{m+1}$ kolmý na množinu $\{p_0, \dots, p_m\}$, a jako výše zkoumejme plochu $V_{\mathbf{x},\mathbf{z}_{m+1}}$. Obdobnou argumentací získáme přímku p_{m+1} a množinu $D_{m+1} \subset D_m$ takovou, že pro množinu N_{m+1} normálových vektorů podprostorů D_{m+1} platí $N_{m+1} \perp \{p_0, \dots, p_{m+1}\}$. Postupujme, dokud množina přímek neobsahuje $d-2$ přímek, tj. dokud neznáme $\{p_0, \dots, p_{d-2}\}$. Množina je dle předpokladů lineárně nezávislá, takže její lineární obal je podprostor dimenze $d-1$, na který je kolmá pouze jedna přímka l procházející počátkem. Zároveň pokud množina N_{d-2} normálových vektorů nekonečné množiny podprostorů D_{d-2} je kolmá na lineární obal množiny $\{p_0, \dots, p_{d-2}\}$, tak jsou všechny normálové vektory rovnoběžné s přímkou l. To ale znamená, že všechny podprostory v množině D_{d-2} jsou si rovné. To ale vede ke sporu, protože D_{d-2} je nekonečná podmnožina množiny D, ve které jsou všechny prvky různé.

$\square$

Závěr

V několika důkazech Cramérovy-Woldovy věty jsme ukázali, že jednoznačnost projekcí do přímek úzce souvisí s jinými jednoznačně určujícími vlastnostmi pravděpodobnostního rozdělení, totiž s jednoznačností z charakteristické funkce a jednoznačností z integrálů všech spojitých omezených funkcí vzhledem k pravděpodobnostní míře. Oba tyto případy ale vyžadovaly pro naše účely příliš velkou informaci: v prvním případě jsme museli znát hodnoty charakteristické funkce na celém prostoru $\mathbb{R}^d$, v druhém případě jsme museli znát integrály všech omezených spojitých funkcí.

Pokud jsme tedy chtěli zmenšit potřebnou množinu projekčních přímek, museli jsme hledat rozdělení, která jsou jednoznačně určena vlastnostmi, které v určitém smyslu vyžadují menší počet informací. Takových rozdělení jsme našli 3 typy. Za prvé to bylo diskrétní rozdělení o n bodech. Z konečnosti nosiče jsme poté potřebovali i konečně mnoho informací, které jsme mohli získat z libovolné dostatečně velké konečné množiny přímek. Druhé speciální rozdělení bylo rozdělení s konečnými absolutními momenty splňující Carlemanovu podmínku. V tomto případě bylo rozdělení určeno svými momenty, kterých je spočetně mnoho. Díky tomu nám pak v dimenzi 2 stačila libovolná spočetná množina projekčních přímek. Poslední speciální rozdělení bylo rozdělení s analytickou charakteristickou funkcí na kružnicích. V tomto případě nám stačilo znát hromadný bod množiny bodů na kružnici, ve kterých známe funkční hodnotu charakteristické funkce. Na existenci hromadného bodu nám stačilo spočetně mnoho bodů v jeho blízkosti.

V všech případech jsme ale potřebovali projekce do $(d-1)$-dimenzionálních podprostorů. Pro existenci spočetné množiny projekčních přímek, které jednoznačně určují rozdělení, bychom potřebovali mnohem silnější podmínky. Přesto bychom měli být spokojeni s faktem, že podmínky silně zmenšují nutnou množinu projekčních přímek, ať už je dimenze libovolná.

Seznam použité literatury

BILLINGSLEY, P. (1995). *Probability and Measure.* Third Edition. John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-00710-2.

CHAFAÏ, D. (2014). Random projections, marginals, and moments. *URL https://djalil.chafai.net/docs/projections.pdf. Accessed on 04.04.2021.*

CRAMÉR, H. a WOLD, H. (1936). Some theorems on distribution functions. *Journal London Math. Soc.*, **11**, 290–294.

CUESTA-ALBERTOS, J. A., FRAIMAN, R. a RANSFORD, T. (2007). A sharp form of the Cramér-Wold theorem. *Journal of Theoretical Probability*, **20**(2), 201–209.

GARDNER, R. J. a GRITZMANN, P. (1997). Discrete tomography: Determination of finite sets by x-rays. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**(6), 2271–2295.

HEPPES, A. (1956). On the determination of probability distributions of more dimensions by their projections. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**, 403–410.

KNAPP, A. W. (2016). *Basic Real Analysis.* Digital Second Edition. Birkhäuser Boston. ISBN 978-0-8176-3250-2.

LACHOUT, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.

MATOUŠEK, J., PŘÍVĚTIVÝ, A. a ŠKOVROŇ, P. (2008). How many points can be reconstructed from k projections? *SIAM Journal on Discrete Math.*, **22**(4), 1605–1623.

POLLARD, D. (2010). *A User's Guide to Measure Theoretic Probability.* 7th printing. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. ISBN 0-521-80242-3.

RÉNYI, A. (1952). On projections of probability distributions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3**, 132–142.

SHASTRI, A. R. (2010). *Basic Complex Analysis of One Variable.* New Central Book Agency Pvt Ltd, India. ISBN 02-303-3073-8.

WALTHER, G. (1997). On a conjecture concerning a theorem of Cramér and Wold. *Journal of Multivariate Analysis*, **63**, 313–319.

A. Přílohy

A.1 Pomocná tvrzení

Věta 28 (Stoneova-Weierstrassova)**.** *Nechť H je kompaktní Hausdorffův prostor a algebra $\mathcal{P}$ je podmnožinou množiny všech spojitých funkcí z H do $\mathbb{R}$. Nechť $\mathcal{P}$ obsahuje nenulovou konstantní funkci. Potom je $\mathcal{P}$ hustá v množině spojitých funkcí z H do $\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{P}$ dělí body, tj. pro $\forall x,y \in H$, $x \neq y$ $\exists f \in \mathcal{P}$, $f(x) \neq f(y)$.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je triviální. Důkaz druhé implikace můžeme najít například v knize Knapp, 2016 na straně 126.

□

Věta 29 (Weierstrassova)**.** *Nechť $[a,b]$ je interval. Potom je množina polynomů definovaných na $[a,b]$ hustá v prostoru všech spojitých funkcí z $[a,b]$ do $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Jedná se o triviální důsledek předchozí věty.

□

Věta 30 (Dynkinova)**.** *Nechť μ a ν jsou dvě pravděpodobnostní míry definované na $\sigma(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je π-systém (neprázdný a uzavřený na konečné průniky). Pokud $\mu(A) = \nu(A)$ pro $\forall A \in \mathcal{A}$, potom $\mu = \nu$.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v Billingsley, 1995 na straně 163.

□

Věta 31. *Počet sudých a lichých podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ je stejný.*

Důkaz. Pokud je n liché, pak pro každou lichou podmnožinu $A \subset \{1, \ldots, n\}$ existuje právě jedna sudá podmnožina $B \subset \{1, \ldots, n\}$ taková, že $A \cup B = \{1, \ldots, n\}$ a zároveň $A \cap B = \emptyset$. Vztah ale funguje, i když vyměníme postavení lichých a sudých množin. Existuje tedy bijekce mezi sudými a lichými podmnožinami, tedy je jich stejně mnoho.

Pokud je n sudé, víme že množina sudých podmnožin $\{1, \ldots, n-1\}$ a množina lichých podmnožin $\{1, \ldots, n-1\}$ mají stejně prvků, označme je S a L. Každá sudá podmnožina $\{1, \ldots, n\}$ je buďto obsažena v S nebo tvaru $\{n\} \cup l$, kde $l \in L$. Tedy je jich $2\,|L|$. Naopak každá lichá podmnožina $\{1, \ldots, n\}$ je buďto obsažena v L nebo tvaru $\{n\} \cup s$, kde $s \in S$. Tedy je jich také $2\,|L|$.

□

Věta 32 (Charakteristická funkce a momenty)**.** *Nechť X je náhodná veličina a $\hat{\mathsf{P}}_X(t)$ je její charakteristická funkce. Nechť má dále X konečné momenty všech řádů. Pak pro přirozené n platí*

$$\hat{\mathsf{P}}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\, \mathbf{E}[X^n], \tag{A.1}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\hat{\mathsf{P}}_X(t)|_{t=0} = i^n\ \mathbf{E}[X^n]. \tag{A.2}$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v knize Billingsley, 1995 na straně 344.

□