Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Josef Stráský

Konkurenční rovnováha

Vedoucí: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

2008

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené prameny a literaturu.

V Praze dne 30. května 2008 Josef Stráský

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce doc. Zelenému za výběr tématu, studijní literaturu, pravidelné přínosné konzultace a v neposlední řadě za trpělivé opakované čtení rozpracovaného textu.

Název práce: Konkurenční rovnováha
Autor: Josef Stráský
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
E-mail vedoucího: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci shrnuji rigorózním matematickým způsobem znalosti o konkurenční rovnováze. Práce má dvě hlavní části. V první se zabývám existencí tohoto tržního equilibria, jedná se o hledání takového cenového sytému, který splňuje podmínky rovnováhy. Nejprve jsou definovány potřebné pojmy (komodita, výrobce, spotřebitel, ekonomika, equilibrium ad.). Dále je uvedena Kakutaniho věta a vysvětleno její využití při důkazu existence equilibria. Podrobně jsou diskutovány matematické předpoklady použité v důkazu a jejich ekonomická interpretace. V druhé části je řešen problém stability equilibria. S využitím teorie diferenciálních rovnic je zkoumána povaha rovnováhy, tedy zda se cenový systém vyvíjí směrem k rovnováze. V práci je předvedeno několik postupů, které využívají stability tzv. linearizovaného systému anebo metody ljapunovských funkcí.

Klíčová slova: existence tržního equilibria, Kakutaniho věta, stabilita equilibria

Title: Market equilibrium
Author: Josef Stráský
Department: Institute of Economic Studies
Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this work I summarize mathematically rigorously knowledge about market equilibrium. The work has two main parts. In the first part I am dealing with existence of the market equilibrium. It means to find a price system that satisfies conditions of the equilibrium. Firstly all needed terms are defined (commodity, producer, consumer, economy, equilibrium etc.). And secondly Kakutani's theorem is introduced and its application in the proof of equilibrium existence is explained. Mathematical assumptions and their economic interpretations are discussed in detail. In the second part is the equilibrium stability problem analyzed. With usage of the theory of differential equations the nature of equilibrium is investigated. This means if the price system is going to the equilibrium. There are demonstrated few approaches in the work that employ the stability of so called linearized system or the method of Liapunov functions.

Keywords: existence of market equilibrium, Kakutani's theorem, stability of equilibrium

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Cílem následující bakalářské práce je podat stručný, ale matematicky kompletní souhrn znalostí o konkurenční rovnováze. Tedy o equilibriu trhu, který se vyznačuje tím, že aktéři nedokáží změnit cenu žádné z komodit (berou ceny jako dané). Zdá se, že toto téma je nemoderní a nemá již současné ekonomii co říct. Na druhou stranu je ale potřeba si uvědomit, že teorie rovnováhy je základním fundamentem ekonomie jako takové. A slovy jako *trh*, *konkurence*, *rovnováha* či *optimum* se stále velmi často argumentuje ve prospěch toho či onoho. K tomu je ale nutné pochopit, co vlastně například *tržní rovnováha* **přesně** znamená. Tato práce by měla dát přehlednou odpověď. Základní metodou budiž matematika a logika (jsem pevně přesvědčen, že slova **přesně** nelze dosáhnout jiným způsobem).

Rigorózní matematická analýza dává přesné odpovědi, ale pouze za přesně určených podmínek (předpokladů). Tím je vždy limitována užitečnost pro ekonomii. Proto se kromě přesných odpovědí snažím (přiznávám, že méně přesně) diskutovat oprávněnost různých předpokladů. Pro ekonoma je v tomto případě důležité, které z předpokladů jsou pouze matematickou (rozumějme technickou) nezbytností pro formální preciznost, a naopak, které specifikují realitu, která je buď splněna či nesplněna. Takové předpoklady pak mohou být předmětem ekonomické (či dokonce politické) diskuse na téma, jak se více přiblížit jejich splnění.

První část práce je věnována existenci tržní rovnováhy. Důkaz není zcela předveden. Důraz je kladen spíše na definice používaných pojmů, na přesnou specifikaci nutných předpokladů a na vysvětlení matematických pojmů a postupů, které se v důkazu používají. Mezi hlavní používané ekonomické pojmy patří výrobce maximalizující zisk, spotřebitel maximalizující užitek a trh, ve kterém žádný z aktérů nemůže ovlivnit cenu. Mezi hlavní matematické pojmy patří konvexnost a kompaktnost množin, vícehodnotová funkce a její vlastnosti a Kakutaniho věta.

V druhé části je popisována teorie stability equilibria. Jedná se o přehled historicky objevených a používaných postupů, které využívají matematických znalostí o podmínkách pro stabilitu equilibria. Hlavními dvěma postupy jsou stabilita linearizovaného systému a metoda ljapunovských funkcí. Nutné předpoklady k použití těchto metod jsou opět podrobně diskutovány.

Na konci práce jsou nastíněny možnosti dalšího výzkumu. Jde o směry zkoumání, které by mohly vést k oslabení některých předpokladů při zachování ekonomicky zajímavých výsledků o existenci a stabilitě equilibria.

Kapitola 2

Definice

Tato a následující kapitola vycházejí z článku Gerarda Debreu o existenci tržní rovnováhy [1]. Jedná se o souhrnný (a velmi dlouhý) článek, který zcela precizně popisuje existenci tržního equilibria. Jak jsem již napsal v úvodu, soustředím se na definice a na důležité předpoklady jednotlivých tvrzení. Naopak vynechávám detaily v dokazování určitých matematických vlastností (typicky uzavřenost množiny).

2.1 Data a místa

Řekněme, že čas, ve kterém se koná ekonomická aktivita, lze rozdělit na konečný počet chronologicky seřazených dostatečně malých elementárních intervalů. Budeme je nazývat *čas* případně *datum*. Čas tedy budeme vnímat jako nespojitý, tedy tzv. diferencovaný. Podrobnější diskusi na téma diferenciace času uvádím v definici komodity.

Řekněme, že prostor, ve kterém se koná ekonomická aktivita, lze rozdělit na konečný počet elementárních regionů. Budeme je nazývat *místo*. Předpoklad diferenciace prostoru se zdá být oprávněnější než diferenciace času. Lze si snadněji představit, že k ekonomické aktivitě dochází na určitých místech – obchodech, burzách – kdežto čas přirozeně vnímáme spíše jako spojitý.

2.2 Komodity

Řekněme, že každou komoditu[1] lze přesně definovat její fyzickou podstatou. Tedy přesně specifikovat veškeré vlastnosti komodity (například: odrůda, ročník, sklon svahu, přesné místo, způsob zpracování, cukernatost atd.) a tím ji odlišit od všech ostatních komodit. Kromě těchto fyzických vlastností komoditu určuje ještě *místo* a *čas*. Cena téhož chilského vína je jistě jiná v Chile nebo v Česku, v hypermarketu nebo ve vinotéce. V následující definici se jedná o různé komodity. *Komodita* je definována fyzickými vlastnostmi, *místem* a *časem*.

Pokud se smíříme s diferenciací míst (států, hypermarketů i vinoték je jistě konečný počet), je nyní potřeba diskutovat diferenciaci času. Diferenciaci času jsme zavedli za účelem rozlišení *komodit* v čase. U „komodity" se v čase může měnit 1) její cena 2) její fyzické vlastnosti 3) její místo. Předpokládáme, že tyto vlastnosti se nemění nekonečně rychle, pak při určité omezené přesnosti měření vlastností (fyzických, míst a ceny) komodity je zřejmé, že po nějaký elementární časový interval se „komodita" nemění a v tomto časovém intervalu tvoří *komoditu*. Dále předpokládejme, že v určitém čase v minulosti ještě žádné komodity neexistovaly. A také, že v určitém čase v budoucnosti komodity nebudou existovat resp. jejich existence nemá vliv na rozhodování v současnosti.

Při omezeném a diferencovaném čase a ostatních předpokladech tedy máme konečný počet l *komodit*. Dále předpokládejme, že množství každé komodity měříme v nějakých vhodných jednotkách a počet těchto jednotek dokážeme vyjádřit reálným číslem. Tím předpokládáme, že množství komodity narozdíl od jiných vlastností dokážeme měřit nekonečně přesně a toto množství se může spojitě měnit, tento předpoklad bude ještě diskutován.

Nyní prostor $\mathbb{R}^l$ tedy můžeme nazvat prostorem komodit.[2]

2.3 Akce

Bod[3] a z tohoto prostoru vyjadřuje plán akcí ekonomického *agenta* (*činitele*), které udělá od teď do budoucnosti. Vektor a tedy vyjadřuje množství komodit (tím je specifi-

[1] Slovo komodita budu používat ve dvou odlišných významech. Především dle následující přesné definice. Jinak ale také dle intuitivního významu, kde komodita označuje nějaký statek nebo službu – včetně práce. Pokud to bude nutné budu používat zápis *komodita* resp. „komodita"

[2] Prostor má opravdu hodně, ale konečně dimenzí; každá komodita má „svoji" osu a množství komodity je bod na této ose.

[3] Tedy vektor délky l.

kováno i místo a čas), které *agent* prodá či koupí (to rozlišujeme znaménkem). Zde tedy předpokládáme, že *agent* přesně ví, co v budoucnosti udělá. Tento předpoklad nutně ovlivní povahu dosaženého výsledku, což bude pečlivě rozebráno.

2.4 Ceny

Každé komoditě můžeme přiřadit její *cenu.* Cenou (srozumitelnější výraz by byl spíše hodnota) je zde myšleno nějaké číslo (nikoli tedy třeba množství zlata). Pokud takto oceníme všechny komodity, získáme *cenový systém*, který je tvořen bodem p z prostoru $\mathbb{R}^l$.[4] Získáváme tím relativní porovnání hodnot všech komodit. Místo cenového systému p lze zřejmě použít cenový systém tp, kde t je kladné reálné číslo. Pokud agent chce zaplatit například za komoditu h cenu p_h, použije k tomu komoditu k, kterou nazveme penězi, a vydá p_h/p_k jednotek této komodity (peněz). Z této konstrukce lze snadno odvodit diskontní faktor (změnu hodnoty v čase) a směnný kurz (změnu hodnoty v prostoru) [1], pro další postup to ale nevyužijeme.

Dále můžeme definovat *hodnotu akce* odpovídající cenovému systému p jako skalární součin $p \cdot a \equiv \sum_{k=1}^{l} p_k a_k$. Jedná se vlastně o hodnotu, kterou *agent* získá či ztratí při akci a. Tato hodnota, která mu například zbude, bude nutně reálně vyjádřena určitým množstvím nějaké komodity (například mu zbude komodita peníze).

Matematické shrnutí dosavadních definic je stručné. *Počet komodit l je kladné celé číslo. Akce činitele je bod a v prostoru komodit $\mathbb{R}^l$. Cenový systém p je bod v prostoru $\mathbb{R}^l$. Hodnota akce odpovídající cenovému systému p je skalární součin $p \cdot a$.*

Definujme ještě množinu Ω jako kladný orthant prostoru $\mathbb{R}^l$. Tedy výseč v prostoru $\mathbb{R}^l$, ve které jsou množství všech komodit kladná. Množina $-\Omega$ je pak přirozeně záporný orthant prostoru $\mathbb{R}^l$. Dodejme, že pro velké l tvoří množiny Ω a $-\Omega$ jen velmi malou část prostoru $\mathbb{R}^l$.

2.5 Výrobci

Mějme konečné množství n *výrobců* (*producentů*). Produkční plán výrobce je určení množství jeho výstupů (kladná čísla) a vstupů (záporná čísla), je to určitý typ akce. *Výroba (nabídka, produkce)* j-tého výrobce je tedy reprezentována bodem y_j z prostoru

[4] Body na osách tohoto prostoru však nyní nevyjadřují množství, ale cenu – hodnotu – jednotlivých komodit; cena může být i záporná – například cena odpadu.

$\mathbb{R}^l$. *Produkční množina* Y_j je množina **všech možných** produkcí j-tého výrobce, je to tedy množina všech, pro j-tého výrobce dostupných, bodů y_j. Nyní

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{2.1}$$

nazveme *celkovou výrobou (nabídkou, produkcí).* Tento součet n vektorů po složkách (těch je l) vyjadřuje množství komodit, které všichni producenti dohromady vyrobí.

Symbolicky zapsané Y:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \tag{2.2}$$

nazveme *celkovou produkční množinou.* Součet množin provedeme tak, že vezmeme všechny kombinace bodů $y_j \in Y_j$ pro jednotlivá $j = 1, \dots, n$. Pro každou kombinaci sečteme body y_j přes všechny výrobce (přes j). Všechny tyto součty jsou body v prostoru $\mathbb{R}^l$ a tvoří množinu Y.

Při daném cenovém systému p je *zisk* (*profit*) j-tého výrobce $\pi_j(p) = p \cdot y_j$. *Celkový zisk* všech výrobců je $p \cdot y$. Pokud předpokládáme, že pro producenta je cenový systém dán, producent vybírá produkci y_j z produkční množiny Y_j tak, aby maximalizoval svůj zisk. Nechť $\eta_j(p)$ je *množina produkcí j-tého výrobce maximalizujících zisk.* Taková množina může být v rámci matematického pojetí prázdná – například pokud stále převažují rostoucí výnosy z rozsahu, pak lze nekonečným znásobením produkce dosáhnout nekonečného zisku a bod y_j maximalizující produkci neexistuje. Předpokládejme ale, že máme takový cenový systém p, při kterém jsou všechny množiny $\eta_j(p)$ neprázdné.[5] Vzhledem k absurditě předchozího protipříkladu je to zcela reálný předpoklad. Nezbytnost takového předpokladu vznikla tím, že teorie připouští případy, které v realitě nepozorujeme. Důležitý je však předpoklad, že producent opravdu dokáže efektivně maximalizovat svůj zisk. Tedy, že si dokáže vybrat produkci, která maximalizuje zisk, a to pouze v závislosti na cenovém systému a nikoli na jiných vlivech (například na nějakých jiných informacích, které má, nebo naopak nemá producent k dispozici).

Podobně jako množinu Y můžeme definovat množinu $\eta(p)$:

$$\eta(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p) \tag{2.3}$$

[5]Množiny η_j jsou závislé na cenovém systému p, zápis $\eta_j(p)$ lze tedy také interpretovat jako zobrazení z prostoru cenových systémů do prostoru komodit ($\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$).

jako *množinu celkových možných produkcí maximalizujících zisk jednotlivých výrobců.* Součet množin provádíme stejně jako bylo popsáno pro množinu Y.

2.6 Spotřebitelé

Mějme m *spotřebitelů.* Každý z nich (řekněme i-tý) vybírá svůj spotřební plán, tedy *spotřebu* či *poptávku*, označme ji jako bod x_i ze *spotřební množiny* X_i. Kladné číslo vyjadřuje nákup komodity, záporné její prodej. *Celková spotřeba* je dána jako

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{2.4}$$

a *celková spotřební množina*

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i. \tag{2.5}$$

Dosud byla konstrukce pro spotřebitele stejná jako pro výrobce. U producentů nyní bylo možné seřadit jednotlivé produkce podle zisku, který byl následně maximalizován. U spotřebitele rozlišujeme dva základní přístupy. Jedním z nich je zavedení užitkové funkce u_i. Předpokládáme, že spotřebitel dokáže (spojitě) všem spotřebám přiřadit nějaká čísla, kterými vyhodnocuje svůj užitek. Tuto užitkovou funkci pak můžeme maximalizovat a tím získáme nejlepší spotřebu. Výhodou je blízká analogie s výrobci. Nevýhodou je, že tento předpoklad na racionalitu spotřebitele je velmi silný.

Druhým přístupem je teorie preferencí, ve které předpokládáme, že spotřebitel dokáže seřadit jednotlivé spotřeby ve spotřební množině dle svých preferencí.[6] Přesněji řečeno předpokládáme, že při daných spotřebách x_i^1 a x_i^2 platí (spotřebitel rozlišuje) právě jedna z následujících možností: a) x_i^1 je *preferována před* (*lepší než*) x_i^2 ($x_i^1 \succ_i x_i^2$); b) x_i^1 je *je stejně dobrá jako* (*je indiferentní k*) x_i^2 ($x_i^1 \sim_i x_i^2$); c)x_i^1 je *méně preferovaná než* (*horší než*) x_i^2 ($x_i^1 \prec_i x_i^2$). Tyto tři relace můžeme snadno nahradit dvěma relacemi, které však mohou platit i současně: A) $x_i^1 \succeq_i x_i^2$: x_i^1 *není horší než* x_i^2; B) $x_i^1 \preceq_i x_i^2$: x_i^1 *není lepší než* (*není preferováno před*) x_i^2. Je zřejmé, že pokud platí A) i B), pak platí b); pokud neplatí B), pak platí a); a pokud neplatí A), pak platí b). Můžeme se tedy omezit na tuto binární relaci. Vzhledem k tomu, že jistě platí $x_i^1 \sim_i x_i^1$, je tato relace reflexivní. Dále budeme předpokládat, že pokud x_i^1 není horší než x_i^2 a x_i^2 není horší než

[6] V teorii projevených preferencí se předpokládá ještě trochu méně, a to, že pokud si spotřebitel vybere určitou spotřebu x_j, pak všechny ostatní prvky z množiny spotřeb dosažitelné při daném cenovém systému jsou stejně nebo méně preferované.

x_i^3, pak x_i^1 není horší než x_i^3. Tato velmi přirozená vlastnost je tranzitivita. Na základě těchto předpokladů tedy máme *úplně předuspořádanou* množinu X_i. *Předuspořádanost* znamená, že prvky, narozdíl od *uspořádanosti*, mají ještě nějaké další vlastnosti, nezahrnuté v relaci $\preceq_i$. V případě spotřeb je takovým dalším kritériem například cena spotřeby x_i. Překvapivé je, že stačí jen zdánlivě slabé předpoklady kladené na teorii preferencí k dosažení ekvivalence s teorií užitkové funkce. Podrobněji v diskusi předpokladů věty o existenci equilibria.

Nyní označme *bohatství spotřebitele* w_i. Je to souhrn veškerého majetku spotřebitele. Součet bohatství všech spotřebitelů je pak

$$w = \sum_{i=1}^{m} w_i. \tag{2.6}$$

Při daném páru (p, w) *spotřebitel* volí největší prvek x_i vzhledem k uspořádání $\preceq_i$, který splňuje omezení $p \cdot x_i \leq w_i$. Vzhledem k tomu, že mezi některými prvky množiny X_i je relace $\sim_i$ (tj. tyto prvky jsou stejné dobré, tzn. existují *indiferenční třídy* prvků x_i), může být největších prvků x_i více. V analogii k množině $\eta_j(p)$ tedy zavádíme nejpreferovanější množinu spotřeby a značíme ji $\xi_i(p, w)$. Celková *nejpreferovanější spotřební množina* je

$$\xi(p, w) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, w). \tag{2.7}$$

2.7 Ekonomika

Nejprve definujme *celkové zdroje* (*zásoby*). Jsou to všechny zdroje, které jsou agentům a priori k dispozici (např. suroviny, půda). Tyto zdroje reprezentujeme bodem ω z prostoru $\mathbb{R}^l$. Zdroje považujeme za známé.

Nyní definujme *ekonomiku*. Jedná se o souhrn předchozích pojmů. *Ekonomika* E je definovaná neprázdnou množinou X_i z $\mathbb{R}^l$ pro každé $i = 1, \ldots, m$, zcela předuspořádanou dle $\preceq_i$, dále neprázdnou[7] množinou Y_j z $\mathbb{R}^l$ pro každé $j = 1, \ldots, n$ a bodem ω z $\mathbb{R}^l$. *Stav ekonomiky* je specifikován jednotlivými zvolenými akcemi všech agentů. Je tedy vyjádřen příslušnými spotřebami x_i a produkcemi y_j.

Při daném stavu ekonomiky můžeme přirozeně definovat následující pojmy. Bod $x - y$ nazveme *čistou poptávkou*. Jedná se o rozdíl mezi spotřebou a výrobou. Při kladné čisté poptávce spotřebitelé spotřebovávají nejen z produkce ale též ze zásob. Bod $x - y - \omega$

[7] Potřebujeme takový cenový systém p, aby množiny X_i a Y_j byly neprázdné.

označíme z a nazveme *převisem poptávky.* Kladný převis poptávky značí, že spotřebitelé konzumují více, než se vyrobí a než dovolují zásoby. Převis poptávky náleží do množiny $X - Y - \omega$, kterou označíme Z. Rozdíl množin provedeme podobně jako součet množin, což bylo popsáno v části o producentech. Vezmeme všechny kombinace bodů z jednotlivých množin, body od sebe odečteme a všechny vzniklé rozdíly tvoří výslednou množinu.

Nyní budeme předpokládat, že zdroje a producenty vlastní spotřebitelé. Každý (třeba i-tý) spotřebitel (člověk) vlastní části výrobců (firem) tak, že každý výrobce je zcela vlastněn spotřebiteli. Koeficient θ_{ij} vyjadřuje jakou část j-tého výrobce vlastní i-tý spotřebitel. Podobně všechny zdroje jsou dohromady vlastněné spotřebiteli. *Soukromě vlastněná ekonomika* ε je tedy definovaná stejně jako ekonomika a dále každý spotřebitel vlastní zdroje ω_i tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega, \tag{2.8}$$

a pro každou dvojici *spotřebitel-výrobce* (i, j) existuje nezáporné reálné číslo θ_{ij} takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1. \tag{2.9}$$

Bohatství i-tého spotřebitele v soukromě vlastněné ekonomice tak závisí pouze na cenovém systému:

$$w_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p). \tag{2.10}$$

2.8 Tržní rovnováha

Stav ekonomiky E nazveme *tržní rovnováhou (equilibriem)*, pokud je převis poptávky nulový. Tedy $z = 0$.

Equilibrium soukromě vlastněné ekonomiky je vyjádřeno jednotlivými spotřebami x_i^*, produkcemi y_j^* a cenovým systémem p^*, pro něž platí:

1. x_i^* je pro každého spotřebitele vzhledem k uspořádání $\preceq_i$ největším prvkem z množiny X_i, který splňuje podmínku:

$$p^* \cdot x_i^* \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*, \tag{2.11}$$

2. y_j^* maximalizuje pro každého producenta zisk při cenovém systému p^* na množině Y_j,

3. $x^* - y^* = \omega$.

První podmínka vyjadřuje, že spotřebitel si vybírá nejlepší ze spotřeb, které si může dovolit. Druhá podmínka vyjadřuje, že producent při daném cenovém systému maximalizuje svůj zisk $\pi_j = p \cdot y_j$. A třetí podmínka je definicí tržní rovnováhy – převis poptávky je nulový.

Připomeňme, že v soukromě vlastněné ekonomice rovnice (2.10) vyjadřuje bohatství w jako funkci pouze cenového systému p. Množina nejlepších spotřeb tedy závisí pouze na cenovém systému: $\xi_i'(p, p \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p)) = \xi_i'(p)$.

Následující poměrně formální postup vychází přímo z předchozích definic. Nechť C je množinou takových cenových systémů p v $\mathbb{R}^l$, pro které jsou všechny množiny $\xi_i'(p)$ a $\eta_j(p)$ neprázdné. Pro p z C náleží převis poptávky do množiny, kterou označíme ζ:

$$\zeta(p) = \xi_i'(p) - \eta_j(p) - \omega \tag{2.12}$$

Jedná se o rozdíl dvou množin, jehož provedení je popsáno v části o ekonomice, od tohoto rozdílu se ještě odečítá bod ω. Výsledná množina $\zeta(p)$ leží v množině Z. Na množinu $\zeta(p)$ lze také pohlížet jako na zobrazení z C do Z, které nazveme *zobrazením převisu poptávky.*

Equilibriem rozumíme nalezení $p \in C$ takového, že $0 \in \zeta(p)$. Tím ověříme, že equilibrium skutečně existuje. Můžeme totiž vybrat takovou kombinaci prvků z $\xi_i'(p)$ a $\eta_j(p)$ tak, aby $z = 0$.[8]

[8]Zde se velmi obecně uvažuje, že pro výrobce (resp. spotřebitele) je více produkcí (spotřeb) stejně dobrých, proto $\xi_i'(p)$ a $\eta_j(p)$ jsou množiny. Při malém zjednodušení můžeme uvažovat, že je jen jedna nejlepší výroba (spotřeba) a $\xi_i'(p)$ a $\eta_j(p)$ jsou body. Pak $\zeta(p)$ je také bod.

Kapitola 3

Existence tržní rovnováhy

3.1 Kakutaniho věta

Věta. *Nechť X je neprázdná, kompaktní a konvexní množina v prostoru $\mathbb{R}^l$. Nechť pro každé $x \in X$ je F(x) neprázdná uzavřená konvexní podmnožina $Y \subset X$. Nechť F(x) je shora polospojité. Pak existuje bod x^* ležící v $F(x^*)$*
(Existuje pevný bod zobrazení.)

Nejprve připomenu definici polospojitosti shora. *Zobrazení F je shora polospojité v bodě $x^0 \in X$, když $\{x^q\} \to x^0$, $\{y^q\} \in F(\{x^q\})$ a $\{y^q\} \to y^0$ společně implikuje $y^0 \in F(x^0)$.* $\{x^q\}$a $\{y^q\}$ jsou posloupnosti. Jinak řečeno, když $\{x^q\}$ směřuje do x^0 a $\{y^q\}$ směřuje do y^0 a pro každé q je $\{y^q\}$ v obrazu bodu $\{x^q\}$, pak i bod y^0 je v obrazu bodu x^0.

Kakutaniho větu, která našla v ekonomii značné uplatnění, formuloval japonský matematik Shizuo Kakutani jako zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodě. Brouwerova věta tvrdí, že každá spojitá funkce f, která zobrazuje z vhodné množiny (například jednotkové koule) do sebe samé, má pevný bod. Tedy existuje x^* takové, že $f(x^*) = x^*$. Brouwerova věta je významným výsledkem algebraické topologie. Ani jednu z vět zde nebudu dokazovat. Důkaz Brouwerovy věty je poměrně obtížný. Důkaz Kakutaniho věty (převedením na větu Brouwerovu) je snazší. Pokusím se spíše vysvětlit znění a předpoklady.

Máme nějakou základní množinu X ve vícerozměrném prostoru $\mathbb{R}^l$, po které chceme, aby byla kompaktní a konvexní. Dále máme zobrazení F, které zobrazuje z množiny X opět do množiny X. Toto zobrazení však je vícehodnotové. Obraz bodu $x \in X$ tedy tvoří množina $F(x)$, která je podmnožinou množiny X. Po této podmnožině požadujeme, aby byla konvexní. Posledním předpokladem je, že zobrazení $F(x)$ musí být shora polospojité. Místo vlastnosti polospojitosti shora je ve znění věty možné použít tuto vlastnost: *graf F je uzavřený*. Tedy množina, kterou si můžeme nakreslit jako graf zobrazení F, je uzavřená (samozřejmě i omezená).[1]

3.2 Hledání tržní rovnováhy

Připomeňme nejdříve, že každý spotřebitel nemůže spotřebovat více, než je jeho bohatství, tedy:

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p). \tag{3.1}$$

Sečtením přes všechny spotřebitele s ohledem na $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1$ dostaneme $p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot y$ tedy $p \cdot z \leq 0$. Pro každé z z $\zeta(p)$ tedy musí platit:

$$p \cdot \zeta(p) \leq 0. \tag{3.2}$$

Nyní budeme předpokládat, že každá produkce, která má nulové výstupy, je možná. Jinak řečeno producenti mohou volně „zahazovat“ zakoupené vstupy. Pak můžeme z definice equilibria zeslabit podmínku $x^* - y^* = \omega$ na $x^* - y^* \leq \omega$ (resp. $z^* \leq 0$). $z < 0$ totiž znamená, že pro dosažení equilibria přebývají některé vyrobené komodity. Při předpokladu možné nulové produkce však tyto přebytečné komodity mohou vstoupit do produkce, která má nulový výstup, tím přebytečné komodity zmizí a je dosaženo equilibria.

Rozmysleme si nyní, že pokud je cena třeba k-té komodity záporná ($p_k < 0$), pak třeba j-tý výrobce tuto komoditu bude používat jako vstup (výstupem nebude nic) a na jejím „nakupování“ bude libovolně vydělávat. Zisk takového producenta nelze maximalizovat (může být nekonečně velký a množina $\eta_j(p)$ není definovaná). Z toho tedy plyne, že $p \in C$ pouze když všechny komodity mají kladnou cenu ($p \geq 0$). Tuto nepříjemnou konstrukci (vyloučili jsme totiž ekonomiky s nežádoucími statky) lze obejít tím, že u komodit, které mají zápornou cenu, obrátíme svoji představu o jejich množství (skutečné kladné množství budeme označovat záporným číslem). Tím získáme formálně kladnou cenu a nákup znamená „nákup záporného množství“ (tedy vlastně prodej). Předpoklad o volném zahazování vstupů pro nežádoucí statky tedy znamená, že je možné neomezené hromadění těchto komodit. (Producentům nevadí, když jsou zavaleni odpadky.) Je to

[1] Touto množinou však nemusí být možné „protáhnout“ spojitou funkci – pak by bylo převedení Kakutaniho věty na Brouwerovu triviální.

poněkud omezující předpoklad, ale lze nyní vzít do úvahy i ekonomiky s nežádoucími statky.

Hledáme tedy takové $p \geq 0$ z C, aby $\zeta(p) \leq 0$. Uvědomme si nyní, že vynásobení všech cen kladným reálným číslem t nemá žádný vliv na výběr spotřebních či produkčních množin, tedy: $\eta_j(tp) = \eta_j(p)$, $\xi_i'(tp) = \xi_i'(p)$, $\zeta(tp) = \zeta(p)$ (tzv. homogenita). Nyní ještě předpokládejme, že $p \neq 0$. To znamená, že k alespoň jedné komoditě najdeme konzumenta (třeba i-tého), který je v této komoditě nenasytný. Pokud tedy je konzument nenasytný a cena by byla nulová, pak jeho spotřební množina X_i nemá největší prvek a množina $\xi_i'(p)$ neexistuje. Jinak řečeno, pokud budeme předpokládat nenasytnost, pak víme, že $p = 0 \notin C$. Pro $p > 0$ platí $\sum_{h=1}^{l} p_h > 0$ a z homogenity $\zeta\left(\frac{1}{\sum_{h=1}^{l} p_h} p\right) = \zeta(p)$. Tímto vhodným nastavení parametru t se můžeme omezit z množiny C pouze na množinu $P = \left\{p \in \omega \,\middle|\, \sum_{h=1}^{l} p_h = 1\right\}$. Původní ceně p nyní odpovídá průsečík polopřímky $\vec{0p}$ a množiny P.

3.2.1 Lemma o existenci rovnovážné ceny

Tímto lemmatem najdeme cenu v množině P, která splňuje podmínky equilibria. K důkazu se využije Kakutaniho věta.

Lemma. *Nechť Z je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^l$. Jestliže ζ je shora polospojité zobrazení z P do Z takové, že pro každé $p \in P$ je obraz $\zeta(p)$ neprázdný, konvexní a splňuje $p \cdot \zeta(p) \leq 0$, pak existuje $p \in P$ takové, že $\zeta(p) \leq 0$.*

Nyní uvedu klíčové kroky důkazu: P je zřejmě neprázdná, kompaktní a konvexní. Množinu Z nahradíme kompaktní a konvexní množinou Z', která množinu Z obsahuje. Pro dané $z \in Z'$ nechť $\mu(z)$ je množinou p z P, která maximalizuje $p \cdot z$. $\mu(z)$ je neprázdná, kompaktní, konvexní množina a μ je shora polospojité zobrazení na Z' (to plyne z čistě matematických vět viz.[1]). Uvažujme nyní zobrazení φ z množiny $P \times Z$ do téže množiny, které je definované jako $\varphi(p, z) = \mu(z) \times \zeta(p)$. Množina $P \times Z$ (která je podmnožinou $\mathbb{R}^{2l}$) je neprázdná, kompaktní a konvexní (jelikož to jsou i množiny P a Z'). Zobrazení φ je shora polospojité (neboť to jsou i zobrazení φ a ζ); a konečně obraz $\varphi(p, z)$ je pro všechna *(p,z)* z $P \times Z$ neprázdný a konvexní (protože to jsou i obrazy φ a ζ). Tím jsou splněny všechny předpoklady Kakutaniho věty a zobrazení $\varphi(p, z)$ má pevný bod, tedy $(p^*, z^*) \in \mu(z^*) \times \zeta(p^*)$, čili: $p^* \in \mu(z^*)$ a $z^* \in \zeta(p^*)$. Existuje tedy cenový systém, který splňuje definici equilibria.

3.2.2 Věta o existenci equilibria

Následující věta shrnuje celý předchozí text. Zde jsou uvedeny všechny předpoklady, které zaručují existenci *equilibria* v *soukromě vlastněné ekonomice* dle příslušných definic.

Věta. *V soukromě vlastněné ekonomice* $\varepsilon = ((X_i, \preceq_i), (Y_j), (\omega_j), (\theta_{ij}))$ *existuje equilibrium pokud:*

1. pro každé i: X_i je uzavřená, konvexní a je zdola omezená pro relaci $\leq$,
2. pro každé i: je spotřeba X_i nenasytná,
3. pro každé i: pro každé x'_i v X_i, jsou množiny $\{x_i \in X_i \,|x_i \succeq_i x'_i\}$ a $\{x_i \in X_i \,|x_i \preceq_i x'_i\}$ uzavřené v X_i,
4. pro každé i: pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dva body v X_i a pokud t je reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pak $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implikuje $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$,
5. existuje takové x_i^0 v X_i pro které platí $x_i^0 << \omega_i$,
6. pro každé j: $0 \in Y_j$,
7. Y je uzavřená a konvexní,
8. $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$,
9. $Y \supset (-\Omega)$.

Z hlediska důkazu je tato věta zesložitěním předchozího lemmatu. Komplikace spočívá v tom, že některé množiny Y_j nemusí být uzavřené a konvexní a některé množiny X_i, Y_j nemusí být omezené. Převedení věty na předchozí lemma je technicky poměrně náročné. Důkaz věty proto neuvádím. Daleko zajímavější je rozebrání jednotlivých předpokladů věty.

3.2.3 Diskuse předpokladů věty o existenci equilibria

1. X_i *je uzavřená*: pokud máme nekonečnou posloupnost spotřeb pro i-tého spotřebitele $\{x_i^q\}$ pak, pokud $\{x_i^q\} \to x_i^0$, tak x_i^0 je také spotřebou pro i-tého spotřebitele. Opačné tvrzení, tedy že první spotřeba je možná a je nekonečně blízko spotřebě druhé, ale druhá spotřeba už možná není, nedává reálný smysl. Množina možných spotřeb tak je přirozeně uzavřená.

X_i *je konvexní*: pokud jsou dvě spotřeby x_i^1 a x_i^2 možné, pak spotřeba $tx_i^1 + (1-t)\,x_i^2$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ je také možná. Tento silný předpoklad je (bohužel) v centru mnohých matematických důkazů. O spotřebách musíme nejprve předpokládat, že jsou nekonečně dělitelné. Ačkoli skutečné spotřeby jsou souborem izolovaných bodů, předpoklad nekonečné dělitelnosti pouze vyplní prostor mezi těmito body. Pokud tedy nalezneme v této množině nějakou spotřebu, pak ji v realitě můžeme ztotožnit s nejbližším bodem odpovídajícím reálné spotřebě. Vzniklá množina ale ještě nemusí být konvexní. Konvexita bohužel dobře neodráží realitu a její nezbytnost pro důkaz je třeba vnímat jako omezující předpoklad. Zajímavé je, že konvexitě množin možných spotřeb velmi pomáhá předpoklad o volném zahazování vstupů. Množina spotřeb totiž pak zahrnuje i spotřeby, při kterých bylo zakoupeno příliš mnoho některých komodit, které následně nebyly spotřebovány, ale vyhozeny. Díky tomu se může množina X_i stát konvexní.

X_i *má dolní hranici pro relaci* $\leq$: existuje χ_i v $\mathbb{R}^l$ takové, že $\chi_i \leq x_i$ pro všechna x_i v X_i. Tento předpoklad lze snadno ekonomicky obhájit. Pokud je k-tá komodita vstupem, pak dolní hranice x_{ik} je nula. Pokud je k-tá komodita výstup (tedy u spotřebitele práce), pak jistě existuje (v absolutní hodnotě) horní hranice pro množství této práce za elementární časový interval.

Ještě dodejme, že pokud jsou všechny množiny X_i uzavřené a mají spodní hranici pro $\leq$, pak je množina X uzavřená. Pokud jsou všechny množiny X_i konvexní, pak je konvexní i množina X.

2. *spotřeba* X_i *je nenasytná*: bez ohledu na to, jaká je spotřeba x_i v X_i, existuje jiná spotřeba v X_i, kterou i-tý spotřebitel preferuje více. Jinak řečeno neexistuje největší prvek X_i pro relaci $\preceq_i$. Spotřebitel je tedy alespoň v jedné komoditě nenasytný a preferuje mít ji co nejvíce.

3. *pro každé* x_i' *v* X_i, *jsou množiny* $\{x_i \in X_i \,|x_i \succeq_i x_i'\}$ *a* $\{x_i \in X_i \,|x_i \preceq_i x_i'\}$ *uzavřené v* X_i: mějme posloupnost spotřeb $\{x_i^q\}$, kde všechny prvky $\{x_i^q\}$ *nejsou horší než* x_i' a $\{x_i^q\} \to x_i^0$, pak ani x_i^0 *není horší než* x_i'. A podobně pokud zaměníme slovo *horší* za *lepší*. Podobně jako uzavřenost množiny X_i je tento předpoklad splněný. Množiny prvků, které nejsou horší (resp. nejsou lepší) než nějaký prvek jsou přirozeně uzavřené. Společnou hranici tvoří indiferenční třídy prvků. Zajímavé ale je, že pokud množina X_i je konvexní, je zcela předuspořádaná ($\preceq_i$) a platí tento předpoklad, pak lze dokázat, že existuje spojitá užitková funkce. Teorie užitkové funkce a teorie preferencí (s poměrně přirozenými předpoklady o racionalitě spo-

třebitele) jsou v tuto chvíli ekvivalentní. Problém nejlepší spotřeby se tedy velmi přibližuje snadno řešitelnému problému maximálního zisku výrobce.

4. *pokud* x_i^1 *a* x_i^2 *jsou dva body v* X_i *a pokud* t *je reálné číslo z intervalu* $(0, 1\rangle$, *pak* $x_i^2 \succ_i x_i^1$ *implikuje* $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$: pokud spotřeba x_i^2 je preferovaná před x_i^1, pak jejich vážený průměr s libovolnou váhou $t \in \langle 0, 1\rangle$ je preferovaný před x_i^1. Z této a předchozí vlastnosti plyne například, že pro každé x_i' v X_i je množina $\{x_i \in X_i \,|x_i \succeq_i x_i'\}$ konvexní. Předpoklad konvexity preferencí ještě zesiluje požadavek na racionalitu spotřebitele. Je to však intuitivně obhajitelný předpoklad. Pokud spotřebitel preferuje určitou kombinaci statků před nějakou jinou kombinací statků, pak je intuitivní, že pokud „jde přímo“ od první kombinace k druhé, tak se jeho situace dle jeho preferencí stále zhoršuje. Z tohoto předpokladu však vyplývá (v kombinaci s nenasytností) ještě důležitější a intuitivně nezbytná vlastnost racionality spotřebitelů, a to, že indiferenční třídy spotřeb (tedy všechna x_i, mezi kterými platí vztah $\sim_i$) nejsou „tlusté“ (jejich objem je nulový). Tedy například v trojrozměrném prostoru jsou to plochy, v rovině křivky. Je přirozené předpokládat, že stejně dobré kombinace spotřeb budou vytvářet ve spotřební množině určité hranice. V rovině tyto hranice nazýváme indiferenční křivky. Při platnosti uvedeného předpokladu pro případ dvou žádoucích komodit jsou indiferenční křivky tzv. konvexní vůči počátku[2]

5. *existuje takové* x_i^0 *v* X_i *pro které platí* $x_i^0 << \omega_i$. Tento zápis znamená, že $x_{ik}^0 < \omega_{ik}$, tedy že určitá možná spotřeba každé komodity každého spotřebitele může být uspokojena pouze zdroji, které má spotřebitel k dispozici. Tedy i-tý spotřebitel může získat nějakou možnou spotřebu zahozením kladného množství komodit ze svých zdrojů. Vzhledem k tomu, že spotřební množiny jsme nijak neomezili ve smyslu, aby spotřebitel „přežil“, pak je zřejmé, že nulovou spotřebu lze pokrýt z jakéhokoli množství vlastních zásob.

6. $0 \in Y_j$: j-tý *výrobce* má možnost nic nedělat (nenakupovat vstupy a nevyrábět výstupy). Tento předpoklad je zřejmě realistický. Z tohoto předpokladu mimo jiné vyplývá, že $0 \in Y$.

7. Y *je uzavřená*: pokud všechny členy posloupnosti $\{y^q\}$ náleží do Y a pokud $\{y^q\} \to y^0$, pak y^0 také patří do Y. Uzavřenost je opět technický předpoklad, který je splněn.

[2]Nemusejí být však ryze konvexní. To se často uvažuje, aby nejlepší spotřeba byla jednoznačná. My ale uvažujeme, že nejlepších spotřeb může být celá množina a předpoklad o ryzí konvexnosti není nutný.

Y je konvexní: pokud jsou dvě produkce y^1 a y^2 možné, pak produkce $ty^1 + (1-t)\,y^2$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$ je také možná. Tento předpoklad je mnohem slabší než u spotřebitelů, kde musely být konvexní spotřební množiny všech spotřebitelů. Přesto je předpoklad konvexity opět omezující a těžko obhajitelný. Za pozornost stojí, že předpoklad konvexity společně s předpokladem $0 \in Y$ znamená, že převažují nerostoucí výnosy z rozsahu. Tedy, že nelze zvýšením vstupů zvýšit výstupy více než proporcionálně. Důvodem je, že použijeme-li konvexitu tak, že položíme $y^2 = 0$ pak pro libovolné $y^1 \in Y$ je i výroba $ty^1 \in Y$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$. Toto pro rostoucí výnosy z rozsahu neplatí. Nerostoucí výnosy z rozsahu nemusejí převažovat pro jednotlivé producenty (i když nakonec vždy převáží klesající výnosy z rozsahu – v tom smyslu, že výrobce vyčerpá své výrobní kapacity a na další jednotku výstupu by musel tyto kapacity navýšit). Je to však vždy pravda pro celkovou produkci, která naráží na omezené přírodní zdroje (mezi ty lze považovat i lidskou práci). Nejdříve jsou totiž vyčerpány nejlepší přírodní zdroje a při dalším zvyšování objemu produkce je třeba využívat horších zdrojů a tím nemůže docházet k vyššímu než proporcionálnímu navýšení výstupů.

8. $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$: pokud je produkce y, jejíž vstupy a výstupy nejsou všechny nulové možná, pak produkce $-y$ možná není. Tento předpoklad je snadno obhajitelný – stačí jediný výrobní proces, který z fyzikálních důvodů nelze obrátit (vyměnit vstupy za výstupy – změna znaménka u produkce totiž znamená právě záměnu vstup-výstup), a takových procesů je dost.

9. $Y \supset (-\Omega)$: celková produkce, která má všechny výstupy nulové, je možná. Tento předpoklad byl podrobně rozebrán při hledání tržní rovnováhy. Je to předpoklad omezující, kde uvažujeme, že statky s kladnou cenou lze bez následků zahodit a statky se zápornou cenou lze bez následků libovolně hromadit. Tento předpoklad tedy umožňuje produkce, které mají libovolné vstupy a nulové výstupy. Předposlední předpoklad ale vylučuje opačné produkce. Společně tedy znamenají, že volná produkce není možná. Tedy, že není možná produkce, jejíž všechny vstupy jsou nulové, ale výstupy nenulové. To je velmi přirozený předpoklad. Vstupem je například přinejmenším lidská práce. Dále lze také dokázat, že předpoklady o uzavřenosti, konvexitě a zahazování vstupů implikují $Y \supset (Y - \Omega)$: pokud je nějaká celková produkce možná, pak je možná i produkce, jejíž vstupy nejsou nižší a výstupy nejsou vyšší. Vzhledem k možnému zahazování zdrojů je to zřejmě přirozený předpoklad. Výrobce může vyrobit ze vstupů, které má, potřebný (nižší) výstup a zbylé zahodit.

Z těchto explicitně uvedených předpokladů jsou nejsilnější a nejvíce omezující předpoklady konvexity, a to jak konvexita produkční množiny, tak konvexita spotřební množiny, ale především konvexita spotřebitelských preferencí. Tyto předpoklady kladou především na racionalitu spotřebitele nároky, které v realitě nejsou splněny.

Kapitola 4

Povaha equilibria

V této kapitole nejprve definuji *optimum* a vysvětlím jeho souvislost s equilibriem. Dále budu diskutovat jaký skutečný smysl má equilibrium nalezené dle úvodních definic.

4.1 Souvislost equilibria a optima

Při dvou daných *dosažitelných stavech ekonomiky* E $(((x_i), (y_j))$ a $((x'_i), (y'_j))$ řekneme, že druhý *není horší než* první (můžeme psát $((x_i), (y_j)) \preceq ((x'_i), (y'_j)))$, pokud pro každou spotřebu (každé i) platí $x_i \preceq_i x'_i$, tedy, že pro každého spotřebitele spotřeba ve druhém stavu není horší než v prvním. Dle této definice je relace $\preceq$ *neúplným předuspořádáním* dosažitelných stavů ekonomiky. Verbální označení možných vztahů mezi dosažitelnými stavy ekonomiky je stejné, jako bylo zavedené při porovnávání spotřeb. *Optimum* ekonomiky je takový dosažitelný stav ekonomiky, k němuž neexistuje preferovanější. Tedy pokud nelze změnami spotřeb a produkcí dosáhnout stavu, ve kterém by si někdo polepšil a nikdo nepohoršil. (Jedná se o tzv. Pareto optimalitu. Spotřebitel si může polepšit pouze na úkor jiného spotřebitele. Optimum tedy není stav nějakého idylického sociálního smíru. Jedná se o stav, který lze spíše označit jako efektivní.) Existenci optima se nám podaří prokázat pouze za existence užitkových funkcí jednotlivých spotřebitelů. Optimum tedy znamená, že nelze zvýšit hodnotu užitkové funkce jednoho spotřebitele, aniž by se snížila hodnota užitkové funkce jiného.

Můžeme definovat množinu A jako množinu všech dosažitelných stavů ekonomiky E. Optimum v množině A není dáno jednoznačně a navíc dvě různá optima mohou být relací $\preceq$ neporovnatelná. Při nějakých jiných zvolených kritériích můžeme porovnávat jednotlivá optima. Najít „nejoptimálnější“ optimum již není čistě ekonomický problém, ale spíše problém politický.[1]

Nyní uvedu bez důkazu dvě věty o ekvivalenci equilibria a optima. Důkazy nejsou obtížné a stojí na dvou základních myšlenkách. První z nich je, že při předpokládané racionalitě spotřebitele lze uvažovat existenci užitkové funkce. A druhá úvaha je zkoumání vzájemné polohy množiny $G \equiv \sum_i X_i^{x_i^*} - \sum_j Y_j$ (množina celkových zdrojů[2]) a bodu ω (aktuální celkové zdroje). Určitá poloha bodu ω na hranici množiny G svědčí o tom, že neexistují lepší dosažitelné spotřeby a body x_i^* jsou optimem.

Definice. Stav $((x_i^*), (y_j^*))$ *ekonomiky* E je *equilibriem vzhledem k cenovému systému* p v $\mathbb{R}^l$, pokud

1. pro každé i: x_i^* je největší prvek $\{x_i \in X_i \,|p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*\}$ vzhledem k $\preceq_i$,
2. pro každé j: y_j^* maximalizuje $p \cdot y_j$ na Y_j,
3. $x^* - y^* = \omega$.

Takové equilibrium jsme přidáním některých dalších předpokladů našli.

Věta. *Nechť E je ekonomika, kde pro každé i*

1. X_i je konvexní,
2. pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dva body v X_i a pokud t je reálné číslo z intervalu $(0, 1\rangle$, pak $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implikuje $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$.

Pak equilibrium $((x_i^*), (y_j^*))$ vzhledem k cenovému systému p, kde žádné x_i^* není nasycující spotřebou, je optimem.

Všechny požadavky této věty byly splněny při hledání equilibria. Pokud tedy pro ekonomiku umíme dokázat existenci equilibria, pak toto equilibrium je optimem.

Věta. *Nechť E je ekonomika, kde*

1. pro každé i: X_i je konvexní,
2. pro každé i: pro každé x_i' v X_i, jsou množiny $\{x_i \in X_i \,|x_i \succeq_i x_i'\}$ a $\{x_i \in X_i \,|x_i \preceq_i x_i'\}$ uzavřené v X_i,

[1] Dvě základní možnosti jak posuzovat optimum jsou: a) čím větší součet hodnot užitkových funkcí tím lépe, bez ohledu na rozdělení mezi jednotlivé spotřebitele (tzv. pravice), nebo b) co nejrovnoměrněji rozložené hodnoty užitkové funkce přes všechny spotřebitele, bez ohledu na celkový užitek spotřebitelů (tzv. levice).

[2] $X_i^{x_i^*}$ značí množinu spotřeb, které uspokojí i-tého spotřebitele alespoň tak jako spotřeba x_i^*

3. pro každé i: pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dva body v X_i a pokud t je reálné číslo z intervalu $(0,1\rangle$, pak $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implikuje $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$,
4. Y je konvexní.

Pak pro dané optimum $((x_i^*),(y_j^*))$, kde x_i^* není nasycující spotřebou, existuje cenový systém různý od nuly takový, že

1. pro každé i: x_i^* minimalizuje $p \cdot x_i$ na $\{x_i \in X_i \,|x_i \succeq_i x_i^*\}$,
2. pro každé j: y_j^* maximalizuje $p \cdot y_j$ na Y_j.

Tato věta zaručuje, že ve stavu optima existuje rovnovážný cenový systém. S jedinou výjimkou, kdy $p \cdot x_i^*$ je nejmenší výdaj při pevném p ve spotřební množině X_i[3], lze říci, že každé optimum je equilibrium. Předpoklady této věty nerozšiřují předpoklady uvažované při hledání equilibria. Celkově pokud lze dokázat existenci equilibria, pak toto equilibrium je optimem a neexistuje optimum, které by nebylo equilibriem. Optimum je ekvivalentní equilibriu.

4.2 Smysl equilibria

Naivní představa o tom, že jsme nalezli equilibrium a můžeme tedy říci, jaké mají být ceny všech komodit, je pochopitelně mylná. Důkaz je nekonstruktivní a v žádném případě jsme rovnovážnou cenu všech komodit nenalezli. Pouze jsme zjistili její existenci. Trochu méně naivní představa, že rovnovážná cena se nebude v čase měnit, je bohužel také mylná. Vzhledem k tomu, že jsme komodity označili časy, nelze o časovém průběhu ceny nějaké komodity vůbec mluvit. Daná komodita totiž existuje (přesněji řečeno může být účastníkem směny na trhu) právě jeden časový okamžik, v dalším už se jedná o jinou komoditu. Equilibrium, jehož existenci jsme dokázali, je ve skutečnosti cenový vektor, který určuje určité optimální ceny všech komodit ve všech časech.

Nyní obrátíme pozornost na předpoklad, který se objevil v definici *akce*. Akce (tou je například spotřeba či výroba) je vektor, který vyjadřuje nákup a prodej určitých komodity agentem od vzdálené byť konečné minulosti do vzdálené byť konečné budoucnosti. Takovou akci zřejmě nelze znát. Stačí však vědět, že při určitých předpokladech kladených na různé typy akcí (spotřeba či výroba), existuje equilibrium.

Z existence equilibria můžeme odvodit existenci časového průběhu rovnovážných cen všech komodit. Předpokládejme, že drtivou většinu *komodit* z času t můžeme ztotožnit

[3] Tedy nejlepší dosažitelná spotřeba je nejlevnější spotřeba z množiny X_i vzhledem k cenovému systému p, což je velmi nepravděpodobné.

s určitými *komoditami* v čase $t + 1$. I když fyzické vlastnosti se mohou mírně změnit. (Tedy auto zaparkované na rohu ulice zůstává autem na rohu ulice i po elementárním časovém intervalu, pouze rez na karoserii o trochu postoupila.) Vzhledem k tomu, že existují obě rovnovážné ceny „komodity“ pro oba intervaly, po které lze dvě dosud různé *komodity* ztotožnit, lze určit průběh rovnovážné ceny „komodity“ v čase. Existují tedy průběhy cen komodit, které jsou rovnovážné (a tedy optimální). Nevíme ale, jaké to jsou (to ale neznamená, že jich nelze dosáhnout).[4]

Stále však zůstává několik základních předpokladů, které nejsou v realitě splněny. Paradoxně je v nich skryt nejpraktičtější reálný výsledek jinak teoretického cvičení o existenci equilibria. Následující předpoklady bych označil jako předpoklady motivační.

1. Prvním z nich je předpoklad, který je již v názvu celé práce. Jedná se konkurenci, kterou vyjadřujeme tím, že jednotlivý spotřebitel a jednotlivý výrobce nemůže svým jednáním ovlivnit cenu. To samozřejmě v realitě není pravda. Můžeme se na něj ale podívat jako na předpoklad motivační: konkurence otevírá cestu k optimu. To je netriviální výsledek. Mohlo by se ukázat, že konkurence vůbec žádné optimum nemá, že je to systém, který nepodporuje žádnou efektivitu či optimalizaci. To se ale neukázalo. Konkurence je možnost, která při dalších předpokladech zajišťuje existenci optima.

2. Dalším je předpoklad velmi silné racionality spotřebitele. Preference jsou považovány za neměnné vnitřní rozhodnutí každého spotřebitele závislé pouze na cenách. Racionalita spotřebitelů může být ale narušena například výrobci (reklamou) nebo jinými spotřebiteli (stádový a snobský efekt). Předpoklad úplných a racionálních preferencí je tedy nereálný. Má ale jasné výchovné poselství. Pokud se my všichni spotřebitelé budeme chovat racionálně, pak je možné dosáhnout ekonomického optima, neboť existuje.

3. Důkaz equilibria byl proveden pro soukromě vlastněnou ekonomiku. Tedy ekonomiku, kde veškerý majetek (statky, komodity, zdroje) můžeme přiřadit konkrétnímu spotřebiteli (byť třeba nějakou ideální poměrnou část a třeba prostřednictvím nějakého výrobce, kterému majetek patří). U akciových společností to funguje výborně. Horší je to ale třeba se státním majetkem. Patří státní majetek rovnoměrně všem (včetně dětí, které nemohou volit), nebo státním úředníkům patří o něco více? Ještě komplikovanější situace je u zdrojů. A snad nejkomplikovanější je u území nikoho – Antarktida nebo Měsíc patří nám všem, ale těžko můžeme svůj podíl prodat a

[4] Naopak lze říci, že pokud trh splňuje dané předpoklady a nachází se v rovnováze, pak tržní cena je cenou rovnovážnou.

získat za něj něco jiného. Poselství je tedy zřejmé, cestu k optimu podpoříme tím, že veškerý majetek bude přiřaditelný ke svému vlastníkovi (spotřebiteli – člověku). Pak může být dosaženo optima. Opakuji však, že optimum nemusí být ideálním společenským stavem.

4. Posledním důležitým předpokladem je předpoklad dokonalé informace. V centru všech úvah je, že producent přesně ví jakou si vybrat produkci, aby maximalizoval zisk. A spotřebitel ví jakou si vybrat spotřebu, aby maximalizoval svůj užitek. Bez předpokladu této dokonalé informace důkaz equilibria nefunguje. Dokonalá informace umožňuje perfektní racionalitu spotřebitele (ale nezajišťuje ji – vyšinutí jedinci se budou rozhodovat iracionálně i za dokonalé informace – ke škodě vlastní, ale i ke škodě ostatních). Dokonalá informace také znamená, že spotřebitel dobře ví, jaký majetek (byť ideálně rozdělený) mu patří (při existenci soukromě vlastněné ekonomiky podmiňuje dokonalá informace o majetku správné rozhodování spotřebitele). Ekonomické poselství je nasnadě a mělo by být velmi silně bráno v úvahu při hodnocení efektivity trhů. Pro dosažení equilibria a optima je nutná dobrá informovanost aktérů trhu.

Kapitola 5

Stabilita equilibria

V závěru předchozí části byla uváděna některá velmi odvážná tvrzení. Například „je možné dosáhnout ekonomického optima, neboť existuje“. Existence equilibria ještě nezaručuje, že je možné ho dosáhnout. Otázkou totiž je, zda ekonomický systém k equilibriu směřuje (tedy zda ceny konvergují k rovnovážnému cenovému vektoru), anebo se naopak ekonomika od rovnováhy vzdaluje. Tedy zda rovnováha je stabilní nebo není. V prvním případě lze říci, že „equilibria lze dosáhnout“. V druhém je existence equilibria téměř bezcenná. Proto se nyní budu zabývat stabilitou equilibria. Tato kapitola vychází z kapitoly o stabilitě equilibria z knihy Akiry Takayamy o matematické ekonomii [2].

5.1 Povaha stability pro existující equilibrium

Čas budeme nyní uvažovat jako spojitý. Komoditami budeme opět rozumět statky či služby, které lze přesně definovat jejich fyzickou podstatou, ale nyní nebudou komodity definovány časem. Počet těchto komodit označím pro jednoduchost opět l, i když těchto komodit je mnohonásobně méně než *komodit* z minulé části. Ve spojitém čase cenu i-té komodity vyjadřuje funkce $p_i(t)$. Předpokládáme, že tato funkce je diferencovatelná. Cenu všech komodit vyjadřuje vektorová funkce $p(t)$. Rovnovážnou cenu (cenový vektor) označíme $\hat{p}$. V teorii stability equilibria se uvažuje, že rovnovážná cena $\hat{p}$ je v čase konstantní, a zkoumá se, zda ceny komodit $p(t)$ konvergují k rovnovážné ceně.

V minulé části jsme nalezli rovnovážnou cenu, avšak pro *komodity*, které jsou definovány i časem. Pro komodity, které nejsou definované časem, je nalezená rovnovážná cena na čase závislá. Aby byla teorie stability, ve které se uvažuje cena $\hat{p}$ nezávislá na čase, přínosem pro popis equilibria námi nalezeného v minulé části, musíme přijmout jedno z následujících tvrzení.

1. Předpokládejme, že všechny komodity (druhy komodit) existují od velmi vzdálené minulosti do velmi vzdálené budoucnosti. (Tedy žádné nové komodity nevznikají ani nezanikají). Dále předpokládejme, že preference spotřebitelů jsou v čase neměnné. Pak rovnovážná cena nalezeného equilibria $\hat{p}$ je konstantní.
2. Smiřme se s tím, že i přestože odhalíme stabilitu equilibria, bude to vypovídat pouze o tom, že cena $p(t)$ v každém okamžiku směřuje k ceně $\hat{p}(t)$. Rozdíl obou cen ale může být stále velký.[1]
3. Předpokládejme, že cena $\hat{p}(t)$ se mění pomalu ve srovnání s přizpůsobením ceny $p(t)$. Pokud tedy odhalíme stabilitu equilibria, pak se cena $p(t)$ přiblíží blízko k ceně $\hat{p}(t)$ a v této blízkosti se bude držet.

Veškeré následující výsledky, kterých dosahuje teorie stability, musíme pro námi nalezené equilibrium vnímat na pozadí těchto tří předpokladů. První předpoklad je velmi silný a zcela nerealistický. Přesto je implicitně přijímán v teorii stability, jelikož cena $\hat{p}$ je brána jako neměnná v čase. Realita bude někde mezi předpokladem 2 a 3. Rovnovážná cena se bude většinou (u většiny komodit a po většinu času) měnit pozvolna a cena $p(t)$ se ceně $\hat{p}(t)$ (v případě platnosti stability) přiblíží. U rovnovážné ceny však někdy může dojít k rychlé změně (šoku), stabilita pak svědčí o tom, že cena $p(t)$ se začne tomuto šoku přizpůsobovat. Pro equilibrium, jehož existenci jsme ověřili, je tedy vlastnost stability velice přínosná a zasluhuje podrobné zkoumání. Pro jednoduchost budu nadále psát $\hat{p}$ místo $\hat{p}(t)$.

5.2 Walrasovské vyrovnání

Základní vlastností rovnovážné ceny je, že poptávka po každé (třeba i-té) komoditě se rovná nabídce (převis poptávky je nulový): $z_i(\hat{p}) = 0$, tedy $x_i(\hat{p}) = y_i(\hat{p}) + \omega_i$[2]. Základním předpokladem je, že pokud $z_i > 0$ (poptávka je vyšší než nabídka), tak cena stoupá: $\frac{dp_i(t)}{dt} > 0$. Výraz $\frac{dp_i(t)}{dt}$ budeme zapisovat jako $\dot{p}_i(t)$. Tečka tedy značí derivaci podle času. Naopak pokud $z_i < 0$, pak $\dot{p}_i(t) < 0$. Pokud budeme uvažovat trh o jediné komoditě, změnu její ceny v čase můžeme zapsat:

$$\dot{p}_i(t) = h_i\left(z_i\left(p(t)\right)\right), \tag{5.1}$$

kde $h_i(z)$ je rostoucí diferencovatelná reálná funkce, pro kterou platí $h_i(0) = 0$. Pokud je tedy trh mimo rovnovážnou cenu, pak dochází k přizpůsobení této ceny. Toto je tzv.

[1] Cena $\hat{p}(t)$ může ceně $p(t)$ stále utíkat, mohou se navzájem křížit, apod.

[2] Index i vyjadřuje i-tou komoditu, ω_i tedy vyjadřuje celkovou zásobu i-té komodity.

walrasovské přizpůsobování. Předpokládáme při něm, že účastníci na trhu nejsou schopni ovlivnit svým jednáním cenu (již diskutovaný předpoklad konkurence). Pro srovnání uvádím, že existuje i jiný typ vyrovnávání, a to tzv. *vyrovnávání marshallovské.* Při něm dochází k vyrovnávání nabízeného množství komodity tak, aby se dosáhlo rovnováhy:

$$\dot{q}_i(t) = \bar{h}_i\left(\bar{z}\left(q(t)\right)\right). \tag{5.2}$$

$\bar{z}$ zde vyjadřuje rozdíl mezi poptávaným zbožím a celkovým množstvím zboží na trhu (nabídka + zásoby), $\bar{h}_i$ má stejné vlastnosti jako h_i. My budeme uvažovat pouze vyrovnání walrasovské. Marshallovské vyrovnání je v něm totiž zahrnuto. Dojde-li totiž k (walrasovské) změně ceny, tak se tomu přizpůsobí i výrobci a spotřebitelé, protože výroba a spotřeba je na ceně závislá ($x(p)$, $y(p)$). Uvažovat marshallovské vyrovnání je tedy nadbytečné.

Nyní budeme uvažovat pouze walrasovské vyrovnání popsané rovnicí (5.1). Předpoklad, že tato rovnice platí, však není zcela samozřejmý. Intuitivně správně uvažujeme, že výrobci za nějaký časový úsek vyrobí nějaké zboží, které chtějí prodat, spotřebitelé jsou ochotni při různých cenách nakoupit různé množství zboží. Při nějaké dané ceně se tedy prodávající rozhodnou, kolik na trhu nabídnou zboží, a kupující jaké množství za tuto cenu nakoupí. Pokud se tato dvě množství vyrovnají, jde o rovnovážnou cenu. Tržní mechanismus, který by zajistil obchodování právě při této ceně, ale v realitě neexistuje. Nikdo totiž nemá informaci o nabízeném množství zboží a o preferencích spotřebitele a navíc nikdo nemá moc takovou cenu všem na trhu diktovat.[3] Teoretický ekonomický proces, ve kterém je rovnice walrasovského vyrovnání oprávněná, je tzv. *tâtonnement proces.*

V tomto procesu se předpokládá, že všichni kupující i prodávající se sejdou na jednom místě, kde je také *organizátor trhu.* Tento organizátor vyhlásí úvodní cenu komodity i. Každý z obchodníků napíše, kolik je při této ceně ochoten koupit či prodat. Organizátor sesbírá informace od všech obchodníků a podle toho, zda převažuje poptávka či nabídka, zvýší či sníží cenu. Takto se pokračuje až do rovnovážné ceny, aniž by proběhl jakýkoli obchod(!). Zboží se pak zobchoduje při rovnovážné ceně. Tento proces nemá příliš společného s realitou. Nicméně je to proces, který (pokud je stabilní) umožní dosažení optima. Poselstvím je, že průběh obchodování na trhu by v zájmu všech (resp. všech v jejichž zájmu je dosažení ekonomického optima) měl probíhat co nejpodobněji tâtonnement procesu. Velmi blízko takovému procesu je obchodování na burze, kde se

[3]Existují ekonomické systémy, ve kterých existuje orgán, který diktuje ceny. V realitě ale nelze centrálně shromáždit veškeré nutné informace, aby určované ceny byly rovnovážné.

ceny mění pružně, ale pouze na základě uskutečněných obchodů. Jiné přiblížení jsou např. internetové aukce, které dobře vystihují to, že se všichni setkávají na jednom „místě“ a k obchodu dojde až po dosažení nejvyšší ceny (což je z hlediska poptávajících cena rovnovážná). Problémem těchto aukcí je, že prodávající má informační výhodu, které může zneužít. A hlavně jde spíše o ekonomiku výměnnou nikoli výrobní (není zajištěno, že nové zboží bude do aukcí pravidelně přibývat, jak tomu běžně je na jiných trzích).

5.3 Stabilita soustavy diferenciálních rovnic

Vývoj cen všech komodit na trhu vyjadřuje systém diferenciálních rovnic:

$$\dot{p}(t) = h\left(z\left(p(t)\right)\right), \tag{5.3}$$

kde h je vektorová diferencovatelná reálná funkce, jejíž složky $h_i\left(z\right)$ jsou rostoucí pro všechna $i = 1, \ldots, l$ (všechny komodity). Bodem equilibria (stacionárním bodem) tohoto systému je bod $\hat{p}$, pro který platí:

$$h\left(z\left(\hat{p}\right)\right) = 0. \tag{5.4}$$

Cenu v čase t_0 označme p_0. p_0 je nějaký známý bod v prostoru $\mathbb{R}^l$, kterým prochází řešení právě v čase t_0. Budeme používat zápis (t_0, p_0). Pro jednoduchost dalších zápisů definujme ještě funkci $\tilde{h}$:

$$\tilde{h}\left(p\right) \equiv h\left(z\left(p(t)\right)\right). \tag{5.5}$$

Předpokládejme, že $\tilde{h}(p)$ je diferencovatelná funkce. Systému (5.3) je tedy ekvivalentní systém diferenciálních rovnic:

$$\dot{p}(t) = \tilde{h}\left(p(t)\right). \tag{5.6}$$

Nyní uvedu bez důkazu větu o existenci a jednoznačnosti řešení:

Věta. *Nechť Λ je otevřená množina v $\mathbb{R}^l$, funkce $\tilde{h}$: $\Lambda \to \mathbb{R}^l$ je spojitá, $\tilde{h}$ je lokálně lipschitzovská v Λ vůči p, a nechť $p_0 \in \Lambda$. Pak systém (5.6) má jednoznačné maximální řešení splňující $p(t_0) = p_0$, které budeme značit $p(t; t_0, p_0)$ nebo jen $p(t)$.*

Tato věta zaručuje, že pokud funkce $\tilde{h}$ splňuje určité předpoklady, což uvažujeme, pak má systém pro rozumné počáteční podmínky jednoznačné maximální řešení $p(t)$.

Definice. Stacionární bod $\hat{p}$ nazveme *globálně stabilním*, pokud $p(t; t_0, p_0) \to \hat{p}$ pro $t \to \infty$ bez ohledu na hodnotu (t_0, p_0).

Definice. Stacionární bod $\hat{p}$ nazveme *lokálně stabilním*, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro p_0 v okolí bodu $\hat{p}$ o poloměru δ platí $p(t; t_0, p_0) \to \hat{p}$ pro $t \to \infty$.

První podmínka vyjadřuje, že ať je současná cena jakákoli, tak se cena za konečný čas přiblíží libovolně blízko k equilibriu a konverguje k rovnovážné ceně.

Druhá podmínka vyjadřuje pouze to, že pokud současná cena je dostatečně blízko equilibriu, pak bude v nějakém konečném čase opět libovolně blízko a konverguje k němu. Tato druhá podmínka má svoji hodnotu především, pokud je equilibrium neměnné a původní cena je dostatečně blízko rovnovážné ceně, pak při lokální stabilitě máme jistotu, že cena se bude vyvíjet libovolně blízko u equilibria a bude do něj konvergovat.

Zdá se, že dokázat uspokojivým způsobem stabilitu equilibria není vůbec snadné (ne-li nemožné). Všechny dosavadní přístupy vycházejí z nereálných předpokladů.

5.4 Hicksův přístup ke stabilitě equilibria

Pro systém (5.6) definoval Hicks stabilitu equilibria takto:

Definice. Equilibrium je *dokonale stabilní* pokud pro každou komoditu (každé i) platí

1. $p_i > \hat{p}_i$ implikuje $\tilde{h}_i(p) < 0$,
2. $p_i < \hat{p}_i$ implikuje $\tilde{h}_i(p) > 0$.

Tedy cena každé komodity běží konečnou rychlostí k rovnovážné ceně. Tuto definici stability splňuje systém (5.6), pokud platí následující podmínka [2]:

$$a_{ii} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} < 0, \dots \tag{5.7}$$

pro všechna i,j,k,... z množiny $\{1, \dots, l\}$, kde $a_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial p_j}$ vypočtená v bodě $\hat{p}$.

Zásadní nevýhodou této metody je, že k určení stability potřebujeme znát matici $A \equiv [a_{ij}]$. V matici jsou skryty členy $\frac{\partial z_i}{\partial p_j}$, které vyjadřují změnu převisu poptávky komodity i při změně ceny komodity j. Znalost této elasticity je nemožná, proto touto analýzou nelze dospět k výsledku. Navíc je třeba připustit představu, že stabilitu equilibria ovlivňuje změna poptávky při změně ceny zcela nesouvisející komodity [3].

5.5 Samuelsonův přístup ke stabilitě equilibria

Samuelson se zaměřil na zkoumání stability tzv. linearizovaného systému.

Vezmeme-li Taylorův rozvoj funkce $\tilde{h}(p)$ v bodě $\hat{p}$, kde $\tilde{h}(\hat{p}) = 0$ a zanedbáme od druhého všechny vyšší členy, získáme systém:

$$\dot{p}(t) = A \cdot (p(t) - \hat{p}), \tag{5.8}$$

kde opět $A \equiv [a_{ij}]$ je matice a $a_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial p_j}$ vypočtená v bodě $\hat{p}$. Toto je tzv. *linearizovaný systém*. Pokud je linearizovaný systém globálně stabilní, pak je původní systém lokálně stabilní[4] [4].

Poměrně snadno lze dokázat větu o stabilitě linearizovaného systému:

Věta. *Nechť $\dot{p}(t) = A \cdot (p(t) - \hat{p})$ je systém diferenciálních rovnic. Pak je stacionární bod $\hat{p}$ globálně stabilní právě tehdy, když reálná část všech vlastních čísel matice A je záporná.*

Pokud tedy všechna vlastní čísla matice A v systému (5.8) mají zápornou reálnou část, pak je linearizovaný systém globálně stabilní a původní (nelinearizovaný systém) je tedy lokálně stabilní.

Samuelson ještě předpokládal, že funkce $h_i(z)$ jsou lineární. V zápisu se tak místo h_i objeví konstanta k_i, která vyjadřuje rychlost přizpůsobení ceny:

$$\dot{p}_i(t) = k_i z_i(p(t)). \tag{5.9}$$

Rychlost vyrovnání ceny se tedy lineárně mění s převisem poptávky. Systém rovnic (5.3) lze tedy po linearizování zapsat jako:

$$\dot{p}(t) = K \cdot B \cdot (p(t) - \hat{p}), \tag{5.10}$$

kde K je diagonální matice jejíž prvky jsou konstanty $k_i > 0$ a matice $B \equiv [b_{ij}]$, $b_{ij} \equiv \frac{\partial z_i}{\partial p_j}$[5]. Vlastnost, že řešení tohoto systému pro libovolnou počáteční podmínkou

[4]Toto je jediné užitečné tvrzení o stabilitách linearizovaného a původního systému.

[5]Pokud matice B splňuje Hicksovu podmínku stability, pak ji nazýváme *hicksiánem*.

p_0 konverguje k rovnovážné ceně $\hat{p}$ (globální stabilita), nazval Samuelson *pravou dynamickou stabilitou*. Takové stability linearizovaného systému je dosaženo právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice B mají zápornou reálnou část. Samuelsonova pravá dynamická stabilita však není obecně ekvivalentní s Hicksovou dokonalou stabilitou. Pokud ale jsou všechny nediagonální členy matice B kladné (tj. $b_{ij} > 0$, $i \neq j$) a pokud i v Hicksově podmínce stability předpokládáme linearitu funkce h_i, pak je Hicksova a Samuelsonova definice stability ekvivalentní. Podmínka kladných nediagonálních členů matice B se ukáže velmi důležitou.

5.6 Arrow-Block-Hurwiczův důkaz stability

Abychom mohli pokračovat s analýzou stability equilibria, budeme na nějaký čas uvažovat pouze směnný (výměnný) ekonomický systém. Tedy takový systém, ve kterém nedochází k žádné produkci, ale pouze ke směně již vyrobených zdrojů: $z_i(p) = x_i(p) - \omega_i$. Tento předpoklad samozřejmě nemá příliš společného s realitou. Jedná se ale o zajímavé teoretické cvičení.

Podívejme se nejprve na podmínku $b_{ij} > 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,l$. Tedy $b_{ij} \equiv \frac{\partial z_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_{ik}}{\partial p_j} > 0$. Zlomek $\frac{\partial x_{ik}}{\partial p_j}$ vyjadřuje, jak se změní poptávka k-tého spořebitele po i-té komoditě při změně ceny j-té komodity. Pokud $\frac{\partial x_{ik}}{\partial p_j} > 0$ pak říkáme, že komodita i je *hrubým substitutem* komodity j pro spotřebitele k. Pokud jsou tedy všechny komodity navzájem hrubými substituty pro všechny spotřebitele, pak je podmínka $b_{ij} > 0$ splněna. Lze dokázat, že pro případ hrubých substitutů je equilibrium linearizovaného systému globálně stabilní, equilibrium původního systému je tedy lokálně stabilní.

Vraťme se nyní k nelinearizovanému Samuelsonovu systému rovnic. Pro i-tou komoditu máme:

$$\dot{p_i}(t) = k_i z_i\left(p\left(t\right)\right). \tag{5.11}$$

Na pravé straně této rovnice je převis poptávky, který měříme stejně jako množství komodity v nějakých fyzických jednotkách. Tyto jednotky však můžeme vhodně přeškálovat a konstantu k_i zahrnout do převisu poptávky. Výsledný systém rovnic pak má tvar:

$$\dot{p}(t) = z\left(p(t)\right). \tag{5.12}$$

Nyní si ještě připomeňme vlastnost homogenity jak převisu poptávky: $z(\alpha p) = z(p)$, tak i všech spotřebních množin $x_i(\alpha p) = x_i(p)$ pro každé $i = 1,\dots,l$; $\alpha > 0$. Pro výměnnou ekonomiku platí také *Walrasův zákon*: $\sum_{i=1}^{l} p_i z_i(p) = 0$. Walrasův zákon vyjadřuje, že ve výměnné ekonomice si může každý spotřebitel nakoupit (a nakoupí) právě takovou hodnotu statků, jako je hodnota statků, které prodal, tedy: $\sum_{i=1}^{l} p_i D_{ik}(p) = \sum_{i=1}^{l} p_i S_{ik}(p)$, kde D_{ik} je poptávka k-tého spotřebitele po i-té komodity a S_{ik} je nabídka i-té komodity k-tým spotřebitelem. Sečtením přes všechny spotřebitele a odečtením nabídky od poptávky získáme uvedený Walrasův zákon $\sum_{i=1}^{l} p_i z_i(p) = 0$.

5.6.1 Věta Arrow-Block-Hurwiczova

Věta. *Nechť $\hat{p}$ je equilibrium systému:*

$$\dot{p}_i = z_i(p) \equiv x_i(p) - \omega_i, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{5.13}$$

Nechť platí

1. *Walrasův zákon: $\sum_{i=1}^{l} p_i z_i(p) = 0$,*
2. *homogenita: $x_i(\alpha p) = x_i(p)$ pro každé $i = 1, \ldots, l$, $\alpha > 0$,*
3. *hrubá substitutivita: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \ldots, l.$*

Pak je systém globálně stabilní.

Důkaz se silně opírá o to, že se jedná o ekonomiku, ve které nedochází k produkci.

Zajímavé je, že povaha důkazu umožňuje zeslabení předpokladu o hrubé substitutivitě na *slabý axiom projevených preferencí*. Slabý axiom projevených preferencí předpokládá, že pokud spotřebitel při cenovém systému p volí spotřebu x a při cenovém systému p' volí x' a pokud $p \cdot x' \leq p \cdot x$, pak se spotřeba x projevila jako lepší (spotřebitel si mohl vybrat x', ale vybral si x). Při cenovém systému p' musí být tedy nutně spotřeba x nedosažitelná tedy $p' \cdot x' < p' \cdot x$. Označíme-li $\Delta x \equiv x' - x$ pak můžeme slabý axiom projevených preferencí napsat jako: $p \cdot \Delta x \leq 0$ implikuje $p' \cdot \Delta x < 0$. Narozdíl od hrubé substitutivity je slabý axiom projevených preferencí velmi reálným předpokladem, který klade jen slabé a obhajitelné požadavky na racionalitu spotřebitele.

Pokud by tedy byla předmětem zkoumání výměnná ekonomika[6], pak lze říci, že rovnovážná cena v této ekonomice je stabilní. Toto můžeme tvrdit, aniž bychom činili nereálné předpoklady.

[6]Taková ekonomika má unikátní, v čase neměnné equilibrium.

5.7 Metoda ljapunovské funkce

Matematická metoda ljapunovské funkce se zabývá stabilitou stacionárního bodu diferenciální rovnice, aniž by se snažila najít explicitní řešení této diferenciální rovnice. Důkaz stability je tedy obdobného charakteru jako provedený důkaz existence equilibria – důkaz stability touto metodou nedává žádnou informaci o časovém průběhu ceny.

V rámci této metody existuje několik matematických vět, které dávají do vztahu existenci tzv. ljapunovské funkce a stabilitu equilibria. Dle typu stability equilibria pak po ljapunovské funkci požadujeme určité vlastnosti. Úkolem ekonomie je pro zkoumaný systém najít vhodnou ljapunovskou funkci, která splní určité požadavky. Z takové ljapunovské funkce pak vyplývá existence určitého typu stability.

Bez důkazu zformuluji dvě mírně odlišné věty, které využívají metody ljapunovské funkce, a budu ilustrovat jejich přínos pro dva odlišné ekonomické systémy.

5.7.1 Ljapunovská funkce pro výměnnou ekonomiku

Definice. Stacionární bod $\hat{p}$ nazveme *ljapunovsky stabilním*, pokud pro každé $\epsilon > 0$ a každé t_0 existuje δ[7]> 0 takové, že $\|p_0 - \hat{p}\| \leq \delta$ implikuje $\|p(t; t_0, p_0) - \hat{p}\| \leq \epsilon$ pro všechna $t \geq t_0$.

Jedná se o slabší verzi lokální stability. Řešení, které začíná dostatečně blízko stacionárního bodu, totiž do equilibria nemusí konvergovat, stačí, když dostatečně blízko zůstane.

Nyní pro jednoduchost znění věty zjednoduším zápis. Uvažujme systém:

$$\dot{p}_i = z_i\left(p\right); \quad z_i\left(\hat{p}\right) = 0; \quad i = 1, \ldots, l. \tag{5.14}$$

Proveďme substituci $\tilde{p} \equiv p - \hat{p}$ a $\tilde{z}(\tilde{p}) \equiv z(\tilde{p} + \hat{p})$ tím získáme systém:

$$\dot{\tilde{p}}_i = \tilde{z}_i\left(\tilde{p}\right); \quad \tilde{z}_i\left(0\right) = 0; \quad i = 1, \ldots, l. \tag{5.15}$$

Stacionárním bodem je tedy bod 0.

Věta. *Nechť pro systém (5.15) existuje reálná, spojitě diferencovatelná funkce V (ljapunovská funkce) na $\mathbb{R}^l$ a nechť existuje neprázdná omezená oblast $D \equiv \left\{\tilde{p} \in \mathbb{R}^l : V(\tilde{p}) < k\right\}$ taková, že*

[7] δ tedy závisí na t_0 a ϵ.

1. $V(\tilde{p}) > 0$ *pro všechna* $\tilde{p} \neq 0$, $\tilde{p} \in D$ *a* $V(0) = 0$,
2. $\frac{d}{dt}(V(\tilde{p}(t; t_0, p_0))) < 0$ *pro všechna* $\tilde{p}(t) \neq 0$, $\tilde{p}(t) \in D$.

Potom je bod 0 *ljapunovsky stabilní a řešení* $\tilde{p}(t; p_0, t_0)$ *konverguje do* 0 *pro* $t \to \infty$ *pro libovolné* t_0, *pokud* $\tilde{p_0}$[8] $\in D$.

Při nalezení požadované funkce $V(\tilde{p})$ je tedy equilibrium $\hat{p}$ téměř globálně stabilní. Bod p_0 totiž nemůže být kdekoli, ale $p_0 + \hat{p}$ musí být takové, aby $V(p_0 + \hat{p})$ bylo konečné.

Nyní zvolme ljapunovskou funkci:

$$V(\tilde{p}) = \sum_{i=1}^{l} |(\tilde{p} + \hat{p}_i) z_i(\tilde{p} + \hat{p}_i)| \equiv \sum_{i=1}^{l} |p_i z_i(p_i)| \,. \tag{5.16}$$

Zřejmě platí, že $V(\tilde{p}) > 0$ pro $\tilde{p} \neq 0$, $V(0) = 0$ a $V(\tilde{p})$ je konečné pro jakékoli konečné $\tilde{p}$, neboť převis poptávky je pro všechna kladná p (což jsou p, která uvažujeme) konečný.

Pokud budeme uvažovat pouze výměnnou ekonomiku, pak lze pomocí Walrasova zákona a s předpokladem hrubé substitutivity dokázat, že $\frac{d}{dt}(V(\tilde{p}(t; t_0, p_0))) < 0$ (viz. [5]). Tím jsou splněny předpoklady věty a pro každé p_0 řešení konverguje k equilibriu $\hat{p}$. Tím jsme získali stejný výsledek jako pomocí Arrow-Block-Hurwiczovy věty.

5.7.2 Důkaz kvazistability pomocí modifikované ljapunovské funkce

Definice. Systém $\dot{p} = z(p)$ nazveme *kvazi-stabilním*, pokud

1. pro posloupnost $\{t^q\}_{q=1}^{\infty}$ takovou, že $\{t^q\} \to \infty$, a pro každé p_0 limita $p(t^q; t_0, p_0)$ pro $q \to \infty$ existuje, pak nutně $\lim_{q\to\infty} p(t^q; t_0, p_0)$ je equilibrium,
2. pro každé $r > 0$ existuje číslo B takové, že $\|p^0 - \hat{p}\| \leq r$, kde $\hat{p}$ je equilibrium, implikuje $\|p(t; t_0, p_0) - \hat{p}\| \leq B$.

Tato definice připouští existenci celé množiny equilibrií. Kvazistabilita systému pak vyjadřuje, že každé řešení konverguje do některého z equilibrií.

Věta. *Předpokládejme, že řešení systému* $\dot{p}(t) = z(p(t))$ *je obsaženo v nějaké kompaktní množině* $C' \subset \mathbb{R}^l$. *Dále předpokládejme, že existuje spojitá funkce* V *definovaná na* C' *taková, že* $V(p(t; t_0, p_0))$ *je ryze klesající funkce vzhledem k* t, *pokud* $p(t; t_0, p_0)$

[8] $\tilde{p_0} \equiv p_0 - \hat{p}$

není equilibrium. Pak je systém $\dot{p}(t) = z(p(t))$ kvazi-stabilní.

Funkce $V(p)$ je tzv. *modifikovaná ljapunovská funkce*, protože nepředpokládáme, že je diferencovatelná a že $V(p) > 0$.

Nyní je třeba ukázat, jak lze tuto větu využít pro důkaz stability equilibria. Předpokládejme, že pro převis poptávky platí:

1. homogenita: $z_i(p) = z_i(\alpha p)$ pro všechna $\alpha > 0$ a pro všechna p, $i = 1, 2, \ldots, l$,
2. hrubá substitutivita: $\frac{\partial z_i}{\partial p_j} > 0$ pro všechna $i \neq j$ a pro všechna p.

Nyní definujme funkce $V(p)$ a $v(p)$:

$$V(p) = \max \left\{ \frac{p_1}{\hat{p_1}}, \frac{p_2}{\hat{p_2}}, \ldots, \frac{p_l}{\hat{p_l}} \right\}, \tag{5.17}$$

$$v(p) = \min \left\{ \frac{p_1}{\hat{p_1}}, \frac{p_2}{\hat{p_2}}, \ldots, \frac{p_l}{\hat{p_l}} \right\}. \tag{5.18}$$

Funkce $V(p)$ a $v(p)$ budou plnit roli modifikovaných ljapunovských funkcí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{p_1(t)}{\hat{p_1}} \geq \frac{p_i(t)}{\hat{p_i}}$ pro všechna i na nějakém intervalu τ. Tedy $V(p(t)) = \frac{p_1(t)}{\hat{p_1}}$ na intervalu τ. $V(p(t))$ a $v(p(t))$ jsou nyní dokonce diferencovatelné na intervalu τ:

$$\frac{d}{dt}(V(p(t))) = \frac{1}{\hat{p_1}} \frac{dp_1(t)}{dt} = \frac{1}{\hat{p_1}} z_1(p(t)). \tag{5.19}$$

Nyní využijme homogenity $z(p)$ a rozšiřme cenový vektor číslem $\alpha = \frac{\hat{p_1}}{p_1}$:

$$\frac{d}{dt}(V(p(t))) = \frac{1}{\hat{p_1}} z_1 \left(\frac{\hat{p_1}}{p_1(t)} p_1(t), \frac{\hat{p_1}}{p_1(t)} p_2(t), \ldots, \frac{\hat{p_1}}{p_1(t)} p_l(t) \right). \tag{5.20}$$

Jelikož $\frac{\hat{p_1}}{p_1} \leq \frac{\hat{p_i}}{p_i}$ s tím, že alespoň pro jedno i je nerovnost ostrá (pokud by nebyla a $\frac{\hat{p_i}}{p_i}$ by bylo stejné pro všechna i, pak p by bylo equilibriem – plyne z homogenity), dostáváme:

$$z_1 \left(\frac{\hat{p_1}}{p_1} p_1, \ldots, \frac{\hat{p_1}}{p_1} p_l \right) < z_1 \left(\frac{\hat{p_1}}{p_1} p_1, \ldots, \frac{\hat{p_l}}{p_l} p_l \right) = z_1(\hat{p_1}, \ldots, \hat{p_l}) = 0. \tag{5.21}$$

Nerovnost plyne z hrubé substitutivity. Pokud budeme nerovnost číst zprava, tak nejprve cenový vektor v rovnovážném převisu poptávky po první komoditě rozšíříme vhodnou „jedničkou“: $\frac{p_i}{p_i}$. V dalším kroku (zprava doleva) dle předchozí úvahy cenový vektor alespoň v jedné souřadnici zmenšíme. Z hrubé substitutivity pak plyne, že bude menší i čistá poptávka (vlevo), která vystupuje v časové derivaci funkce $V(p(t))$.

Máme tedy $\frac{d}{dt}(V(p(t,t_0,p_0))) < 0$ pro časový interval τ, pokud $p(t;t_0,p_0)$ není rovnovážnou cenou. Toto můžeme provést pro libovolný časový interval. Čili $V(p(t;t_0,p_0))$ je ryze klesající vůči t pro všechna t. Podobně lze ukázat, že $\frac{d}{dt}(v(p(t,t_0,p_0))) > 0$. Z definic funkcí $V(p(t,t_0,p_0))$ a $v(p(t,t_0,p_0))$ a z určení jejich časových derivací je zřejmé, že řešení je obsaženo v kompaktní množině

$$\left\{p : v(p_0) \leq \frac{p_i}{\hat{p}_i} \leq V(p_0), i = 1, 2, \ldots, l\right\}.$$

Z toho mimo jiné plyne, že $p(t;t_0,p_0) > 0$ pokud $p_0 > 0$, což uvažujeme.

Nyní jsou splněny všechny předpoklady uvedené věty a systém $\dot{p}(t) = z(p(t))$ je kvazi-stabilní. Řešení $p(t;t_0,p_0)$ tedy směřuje do vybrané rovnovážné ceny $\hat{p}$, dokud nedosáhne nějaké (obecně nějaké jiné) rovnovážné ceny.

Tato konstrukce důkazu stability nejlépe odpovídá provedenému důkazu existence equilibria. Equilibrií je obecně celá množina a stabilitou přirozeně rozumíme konvergenci do některého z těchto equilibrií. Předpoklad homogenity je splněn a byl již diskutován. Walrasův zákon při metodě modifikované ljapunovské funkce nebyl použit, tudíž se nemusíme omezit pouze na výměnné ekonomiky. Problémem však je předpoklad hrubé substitutivity. Tedy předpoklad, že $\frac{\partial z_i}{\partial p_j} > 0$ pro všechna $i \neq j$. Hrubá substitutivita znamená, že zvýší-li se cena nějaké (třeba j-té komodity), pak se poptávka po všech ostatních komoditách zvýší více než jejich nabídka. To platí v případě, že všechny komodity jsou vzájemně ve vztahu substitutů, tedy že spotřebitel nahradí j-tou komoditu nějakou jinou, kterou začne více spotřebovávat. Ještě také musíme uvažovat, že spotřebitel na změnu ceny zareaguje rychleji než výrobce, což vzhledem k tomu, že výroba trvá nějaký čas, platí.

Pokud pro ekonomiku existuje alespoň jedno equilibrium, pak při několika diskutovaných a reálných předpokladech a při méně reálném předpokladu o vztahu hrubé substitutivity mezi všemi komoditami, je equilibrium ekonomiky globálně stabilní v tom smyslu, že ceny všech komodit konvergují k některému z equilibrií.

Kapitola 6

Možné směry dalšího výzkumu

6.1 Existence equilibria

Problematika existence equilibria je v literatuře velmi podrobně a pečlivě rozebrána. Prostor pro nový výzkum je tedy velmi omezený. Hlavní komplikací této problematiky jsou přílišné požadavky na racionalitu spotřebitele a také požadavek konvexnosti produkčních množin. Důvodem je nutný předpoklad konvexnosti v Kakutaniho větě. Brouwerova věta však neplatí jen pro konvexní množiny, ale pro všechny množiny homeomorfní k jednotkové kouli. Možným prostorem pro výzkum by tedy byla v prvním kroku určitá restrikce, která by požadovala jednoznačnost nejlepší produkce či spotřeby. Nejednalo by se tedy o množiny, ale o body. Pro důkaz by pak bylo možné použít místo Kakutaniho věty větu Brouwerovu, což by v druhém kroku umožnilo uvolnění některých předpokladů o konvexitě. Tím by se možná došlo k výsledkům, které by lépe reflektovaly ekonomickou realitu.

6.2 Stabilita equilibria

V problematice stability equilibria zatím nebylo dosaženo dostatečně uspokojivých výsledků. Tedy nebyl objeven model, který by byl dostatečně reálný a přitom prokazatelně stabilní. Metoda linearizovaného systému je restriktivní kvůli slabému vztahu mezi stabilitou linearizovaného a původního systému. Hicksův přístup je problematický tím, že sice určuje podmínku pro stabilitu, ale nelze ověřit, zda je tato podmínka splněná či ne. Meotody využívající Walrasova zákona jsou z definice omezeny na výměnné ekonomiky, které neodrážejí ekonomiky skutečné.

Nejzajímavější metodou je metoda ljapunovských funkcí. Jedná se o velmi obecný přístup, který a priori nevyžaduje žádné omezení. Jedná se také o metodu kreativní, je totiž potřeba najít vhodnou funkci, která splňuje určité podmínky, což pak zaručí určitý typ stability equilibria. Dosud nalezené ljapunovské funkce vyžadují více či méně nereálné předpoklady. Přínosné by tedy bylo objevit takové ljapunovské funkce, které by se těmto předpokladům vyhnuly. Konkrétně třeba předpoklad hrubé substitutivity mezi všemi komoditami by bylo žádoucí zeslabit. Převažujícím vztahem mezi komoditami totiž opravdu je vztah hrubé substitutivity. V rámci některých skupin komodit je ale vzájemný vztah opačný, tzv. komplementární. (Typickým příkladem jsou auta a pneumatiky. Zde zdražení aut vede k menší poptávce po pneumatikách.) Model, ve kterém by hrubá substitutivita byla pouze převažujícím a nikoli výhradním vztahem mezi komoditami, by již byl reálným a byl by uspokojivým řešením problému stability equilibria.

Literatura

[1] Debreu, Gerard: *THEORY OF VALUE, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press, New Haven and London, 1959.

[2] Takayama, Akira: *Mathematical Economics, second edition*, Cambridge University Press, 1985

[3] Saari, Donald: *Mathematical Complexity of Simple Economics*, Notices of AMS Volume 42, Number 2, February 1995

[4] Kalman, R. E.; Bertram, J. E.: *Control System Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov, I: Continuous Time System*, Journal of Basic Engineering, June 1960

[5] Negishi, Takashi: *The Stability of a Competitive Economy: A Survey article*, Econometrica, 230, October 1962