

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Míchání karet a grupa Mathieu M12

Autor: Michal Košek

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

V práci jsou představeny a dokázány dvě konstrukce sporadické jednoduché Mathieuovy grupy M_{12} . V jednom případě má konstrukce vztah s mícháním karet, kde se grupa M_{12} dostane jako faktorgrupa tzv. míchací grupy balíčku 24 karet podle elementární abelovské grupy C_2^{11} . Ve druhém případě se grupa M_{12} dostane jako faktorgrupa podle cyklické dvouprvkové podgrupy z grupy monomiálních automorfismů dalšího výjimečného objektu, a sice rozšířeného ternárního Golayova kódu.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Téma práce považuji za odpovídající. Použité pojmy jsou poměrně elementární (základy teorie grup a lineární algebry, kombinatorika), ale práce s nimi vede k netriviálním a zajímavým výsledkům.

Vlastní příspěvek. Hlavním příspěvkem je nový důkaz faktu, že grupa automorfismů Golayova kódu má za faktorgrupu Mathieuovu grupu. K tomu byla využita konstrukce Golayova kódu přes projektivní rovinu nad tříprvkovým tělesem od školitele. Dalším přínosem je zcela jistě ucelená prezentace tématu.

Matematická úroveň. Text je korektní, jenom je podle mě poněkud nadužíváno ponechání ověření prezentovaných faktů čtenáři. V odborných článcích se to sice taky často děje, ale i tam je potřeba dodržovat nějakou míru, jinak klesá čitelnost a roste riziko chyb.

Práce se zdroji. Použité zdroje jsou řádně citovány. Ocenil bych ale doplnit chybějící odkaz u poznámky uprostřed strany 10 (základní vlastnosti afinních rovin). Už proto, že jsou tato fakta dál využívána. Také lemma 3.11, byť elementární, by zasloužilo citaci.

Formální úprava. Formální úprava práce je dobrá. Snad jen v seznamu citací by bylo dobré uvádět nejen název článku, ale i v jakém periodiku, příp. na preprintovém serveru je možné článek najít (citace [2], [4], [11]). Jména v citacích by měla také být s velkými písmeny (citace [3], [9], [11])

KONKRÉTNÍ PŘIPOMÍNKY

Uvádím několik konkrétních míst, která by podle mého názoru bylo záhodno více ozřejmit:

1. jak se dostane rovnost $f(xn + y) = y(k - 1 - x)$ v posledním řádku na konci strany 7 (kde funkce f se využívá pro výpočet počtu inverzí permutace σ),
2. jak se v témž důkazu dostane prezentace σ jakožto složení počtu transpozic, který je roven počtu inverzí (klidně by stačila citace, protože obvykle se jen používá, že znaménko permutace se dostane jako parita počtu inverzí, což by ostatně pro tento důkaz také stačilo),
3. proč je míchací grupa S ve druhém odstavci části 2.3 semidirektním součinem K a H (je vysvětleno jen, proč $H \cong S/K$, ale už ne jak se H vnoří do S),

4. jak naložíme na konci důkazu věty 2.11 s případem, kdy je y_1 rovno 4 nebo 9 (v tom případě totiž nelze splnit rovnost $\psi^{-k}(y_1) = 0$, celkově by asi bylo jednodušší dokázat, že pro každou dvojici (x, y) existuje permutace z H , která pošle (x, y) na $(0, 1)$ – z toho tranzitivita okamžitě plyne),
5. jak konkrétně se volí v důkazu lemmatu 3.3 bijekce $A \rightarrow \mathbb{F}_3^2$, protože zdaleka ne každá bijekce je isomorfismem afinních rovin (bijekcí je $9!$, zatímco isomorfismů je $|\text{AGL}(2, 3)| = 9 \cdot 8 \cdot 6$),
6. proč je kód v důkazu lemmatu 3.26 samoduální, což hraje dost zásadní roli, a aspoň menší komentář k důsledku, že váha kódového slova je pak dělitelná třemi (a nejlépe by zasloužil uvést i váhový polynom se vhodnou citací),
7. jak se přesně na konci důkazu lemmatu 4.2 použije lemma 3.26 ke zjištění, že dvojice indexů i, j je nutně v nosiči kódového slova váhy 6.

V posledních třech odstavcích důkazu lemmatu 4.4 se schovává tvrzení, které by samo o sobě bylo lepší formulovat jako lemma s důkazem.

Nakonec ještě seznam několika překlepů a dalších drobností:

8. V definici k -tranzitivity (definice 1.2) nejspíš mělo být $|X| \geq k$ místo $|G| \geq k$.
9. Ve formulaci lemmatu 2.7 by mělo být $n(n-1)k(k-1) \equiv 0 \pmod{8}$, protože výraz $n(n-1)k(k-1)$ je pro $k, n \in \mathbb{N}$ čtyřmi dělitelný vždy.
10. V hypotéze 2.8 není nijak použita zvolená podgrupa $P \leq S_k$.
11. Ve formulaci lemmatu 3.21 musí perfektní kód obsahovat nulový vektor (pokud např. $C \leq \mathbb{F}_3^{11}$ je Golayův ternární perfektní kód a $c \in \mathbb{F}_3^{11} \setminus C$, pak $C + c$ je také perfektní kód se stejnými parametry, ale neobsahuje nulové slovo, tedy není lineární),
12. Na začátku důkazu lemmatu 3.26 má být odkaz na tvrzení 3.23 místo lemma 3.23.
13. Na konci důkazu hlavní věty v části 4.2 by bylo dobré v odkazu specifikovat, že myslíte větu 4.1.

ZÁVĚR

Práci doporučuji uznat jako bakalářskou práci.

Návrh klasifikace vedoucí sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
 Katedra algebry MFF UK
 25. 8. 2021