Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Jana Klicnarová

Slabá konvergence pravděpodobnostních měr

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Studijní obor: M4 – Pravděpodobnost a matematická statistika

Prohlašuji, že jsem svou rigorózní práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

Ve Vodňanech dne Jana Klicnarová

Abstrakt

Práce je rozdělena do tří částí. V první části jsou připomenuty základní definice a vlastnosti slabé konvergence. Druhá kapitola se podrobněji věnuje problematice slabé konvergence na různých prostorech funkcí. Třetí kapitola shrnuje vlastní výsledky. Tato kapitola je rozdělena do čtyř částí. V první části jsou studovány supremální procesy – předpokládá se, že proces slabě konverguje v nějakém prostoru funkcí a je studováno, za jakých podmínek bude také proces vytvořený ze suprem tohoto procesu slabě konvergovat. Ve druhé části je studována stabilní konvergence, což je silnější konvergence než slabá. Jednak je ukázáno, ve kterých známých centrálních limitních větách je výsledná konvergence stabilní (popř. za jakých podmínek) a jednak jsou studovány podmínky pro stabilní konvergenci procesů. Ve třetí podkapitole jsou ukázány podmínky pro těsnost posloupnosti spojitých náhodných procesů v Hölderově prostoru. Poslední část přináší výsledky v oblasti martingalových aproximací stacionárních posloupností. Speciálně je zde zobecněna Doobova nerovnost z práce (Peligrad and Utev, 2005), dále je zde dokázána neadaptovaná verze principu invariance z práce (Wu and Woodroofe, 2004) a nakonec jsou představeny různé způsoby aproximace stacionární posloupnosti martingalem a vztahy mezi nimi.

Obsah

Úvod

V této práci se zabýváme slabou konvergencí v teorii pravděpodobnosti. V první části připomeneme základní definice a základní tvrzení, která jsou známá a potřebná pro práci se slabou konvergencí. Nejprve představíme slabou konvergenci jako pojem z teorie míry, poté se zaměříme na slabou konvergenci v teorii pravděpodobnosti. Také se podíváme na poněkud silnější konvergenci než je slabá, a to na stabilní konvergenci.

V druhé části práce se zabýváme definicemi a tvrzeními, která se týkají slabé konvergence na konkrétních prostorech, především se zaměřujeme na slabou konvergenci procesů, tedy slabou konvergenci na různých prostorech funkcí. Podkapitoly 1.2 a 2.2 vycházejí z velké části ze semináře, který na toto téma vedl doc. Lachout na MFF UK.

Poslední kapitola je kapitola vlastních výsledků. Je rozdělena do čtyř podkapitol. V první podkapitole se zabýváme konvergencí suprema náhodných procesů. Zde předpokládáme, že posloupnost náhodných procesů slabě konverguje a ptáme se, za jakých podmínek také slabě konverguje proces vzniklý jako suprema z původního procesu. Tuto problematiku studujeme zvlášť pro různé prostory funkcí.

V další podkapitole se věnujeme již zmíněné stabilní konvergenci. Konkrétněji se zajímáme o to, ve kterých známých centrálních limitních větách a za jakých podmínek lze slabou konvergenci nahradit konvergencí stabilní. Také se zde věnujeme stabilní konvergenci procesů.

Ve třetí části této kapitoly ukazujeme podmínky pro těsnost posloupnosti náhodných procesů indexovaných prvky množiny $[0,1]^m$ v Hölderově prostoru.

V poslední části se věnujeme martingalovým aproximacím stacionárních procesů a zobecňujeme Doobovu nerovnost a princip invariance pro stacionární procesy. Také studujeme různé typy martingalových aproximací a ukazujeme vztahy mezi těmito typy aproximace.

Značení

$(C(T), \rho_s)$	prostor omezených spojitých funkcí se supremální metrikou
$C_c(T)$	reálné spojité funkce na T s kompaktním nosičem
$(D(T), d_S)$	zobecněný Skorochodův prostor
$\|\|f\|\|_p$	L_p-norma funkce f, spec. $\sqrt[p]{\int \|f\|^p \mathrm{d}\mu}$, $p \in [1, +\infty)$
$\|\|f\|\|$	supremální norma, spec. $\sup_x \|f(x)\|$
$\mathcal{F}(\mathcal{X})$	uzavřené množiny na $\mathcal{X}$
$\mathcal{G}(\mathcal{X})$	otevřené množiny na $\mathcal{X}$
$\mathbb{I}_A$	indikátor množiny A
$\mathcal{K}(\mathcal{X})$	kompaktní množiny na $\mathcal{X}$
$\mathcal{L}(X)$	rozdělení náhodné veličiny X
$(L_p, \|\| \cdot \|\|_p)$	prostor funkcí, pro které je $\|\|f\|\|_p < +\infty$
$(l^{+\infty}(T), \rho_s)$	prostor omezených funkcí se supremální metrikou
λ	Lebesgueova míra
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$	pravděpodobnostní prostor
$\mathcal{P}(T)$	potenční množina množiny T
$\rho(\cdot, \cdot)$	obecná metrika
$X, X_\alpha : \Omega \to \mathcal{X}$	obecná zobrazení (ne nutně měřitelná)
$\mathcal{X}$	topologický prostor
$\bar{A}$	uzávěr množiny A
A^o	vnitřek množiny A
∂A	hranice množiny A
E^*	vnější střední hodnota
E_*	vnitřní střední hodnota
P^*	vnější pravděpodobnost
P_*	vnitřní pravděpodobnost
$f \wedge g := \min(f, g)$	
$f \vee g := \max(f, g)$	
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část čísla x
$\lceil x \rceil$	horní celá část čísla x

Kapitola 1

Základní definice a tvrzení

V první části této kapitoly připomeneme slabou konvergenci z hlediska teorie míry, v druhé části se zaměříme na slabou konvergenci v teorii pravděpodobnosti. Poté se budeme zabývat definicemi a tvrzeními vztahujícími se k stabilní konvergenci a v poslední části této kapitoly připomeneme základní pojmy z ergodické teorie.

1.1 Slabá konvergence v teorii míry

Nejprve si připomeňme, jak je definována slabá konvergence posloupnosti funkcí v obecné teorii míry. Následující dvě definice můžeme najít např. v (Lukeš and Malý, 1993, Def 12.12, Def 12.13).

Definice 1.1.1 *Nechť (T, μ) je prostor s mírou, $1 \leq p < +\infty$ a $q = \frac{p}{p-1}$ ($q = +\infty$, pokud $p = 1$). Nechť $f_n, f \in L_p(T)$. Řekneme, že funkce $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***konvergují slabě*** *k funkci f v L_p, jestliže*

$$\int_T f_n g \,\mathrm{d}\mu \to \int_T f g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall g \in L_q(T).$$

V našem případě se ovšem nebude jednat o tuto klasickou slabou konvergenci, ale půjde nám o tzv. slabou* konvergenci.

Definice 1.1.2 *Nechť μ je σ-konečná míra na prostoru T a nechť $f_n, f \in L_{+\infty}(T)$. Řekneme, že posloupnost funkcí $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***konverguje slabě**** *k funkci f, jestliže*

$$\int_T f_n g \,\mathrm{d}\mu \to \int_T f g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall g \in L_1(T).$$

Poznámka: Pomocí pojmů z oblasti funkcionální analýzy můžeme slabou konvergenci chápat následovně. Buď X Banachův prostor a X^* jeho (topologický) duál, nechť $x_n, x \in X$ a $F_n, F \in X^*$, potom říkáme, že

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergují slabě k x, jestliže $F(x_n) \to F(x)$ pro každý funkcionál $F \in X^*$,

(ii) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergují slabě* k F, jestliže $F_n(x) \to F(x)$ pro každé $x \in X$.

V dalším textu budeme potřebovat také následující pojmy, proto připomeňme jejich definice.

Definice 1.1.3 *Řekneme, že míra μ na prostoru $\mathcal{X}$ je **regulární**, pokud pro každou měřitelnou množinu B:*

$$\mu(B) = \sup_{F\subset B,\ F\in\mathcal{F}(\mathcal{X})} \mu(F) = \inf_{B\subset G,\ G\in\mathcal{G}(\mathcal{X})} \mu(G).$$

*Řekneme, že míra μ je **Radonova**, pokud pro každou měřitelnou množinu B:*

$$\mu(B) = \sup_{K\subset B,\ K\in\mathcal{K}(\mathcal{X})} \mu(K).$$

Definice 1.1.4 *Řekneme, že topologický prostor $(\mathcal{X}, \mathcal{G}(\mathcal{X}))$ je **regulární**, pokud pro všechny prvky $x \in \mathcal{X}$ a každou uzavřenou množinu F, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ takovou, že $x \notin F$, existují otevřené množiny $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$ takové, že*

$$x \in G_1 \ \wedge\ F \subset G_2 \ \wedge\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

*Topologický prostor $(\mathcal{X}, \mathcal{G}(\mathcal{X}))$ se nazývá **normální**, pokud pro každé dvě uzavřené množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ takové, že $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existují otevřené množiny $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$ takové, že platí*

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \ \wedge\ F_1 \subset G_1 \ \wedge\ F_2 \subset G_2.$$

Podívejme se dále, jak se definuje slabá konvergence pro posloupnost měr na lokálně kompaktním prostoru T, viz (Lukeš and Malý, 1993, Def 17.1).

Definice 1.1.5 *Nechť $C(T)$ je prostor všech spojitých funkcí na prostoru T a F je nějaký jeho lineární podprostor obsahující podprostor $C_c(T)$, což je prostor všech spojitých funkcí na T s kompaktním nosičem. Řekneme, že zobecněná posloupnost Radonových měr $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ na T **konverguje F-slabě** k Radonově míře μ, jestliže*

$$\int_T f\,\mathrm{d}\mu_\alpha \to \int_T f\,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in \mathsf{F}.$$

Existuje-li F-slabá limita, je určena jednoznačně.

Poznámka: Nejčastěji používané slabé konvergence jsou následují dvě

- tzv. slabá, kde $\mathsf{F} = C(T)$,
- tzv. vágní, kde $\mathsf{F} = C_c(T)$.

My se budeme zajímat o tu první. Vágní konvergence je podrobněji studována např. v (Topsøe, 1970).

1.2 Slabá konvergence v pravděpodobnosti

Jak už jsme zmínili výše, v teorii pravděpodobnosti se používá slabá* konvergence z teorie míry, ale mluví se o ní jako o slabé. Budeme-li tedy zmiňovat slabou konvergenci pravděpodobnostních měr, pak to bude konvergence, která odpovídá definici 1.1.5 + (slabá).

Ještě bychom měli podotknout, že pokud mluvíme o slabé konvergenci (či konvergenci v distribuci nebo v rozdělení) náhodných veličin nebo náhodných elementů (značíme $\xrightarrow{\mathcal{D}}$), pak tím myslíme slabou konvergenci odpovídajících rozdělení (značíme $\xrightarrow{w}$).

Než uvedeme definici slabé konvergence i pro obecně neměřitelné náhodné elementy, připomeneme definice vnější a vnitřní pravděpodobnosti a střední hodnoty.

Definice 1.2.1 *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je obecný pravděpodobnostní prostor a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *je obecné zobrazení.* ***Vnější střední hodnotu*** *náhodného elementu* X *vůči míře* P *definujeme:*

$$\mathrm{E}^* X = \inf\{\mathrm{E}U, U \geq X, U : \Omega \to \mathbb{R}^* \textit{ meřitelné a } \mathrm{E}U \textit{ existuje}\}.$$

Vnější pravděpodobnost *obecné množiny* $B \subset \Omega$ *definujeme následovně:*

$$\mathrm{P}^*(B) = \inf\{\mathrm{P}(A), B \subset A, A \in \mathcal{A}\}.$$

Vnitřní střední hodnotu a vnitřní pravděpodobnost *potom položíme:*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_* X &= -\mathrm{E}^*(-X) \\ \mathrm{P}_*(B) &= 1 - \mathrm{P}^*(\Omega \backslash B). \end{aligned}$$

Definici slabé konvergence pro obecné náhodné elementy, můžeme najít např. v (van der Vaart and Wellner, 1996, Def 1.3.3). Poznamenejme ještě, že se vždy požaduje, aby limitní náhodná veličina byla měřitelná.

Definice 1.2.2 (Slabá konvergence) *Net náhodných elementů* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *konverguje* ***slabě*** *k měřitelné náhodné veličině* X *v* $(\mathcal{X}, \mathcal{G}(\mathcal{X}))$, *zn.* $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G) \quad \forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}).$$

K ověření slabé konvergence pravděpodobnostních měr se velmi často používá tzv. Portmanteau lemma, viz např. (Hoffman-Jørgensen, 1994, § 5.2), (Topsøe, 1970, Th 8.1), (van der Vaart and Wellner, 1996, Th 1.3.4).

Než uvedeme Portmanteau lemma, připomeňme ještě následující definice:

Definice 1.2.3 *Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ je **zdola polospojitá** v bodě x, pokud pro všechny nety $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ takové, že $x_\alpha \to x$, platí:*

$$f(x) \leq \liminf_{\alpha \in A} f(x_\alpha).$$

*Podobně, funkce f je **shora polospojitá** v bodě x, pokud pro všechny nety $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ takové, že $x_\alpha \to x$, platí:*

$$f(x) \geq \limsup_{\alpha \in A} f(x_\alpha).$$

Portmanteau lemma tvoří následující dvě věty.

Věta 1.2.4 (Portmanteau lemma) *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *v* $(\mathcal{X}, \mathcal{G}(\mathcal{X}))$,

(ii) $\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G)$ $\forall G$ *otevřené,*

(iii) $\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in F) \leq \mathrm{P}(X \in F)$ $\forall F$ *uzavřené,*

(iv) $\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) \geq \mathrm{E} f(X)$ *pro všechny f zdola omezené zdola polospojité,*

(v) $\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) \geq \mathrm{E} f(X)$ *pro všechny f omezené zdola polospojité,*

(vi) $\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha) \leq \mathrm{E} f(X)$ *pro všechny f shora omezené shora polospojité,*

(vii) $\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha) \leq \mathrm{E} f(X)$ *pro všechny f omezené shora polospojité.*

Věta 1.2.5 *Z každého tvrzení věty 1.2.4 vyplývají následující dvě tvrzení:*

(viii) $\lim_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in B) = \lim_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in B) = \mathrm{P}(X \in B)$ $\forall B$ *borelovské s* $\mathrm{P}(\partial B) = 0$,

(ix) $\lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha) = \mathrm{E} f(X)$ *pro všechny spojité omezené funkce f.*

Navíc (viii) $\Rightarrow$ (ix). A pokud $\mathcal{X}$ je metrický prostor, potom také (ix) $\Rightarrow$ (i).

Důkaz věty 1.2.4

„*(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*“ Tak je slabá konvergence definována.

„*(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*“ Tuto implikaci dostáváme díky tomu, že uzavřené množiny jsou doplňky množin otevřených.

„*(iv)* $\Leftrightarrow$ *(vi)*“ a „*(v)* $\Leftrightarrow$ *(vii)*“ Opět z komplementarity.

„*(iv)* $\Rightarrow$ *(v)*“ Jasné.

„$(v) \Rightarrow (iv)$“ Mějme funkci f zdola omezenou zdola polospojitou, potom pro dostatečně velkou konstantu $c > 0$ můžeme psát:

$$\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) \geq \liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_*(f \wedge c)(X_\alpha)$$

a z (v) máme

$$\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_*(f \wedge c)(X_\alpha) \geq \mathrm{E}(f \wedge c)(X).$$

Protože $f = \lim_{c \to +\infty}(f \wedge c)$ a X je měřitelné,

$$\lim_{c \to +\infty} \mathrm{E}(f \wedge c)(X) = \mathrm{E}f(X),$$

a tedy platí dokazovaná implikace.

„$(vii) \Rightarrow (iii)$“ Indikátor uzavřené množiny je omezená shora polospojitá funkce. Analogicky „$(v) \Rightarrow (ii)$“.

„$(iii) \Rightarrow (vii)$“ Buď $f : \mathcal{X} \to [0,1]$ shora polospojitá funkce. Potom pro všechna $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{I}_{(f \geq \frac{n}{N})} \leq f \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{I}_{(f \geq \frac{n}{N})},$$

a $(f \geq \frac{n}{N})$ je uzavřená množina. Pro všechna N můžeme tedy psát (pozn. E^* je subaditivní):

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha) &\leq \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{I}_{(f(X_\alpha) \geq \frac{n}{N})} \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* \mathbb{I}_{(f(X_\alpha) \geq \frac{n}{N})} \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}\mathbb{I}_{(f(X) \geq \frac{n}{N})} \\
&\leq \mathrm{E}f(X) + \frac{1}{N},
\end{aligned}$$

tedy platí (vii).

Q.E.D.

Důkaz věty 1.2.5

„$(ii), (iii) \Rightarrow (viii)$“ Buď $\mathrm{P}(X \in \partial B) = 0$. Potom

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \in B) &= \mathrm{P}(X \in B^o) \\
&\leq \liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in B^o) \\
&\leq \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in B^o)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \bar{B}) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in \bar{B}) \\ &= \mathrm{P}(X \in B), \end{aligned}$$

a protože první člen je roven poslednímu členu, všechny nerovnosti jsou rovnostmi.

„$(viii) \Rightarrow (ix)$“ Nechť f je spojitá omezená funkce, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $f : \mathcal{X} \to [1/4, 3/4]$. Potom existuje nejvýše spočetná množina $\mathcal{N}$ taková, že pro všechna $t \in [0,1] \backslash \mathcal{N}$:

$$\mathrm{P}(f(X) = t) = 0.$$

Pro všechna $\varepsilon > 0$ můžeme najít dělení intervalu $[0,1]$ takové, že

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1, \; t_i \in [0,1] \backslash \mathcal{N} \text{ a } |t_i - t_{i-1}| < \varepsilon.$$

Potom

$$\sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \mathbb{I}_{(f \geq t_i)} \leq f \leq \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \mathbb{I}_{(f \geq t_{i-1})} \leq \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \mathbb{I}_{(f \geq t_i)} + \varepsilon.$$

Z požadavků na f a t_i víme, že

$$\mathrm{P}(X \in \partial(f \geq t_i)) = \mathrm{P}(f(X) = t_i) = 0.$$

Pro všechna $\varepsilon > 0$, díky $(viii)$, tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \mathrm{P}(f(X) \geq t_i) &= \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \lim_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(f(X_\alpha) \geq t_i) \\ &\leq \lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) \\ &\leq \lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \lim_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(f(X_\alpha) \geq t_i) + \varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \mathrm{P}(f(X) \geq t_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Zvolíme-li posloupnost $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takovou, že $\varepsilon_n \to 0$ pro $n \to +\infty$, potom dostáváme $\lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}_* f(X_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} \mathrm{E}^* f(X_\alpha)$, což se rovná $\mathrm{E} f(X)$.

„(ix)+$\mathcal{X}$ normální $\Rightarrow (ii)$“ Předpokládáme, že $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Potom platí Urysonovo lemma, viz např. (Kelley, 1997, chap. 4, L 4). Díky tomu můžeme pro každou otevřenou množinu G a pro každé kladné ε najít spojitou funkci f, která bude na množině $\mathcal{X} \backslash G$ nabývat nuly a jedničky na nějaké uzavřené množině F takové, že $F \subset G$ a zároveň (připomeňme, že každá borelovská míra na metrickém prostoru je regulární, viz např. (Štěpán, 1987, I.7.1)):

$$\mathrm{P}(X \in G) \leq \mathrm{P}(X \in F) + \varepsilon.$$

Potom dostáváme díky (ix):

$$\liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \liminf_{\alpha \in A} \mathrm{E}_*(f(X_\alpha)) = \mathrm{E}f(X) \geq \mathrm{P}(X \in F) \geq \mathrm{P}(X \in G) - \varepsilon.$$

Q.E.D.

Zachování slabé konvergence Je známo, že spojité zobrazení zachovává slabou konvergenci, viz např. (Billingsley, 1968, Th 5.1).

Věta 1.2.6 *Buď h měřitelná funkce z prostoru D do prostoru E. A označme D_h množinu bodů nespojitosti funkce h. Potom, jestliže posloupnost měr $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na prostoru D konverguje slabě k míře μ na prostoru D, tj. $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, a pokud $\mu(D_h) = 0$, potom také $\mu_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mu h^{-1}$.*

Připomeňme, že i zobecněná slabá konvergence pro ne nutně měřitelná zobrazení se zachovává při spojitém zobrazení. Důkaz probíhá naprosto stejným způsobem jako v případě měřitelných náhodných veličin, viz (van der Vaart and Wellner, 1996, Th 1.11.1)

Věta 1.2.7 (O spojitém zobrazení) *Nechť $h : D \to E$ je spojité ve všech bodech množiny $D_0 \subset D$. Jestliže $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kde X nabývá hodnot v množině D_0, potom $h(X_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.*

Jednoznačnost limity

Vždy, když uvažujeme nějakou konvergenci, tak je rozumné požadovat jednoznačnost limity. Jak je to tedy s jednoznačností limity u slabé konvergence? Je zřejmé, že slabá konvergence, o které tady pojednáváme, je slabou konvergencí pravděpodobnostních měr, a pokud uvažujeme slabou konvergenci náhodných veličin, pak se jedná o slabou konvergenci indukovaných měr. Tudíž, když požadujeme jednoznačnost, požadujeme jednoznačnost limitní míry, v případě náhodné veličiny jednoznačnost rozdělení limitní veličiny.

Věta 1.2.8 *Buď $\mathcal{X}$ normální topologický prostor, nechť net zobrazení $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ konverguje slabě k nějaké regulární míře $\mathcal{L}(X)$ na tomto prostoru. Potom je rozdělení $\mathcal{L}(X)$ určeno jednoznačně a platí*

$$\forall G \in \mathcal{G}(X): \ \mathrm{P}(X \in G) = \sup\{\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in F), F \subset G, F \in \mathcal{F}(\mathcal{X})\}.$$

Důkaz: Pro všechny otevřené množiny G a pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje (protože limitní míra je regulární) $H \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ tak, že

$$\mathrm{P}(X \in G) \leq \mathrm{P}(X \in H) + \varepsilon,\ \ H \subset G.$$

A protože prostor je normální, existují také množiny Q a F takové, že platí:

$$Q \in \mathcal{G}(\mathcal{X}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{X}) : H \subset Q \subset F \subset G.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \in G) - \varepsilon &\leq \mathrm{P}(X \in H) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in Q) \\ &\leq \liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in Q) \\ &\leq \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in F) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in F) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in G). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Věta 1.2.9 *Buď $\mathcal{X}$ regulární prostor a nechť net zobrazení $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ konverguje slabě k nějaké Radonově míře $\mathcal{L}(X)$, potom je rozdělení $\mathcal{L}(X)$ určeno jednoznačně a platí*

$$\forall G \in \mathcal{G}(X) :\ \mathrm{P}(X \in G) = \sup\{\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in F), F \subset G, F \in \mathcal{F}(\mathcal{X})\}.$$

Důkaz: Pro všechny otevřené množiny G a pro všechna kladná ε existuje (neboť míra je Radonova) $H \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ tak, že

$$\mathrm{P}(G) \leq \mathrm{P}(H) + \varepsilon, \qquad H \subset G,$$

a protože H je kompaktní, potom z regularity prostoru existují množiny Q a F takové, že platí:

$$Q \in \mathcal{G}(\mathcal{X}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{X}) : H \subset Q \subset F \subset G.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \in G) - \varepsilon &\leq \mathrm{P}(X \in H) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in Q) \\ &\leq \liminf_{\alpha \in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in Q) \\ &\leq \limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in F) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in F) \\ &\leq \mathrm{P}(X \in G). \end{aligned}$$

Q.E.D.

1.3 Stabilní konvergence

V této části se podíváme na konvergenci o něco silnější než je slabá konvergence. Jedná se o stabilní konvergenci. Tato konvergence je známá především díky Hallovi a Heydemu, kteří ji (pro reálné náhodné veličiny) představili ve své knize (Hall and Heyde, 1980).

Stabilní konvergence pro reálné náhodné veličiny je definována následovně, viz (Hall and Heyde, 1980, str. 56):

Definice 1.3.1 *Mějme kolekci $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reálných náhodných veličin definovaných na stejném prostoru, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, které konvergují v distribuci k náhodné veličině X, tj. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Tuto konvergenci nazveme* ***stabilní****, jestliže pro všechny body x, které jsou body spojitosti distribuční funkce limitní náhodné veličiny X, a pro všechny množiny $E \in \mathcal{A}$ platí:*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\{X_n \leq x\} \cap E) = Q_x(E) \quad \textit{existuje} \tag{1.1}$$

a zároveň $Q_x(E) \to \mathrm{P}(E)$ pro $x \to +\infty$. Značíme $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}-s} X$.

Nejprve si ukažme příklad posloupnosti náhodných veličin, která konverguje slabě, ale nekonverguje stabilně.

Příklad: Mějme náhodné veličiny na $([0,1], \lambda|[0,1])$ takové, že:

$$\begin{aligned} X_{2k}(\omega) &= \Phi^{-1}(\omega), \\ X_{2k+1}(\omega) &= -\Phi^{-1}(\omega), \end{aligned}$$

kde Φ je distribuční funkce náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Každá náhodná veličina X_n má normované normální rozdělení, tedy $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Ale $\mathrm{P}(\{X_{2k} \leq 0\} \cap [0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$ a $\mathrm{P}(\{X_{2k+1} \leq 0\} \cap [0, \frac{1}{2}]) = 0$, tedy $X_n \overset{\mathcal{D}-s}{\not\to} X$.

$\triangle$

Není těžké si rozmyslet, že limitní náhodná veličina nemusí být jediná. Pro limitní náhodnou veličinu se jedná jen o její rozdělení, naprosto stejně jako u slabé konvergence. Máme-li posloupnost náhodných veličin, která konverguje slabě, neboli v distribuci, k nějaké náhodné veličině, potom to, zda je konvergence také stabilní, vůbec nezávisí na limitní náhodné veličině. Stabilita konvergence je vlastností pouze posloupnosti náhodných veličin.

Jak se ukazuje, s touto konvergencí úzce souvisí také L_1-slabá konvergence, viz definice 1.1.1 pro $p = 1$, tuto konvergenci budeme nadále značit $\xrightarrow{\mathcal{D}-L_1}$.

V následujících poznámkách ukážeme základní vztahy mezi těmito konvergencemi. Nejprve ještě připomeňme definici L_1-konvergence.

Definice 1.3.2 *Řekneme, že reálné náhodné veličiny* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergují v*** L_1 *k reálné náhodné veličině* X*, pokud:*

$$\mathrm{E}|X_n - X| \to 0 \ \textit{pro}\ n \to +\infty.$$

Poznámka: Jestliže $\exp(itX_n) \overset{\mathcal{D}-L_1}{\to} \exp(itX)\ \forall t \in \mathbb{R}$, potom $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

$\triangle$

Poznámka: Výše definovaná L_1-slabá konvergence je slabší než L_1-konvergence. Jestliže platí $\mathrm{E}|X_n - X| \to 0$, potom zřejmě $\mathrm{E}X_n\mathbb{I}_E \to \mathrm{E}X\mathbb{I}_E$ pro všechna $E \in \mathcal{A}$. Naopak z L_1-slabé konvergence nevyplývá L_1-konvergence. Uvažujme posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definovaných na prostoru $([0,1), \lambda|[0,1])$ nabývajících pouze hodnot ± 1 takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= +1 \ \forall \omega \in \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right), \\ X_n(\omega) &= -1 \ \forall \omega \in \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2j+1}{2^n}, \frac{2j+2}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Potom tato posloupnost konverguje L_1-slabě k náhodné veličině $X = 0$ *s.j.*, ale nekonverguje ve smyslu L_1-konvergence.

$\triangle$

Poznámka: Vrátíme-li se k předchozímu příkladu, kde jsme ukazovali posloupnost náhodných veličin, které konvergují slabě, ale nekonvergují stabilně, potom vidíme, že $\mathrm{E}X_{2k}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]} \neq \mathrm{E}X_{2k+1}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$, což znamená, že $X_n \overset{\mathcal{D}-L_1}{\not\to} X$.

$\triangle$

Příklad: Uvažujme na prostoru $([0,1], \lambda|[0,1])$ náhodné veličiny takové, že:

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= n^2 \ \forall \omega \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ &= 0 \ \forall \omega \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \\ X(\omega) &= 0 \ \textit{s.j.} \end{aligned}$$

Potom $X_n \overset{\mathcal{D}-s}{\to} X$, ale $X_n \overset{\mathcal{D}-L_1}{\not\to} X$, protože $\mathrm{E}X_n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]} \not\to \mathrm{E}X\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$.

$\triangle$

Vztah mezi stabilní konvergencí a L_1-slabou konvergencí popisuje následující lemma, viz (Hall and Heyde, 1980, Th 3.1):

Lemma 1.3.3 *Nechť* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Potom* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}-s} X$ *tehdy a jen tehdy, pokud existuje náhodná veličina* X' *na rozšíření prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *taková, že* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$,

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exp(itX_n) \xrightarrow{\mathcal{D}-L_1} \exp(itX') = Z(t),$$

a $\mathrm{E}Z(t)\mathbb{I}_E$ *je spojitá funkce* t *pro všechny množiny* $E \in \mathcal{A}$.

Stabilní konvergence však byla známa už dříve, než publikovali Hall a Heyde svou knihu. Původně ji představil jako **stabilní konvergenci jevů** Rényi v roce 1963 (Rényi, 1963). (Stabilní konvergence Halla a Heydeho pro posloupnost reálných náhodných veličin odpovídá této konvergenci pro posloupnost jevů.)

Definice 1.3.4 (Rényi) *Řekneme, že posloupnost jevů* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ***konverguje stabilně****, pokud pro každý jev* $B \in \mathcal{A}$ *platí:*

$$\mathrm{P}(A_n \cap B) \to \mu(B) \text{ pro } n \to +\infty, \tag{1.2}$$

kde $\mu(\cdot)$ *je nějaká míra na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A})$.

Stabilní konvergencí se zabývalo více autorů. Někdy se setkáváme s $\mathcal{G}$-stabilní konvergencí, kde $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ a požaduje se, aby limita (1.1) existovala pro všechny množiny $E \in \mathcal{G}$. (Potom pro $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ se jedná o již představenou stabilní konvergenci, pro $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ jen o konvergenci v distribuci.)

Definici stabilní konvergence na obecném metrickém prostoru uvádí např. (Mordecki, 1999) (ačkoliv v tomto článku se zabývá konkrétně prostorem $D(\mathbb{R}^m)$).

Definice 1.3.5 *Řekneme, že náhodné veličiny* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s hodnotami v nějakém metrickém prostoru* (D, d) ***konvergují stabilně*** *k náhodné veličině* X, *pokud*

$$E(Yf(X_n)) \to E(Yf(X)) \;\; \forall f \in C(D), \text{ pro všechny měřitelné omezené n. v. } Y. \tag{1.3}$$

Poznámka: Všimněme si, že v této definici již také záleží na limitní náhodné veličině. Tentokrát se už tedy nejedná o stejný případ jako je definice Rényiho. V definici 1.3.1 mohla být limitní náhodnou veličinou kterákoliv, která měla limitní rozdělení. Zde je tomu již jinak. Zde to musí být konkrétní náhodná veličina (v podmínce (1.3) nepožadujeme pouze existenci limity, ale požadujeme její konkrétní hodnotu).

△

Naším cílem dále je pracovat s definicí stabilní konvergence, která odpovídá Réniyho definici, a tedy i definici Halla a Heydeho.

Podívejme se tedy ještě jednou, jak vlastně souvisí definice 1.3.1 stabilní konvergence pro reálné náhodné veličiny s definicí 1.3.5 stabilní konvergence na obecných metrických prostorech. V obou definicích požadujeme, aby náhodné veličiny konvergovaly v distribuci. V definici 1.3.1 pro reálné náhodné veličiny se navíc požaduje, aby:

$$\mathrm{P}((X_n \leq x) \cap E) \to Q_E(x), \tag{1.4}$$

pro všechny x body spojitosti distribuční funkce limitní náhodné veličiny X a aby bylo splněno, že $Q_E(x) \to \mathrm{P}(E)$, pro $x \to +\infty$.

Pokud chceme zobecnit tuto definici, potřebujeme ji nejprve získat v jiné formě. Tato definice vychází vlastně z definice konvergence distribučních funkcí v podstatě, která je ekvivalentní slabé konvergenci odpovídajících pravděpodobnostních měr. Definici 1.3.1 můžeme tedy přepsat následujícím způsobem.

Lemma 1.3.6 *Mějme kolekci reálných náhodných veličin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, které konvergují v distribuci k náhodné veličině X. Potom řekneme, že konvergují stabilně, pokud pro všechny měřitelné množiny E existuje náhodná veličina X_E taková, že:*

$$\int_E f(X_n)\,\mathrm{dP} \to \int_E f(X_E)\,\mathrm{dP} \quad \textit{pro všechny } f \in C(\mathbb{R}),$$

navíc

$$\int_E \mathbb{I}_{[X_E \leq x]}\,\mathrm{dP} \to \mathrm{P}(E) \quad \textit{pro } x \to +\infty.$$

Vidíme, že první podmínku tohoto lemmatu snadno použijeme pro obecné náhodné veličiny. Druhá podmínka vyjadřuje jen požadavek, aby náhodné veličiny X_E byly skoro jistě konečné. Tuto podmínku můžeme zajistit například tím, že budeme požadovat náhodné veličiny X_E takové, aby měly stejné rozdělení jako limitní náhodná veličina X. V dalším textu budeme tedy používat následující definici stabilní konvergence obecných náhodných veličin.

Definice 1.3.7 *Řekneme, že náhodné veličiny $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s hodnotami v nějakém metrickém prostoru (D,d)* ***konvergují stabilně*** *k náhodné veličině X, pokud pro každou měřitelnou množinu E existuje náhodná veličina X_E, která má stejné rozdělení jako náhodná veličina X a platí:*

$$E(\mathbb{I}_E f(X_n)) \to E(\mathbb{I}_E f(X_E)) \quad \forall f \in C(D). \tag{1.5}$$

Takto zobecněná definice stabilní konvergence odpovídá pro reálnou přímku definici 1.3.1 a není ekvivalentní s definicí 1.3.5, jak už bylo zmíněno výše.

Asi nejobecnějším článkem k problematice stabilní konvergence reálných náhodných veličin je článek (Aldous and Eagleson, 1978). V poslední době se touto problematikou zabývali např. Dedecker a Merlevédeová v práci (Dedecker and Merlevéde, 2002).

1.4 Stacionární posloupnosti

V mnoha aplikacích slabé konvergence se zjišťují podmínky, za kterých stacionární posloupnost splňuje centrální limitní větu nebo princip invariance. Tedy podmínky, za kterých součet, resp. nějakým způsobem normovaný součet náhodných veličin, které tvoří stacionární posloupnost, slabě konverguje. K tomu lze použít nástroje vycházející z teorie, která je zde prezentována v předchozí části nebo tzv. ergodické teorie. V této části se zaměříme na základní pojmy a výsledky ergodické teorie potřebné ke zjišťování slabé konvergence součtu stacionární posloupnosti náhodných veličin. (Rovnosti náhodných veličin jsou ve smyslu *s.j.*, což už dále, pro jednoduchost značení, nebudeme psát.) Nejprve připomeňme definici stacionárního procesu.

Definice 1.4.1 *Řekneme, že proces $(X_t, t \in \mathbb{R})$ je* ***stacionární (striktně stacionární)****, pokud jeho rozdělení je invariantní vůči posunutí, tj. pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pro všechna $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$:*

$$\mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = \mathcal{L}(X_{t_1+d}, X_{t_2+d}, \ldots, X_{t_n+d}).$$

Uvažujme **dynamický systém** $(\Omega, \mathcal{A}, T, \mathrm{P})$, kde $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor a T je biměřitelné bijektivní zobrazení $T : \Omega \to \Omega$, které **zachovává míru**. To znamená, že pro všechna $A \in \mathcal{A}$ platí: $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(T(A))$.

Definice 1.4.2 *Řekneme, že míra* P *je* **ergodická**, *jestliže všechny invariantní množiny $A \in \mathcal{A}$, tedy množiny $A \in \mathcal{A}$ pro něž platí: $T(A) = A$, mají míru* $\mathrm{P}(A)$ *rovnu buď* 0 *nebo* 1.

Připomeňme, že prostorem $L_2(\mathrm{P})$ rozumíme Hilbertův prostor funkcí s konečným druhým momentem v míře P, tedy

$$L_2(\mathrm{P}) = \left\{ f : \int |f|^2 \, \mathrm{dP} < +\infty \right\}.$$

Definice 1.4.3 *Řekneme, že σ-algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ je* **invariantní** *vůči zobrazení T, jestliže $\mathcal{M} \subset T^{-1}\mathcal{M}$.*

Teď se již dostáváme k reprezentaci stacionární posloupnosti v pojmech ergodické teorie. Budeme-li uvažovat funkci $f \in L_2(\mathrm{P})$ a míru zachovávající zobrazení T, potom $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{N}}$ je striktně stacionární posloupnost. Naopak také platí, jak je ukázáno viz např. (Kallenberg, 1997, L 9.1), že pro každou stacionární posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s konečnými druhými momenty existuje $f \in L_2(\mathrm{P})$ a nějaké zobrazení T zachovávající míru takové, že posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ můžeme zapsat jako $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{N}}$ (rovnost platí v rozdělení).

Nadále si označme $\mathcal{M}$ nějakou σ-algebru invariantní vůči zobrazení T. Prostor všech funkcí, které patří do $L_2(\mathrm{P})$ a zároveň jsou $T^{-i}\mathcal{M}$-měřitelné, budeme značit H_i. Poznamenejme, že díky invariantnosti σ-algebry $\mathcal{M}$ platí $H_i \subset H_{i+1}$ pro všechna $i \in \mathbb{Z}$. Dále označme $H_{-\infty} = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} H_i$ a $H_{+\infty} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} H_i$.

Budeme uvažovat fixní míru zachovávající zobrazení T a σ-algebru $\mathcal{M}$, pro kterou není prostor $H_0 \ominus H_{-1}$ prázdný.

Dále si označme P_i ortogonální projekci z prostoru $L_2(\mathrm{P})$ na prostor $H_i \ominus H_{i-1}$, tedy

$$P_i f = \mathrm{E}(f|T^{-i}\mathcal{M}) - \mathrm{E}(f|T^{-i+1}\mathcal{M}).$$

Tím dostáváme systém projekcí $(P_i, i \in \mathbb{Z})$ (generovaných σ-algebrou $\mathcal{M}$).

Definice 1.4.4 *Definujme následující operátor U na prostoru $L_2(\mathrm{P})$:*

$$Uf := f \circ T.$$

Nejprve uvedeme pár základních tvrzení, jejichž důkazy vycházejí přímo z výše uvedených definic.

Lemma 1.4.5 *Pro všechny funkce $f \in L_2(\mathrm{P})$ a všechny σ-algebry $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ platí:*

$$\mathrm{E}(f|\mathcal{C}) \circ T = \mathrm{E}(f \circ T|T^{-1}\mathcal{C}).$$

V ostatních částech práce používáme k posloupnosti náhodných veličin posloupnost σ-algeber značených $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Tyto σ-algebry zde zvolíme následovně:

$$\mathcal{F}_i := T^{-i}\mathcal{M}. \tag{1.6}$$

Speciálně tedy máme $\mathcal{F}_0 = \mathcal{M}$. Další tvrzení již využívá toto značení.

Tvrzení 1.4.6 *Platí následující vztahy:*

- $\mathrm{E}(f|\mathcal{F}_0) = \sum_{i=-\infty}^{0} P_i f$ *(řada konverguje v $L_2(\mathrm{P})$),*
- $\mathrm{E}(U^i f|\mathcal{F}_0) = U^i \mathrm{E}(f|\mathcal{F}_{-i})$,
- $UP_i f = P_{i+1} Uf$,
- $P_i f = U^i P_0 U^{-i} f$.

V různých aplikacích chceme ověřit, zda posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ splňuje centrální limitní větu či princip invariance. Nejprve si označme:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{a} \quad \sigma_n^2 := \mathrm{E}S_n^2.$$

Chceme-li ověřit, zda posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ splňuje centrální limitní větu nebo princip invariance, potom hledáme podmínky, za kterých

$$\left(\frac{S_n}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konverguje v distribuci k mixovanému normálnímu rozdělení (řekneme, že **posloupnost** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **splňuje centrální limitní větu**) anebo dokonce

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{s_n}, t\in[0,1]\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{1.7}$$

konverguje v distribuci k mixované Wienerově míře na prostoru $D([0,1])$ (**proces** $(S_n(t), t\in[0,1])_{n\in\mathbb{N}}$ **splňuje princip invariance**) pro nějakou posloupnost kladných konstant $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Nebo proces vzniklý lineární interpolací procesu $\left(\frac{S_i}{s_n}\right)_{i=0}^{n}$ konverguje v distribuci k mixované Wienerově míře na prostoru $C([0,1])$.)

Podmínky pro centrální limitní větu a princip invariance stacionárních posloupností také vycházejí z tzv. mixing podmínek, podrobněji viz např. (Yoshihara, 1992, chap. 8), (Doukhan, 1994, § 1.5). Těmi se my ale v této práci zabývat nebudeme a budeme se věnovat pouze metodám založených na martingalových aproximacích. To znamená, bude nás zajímat, za jakých podmínek lze posloupnost částečných součtů aproximovat martingalem, a kdy tento martingal konverguje a zbytek, který tvoří rozdíl mezi posloupností a aproximujícím martingalem je zanedbatelný tak, abychom mohli říci, že posloupnost splňuje centrální limitní větu nebo dokonce princip invariance.

Nejprve tedy uveďme centrální limitní větu a princip invariance pro martingalové diference tak, jak je uvádějí Hall a Heyde v (Hall and Heyde, 1980, Th 3.2, Th 4.1).

Věta 1.4.7 (Centrální limitní věta pro martingalové diference) *Uvažujme martingalové pole* $(M_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1\le i\le k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *kde* $\mathrm{E}M_{ni}=0$ *a* $\mathrm{E}M_{ni}^2<+\infty$, *s diferencemi* D_{ni}. *Předpokládejme, že* η^2 *je s.j. konečná náhodná veličina a:*

(i) $\max_{1\le i\le k_n}|D_{ni}| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$,

(ii) $\sum_{i=1}^{k_n} D_{ni}^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta^2$,

(iii) $\mathrm{E}(\max_{1\le i\le k_n} D_{ni}^2)$ *je omezená v* n,

(iv) $\mathcal{F}_{ni}\subset\mathcal{F}_{(n+1)i}$ $\forall i: 1\le i\le k_n, \forall n:\ n\ge 1$.

Potom $M_{nk_n}=\sum_{i=1}^{k_n} D_{ni} \xrightarrow{\mathcal{D}-s} Z$, *kde* Z *je náhodná veličina s charakteristickou funkcí* $\mathrm{E}\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)$.

Věta 1.4.8 (Princip invariance pro martingalové diference) *Uvažujme martingal* $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s nulovou střední hodnotou, konečnými druhými momenty a diferencemi* $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$. *Označme* $U_n^2 := \sum_{i=1}^n D_i^2$ *a* $\sigma_n^2 := \mathrm{E}M_n^2$. *Dále označme* ξ_n *náhodný element* $C([0,1])$, *který získáme lineární interpolací následujících bodů:* $(0,0), (\frac{U_1^2}{U_n^2}, \frac{M_1}{U_1}), \ldots, (1, \frac{M_n}{U_n})$. *Potom, je-li splněna Lindebergova podmínka, tedy*

$$\text{pro všechna } \varepsilon > 0: \quad \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(D_i^2 \mathbb{I}_{(|D_i|>\varepsilon\sigma_n)}) \to 0$$

a pokud pro $n \to +\infty$ *platí:*

$$\frac{U_n}{\sigma_n^2} \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta^2,$$

kde η^2 *je s.j. kladná a konečná náhodná veličina, potom* $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ *v prostoru* $C([0,1])$, *kde* W *je Wienerův proces.*

Poznámka: Poznamenejme, že pokud bude ve výše citovaných větách náhodná veličina η rovna skoro jistě 1, potom se bude jednat o konvergenci k normálnímu normovanému rozdělení $N(0,1)$, resp. se bude jednat o klasický princip invariance. $\triangle$

Cílem tedy bude rozdělit posloupnost částečných součtů $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ na dvě posloupnosti $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je

$$S_i = M_i + R_i,$$

kde $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je martingal (a splňuje martingalovou centrální limitní větu, tj. větu 1.4.7, nebo dokonce funkcionální martingalovou limitní větu, větu 1.4.8) a $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je dostatečně malý zbytek. Pro přesnost si uveďme definici martingalové aproximace posloupnosti, jak ji uvádí Wu a Woodroofe v práci (Wu and Woodroofe, 2004, str. 2).

Definice 1.4.9 *Kolekci martingalových diferencí* $(D_{ni}, 1 \le i \le n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nebo martingal* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *kde* $M_n = \sum_{i=1}^n D_{ni}$, *nazýváme* ***martingalovou aproximací posloupnosti*** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *jestliže platí:*

$$\max_{k\le n} \mathrm{E}(S_k - M_{nk})^2 = o(\sigma_n^2),$$

kde $M_{nk} = \sum_{i=1}^k D_{ni}$.

Martingalová aproximace se nazývá ***stacionární***, *je-li pro všechna* n *posloupnost* $(D_{ni})_{i=1}^{k_n}$ *stacionární. A aproximaci nazveme* ***netrojúhelníkovou***, *pokud pro všechna* $i \in \mathbb{N}$ *platí:* $D_{ni} = D_i$, *tedy pokud martingalové diference nezávisí na* n.

Billingsley a Ibragimov, ((Billingsley, 1961), (Ibragimov, 1963)) dokázali, že pokud $f \in L_2(\mathrm{P})$ a $(f \circ T^i)$ je ergodická posloupnost martingalových diferencí, potom

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f \circ T^i \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Další výsledky, při opuštění podmínky, že se jedná o martingalové diference, dokázali také Gordin a Heyde. Shrnutí těchto výsledků je prezentováno v 5. kapitole knihy (Hall and Heyde, 1980), zobecnění těchto výsledků (s výslednou konvergencí stabilní) můžeme také najít v (Yoshihara, 1992, Th 8.3.2).

Poslední dobou se touto problematikou zabývají především články (Maxwell and Woodroofe, 2000), (Peligrad and Utev, 2005), (Volný, 2006), (Wu and Woodroofe, 2004), (Wu, 2006).

Wu a Woodroofe ve svém článku (Wu and Woodroofe, 2004) ukázali podmínky, za jakých lze stacionární posloupnost adaptovanou na filtraci $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aproximovat trojúhelníkovým schématem martingalových diferencí, za jakých podmínek existuje netrojúhelníková martingalová aproximace a jak lze v takovém případě vyjádřit druhé momenty posloupnosti $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ukazují také, za jakých podmínek platí princip invariance. Než zde uvedeme jejich výsledky, přesněji věty (Wu and Woodroofe, 2004, Th 1, L 1 a Cor 3), připomeňme definici pomalu se měnící funkce.

Definice 1.4.10 *Řekneme, že reálná funkce f je* ***pomalu se měnící*** *funkce, pokud pro všechny konstanty $c > 0$ platí:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1.$$

Věta 1.4.11 *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sigma_n)$.

(ii) Existuje stacionární martingalová aproximace posloupnosti $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Existuje netrojúhelníková martingalová aproximace posloupnosti $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 1.4.12 *Jestliže*

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sigma_n)$$

pro $n \to +\infty$, potom existuje pomalu se měnící funkce l taková, že platí $\sigma_n^2 = nl(n)$.

Věta 1.4.13 *Má-li posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konečné p-té momenty pro nějaké $p > 2$ a jestliže pro nějaké $q \geq 2$ platí:*

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n),$$

potom posloupnost $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ splňuje princip invariance.

Volný ve své práci (Volný, 2006) rozšířil výsledky Wu a Woodroofea pro neadaptované stacionární posloupnosti (tj. pro případ, kdy σ-algebry $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jsou obecné, nejsou generované posloupností a posloupnost vůči nim nemusí být měřitelná). Ukázal, že martingalová aproximace neadaptované posloupnosti existuje, jestliže

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sigma_n) \quad \text{a} \quad ||S_n - \mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_n)||_2 = o(\sigma_n).$$

Navíc také ukázal, že za těchto podmínek existuje nějaká pomalu se měnící funkce l, pro kterou platí: $\sigma_n^2 = nl(n)$.

Volný si pro práci s neadaptovanými posloupnostmi rozdělil každou náhodnou veličinu X_i následujícím způsobem:

$$X_i = X_i^{'} + X_i^{''},$$

kde

$$\begin{aligned} X_i^{'} &= \mathrm{E}(X_i|\mathcal{F}_i) \\ X_i^{''} &= X_i - \mathrm{E}(X_i|\mathcal{F}_i). \end{aligned}$$

Pro jednoduchost značení ještě zavedl operátory R_k a Q_k následujícím způsobem:

$$Q_k(X) := \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_k) \tag{1.8}$$

$$R_k(X) := X - \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_k). \tag{1.9}$$

Tím všechny náhodné veličiny rozdělil na dvě části, z nichž jedna $(X^{'})$ je adaptovaná a druhá $(X^{''})$ nikoliv. Potom zavedl operátor V, který definuje následovně (pro regulární f, tj. $\mathrm{E}(f|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ a $\mathrm{E}(f|\mathcal{F}_{+\infty}) = f$), viz (Volný, 2006),

$$Vf := \sum_{i\in\mathbb{Z}} U^{-i} P_0 U^{-i} f. \tag{1.10}$$

Použitím tohoto operátoru na neadaptované veličiny $X^{''}$ převede tyto veličiny na veličiny adaptované.

V práci (Klicnarová and Volný, 2007), zde v části 3.4.2 je ukázáno, že neadaptovaná stacionární posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, pro kterou platí $\mathrm{E}X_k^p < +\infty$ pro nějaké $p > 2$ a zároveň splňuje

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n) \quad \text{a} \quad ||S_n - \mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_n)||_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n)$$

pro nějaké $q \geq 2$, splňuje princip invariance.

Peligradová s Utevem v (Peligrad and Utev, 2005) nacházejí slabší podmínky pro princip invariance adaptovaných posloupností a využívají k tomu zobecněnou Doobovu nerovnost. Dokázali následující princip invariance (Peligrad and Utev, 2005, Th 1.1) a Doobovu nerovnost (Peligrad and Utev, 2005, Prop 2.3).

Věta 1.4.14 *Předpokládejme, že*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2}{n^{3/2}} < +\infty. \tag{1.11}$$

Potom $\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{\eta}W(t)$*, kde* η *je nezáporná náhodná veličina s konečným momentem* $\mathrm{E}\eta = \frac{\sigma^2}{n}$ *a je nezávislá s Wienerovým procesem* $(W(t))_{t\geq 0}$*. Náhodná veličina* η *je následující* L_1*-limita:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(S_n^2|\mathcal{I})}{n} = \eta,$$

kde $\mathcal{I}$ *je* σ*-algebra invariantních množin.*

Tvrzení 1.4.15 (Doobova nerovnost) *Nechť* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *je stacionární posloupnost náhodných veličin. Nechť* n, r *jsou přirozená čísla taková, že* $2^{r-1} < n \leq 2^r$*. Potom platí*

$$\mathrm{E}(\max_{1\leq k\leq n} S_k^2) \leq n(2||X_1||_2 + (1+\sqrt{2})\Delta_r)^2,$$

kde

$$\Delta_r := \sum_{j=0}^{r-1} \left|\left| \frac{\mathrm{E}(S_{2^j}|\mathcal{F}_0)}{2^{j/2}} \right|\right|.$$

Peligradová a Utev v těchto větách používají normalizační konstanty $n^{3/2}$, my v této práci ukážeme, jak lze jejich Doobovu nerovnost rozšířit tak, abychom mohli jako normalizační konstanty použít $\sigma_n \cdot n^{1/2}$. Tedy rozšíříme Doobovu nerovnost i pro posloupnosti s nelineárním růstem rozptylu. V článku (Klicnarová and Volný, 2007) je ukázáno, proč nelze využitím operátoru V snadno ukázat tento princip invariance také pro neadaptované náhodné veličiny. V článku (Machkouri et al., 2007) je dokázán princip invariance Peligradové a Uteva pro širší třídu procesů (i neadaptované) (s normalizační konstantou $n^{3/2}$), ale tato věta nezahrnuje tak širokou třídu neadaptovaných procesů, jak by se dalo očekávat (podmínky pro neadaptované procesy jsou mnohem silnější než pro adaptované verze).

Mnoho autorů studuje podmínky centrální limitní věty a principu invariance speciálně pro lineární procesy, tyto výsledky můžeme najít například v pracích (Wu and Min, 2005), (Peligrad and Utev, 2006), (Dedecker et al., 2006).

Kapitola 2

Konvergence procesů

V této kapitole nejprve připomeneme základní pojmy z teorie konvergence procesů obecně, a poté se budeme věnovat jednotlivým prostorům funkcí.

2.1 Základní pojmy

Dosud jsme uvažovali o slabé konvergenci na obecném topologickém prostoru $\mathcal{X}$. Dále se budeme zabývat slabou konvergencí na prostorech funkcí. Funkce budou mít parametry z indexové množiny T a budeme uvažovat následující prostory:

$(C(T), \rho_s)$	–	prostor omezených spojitých funkcí se supremální metrikou
$(D(T), d_S)$	–	prostor cadlag funkcí se Skorochodovou metrikou
$(l^{+\infty}(T), \rho_s)$	–	prostor omezených funkcí se supremální metrikou
$(R^T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^T))$	–	$\mathbb{R}^T$ s konvergencí po souřadnicích

Uvažujme proces $(X(\omega, t), t \in T, \omega \in \Omega)$, tj. $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$, kde T je indexová množina. Nás bude zajímat, kdy posloupnost procesů $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ nebo obecněji net procesů $(X_\alpha(t), t \in T)_{\alpha\in A}$ konverguje slabě k nějakému procesu $(X(t), t \in T)$ na některém z prostorů funkcí.

Konvergence procesu není totéž co konvergence konečně rozměrných marginálů, ta je v některých případech nutnou, nikoliv však postačující, podmínkou pro konvergenci celého procesu. Nejprve připomeňme definici slabé konvergence konečně rozměrných marginálů.

Definice 2.1.1 ***Konečně rozměrné marginály*** *procesů* $(X_\alpha(t), t \in T)_{\alpha\in A}$ ***konvergují v distribuci****, zn.* $X_\alpha \stackrel{fidi}{\to} X$*, pokud pro každou* $I \subset T$ *konečnou:*

$$(X_\alpha(t), t \in I) \stackrel{\mathcal{D}}{\to} (X(t), t \in I) \text{ v } (\mathbb{R}^I, \mathcal{G}(\mathbb{R}^I)).$$

Dále se budeme podrobněji věnovat jednotlivým prostorům funkcí. A ukážeme, co nám zaručuje konvergenci konečně rozměrných marginálů a jaké podmínky ještě musí být splněny, abychom mohli mluvit o konvergenci procesů.

Uvažujeme tedy slabou konvergenci procesů $(X_\alpha(t), t \in T)_{\alpha\in A}$ na některém z prostoru funkcí, označme si tento prostor $F(T)$, a ptáme se, zda z předpokladu slabé konvergence procesů $(X_\alpha(t), t \in T)_{\alpha\in A}$ obecně plyne slabá konvergence jednorozměrných marginálů těchto procesů, přesněji, zda pro všechna $t \in T$ net náhodných veličin $(X_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ konverguje slabě.

Připomeňme definici projekce. Projekcí Π_J, kde $J \subset T$ je konečná neprázdná, z prostoru $\mathbb{R}^T$ rozumíme zobrazení:

$$\begin{aligned}\Pi_J : \qquad \mathbb{R}^T &\to \mathbb{R}^J \\ (x_t, t \in T) &\mapsto (x_t, t \in J).\end{aligned}$$

Díky předpokladu slabé konvergence procesu víme, že pro všechny otevřené množiny G na prostoru $F(T)$ platí:

$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G).$$

A ptáme se, zda také pro všechny $\tilde{G}$ otevřené množiny na $\mathbb{R}$ platí podmínka slabé konvergence, tj

$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha(t) \in \tilde{G}) \geq \mathrm{P}(X(t) \in \tilde{G}).$$

Tato podmínka bude jistě splněna, pokud $\Pi_t^{-1}(\tilde{G})$ bude otevřená množina, nebo-li, pokud projekce Π_t bude spojité zobrazení. Projekce není obecně spojité zobrazení. Je spojité např. v prostorech $(l^{+\infty}(T), \rho_s)$, $(C(T), \rho_s)$.

Tvrzení 2.1.2 *Nechť $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ v nějakém prostoru $F(T)$, prostoru reálných funkcí na množině T, kde T je obecná indexová množina, ve kterém jsou konečné projekce spojitá zobrazení. Potom $X_\alpha \xrightarrow{fidi} X$.*

Důkaz: Je vlastně důsledkem věty o přenosu slabé konvergence spojitým zobrazením, viz věty 1.2.6 a 1.2.7.

Q.E.D.

2.2 Prostor $(\mathbb{R}^T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^T))$

Nejprve ukažme, že z předpokladu slabé konvergence konečně rozměrných marginálů procesů $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ vyplývá existence takového procesu X, že konečně rozměrné marginály procesů $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergují k odpovídajícím marginálům procesu X.

Věta 2.2.1 *Nechť pro každou konečnou podmnožinu $I \subset T$ existuje náhodná veličina X_I tak, že*

$$(X_\alpha(t), t \in I) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X_I(t), t \in I) \text{ v } (R^I, \mathcal{B}(\mathbb{R})^I).$$

Potom existuje proces $(X(t), t \in T)$ takový, že jeho konečně rozměrná rozdělení odpovídají příslušným rozdělením procesů $(X_I(t), t \in I)$ a $X_\alpha \xrightarrow{fidi} X$.

Důkaz: Systém $\mathcal{L}(X_\alpha(t), t \in I)$ je konzistentní pro všechna $\alpha \in A$, tedy také systém $\mathcal{L}(X(t), t \in I)$ je konzistentní, tudíž z Daniellovy-Kolmogorovovy věty (viz např. (Kallenberg, 1997, Th 5.16)) plyne existence procesu $(X(t), t \in T)$, který má odpovídající konečná rozdělení.

Q.E.D.

Poznámka: Obecně neplatí, že $\mathcal{B}(\mathbb{R})^I = \mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$, ale pro konečná a spočetná I tato rovnost platí.

$\triangle$

Tvrzení 2.2.2 *Pokud $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ v prostoru $(\mathbb{R}^T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^T))$, potom také $X_\alpha \xrightarrow{fidi} X$.*

Důkaz: $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ v $(\mathbb{R}^T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^T))$. Tedy pro každou otevřenou množinu $B \subset \mathbb{R}^T$ platí nerovnost z definice slabé konvergence. Nechť B_I je otevřená množina v $\mathbb{R}^I$, potom $\Pi_I^{-1} B_I$ je otevřená v $\mathbb{R}^T$. Tedy nerovnost z definice slabé konvergence je splněna pro každou otevřenou množinu, a tudíž konvergence je dokázána.

Q.E.D.

Definujme následující množinové systémy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \{\Pi_t^{-1} B; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in T\}, \\
\mathcal{B}_1 &= \{\Pi_I^{-1} B; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^I, I \subset T \text{ konečná}\}, \\
\mathcal{B}_\sigma &= \{\Pi_I^{-1} B; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^I, I \subset T \text{ nejvýše spočetná}\}.
\end{aligned}$$

Potom $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_\sigma$ a navíc $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T = \sigma(\mathcal{B}_0) = \sigma(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_\sigma$.

Pro otevřené množiny obdobně:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{\Pi_t^{-1} G; G \in \mathcal{G}(\mathbb{R}), t \in T\}, \\
\mathcal{G}_1 &= \{\Pi_I^{-1} G; G \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^I, I \subset T \text{ konečná}\}, \\
\mathcal{G}_\sigma &= \{\cup_{i \in \mathbb{N}} G_i; G_i \in \mathcal{G}_1 \ \forall i \in \mathbb{N}\}, \\
\mathcal{G}_\tau &= \{\cup_{\psi \in \Psi} G_\psi; G_\psi \in \mathcal{G}_1, \psi \in \Psi, \Psi \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Potom $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}(\mathbb{R}^T)$.

Tvrzení 2.2.3 *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Konečně rozměrná rozdělení procesů $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *konvergují slabě,* $X_\alpha \stackrel{fidi}{\to} X$.

(ii)
$$\forall G \in \mathcal{G}_1 : \liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G).$$

(iii)
$$\forall G \in \mathcal{G}_\sigma : \liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G).$$

Důkaz:
„(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ Zřejmé, pouze přepsaná definice konvergence v distribuci konečně rozměrných marginálů.
„(iii) $\Rightarrow$ (ii)“ Zřejmé, neboť $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_\sigma$.
„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Nechť $G \in \mathcal{G}_\sigma$: $G = \cup_{i=1}^{+\infty} G_i$, kde $G_i \in \mathcal{G}_1$ a tedy pro libovolné konečné $I \in \mathbb{N}$
$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in \cup_{i=1}^I G_i).$$
Protože $\cup_{i=1}^I G_i \in \mathcal{G}_1$, platí následující nerovnost
$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in \cup_{i=1}^I G_i) \geq \mathrm{P}(X \in \cup_{i=1}^I G_i).$$
Nerovnost platí pro všechna $I \in \mathbb{N}$ a P je pravděpodobnostní míra, tudíž
$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \sup_{I\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(X \in \cup_{i=1}^I G_i) = \mathrm{P}(X \in G).$$

Q.E.D.

Chceme-li získat konvergenci celého procesu $X_\alpha \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X$, potřebujeme nerovnost
$$\liminf_{\alpha\in A} \mathrm{P}_*(X_\alpha \in G) \geq \mathrm{P}(X \in G)$$
(nebo jiný ekvivalentní vztah) pro všechna $G \in \mathcal{G}_\tau$.

Nechť $G \in \mathcal{G}_1$, potom existuje konečná $J \subset T$ taková, že $G = \Pi_J^{-1} Q$, kde $Q \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^J)$. Tedy $\Pi_J^{-1}(\mathbb{R}^T \backslash Q) = \mathbb{R}^T \backslash G$. Potom můžeme psát:
$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \mathbb{R}^T\backslash G) &= \limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \Pi_J^{-1}(\mathbb{R}^J\backslash Q)) \\
&= \limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \Pi_J^{-1}\Pi_J(\mathbb{R}^T\backslash G)) \\
&\leq \mathrm{P}(X \in \Pi_J^{-1}\Pi_J(\mathbb{R}^T\backslash G)) \\
&= \inf_{I: I\subset T, \text{ kon.}} \mathrm{P}(X \in \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G))
\end{aligned}$$

Podobného postupu chceme využít i pro kolekci $\mathcal{G}_\tau$, pro tuto kolekci platí následující tvrzení.

Tvrzení 2.2.4 *Nechť $G \in \mathcal{G}_\tau$, potom*

$$\limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \mathbb{R}^T \backslash G) \le \inf_{I: I\subset T,\ kon.} \mathrm{P}(X \in \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)).$$

Důkaz: Nechť $G \in \mathcal{G}_\tau$, potom

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \mathbb{R}^T\backslash G) &\le \limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*(X_\alpha \in \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)) \\
&\le \limsup_{\alpha\in A} \mathrm{P}^*\left((X_\alpha(t), t\in I) \in \Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)\right) \\
&\le \mathrm{P}\left((X(t), t\in I) \in \Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)\right) \\
&= \mathrm{P}(X \in \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)).
\end{aligned}$$

Nerovnost platí pro všechna $I \subset T$ konečné tudíž i pro infimum přes všechna taková I.

Q.E.D.

Ovšem zdaleka ne pro všechny množiny $G \in \mathcal{G}_\tau$ platí následující rovnost:

$$\inf_{I: I\subset T,\ \mathrm{kon.}} \mathrm{P}(X \in \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G)) = \mathrm{P}(X \in \mathbb{R}^T\backslash G). \tag{2.1}$$

Bude-li platit tato rovnost pro všechny množiny $G \in \mathcal{G}_\tau$, potom dostaneme slabou konvergenci procesu. Chceme tedy vědět, za jakých podmínek platí pro všechny množiny $G \in G_\tau$ rovnost (2.1).

Protože

$$\mathbb{R}^T\backslash G = \cap_{I: I\subset T,\ \mathrm{kon.}} \Pi_I^{-1}\Pi_I(\mathbb{R}^T\backslash G),$$

potřebujeme, aby míra P byla τ-aditivní.

Připomeňme definici τ-aditivity, viz např. (Fremlin, 2005, Def 411C).

Definice 2.2.5 *Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\mathcal{X}$ je topologický prostor, potom řekneme, že míra μ je na tomto prostoru τ-**aditivní**, jestliže pro každou neprázdnou nahoru usměrněnou kolekci $\mathcal{G} = \{G_i, i \in I\}$ otevřených množin takových, že $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ a $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{A}$, platí*

$$\mu(\bigcup_{i\in I} G_i) = \sup_{G\in\mathcal{G}} \mu(G).$$

A můžeme formulovat následující větu.

Věta 2.2.6 *Je-li rozdělení $\mathcal{L}(X)$ τ-aditivní na $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{G}(\mathbb{R}^T)))$, potom*

$$X_\alpha \xrightarrow{fidi} X \Longleftrightarrow X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X \ v\ (\mathbb{R}^T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^T)).$$

2.3 Prostor $l^{+\infty}(T)$

V této kapitole se budeme zabývat slabou konvergencí náhodných elementů (obecně nebudeme požadovat měřitelnost), které jsou prvky prostoru $l^{+\infty}(T)$. Množina T je obecná indexová množina a prostor $l^{+\infty}(T)$ je prostor všech reálných omezených funkcí na T vybavený supremální metrikou generovanou supremální normou, tj.

$$\rho_s(x, y) = ||x - y|| = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|. \tag{2.2}$$

Slabou konvergencí na prostoru omezených funkcí se mimo jiné podrobně zabývá např. (van der Vaart and Wellner, 1996, chap. 1.5).

Jak jsme již ukázali výše, viz tvrzení 2.1.2, ke konvergenci procesu potřebujeme konvergenci konečně rozměrných marginálů. A otázkou je, co ještě je zapotřebí, abychom získali konvergenci celého procesu. Je známo, že potřebujeme relativní kompaktnost, což nám společně s konvergencí konečně rozměrných marginálů již stačí.

Připomeňme následující definice, které budeme dále potřebovat.

Definice 2.3.1 *Borelovská pravděpodobnostní míra μ je **těsná**, jestliže pro každé kladné ε existuje kompaktní množina K taková, že $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$.*

*Borelovská náhodná veličina $X : \Omega \to D$, kde D je obecný metrický prostor, je **těsná**, je-li její rozdělení $\mathcal{L}(X)$ těsné.*

Definice 2.3.2 *Řekneme, že net náhodných elementů $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ s hodnotami v obecném metrickém prostoru (D, d) je **relativně kompaktní**, pokud každý jeho podnet má podnet konvergující k těsné borelovské náhodné veličině.*

Definice 2.3.3 *Net náhodných elementů $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ s hodnotami v obecném metrickém prostoru (D, d) je **asymptoticky měřitelný**, pokud*

$$E^* f(X_\alpha) - E_* f(X_\alpha) \to 0, \ \ \forall f \in C(D).$$

Definice 2.3.4 *Net náhodných elementů $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ s hodnotami v obecném metrickém prostoru (D, d) je **asymptoticky těsný**, pokud pro všechna kladná ε existuje kompaktní množina K taková, že*

$$\liminf_{\alpha \in A} P_*(X_\alpha \in K^\delta) \geq 1 - \varepsilon \ \ \forall \delta > 0,$$

kde $K^\delta = \{y \in D : d(y, K) < \delta\}$.

Připomeňme základní lemmata, vztahující se k právě uvedeným definicím 2.3.3 a 2.3.4. Následující lemma viz (van der Vaart and Wellner, 1996, L 1.3.8).

Lemma 2.3.5 *(i) Jestliže $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, potom je net $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ asymptoticky měřitelný.*

(ii) *Pokud $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, potom net $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ je asymptoticky těsný tehdy a jen tehdy, pokud X je těsný.*

Ještě připomeňme lemma, viz (van der Vaart and Wellner, 1996, L 1.5.3), ze kterého vyplývá, že relativní kompaktnost společně s konvergencí konečně rozměrných marginálů nám postačuje pro slabou konvergenci celého procesu.

Lemma 2.3.6 *Nechť X a Y jsou těsné borelovsky měřitelné náhodné veličiny s hodnotami v prostoru $l^{+\infty}(T)$. Potom X a Y jsou si v borelovském rozdělení rovny, pokud všechny odpovídající marginály si jsou rovny v rozdělení.*

Pro ověření relativní kompaktnosti se využívá Prochorovova věta, viz např. (van der Vaart and Wellner, 1996, Th 1.3.9).

Věta 2.3.7 (Prochorovova) (i) *Buď $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ asymptoticky těsný a asymptoticky měřitelný net, potom existuje podnet $(X_{\alpha(\beta)})_{\beta\in B}$, který konverguje v distribuci k těsnému borelovskému rozdělení.*

(ii) *Pokud posloupnost $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je asymptoticky těsná a asymptoticky měřitelná, potom existuje podposloupnost $(X_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, která konverguje k těsnému borelovskému rozdělení.*

Budeme-li chtít ukázat konvergenci procesů, potom potřebujeme ukázat konvergenci konečně rozměrných marginálů, asymptotickou těsnost a asymptotickou měřitelnost. Ověření asymptotické měřitelnosti nám usnadní lemma, opět z (van der Vaart and Wellner, 1996, L 1.5.2):

Lemma 2.3.8 *Nechť net $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ zobrazení $X_\alpha : \Omega_\alpha \to l^{+\infty}(T)$ je asymptoticky těsný net. Potom je také asymptoticky měřitelný tehdy a jen tehdy, pokud pro všechna $t \in T$ je net $(X_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ asymptoticky měřitelný.*

Důsledkem těchto lemmat je následující věta, (van der Vaart and Wellner, 1996, Th 1.5.4):

Věta 2.3.9 *Nechť $X_\alpha : \Omega_\alpha \to l^{+\infty}(T)$ jsou obecná zobrazení. Potom net $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ konverguje k těsné limitě X tehdy a jen tehdy, pokud je net $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ asymptoticky těsný a všechny konečně rozměrné marginály konvergují slabě. Jestliže je net $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ asymptoticky těsný, a jeho marginály konvergují slabě k marginálům procesu X, potom existuje verze $\bar{X}$ procesu X se stejnoměrně omezenými trajektoriemi taková, že $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} \bar{X}$.*

Dále ještě připomeňme definice a vztahy, které se užívají k ověření asymptotické těsnosti, opět z (van der Vaart and Wellner, 1996, Def 1.5.5., Th 1.5.6 a Th 1.5.7).

Definice 2.3.10 *Procesy $(X_\alpha(t), t \in T)_{\alpha \in A}$ mají* ***asymptoticky stejně stejnoměrně spojité trajektorie****, pokud pro všechna kladná ε a η existuje konečný rozklad indexové množiny T: $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ takový, že*

$$\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^* \left(\sup_{i \in \{1,2,\dots,k\}} \sup_{s,t \in T_i} |X_\alpha(s) - X_\alpha(t)| > \varepsilon \right) < \eta. \tag{2.3}$$

Věta 2.3.11 *Net $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$, kde $X_\alpha : \Omega_\alpha \to l^{+\infty}(T)$, je asymptoticky těsný tehdy a jen tehdy, pokud pro všechna $t \in T$ jsou nety $(X_\alpha(t))_{\alpha \in A}$ asymptoticky těsné v $\mathbb{R}$ a zároveň pro všechna kladná ε a η existuje konečný rozklad T: $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ takový, že platí (2.3).*

Definice 2.3.12 *Nechť ρ je nějaká pseudometrika na T. Potom řekneme, že net $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ je* ***asymptoticky stejnoměrně ρ-ekvispojitý v pravděpodobnosti****, jestliže pro všechna kladná ε a η existuje kladné δ takové, že:*

$$\limsup_{\alpha \in A} \mathrm{P}^* \left(\sup_{\rho(s,t) < \delta} |X_\alpha(s) - X_\alpha(t)| > \varepsilon \right) < \eta. \tag{2.4}$$

Poznámka: Připomeňme, že pseudometrikou rozumíme zobecněnou metriku. Definice pseudometriky se od definice metriky liší pouze tím, že nepožadujeme $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$, ale pouze $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

$\triangle$

Věta 2.3.13 *Net $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ je asymptoticky těsný tehdy a jen tehdy, pokud net jednorozměrných marginálů $(X_\alpha(t))_{\alpha \in A}$ je asymptoticky těsný pro každé $t \in T$ a pokud existuje pseudometrika ρ na T taková, že (T, ρ) je totálně omezený a $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ je asymptoticky stejnoměrně ρ-ekvispojitý v pravděpodobnosti.*

Navíc, nechť ρ je libovolná pseudometrika, pro kterou platí (2.4) a prostor (T, ρ) je totálně omezený. Nechť $X_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, potom skoro všechny trajektorie $t \to X(t, \omega)$ jsou stejnoměrně ρ-ekvispojité v pravděpodobnosti.

2.4 Prostor $C(T)$

V této části se budeme zabývat konvergencí procesů, s trajektoriemi v prostoru $(C(T), \rho_s)$, což je prostor spojitých funkcí opatřený supremální metrikou generovanou supremální normou, tj.

$$\rho_s(x, y) = ||x - y|| = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|.$$

Je tedy zřejmé, že se jedná o podprostor prostoru $(l^{+\infty}(T), \rho_s)$. A protože se jedná o podprostor spojitých funkcí, budou teď náhodné procesy měřitelné.

Slabá konvergence na prostoru $C([0,1])$ je studována např. v (Billingsley, 1968, chap 2), na prostoru $C(\mathbb{R}^m)$ např. v (Yoshihara, 1992, § 2.4.1).

Je-li T kompaktní metrický prostor, potom prostor $(C(T), \rho_s)$ je separabilní a úplný. Díky tomu na tomto prostoru platí v Prochorovově větě ekvivalence, viz např. (Billingsley, 1968, Th 6.1 a Th 6.2):

Věta 2.4.1 *Je-li kolekce měr na metrickém prostoru těsná, potom je i relativně kompaktní. Opačná implikace platí, je-li metrický prostor separabilní a úplný.*

A tedy je opět vidět, že stačí ověřovat těsnost kolekce měr, k čemuž se používá např. modul spojitosti, podrobněji viz (Billingsley, 1968, chap 2) nebo (Yoshihara, 1992, § 2.4.1).

2.5 Prostor $D(T)$

Tzv. Skorochodův prostor je důležitý především při studiu empirických procesů. Nejznámější a zřejmě nejpoužívanější jsou prostory $D([0,1])$ a $D(\mathbb{R})$ vybavené Skorochodovou metrikou d_S, prostory tzv. cadlag funkcí, reálných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$, resp. na $\mathbb{R}$, které jsou zprava spojité a zleva mají limitu. Na tomto prostoru navrhl Skorochod vhodnou topologii, která se označuje po něm, Skorochodova. Podrobněji o prostorech $D([0,1]), D(\mathbb{R})$ a $D(\mathbb{R}^m)$ viz např. (Billingsley, 1968, chap 3) a (Yoshihara, 1992, § 2.4.2). Straf ve své disertační práci v roce 1969 zobecnil tuto topologii i pro prostory funkcí, které obecně nenabývají reálných hodnot. Právě z jeho práce, viz (Straf, 1970), vychází tato část. Dále se zobecněným prostorem $D(T)$ zabývají například práce: (Bickel and Wichura, 1971) a (Neuhaus, 1971).

Později, viz např. (Jakubowski, 1997b), (Jakubowski, 1997a), byly na prostoru $D(T)$ ještě definovány jiné topologie než Skorochodova. Např. právě Jakubowski pracuje na prostoru $D(T)$ se sekvenciální topologií S, která není metrizovatelná, je slabší než Skorochodova topologie a relativně kompaktní množiny v této topologii jsou charakterizovány dvěmi podmínkami (omezenost procesů a stejnoměrně omezený počet přeskoků). A zavádí topologii na $\mathcal{P}(D,S)$, která je jemnější než slabá topologie, ale na rozdíl od slabé topologie, v této topologii platí na tomto prostoru Prochorovova věta jako ekvivalence (bez nutnosti úplnosti prostoru). My se více touto problematikou zabývat nebudeme.

Nejprve připomeňme základní pojmy a postupy, kterých se používá při budování zobecněného Skorochodova prostoru. Označme Λ nějakou kolekci bijekcí prostoru T na T, tedy $\Lambda \subset \{f, f : T \to T, \text{ bijekce}\}$. Dále předpokládejme, že Λ má strukturu grupy, ozn. $(\Lambda, \circ, 1_T, ||\cdot||_\Lambda)$, kde $\circ$ značí skládání a 1_T identitu a norma má následující vlastnosti:

$$||\lambda||_\Lambda \geq 0 \ \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\begin{aligned}&||\lambda||_\Lambda = 0 \;\Leftrightarrow \lambda = \mathbf{1}_T\\&||\lambda\circ\mu||_\Lambda \le ||\lambda||_\Lambda + ||\mu||_\Lambda\\&||\lambda^{-1}||_\Lambda = ||\lambda||_\Lambda\end{aligned}$$

Na Λ definujme metriku následujícím způsobem:

$$d_\Lambda(\lambda,\mu) = ||\lambda^{-1}\circ\mu||_\Lambda.$$

Dále uvažujme kolekci $\mathcal{D}$ konečných rozkladů množiny T, tedy

$$\mathcal{D} \subset \{\{T_i\}_{i\in I}, I\subset\mathbb{N} \text{ konečná}, T = \bigcup_{i\in I} T_i, T_i \text{ disj. pro } i\in I\}.$$

Předpokládejme, že kolekce $\mathcal{D}$ je usměrněná „zjemněním“ a zároveň je uzavřená na „zjemnění“. Jednotlivé prvky kolekce $\mathcal{D}$, tedy jednotlivé rozklady prostoru T označme Δ.

Příklad: $T = \mathbb{R}^+$, potom jako příklad kolekce $\mathcal{D}$, která je usměrněná zjemněním a zároveň uzavřená na zjemnění můžeme brát kolekci všech Δ takových, že

$$\Delta\in\mathcal{D} \;\Leftrightarrow\; \Delta = \{[0,t_1),[t_2,t_3),\cdots[t_k,+\infty)\}, \text{ kde } 0<t_1<t_2<\cdots<t_k<+\infty.$$

$\triangle$

Příklad: $T = [0,1]$, $\Lambda = \{\lambda : [0,1]\to[0,1],\ \text{bijekce, rostoucí}\}$,
$\Lambda = \{\lambda : [0,1]\to[0,1],\ \text{bijekce, diferencovatelné},\ \lambda(0)=0\}$,
$||\lambda|| = \sup_{t\in[0,1]}|\lambda(t)-t|$.

$\triangle$

Dále při konstrukci Skorochodova prostoru požadujeme, aby kolekce bijekcí Λ byla taková, aby pro všechna $\lambda\in\Lambda$ platilo

$$\Delta\in\mathcal{D} \;\Leftrightarrow\; \lambda(\Delta) = \{\lambda(T_i), T_i\in\Delta\}\in\mathcal{D}.$$

Buď $\mathcal{J}(T,\Delta)$ kolekce všech funkcí, které jsou Δ-měřitelné, $\Delta\in\mathcal{D}$, tj. funkcí konstantních na T_i pro každé $i\in I$, $T_i\in\Delta$, tedy jednoduchých funkcí.

A $\mathcal{J}(T,\mathcal{D})$ označme

$$\mathcal{J}(T,\mathcal{D}) := \cup_{\Delta\in\mathcal{D}}\mathcal{J}(T,\Delta),$$

jedná se tedy opět pouze o jednoduché funkce.

Potom, díky požadavku na kolekci Λ, platí, pokud $f\in\mathcal{J}(T,\mathcal{D})$ a $\lambda\in\Lambda$, potom také $f\circ\lambda\in\mathcal{J}(T,\mathcal{D})$. Označme $D(T)$ uzávěr kolekce $J(T,\mathcal{D})$ v prostoru $l^{+\infty}(T)$ vůči supremální metrice, tj.:

$$D(T) = \{x\in l^{+\infty}(T), \exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{J}(T,\mathcal{D}) : ||y_n - x||\to 0\}.$$

A definujme pseudometriku na $D(T)$:

$$f, g \in D(T): \quad d_S(f,g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\{||f - g \circ \lambda||, ||\lambda||_\Lambda\}. \tag{2.5}$$

Potom $(D(T), d_S)$ (zobecněný Skorochodův prostor) je pseudometrický prostor na němž platí následující věta, viz (Straf, 1970, Th 3.7).

Věta 2.5.1 *Je-li prostor (Λ, d_Λ) úplný, potom prostor $(D(T), d_S)$ je také úplný.*

Důkaz: Viz (Straf, 1970, Th 3.7). *Q.E.D.*

Podívejme se, jaké normy se užívají na kolekci Λ. Uvažujme kompaktní metrický prostor (T, ρ). Potom se nejčastěji užívají následující normy na Λ:

$$||\lambda||_s = \sup_{t \in T} \rho(\lambda t, t), \tag{2.6}$$

$$||\lambda||_l = \sup_{s,t \in T,\ s \neq t} \left| \log \frac{\rho(\lambda t, \lambda s)}{\rho(t,s)} \right|, \tag{2.7}$$

$$||\lambda||_m = ||\lambda||_s + ||\lambda||_l. \tag{2.8}$$

Norma $||\lambda||_l$ se většinou omezuje na $\Lambda_l = \{\lambda \in \Lambda : ||\lambda||_l < +\infty\}$. Potom $(\Lambda_l, ||\cdot||_l)$ je úplný prostor.

Abychom mohli charakterizovat prvky prostoru $D(T)$, definujme, podobně jako je to obvyklé na prostorech $C(T)$ a $D([0,1])$, tzv. modul spojitosti funkce. Nechť $f \in l^{+\infty}(T)$, $\Delta \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$, potom **modul spojitosti** funkce f je definován následovně:

$$w(f, \Delta, \varepsilon) := \inf_{\lambda \in \Lambda, ||\lambda||_\Lambda < \varepsilon} \max_{T_i \in \Delta} \sup_{s,t \in \lambda(T_i)} |f(t) - f(s)|.$$

Teď již můžeme charakterizovat prvky prostoru $D(T)$, viz (Straf, 1970, Th 3.5).

Věta 2.5.2 *Mějme omezenou funkci f na prostoru T, tj. $f \in l^{+\infty}(T)$. Tato funkce patří do zobecněného Skorochodova prostoru, $f \in D(T)$, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ je*

$$\lim_{\Delta \in \mathcal{D}} w(f, \Delta, \varepsilon) = 0.$$

Ke slabé konvergenci na prostoru $D(T)$ potřebujeme ještě zmínit následující tvrzení, viz (Straf, 1970, Th 3.11, Th 3.12).

Věta 2.5.3 *Je-li $(D(T), d_S)$ úplný a $A \subset D(T)$, potom A je relativně kompaktní tehdy a jen tehdy, jestliže*

$$(i) \quad \sup_{f \in A} ||f|| < +\infty, \tag{2.9}$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \lim_{\Delta \in \mathcal{D}} \sup_{f \in A} w(f, \Delta, \varepsilon) = 0. \tag{2.10}$$

Věta 2.5.4 *Prostor $(D(T), d_S)$ je separabilní tehdy a jen tehdy, pokud existuje posloupnost $\Delta_k \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že*

$$f \in D(T) \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} w(f, \Delta_k, \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Kapitola 3

Výsledky

3.1 Konvergence suprema náhodných procesů

V této části se budeme zabývat následujícím problémem. Budeme předpokládat, že posloupnost náhodných procesů $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$, kde (T, ρ) je obecný kompaktní metrický prostor, konverguje slabě k nějakému náhodnému procesu $(X(t), t \in T)$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Položíme

$$Y_n(A) := \sup_{t\in A} X_n(t).$$

A budeme studovat pro jaké kolekce množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$, posloupnost náhodných procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})$ konverguje slabě.

Tyto výsledky byly publikovány v (Husová, 2004) a (Husová, 2005a).

Zaveďme tedy funkcionál Ψ, který pro reálnou funkci x na prostoru T definujeme následovně:

$$\Psi(x)(A) := \sup_{t\in A} x(t), \ \ A \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Dále pro funkce y z prostoru $l^{+\infty}(\mathcal{A})$, prostoru reálných omezených funkcí na kolekci $\mathcal{A}$, definujme supremální normu $||\cdot||^{\mathcal{A}}$

$$||y||^{\mathcal{A}} := \sup_{A\in\mathcal{A}} |y(A)|$$

a metriku generovanou touto normou:

$$\rho_s^{\mathcal{A}}(y_1, y_2) := ||y_1 - y_2||^{\mathcal{A}}. \tag{3.2}$$

Postupně se podívejme, jaké výsledky pro konvergenci těchto supremálních procesů můžeme získat pro různé prostory funkcí, na nichž je původní konvergence.

3.1.1 Prostor $C(T)$

Uvažujme náhodné procesy $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ jako prvky prostoru $(C(T), \rho_s)$, kde $C(T)$ je prostor omezených reálných spojitých funkcí na T a tento prostor je opatřen supremální metrikou.

Nejprve se podívejme na to, v jakém prostoru jsou v tomto případě zkoumané procesy $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})$. Náhodné procesy $(X_n(t), t \in T), (X(t), t \in T)$ jsou omezené, a tedy i náhodné procesy $(Y_n(A), A \in \mathcal{A}), (Y(A), A \in \mathcal{A})$ jsou omezené, neboť pro všechny prvky $x \in C(T)$ můžeme psát:

$$||\Psi(x)||^{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} |\Psi(x)(A)| = \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sup_{t\in A} |x(t)|| \leq ||x||.$$

Obecně tedy můžeme uvažovat o prostoru $l^{+\infty}(\mathcal{A})$, prostoru reálných omezených funkcí na $\mathcal{A}$ se supremální metrikou generovanou supremální normou, zn. $\rho_s^{\mathcal{A}}$, viz (3.2).

Aby bylo smysluplné uvažovat o konvergenci posloupnosti náhodných procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$, je nejprve zapotřebí mít konvergenci konečně rozměrných marginálů těchto procesů.

K ověření této podmínky lze použít následující tvrzení.

Tvrzení 3.1.1 *Je-li*

$$\Psi : C(T) \to \mathsf{S},$$

kde Ψ je definováno v (3.1) a S je separabilní podprostor prostoru $(l^{+\infty}(\mathcal{A}), \rho_s^{\mathcal{A}})$, potom je funkcionál Ψ spojitý.

Důkaz: Protože prostor S, podprostor prostoru $(l^{+\infty}(\mathcal{A}), \rho_s^{\mathcal{A}})$, předpokládáme separabilní vůči supremální metrice, stačí pro důkaz spojitosti ukázat, že vzor otevřených koulí jsou otevřené množiny. Přesněji tedy chceme ukázat, že pro všechna kladná ε a všechna $y \in \mathsf{S}$ jsou vzory koulí o poloměru ε a středu y, přesněji $\Psi^{-1}(B_\varepsilon(y))$, otevřené množiny. Označme

$$\Psi^{-1}(B_\varepsilon(y)) = \Psi^{-1}(\{z, \rho_s^{\mathcal{A}}(y,z) < \varepsilon\}) = \{u, \sup_{A\in\mathcal{A}} |y(A) - \sup_{t\in A} u(t)| < \varepsilon\} =: \mathsf{U}.$$

Množina U je otevřená, pokud pro každou funkci $u \in \mathsf{U}$ existuje kladné $\bar{\varepsilon}$ takové, že pro všechny funkce v patřící do $\bar{\varepsilon}$-okolí bodu u platí také $v \in \mathsf{U}$.

Nechť funkce $u \in \mathsf{U}$, pak jistě existuje kladné $\bar{\varepsilon}$ takové, že

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} |y(A) - \sup_{t\in A} u(t)| < \varepsilon - \bar{\varepsilon},$$

a tedy pro všechna $v \in B_{\bar{\varepsilon}}(u)$

$$|y(A) - \sup_{t\in A} v(t)| \leq |y(A) - \sup_{t\in A} u(t)| + ||u - v|| < \varepsilon,$$

platí pro všechna $A \in \mathcal{A}$, a tak dostáváme: $v \in \mathsf{U}$.

Q.E.D.

Teď zvolme konkrétní podprostor prostoru $l^{+\infty}(\mathcal{A})$, a to obraz prostoru spojitých funkcí, označme tento podprostor $C(\mathcal{A})$, přesněji:

$$C(\mathcal{A}) := \{y \in l^{+\infty}(\mathcal{A}) : \ \exists x \in C(T) : \ y = \Psi(x)\}. \tag{3.3}$$

Pro takto zvolený podprostor dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 3.1.2 *Obraz spojitých funkcí, prostor $(C(\mathcal{A}), \rho_s^{\mathcal{A}})$ (viz (3.3) a (3.2)), je separabilním podprostorem prostoru $(l^{+\infty}(\mathcal{A}), \rho_s^{\mathcal{A}})$.*

Důkaz: Prostor $C(T)$ spojitých funkcí na kompaktu je separabilní a platí:

$$\rho_s(x_1, x_2) \geq \rho_s^{\mathcal{A}}(\Psi(x_1), \Psi(x_2)),$$

kde Ψ je zobrazení definované v (3.1).

Odtud již plyne tvrzení. *Q.E.D.*

Na závěr této části můžeme formulovat větu.

Věta 3.1.3 *Nechť náhodné procesy $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ mají spojité trajektorie a navíc $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ v prostoru $C(T)$. Potom pro každou kolekci $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$ posloupnost procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})$, kde*

$$Y_n(A) := \Psi(X_n)(A),$$

konverguje v distribuci k procesu $(Y(A), A \in \mathcal{A})$, kde $Y(A) = \Psi(X)(A)$ v prostoru $(l^{+\infty}(\mathcal{A}), \rho_s^{\mathcal{A}})$.

Důkaz: Věta je důsledkem tvrzení 3.1.2 a 3.1.1.

Q.E.D.

3.1.2 Prostor $l^{+\infty}(T)$

V této části předpokládejme obecněji, že procesy $(X_n(t), t \in T)$ jsou prvky prostoru omezených funkcí na T, tj. $X_n \in l^{+\infty}(T)$. Prostor $l^{+\infty}(T)$ uvažujeme se supremální metrikou. Předpokládejme tedy, že v prostoru omezených funkcí se supremální metrikou posloupnost náhodných procesů $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje slabě k náhodnému procesu $(X(t), t \in T)$. Opět nás zajímá, pro jaké kolekce množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$ konverguje posloupnost náhodných procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$ slabě k nějakému náhodnému procesu $(Y(A), A \in \mathcal{A})$.

Nejprve poznamenejme, že procesy $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})$ budou, stejně jako v předchozí části, nabývat hodnot na prostoru $l^{+\infty}(\mathcal{A})$. Náhodné elementy $X_n : \Omega \to$

$l^{+\infty}(T)$ obecně nemusí být měřitelné, je tedy zapotřebí využívat definici slabé konvergence pro obecně ne nutně měřitelné posloupnosti či nety. (Připomeňme, že limitní náhodná veličina X měřitelná být musí.) Jak známo, viz věta 1.2.7, spojité zobrazení zachovává slabou konvergenci. Stačí tedy ukázat, že naše zobrazení (3.1) je spojité.

Prostor $l^{+\infty}(T)$ i prostor $l^{+\infty}(\mathcal{A})$ uvažujeme se supremální metrikou, a tak pro libovolnou kolekci $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(T)$ platí:

$$\rho_s(x_1, x_2) = \sup_{t\in T} |x_1(t) - x_2(t)| \geq \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sup_{t\in A} x_1(t) - \sup_{t\in A} x_2(t)| = \rho_s^{\mathcal{A}}(\Psi(x_1), \Psi(x_2)). \tag{3.4}$$

Funkcionál Ψ, viz (3.1), je lipschitzovský, a tedy spojitý. Tudíž se zachovává slabá konvergence, viz věta 1.2.7.

3.1.3 Prostor $D(T)$

Prostor $D(T)$ – zobecněný Skorochodův prostor se Skorochodovou metrikou, podrobněji viz podkapitola 2.5, je jiný případ. Nemůžeme použít dosavadní výsledky, protože prostor $D(T)$ je vybaven Skorochodovou metrikou a ne supremální. Zobrazení (3.1) zde již obecně není spojité.

Opět víme, že náhodné procesy $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$ budou náležet do $l^{+\infty}(\mathcal{A})$. Tady už ale z konvergence procesu $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ nevyplývá ani konvergence konečně rozměrných marginálů procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})_{n\in\mathbb{N}}$.

Příklad: Mějme $T = [0, 1]$, procesy na prostoru $D([0, 1])$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ položme:

$$\begin{aligned} X_{2n}(t)(\omega) &= \mathbb{I}_{(1/2-1/n;1]}(t) \quad \forall\omega \in \Omega, \\ X_{2n+1}(t)(\omega) &= \mathbb{I}_{[1/2;1]}(t) \quad \forall\omega \in \Omega, \\ X(t)(\omega) &= \mathbb{I}_{[1/2;1]}(t) \quad \forall\omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Potom $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ v $(D([0, 1]), d_S)$ (prostor tzv. cadlag funkcí) (dokonce v pravděpodobnosti), ale $Y_{2n}([0, 1/2)) = 1$ $s.j.$ a $Y_{2n+1}([0, 1/2)) = 0$ $s.j.$, a tedy posloupnost $(Y_n([0, 1/2)))_{n\in\mathbb{N}}$ nekonverguje. Neplatí tedy ani konvergence jednorozměrných marginálů.

$\triangle$

Abychom mohli mluvit o konvergenci konečně rozměrných marginálů, potřebujeme pro obrazy funkcí z $D(T)$ najít také vhodný prostor s vhodnou metrikou, tj. vhodný zobecněný Skorochodův prostor.

Potřebujeme tedy najít, podle podkapitoly 2.5, prostor bijekcí s vhodnou normou na kolekci $\mathcal{A}$ a vhodnou kolekci konečných dělení $\mathcal{A}$, tu budeme značit $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$, tak, aby bylo možno zkonstruovat zobecněný Skorochodův prostor. A navíc, aby obrazy funkcí z $D(T)$ patřily do $D(\mathcal{A})$ a aby naše zobrazení také zachovávalo slabou konvergenci.

Předpokládejme tedy, že zobecněný Skorochodův prostor, na kterém jsou definovány procesy $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$ je indukován kolekcí bijekcí Λ, normou $||\cdot||_\Lambda$ a kolekcí konečných rozkladů $\mathcal{D}$. Pro nový prostor $D(\mathcal{A})$ uvažujme následující prostor bijekcí $(\Lambda^{\mathcal{A}}, ||\cdot||_\Lambda^{\mathcal{A}})$, kde $\lambda^{\mathcal{A}} \in \Lambda^{\mathcal{A}}$, pokud pro ni existuje bijekce $\lambda \in \Lambda$ taková, že:

$$\begin{aligned} \lambda^{\mathcal{A}} :\ & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ & A \mapsto \lambda(A) = \{\lambda(t), t \in A\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

a norma $||\cdot||_\Lambda^{\mathcal{A}}$ je norma na $\Lambda^{\mathcal{A}}$, která je definována obdobně jako norma $||\cdot||_\Lambda$ na Λ (viz dále).

A kolekci $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ obdobně

$$\mathcal{D}^{\mathcal{A}} := \{\mathcal{P}(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\}. \tag{3.6}$$

Takto definovaná kolekce $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ je také usměrněná vůči zjemnění, a pokud $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, potom je také invariantní vůči $\lambda^{\mathcal{A}}$ pro všechna $\lambda^{\mathcal{A}} \in \Lambda^{\mathcal{A}}$.

Teď je otázka, jestli pro takto vybudovaný prostor $D(\mathcal{A})$ platí

$$x \in D(T) \ \Rightarrow \Psi(x) \in D(\mathcal{A}),$$

kde $\Psi(\cdot)$ je funkcionál definovaný v (3.1).

To záleží na normách, které jsou na Λ a $\Lambda^{\mathcal{A}}$. Předpokládejme, že na Λ máme obvyklé normy, tj. normy $||\cdot||_s$, $||\cdot||_l$ a $||\cdot||_m$ definované v (2.6),(2.7) a (2.8).

Připomeňme Hausdorfovu pseudometriku na kolekci podmnožin, která je definována následovně, viz např. (Dudley, 2000, § 8.1, str. 97):

$$\rho^{\mathcal{A}}(A, B) := \max(\sup_{s\in A} \inf_{t\in B} \rho(s,t), \sup_{s\in B} \inf_{t\in A} \rho(s,t)). \tag{3.7}$$

Potom normy na $\Lambda^{\mathcal{A}}$ indukujme stejným způsobem, tedy jen místo metriky ρ na prostoru T použijeme pseudometriku $\rho^{\mathcal{A}}$ na prostoru $\mathcal{A}$, což bude označovat Hausdorfovu pseudometriku na $\mathcal{A}$.

Tyto normy budeme opět označovat stejně, jen s indexem $\mathcal{A}$ nahoře.

Poznámka: Všimněme si, že musíme udělat drobnou změnu v definici normy $||\cdot||_l^{\mathcal{A}}$, a to proto, že na $\mathcal{A}$ již máme pouze pseudometriku, nikoliv metriku. Proto musíme brát supremum přes takové množiny $A, B \in \mathcal{A}$, pro které je jejich vzdálenost v pseudometrice nenulová, tedy $\rho^{\mathcal{A}}(A, B) \neq 0$.

$\triangle$

Potom lze nahlédnout, s využitím rovnosti $||\lambda|| = ||\lambda^{-1}||$, že

$$||\lambda^{\mathcal{A}}||_s^{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} \rho^{\mathcal{A}}(\lambda(A), A) \leq ||\lambda||_s.$$

A podobně

$$||\lambda^{\mathcal{A}}||_l^{\mathcal{A}} = \sup_{A,B\in\mathcal{A}:\rho^{\mathcal{A}}(A,B)\neq 0} \left|\log \frac{\rho^{\mathcal{A}}(\lambda(A),\lambda(B))}{\rho^{\mathcal{A}}(A,B)}\right| \leq ||\lambda||_l.$$

A tedy také

$$||\lambda^{\mathcal{A}}||_m^{\mathcal{A}} \leq ||\lambda||_m.$$

Díky těmto vztahům a vlastnostem zobecněného prostoru $D(T)$ také platí, že pokud $x \in D(T)$, potom také $\Psi(x) \in D(\mathcal{A})$, pro prostory, které jsou indukovány normami $||\cdot||_s$, resp. $||\cdot||_l$, $||\cdot||_m$ a $||\cdot||_s^{\mathcal{A}}$, resp. $||\cdot||_l^{\mathcal{A}}$, $||\cdot||_m^{\mathcal{A}}$.

Tvrzení 3.1.4 *Nechť $D(T)$ je zobecněný Skorochodův prostor, který je indukovaný normovaným prostorem $(\Lambda, ||\cdot||_\Lambda)$ a kolekcí $\mathcal{D}$. A nechť $D(\mathcal{A})$ je také zobecněný Skorochodův prostor indukovaný normovaným prostorem $(\Lambda^{\mathcal{A}}, ||\cdot||_\Lambda^{\mathcal{A}})$ z (3.5) a kolekcí $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ podle (3.6), kde norma $||\cdot||_\Lambda^{\mathcal{A}}$ je definována tak, že:*

$$||\lambda||_\Lambda \geq ||\lambda^{\mathcal{A}}||_{\Lambda^{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}, \tag{3.8}$$

pro všechna $\lambda \in \Lambda$ a jejich obrazy $\lambda^{\mathcal{A}}$. Potom pro všechny $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ platí:

$$\{y :\ \exists x \in D(T) : y = \Psi(x)\} \subset D(\mathcal{A}),$$

tj. zobrazení Ψ z (3.1) je zobrazení z $D(T)$ do $D(\mathcal{A})$.

Poznámka: Všimněme si, že za normu $||\cdot||_\Lambda$ můžeme zvolit (aby byla splněna podmínka (3.8)) libovolnou z výše uvedených obvyklých norem, tj. libovolnou z norem definových v (2.6),(2.7) a (2.8).

$\triangle$

Důkaz: Buď $x \in D(T)$ libovolné. Položme opět $y := \Psi(x)$. Naším cílem je ukázat, že $y \in D(\mathcal{A})$. Víme, že $y \in l^{+\infty}(\mathcal{A})$ a potřebujeme ukázat, že $d^{\mathcal{A}}(y, \mathbb{I}_{\mathcal{D}^{\mathcal{A}}}) = 0$, kde $d^{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot)$ je zobecněná Skorochodova metrika, viz (2.5). Víme, že $d_S(x, \mathbb{I}_{\mathcal{D}}) = 0$, tj. existuje posloupnost $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ a jednoduchých funkcí $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(T,\mathcal{D})$ taková, že $||\lambda_n||_\Lambda \searrow 0$ a zároveň $||x - x_n \circ \lambda_n|| \searrow 0$. Položme $\lambda_n^{\mathcal{A}}$ obraz λ_n podle (3.5) a y_n obraz x_n podle (3.1). Potom z podmínky (3.8) $||\lambda_n^{\mathcal{A}}||_\Lambda^{\mathcal{A}} \searrow 0$ a

$$\begin{aligned}
||y - y_n \circ \lambda_n^{\mathcal{A}}|| &= \sup_{A\in\mathcal{A}} |y(A) - y_n(\lambda_n^{\mathcal{A}}(A))| \\
&= \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sup_{t\in A} x(t) - \sup_{t\in\lambda_n^{\mathcal{A}}(A)} x_n(t)| \\
&= \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sup_{t\in A} x(t) - \sup_{t\in A} x_n(\lambda_n(t))| \\
&\leq ||x - x_n \circ \lambda_n|| \searrow 0.
\end{aligned}$$

Tedy $y \in D(\mathcal{A})$.

Q.E.D.

Za předpokladů tvrzení 3.1.4 lze snadno ukázat, že zobrazení (3.1) je spojité, a tedy slabá konvergence zůstane zachována.

Tvrzení 3.1.5 *Za předpokladů tvrzení 3.1.4 je zobrazení $\Psi : D(T) \to D(\mathcal{A})$, které je definováno v (3.1), spojité.*

Důkaz: K důkazu spojitosti stačí ukázat, že pro všechny nety $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ takové, že $x_\alpha \to x$ platí, že $\Psi(x_\alpha) \to \Psi(x)$. My konkrétně ukážeme, že platí:

$$d_S(x_1, x_2) \geq d^{\mathcal{A}}(\Psi(x_1), \Psi(x_2)),$$

kde $d_S(\cdot,\cdot)$ a $d^{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot)$ jsou Skorochodovy metriky definovány v (2.5) na prostoru $D(T)$ a $D(\mathcal{A})$. Skorochodova vzdálenost funkcí x_1, x_2 je $d_S(x_1, x_2)$, a tedy existuje $\lambda \in \Lambda$ takové, že

$$||\lambda||_\Lambda \leq d_S(x_1, x_2) \text{ a zároveň } ||x_1 \circ \lambda - x_2|| \leq d_S(x_1, x_2).$$

Potom také podle předchozího $||\lambda^{\mathcal{A}}||_\Lambda^{\mathcal{A}} \leq d_S(x_1, x_2)$, kde $\lambda^{\mathcal{A}}$ je indukována λ podle (3.5). A ukažme, že také platí

$$||\Psi(x_1) \circ \lambda^{\mathcal{A}} - \Psi(x_2)||^{\mathcal{A}} \leq d_S(x_1, x_2).$$

Stačí si rozepsat levou stranu nerovnice a dostáváme:

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in \mathcal{A}} |\Psi(x_1) \circ \lambda^{\mathcal{A}}(A) - \Psi(x_2)(A)| &= \sup_{A \in \mathcal{A}} |\sup_{t \in \lambda(A)} x_1(t) - \sup_{t \in A} x_2(t)| \\
&= \sup_{A \in \mathcal{A}} |\sup_{t \in A} x_1(\lambda(t)) - \sup_{t \in A} x_2(t)| \\
&\leq ||x_1 \circ \lambda - x_2|| \\
&\leq d_S(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

A tedy $d^{\mathcal{A}}(\Psi(x_1), \Psi(x_2)) \leq d_S(x_1, x_2)$ a zobrazení Ψ je spojité.

Q.E.D.

Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 3.1.6 *Nechť posloupnost procesů $(X_n(t), t \in T)_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje slabě k procesu $(X(t), t \in T)$ v prostoru $D(T)$. Potom posloupnost procesů $(Y_n(A), A \in \mathcal{A})_{n \in \mathbb{N}}$ indukovaných zobrazením (3.1) konverguje slabě k procesu $(Y(A), A \in \mathcal{A})$ v prostoru $D(\mathcal{A})$, pokud kolekce $\mathcal{A}$ je taková, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ a prostor $D(\mathcal{A})$ je zkonstruován dle tvrzení 3.1.4.*

3.2 Stabilní konvergence

Tato podkapitola má dvě části. V první se zabýváme stabilní konvergencí reálných náhodných veličin. Přesněji se zajímáme o to, ve kterých známých centrálních limitních větách můžeme, a za jakých podmínek, nahradit slabou konvergenci konvergencí stabilní. V druhé části se věnujeme stabilní konvergenci procesů. Výsledky uvedené v této kapitole byly publikovány v (Husová, 2002) a (Husová, 2005b).

3.2.1 Stabilní konvergence ve známých centrálních limitních větách

Cílem této části je ukázat, ve kterých známých centrálních limitních větách lze slabou konvergenci nahradit stabilní konvergencí, popř. jaké podmínky je zapotřebí ještě splnit, aby toto bylo možné.

Z definice stabilní konvergence je ihned vidět, že všechny uvažované náhodné veličiny musí být definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru.

Zřejmě nejznámější centrální limitní větou se stabilní konvergencí je martingalová centrální limitní věta (Hall and Heyde, 1980, Th 3.2), viz věta 1.4.7.

Důkaz této věty je založen na ověření podmínek následujícího lemmatu, (Hall and Heyde, 1980, L 3.1).

Lemma 3.2.1 *Uvažujme pole martingalových diferencí* $(X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1)$ *na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Pro všechna* $t \in \mathbb{R}$ *mějme* $T_n(t) := \Pi_{j=1}^{k_n}(1 + itX_{nj})$. *Nechť* η^2 *je s.j. konečná náhodná veličina a*

(i) $\max_{1\leq i\leq k_n} |X_{ni}| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$,

(ii) $\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta^2$,

(iii) $\forall t \in \mathbb{R} : T_n(t) \xrightarrow{\mathcal{D}-L_1} 1$.

Potom $S_{nk_n} = \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \xrightarrow{\mathcal{D}-s} Z$, *kde* Z *je náhodná veličina s charakteristickou funkcí* $\mathrm{E}\exp(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2)$.

Důkaz: Viz (Hall and Heyde, 1980, L 3.1).

Q.E.D.

Uveďme ještě důsledek této věty tak, jak ho uvádějí Hall a Heyde, (Hall and Heyde, 1980, Cor 3.1).

Důsledek 3.2.2 *Věta 1.4.7 platí také, pokud podmínky* (i) *a* (iii) *nahradíme tzv. „podmíněnou Lindebergovou podmínkou":*

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}[X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|>\varepsilon)} | \mathcal{F}_{n(i-1)}] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

a podmínku (ii) *podmínkou pro podmíněný rozptyl:*

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}(X_{ni}^2 | \mathcal{F}_{n(i-1)}) \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta^2.$$

V klasické centrální limitní větě pro nezávislé náhodné veličiny je výsledná konvergence samozřejmě stabilní. Rozmyslíme-li si definici stabilní konvergence, snadno nahlédneme, že pokud jsou náhodné veličiny definovány na stejném prostoru a jsou nezávislé, potom slabá konvergence je vlastně stabilní. Na tento případ také můžeme aplikovat větu 1.4.7. Chceme-li to dokázat, jednoduše zvolíme σ-algebry tak, abychom dostali pole martingalových diferencí a snadno ověříme podmínky věty 1.4.7.

Věta 3.2.3 *Nechť $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2 definované na stejném pravděpodobnostním prostoru, potom $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathcal{D}-s} N$, kde N je náhodná veličina s normovaným normálním rozdělením.*

Důkaz: Snadno ověříme splnění podmínek věty 1.4.7. Podmínky $(i), (ii)$ a (iii) jsou splněny, zbývá ověřit podmínku (iv). Položme $\mathcal{F}_i$ σ-algebru generovanou náhodnou veličinou X_i. Potom označme $\mathcal{G}_i$ σ-algebru generovanou $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{F}_i$. A $S_{ni} := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{i} X_{nj}$. Potom $(S_{ni}, \mathcal{G}_i)$ je martingalové pole a platí:

(iv) $\mathcal{G}_{ni} \subset \mathcal{G}_{(n+1)i}$ $\forall i : 1 \le i \le k_n, \forall n \ge 1$ protože $\mathcal{G}_{ni} = \mathcal{G}_i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Další známou centrální limitní větou je Fellerova-Lindebergova centrální limitní věta, viz např. (Štěpán, 1987, V IV.3.1).

Věta 3.2.4 (Fellerova-Lindebergova) *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ pravděpodobnostní prostor. Mějme nezávislé náhodné veličiny $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ na prostoru $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, kde $k_n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}X_{n1} = \mathrm{E}X_{n2} = \ldots = \mathrm{E}X_{nk_n} = 0$. Jestliže*

(i)

$$\sum_{i=1}^{k_n} \operatorname{var} X_{ni} \to 1,$$

(ii) pro všechna $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}[X_{ni}^2 \mathbb{I}_{[|X_{ni}|\ge\varepsilon]}] \to 0 \quad \textit{pro } n \to +\infty,$$

potom

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

kde Z má normované normální rozdělení.

Poznámka: Podmínka (*ii*) z předchozí věty se často označuje jako Fellerova-Lindebergova podmínka, krátce (FL) a levá strana této podmínky se pro jednoduchost označuje $L_n(\varepsilon)$.

$\triangle$

Pro stabilní konvergenci v této centrální limitní větě potřebujeme přidat následující podmínky:

(a1) Všechny náhodné veličiny musí být definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru.

(a2) Existují σ-algebry $\mathcal{F}_{nk}$ takové, že náhodné veličiny X_{nk} jsou $\mathcal{F}_{nk}$-měřitelné, $\mathcal{F}_{nk} \subset \mathcal{F}_{n(k+1)}$, $\mathrm{E}(X_{nk}|\mathcal{F}_{n(k-1)}) = 0\, s.j.$ a $\mathcal{F}_{nk} \subset \mathcal{F}_{(n+1)k}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $k : 1 \leq k \leq k_n$.

Potom je výsledná konvergence stabilní.

Poznámka: Jestliže zvolíme $\mathcal{F}_{nk} := \bigvee_{i=1}^{k} \sigma(X_{ni})$, potom obecně není splněna podmínka: $\mathcal{F}_{nk} \subset \mathcal{F}_{(n+1)k}$. A pokud zvolíme $\mathcal{G}_{nk} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{ik}$ potom obecně neplatí

$$\mathrm{E}(X_{nk}|\mathcal{G}_{n(k-1)}) = 0\, s.j.$$

$\triangle$

Věta 3.2.5 *Mějme kolekci náhodných veličin* $(X_{nk}, k = 1, \ldots, k_n, n \in \mathbb{N})$ *definovaných na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. *Nechť tyto náhodné veličiny splňují podmínky věty 3.2.4 a podmínku (a2), potom*

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \xrightarrow{\mathcal{D}-s} Z,$$

kde Z má normované normální rozdělení.

Důkaz věty 3.2.5 Opět ověříme podmínky věty 1.4.7.

Položme $S_{ni} := \sum_{j=1}^{i} X_{nj}$. Potom $(S_{ni}, \mathcal{F}_{ni})$ je pole martingalových diferencí splňující podmínky věty 1.4.7.

(i) $\max |X_{ni}| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Plyne z (FL):

(FL) $\Rightarrow \mathrm{E} \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{[|X_{ni}| \geq \varepsilon]} \to 0 \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{[|X_{ni}| \geq \varepsilon]} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq k_n} |X_{ni}| \mathbb{I}_{[|X_{ni}| \geq \varepsilon]} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0\ \forall \varepsilon \Rightarrow \max |X_{ni}| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$

(ii) $\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$. Stačí ukázat, že $\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2$ konverguje v L_1 k $\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2$. Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 - \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2\right| &\le \\
\le \quad & \mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)} - \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)}\right| + 2L_n(\varepsilon) \\
\le \quad & \sqrt{\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)} - \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)}\right)^2} + 2L_n(\varepsilon) \\
\le \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}\left(X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)} - \mathrm{E}X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)}\right)^2} + 2L_n(\varepsilon) \\
\le \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}(X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)})^2 - (\mathrm{E}X_{ni}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)})^2 + 2L_n(\varepsilon)} \\
\le \quad & \varepsilon\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}(X_{ni} \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)})^2 - (\mathrm{E}X_{ni} \mathbb{I}_{(|X_{ni}|<\varepsilon)})^2 + 2L_n(\varepsilon)} \\
\le \quad & \varepsilon\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2} + 2L_n(\varepsilon). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Z předpokladu (i) této věty víme, že člen $\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{ni}^2$ konverguje k 1 pro $n \to +\infty$, a tedy pro každé kladné $\bar{\varepsilon}$ můžeme najít dostatečně malé $\varepsilon > 0$ a dostatečně velké n takové, že člen (3.9) je menší nebo roven $\bar{\varepsilon}$.

(iii) $\mathrm{E}(\max_{1\le i\le k_n} X_{ni}^2) \le \mathrm{E}(\max_{1\le i\le k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{|X_{ni}|\ge\varepsilon}) + \varepsilon^2 \le \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}^2 \mathbb{I}_{|X_{ni}|\ge\varepsilon}) + \varepsilon^2$ opět díky podmínce (FL) je podmínka (iii) splněna.

Tím jsme ověřili všechny podmínky věty 1.4.7 a důkaz je hotov.

Q.E.D.

Další známé centrální limitní věty jsou Ljapunovova (Štěpán, 1987, V IV.3.3) a Lévyho-Lindebergova centrální limitní věta (Štěpán, 1987, V IV.3.4). Obě vycházejí z Fellerovy-Lindebergovy centrální limitní věty, proto stačí přidat podmínky $(a1), (a2)$, a potom je výsledná konvergence také stabilní.

Poslední zkoumanou centrální limitní větou je McLeishova (McLeish, 1974), viz (Lachout, 2000, V 4.13):

Věta 3.2.6 (McLeishova) *Mějme pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in \mathbb{N}$ náhodné veličiny $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,k_n}$ definované na stejném pravděpodobnostním prostoru s konečnými prvními momenty. Předpokládejme pro všechna $n \in \mathbb{N}$, že $\mathrm{E}X_{n1} = 0$, pro všechna $k = 1, 2, \ldots, k_n - 1$: $\mathrm{E}[X_{n(k+1)}|X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk}] = 0$ s.j. a:*

(i) $\mathrm{E}[\max\{|X_{nk}|, k = 1, 2, \ldots, k_n\}] \to 0$,

(ii) $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta^2$, *kde* η^2 *je s.j. konečná náhodná veličina.*

Potom $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *kde náhodná veličina* X *má mixované normální rozdělení.*

Pro stabilní konvergenci v této centrální limitní větě potřebujeme navíc podmínku ($a2$), věta bude vypadat následovně, viz (Lachout, 1985):

Věta 3.2.7 *Mějme* $(X_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pole martingalových diferencí na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *s konečnými prvními momenty a nulovou střední hodnotou a:*

(i) $\mathrm{E}[\max\{|X_{nk}|, k = 1, 2, \ldots, k_n\}] \to 0$,

(ii) $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta^2$, *kde* η^2 *je s.j. konečná náhodná veličina,*

(iii) $\mathcal{F}_{n,i} \subset \mathcal{F}_{n+1,i}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}, i : 1 \leq i \leq k_n$.

Potom $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \xrightarrow{\mathcal{D}-s} X$, *kde náhodná veličina* X *má mixované normální rozdělení.*

Poznámka: V této větě jsou stejné podmínky jako ve větě 1.4.7, jen chybí podmínka (*iii*) věty 1.4.7. Proto, když se dokáže, že tato věta platí se stabilní konvergencí, ukáže se tím, že podmínka (*iii*) ve větě 1.4.7 může být vypuštěna. To je také ukázáno v (Lachout, 1985).

$\triangle$

Důkaz: Viz (Lachout, 1985).

Q.E.D.

3.2.2 Stabilní konvergence procesů

Máme-li definici stabilní konvergence na obecném metrickém prostoru, viz definice 1.3.7, potom již můžeme uvažovat také o stabilní konvergenci procesů. Jedna ze základních otázek zní, zda tu platí obdobné podmínky jako pro slabou konvergenci, tj. zda stabilní konvergence procesů v prostorech $C(T)$, $D(T)$ či $l^{+\infty}(T)$ (což jsou postupně prostor všech spojitých funkcí, zobecněný Skorochodův prostor a prostor všech omezených reálných funkcí na T) také zaručuje stabilní konvergenci všech odpovídajících konečně rozměrných marginálů a naopak, zda stabilní konvergence všech konečně rozměrných marginálů společně s těsností zaručuje stabilní konvergenci celého procesu.

V prostorech funkcí vyplývá slabá konvergence konečně rozměrných marginálů ze slabé konvergence procesu díky spojitosti zobrazení projekce. Pokud se tedy bude stabilní konvergence také zachovávat spojitým zobrazením, potom totéž bude platit pro stabilní konvergenci. Větu o zachování stabilní konvergence spojitým zobrazením pro reálné náhodné veličiny můžeme najít v již zmiňované práci Aldouse a Eaglesona, (Aldous and Eagleson, 1978, Th 1). Zde uvedeme toto tvrzení pro obecné metrické prostory.

Tvrzení 3.2.8 *Nechť $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ jsou náhodné veličiny s hodnotami v nějakém metrickém prostoru D. Nechť $h : D \to S$, kde S je obecný metrický prostor, je spojité zobrazení. Potom, pokud $X_n \stackrel{\mathcal{D}-s}{\to} X$ na D, $h(X_n) \stackrel{\mathcal{D}-s}{\to} h(X)$ v S.*

Důkaz: Předpokládejme, že kolekce náhodných veličin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stabilně k náhodné veličině X, viz definice 1.3.5. A ověřme tuto definici také pro posloupnost $(h(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pro všechny reálné spojité funkce $f \in C(S)$ platí, že $f \circ h$ patří do prostoru $C(D)$, a tedy kolekce $(h(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a $h(X)$ splňují definici 1.3.5, a tak máme $h(X_n) \stackrel{\mathcal{D}-s}{\to} h(X)$.

Q.E.D.

Odtud je vidět, že budeme-li chtít, aby proces konvergoval stabilně, potom díky spojitosti konečně rozměrných projekcí bude nutnou podmínkou stabilní konvergence všech konečně rozměrných marginálů (pro prostory, ve kterých je projekce spojité zobrazení).

Nejprve se podívejme na to, že stabilní konvergence jednorozměrných marginálů, těsnost a slabá konvergence všech konečně rozměrných marginálů nestačí k zachování stabilní konvergence ani konečně rozměrných marginálů.

V následujícím příkladu uvažujeme těsný proces, jehož jednorozměrná rozdělení konvergují stabilně a navíc jeho sdružená rozdělení konvergují slabě. Přesto nemáme zaručenu stabilní konvergenci sdruženého rozdělení.

Příklad: Nechť $(X_n(t), t \in [0,1]), (X(t), t \in [0,1))$ jsou reálné náhodné procesy na $([0,1), \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ takové, že

$$\begin{aligned} X_n(t,\omega) &= 1 \text{ s pravděpodobností } 1/2 \\ &= -1 \text{ s pravděpodobností } 1/2, \end{aligned}$$

pro všechna $t \in [0,1)$ a pro všechna n. Definujme limitní náhodnou veličinu:

$$\begin{aligned} X(t,\omega) &= 1 \text{ pro } t \in [0,1/2),\ \omega \in [0,1/2) \\ &= -1 \text{ pro } t \in [0,1/2),\ \omega \in [1/2,1) \\ &= 1 \text{ pro } t \in [1/2,1),\ \omega \in [1/4,3/4) \\ &= -1 \text{ pro } t \in [1/2,1),\ \omega \in [0,1/4) \cup [3/4,1). \end{aligned}$$

A položme pro $t \in [0,1/2)$:

$$\begin{aligned} X_n(t,\omega) &= 1 \text{ pro } \omega \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right), k \in \{0,\dots,2^{n-1}-2\} \\ &= -1 \text{ jinak.} \end{aligned}$$

Pro $s \in [1/2, 1)$ využijeme již definovaných hodnot ($s - 1/2 \in [0, 1/2)$) a položíme

$$\begin{aligned} X_{2n}(s,\omega) &:= X_{2n}(s-1/2,\omega) \;\text{ pro } \omega \in [0,1/2) \\ X_{2n}(s,\omega) &:= -X_{2n}(s-1/2,\omega) \;\text{ pro } \omega \in [1/2,1) \\ X_{2n+1}(s,\omega) &:= -X_{2n+1}(s-1/2,\omega) \;\text{ pro } \omega \in [0,1/2) \\ X_{2n+1}(s,\omega) &:= X_{2n+1}(s-1/2,\omega) \;\text{ pro } \omega \in [1/2,1) \end{aligned}$$

Pro takto definované náhodné veličiny platí, že $X_n(t) \xrightarrow{\mathcal{D}-s} X(t)$ pro všechna $t \in [0, 1)$. Avšak dvourozměrné marginály $(X_n(t), X_n(s))$, kde $t \in [0, 1/2)$ a $s \in [1/2, 1)$ nekonvergují stabilně (což lze ověřit, pokud za E zvolíme např. množinu $[0, 1/2)$), ačkoliv konvergují slabě.

△

Pokud bychom ale požadovali stabilní konvergenci všech konečně rozměrných marginálů a těsnost, potom už bychom stabilní konvergenci limitního procesu měli zaručenu.

Tvrzení 3.2.9 *Nechť posloupnost procesů $(X_n(t), t \in T)_{n\in\mathbb{N}}$, kde T je indexová množina, $X_n : \Omega \to l^{+\infty}(T)$, je asymptoticky těsná v $(l^{+\infty}(T), \rho_s)$, navíc nechť všechna konečně rozměrná rozdělení konvergují stabilně. Potom posloupnost procesů $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stabilně k procesu X v prostoru $(l^{+\infty}(T), \rho_s)$.*

Důkaz: Z předpokladů věty je zřejmé, že posloupnost procesů $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje slabě k procesu X, viz věta 2.3.9. Víme, že pro každou měřitelnou množinu $E \in \mathcal{A}$, každé $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolné $t_1, \ldots, t_k$ existuje náhodná veličina $X_E^{t_1,\ldots,t_k}$ taková, že posloupnost $(X_n \mathbb{I}_E(t_1, \ldots, t_k))_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje slabě k této náhodné veličině.

Abychom ukázali stabilní konvergenci, potřebujeme pro každou měřitelnou množinu $E \in \mathcal{A}$ nalézt náhodný proces X_E, takový, že $X_n \mathbb{I}_E \xrightarrow{\mathcal{D}} X_E$. Ten bude existovat podle Daniellovy-Kolmogorovovy věty (viz (Kallenberg, 1997, Th 5.16)), pokud systém $X_E(t_1, \ldots, t_k)$ bude projektivní.

Tento systém je projektivní z předpokladu, že všechna konečně rozměrná rozdělení konvergují stabilně k odpovídajícím konečně rozměrným rozdělením limitního procesu. A pro každé $n \in \mathbb{N}$ je systém $(X_n(t_1, \ldots, t_k)\mathbb{I}_E)$ projektivní, tudíž i systém $(X_E(t_1, \ldots, t_k))$ je projektivní.

Tím už vlastně máme stabilní konvergenci, protože získáme pro každou $E \in \mathcal{A}$ slabou konvergenci procesů $(X_n \mathbb{I}_E)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q.E.D.

3.3 Slabá konvergence hölderovských procesů na $[0, 1]^m$

Výsledky obsažené v této kapitole byly publikovány v (Klicnarová, 2007).

Klasický princip invariance v Hölderově prostoru pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny můžeme nalézt již v Lampertiho práci (Lamperti, 1962). Později Račkauskas a Suquet, viz (Račkauskas and Suquet, 2001), vylepšili Lampertiho výsledky a ukázali nutné a postačující podmínky pro slabou konvergenci normovaných součtů v Hölderově prostoru, opět ale studovali pouze případ nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Dále například v pracích (Kerkyacharian and Roynette, 1991) a (Hamadouche, 2000) najdeme podmínky pro těsnost náhodných procesů v Hölderově prostoru, ale pouze pro procesy indexované prvky množiny $[0, 1]$. Princip invariance pro procesy indexované prvky obecných množin můžeme najít např. v knize (Ledoux and Talagrand, 1991), ovšem pouze na prostoru spojitých funkcí.

Naším cílem je ukázat podmínky pro těsnost v prostoru $C^{0,\gamma}(T)$, přesněji viz definice 3.3.1, Hölderově podprostoru prostoru spojitých funkcí definovaných na T opatřeného supremální metrikou, kde $T = [0, 1]^m$.

V článcích (Račkauskas and Suquet, 1998) a (Račkauskas and Suquet, 2004) jsou podmínky pro těsnost posloupností v Hölderově prostoru – $(H^0_\rho, ||\cdot||_\rho)$. Prostor H^0_ρ je prostor reálných spojitých funkcí f definovaných na $[0, 1]^m$ takových, že $w_\rho(f, 1) < \infty$ a $\lim_{\delta\to 0} w_\rho(f, \delta) = 0$ (definice modulu w_ρ bude později). Tento prostor je opatřen normou definovanou následovně:

$$||f||_\rho := |f(\mathbf{0})| + w_\rho(f, 1),$$

kde ρ je modul těsnosti, který splňuje nějaké speciální podmínky, viz (Račkauskas and Suquet, 1998, § 2) a $w_\rho(\cdot, \cdot)$ je modul spojitosti definovaný:

$$w_\rho(f, \delta) = \sup_{\mathbf{s},\mathbf{t},||\mathbf{s}-\mathbf{t}||_s<\delta} \frac{|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{s})|}{\rho(||\mathbf{s} - \mathbf{t}||_s)},$$

kde $||\mathbf{s}||_s := \max_{1\le i\le m} |s_i|$. Tyto normy jsou obecnější než normy, které budeme uvažovat my. Pro speciální volby modulu spojitosti $\rho(\cdot)$ můžeme dostat normy ekvivalentní normám používaným v této práci. Pro speciální volbu $\rho(\cdot)$ bude také platit, že prostor $C^{0,\gamma}(T)$ je podprostorem prostoru $H^0_\rho(T)$. Ale tvrzení v pracích (Račkauskas and Suquet, 1998) a (Račkauskas and Suquet, 2004) předpokládají procesy jako prvky Hölderových prostorů H^0_ρ a ukazují, za jakých podmínek jsou tyto posloupnosti těsné. My budeme předpokládat, že procesy jsou pouze spojité, a ukážeme, za jakých podmínek jsou těsné v Hölderově podprostoru prostoru spojitých funkcí, tedy v prostoru $C^{0,\gamma}(T)$.

Definice 3.3.1 *Prostor $C^{0,\beta}([0, 1]^m)$, kde $0 < \beta \le 1$, je prostor reálných spojitých funkcí definovaných na $[0, 1]^m$, které splňují pro všechna $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0, 1]^m$ a nějakou konečnou konstantu K:*

$$|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{s})| \le K||\mathbf{t} - \mathbf{s}||_2^\beta. \tag{3.10}$$

Věta 3.3.2 *Mějme* $(X_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)_{n\in\mathbb{N}}$ *posloupnost náhodných procesů se spojitými trajektoriemi. Nechť konečně rozměrná rozdělení těchto procesů slabě konvergují. Dále nechť existují konstanty* α, β *a konečná konstanta* K *takové, že je splněno:*

$$\mathrm{P}(|X_n(\mathbf{t}) - X_n(\mathbf{s})| \geq \varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^\alpha} ||\mathbf{s} - \mathbf{t}||_2^{\alpha\beta}, \ \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^m, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

kde

$$0 < \beta \leq 1 \text{ a } \alpha\beta > \frac{2}{\log_2 \frac{4m}{4m-3}}. \quad (3.12)$$

Potom posloupnost procesů $(X_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguje slabě k nějakému procesu* $(X(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)$ *na prostoru* $C^{0,\gamma}([0,1]^m)$*, kde* γ *splňuje následující podmínku:*

$$0 < \gamma < \beta - \frac{m}{\alpha}. \quad (3.13)$$

Poznámka: Ukažme, že za předpokladů předchozí věty platí $m < \alpha\beta$. Tato nerovnost bude platit, pokud

$$\frac{2}{\log_2 \frac{4m}{4m-3}} \geq m,$$

což můžeme přepsat

$$\begin{aligned} 2 &\geq m \log_2 \frac{4m}{4m-3} = -m \log_2 \left(1 - \frac{3}{4m}\right) \\ 4 &\geq \left(1 - \frac{3}{4m}\right)^{-m}. \end{aligned}$$

Člen $\left(1 - \frac{3}{4m}\right)^{-m}$ nabývá pro $m = 1$ právě hodnoty 4 a funkce $f(m) = \left(1 - \frac{3}{4m}\right)^{-m}$ je na definičním oboru $[1, +\infty)$ klesající (její derivace je záporná).

$\triangle$

Důkaz této věty provede pomocí následujících tvrzení a lemmatu.

Slabá konvergence na Hölderově prostoru posloupnosti procesů $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ekvivalentní těsnosti rozdělení kolekce $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v tomto prostoru a konvergenci konečně rozměrných rozdělení procesů $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Naším cílem je tedy dokázat těsnost rozdělení posloupnosti $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Poznámka: V této podkapitole, bude symbol $\mathbf{1}$, resp. $\mathbf{L}$, značit prvky prostoru $\mathbb{R}^m$ takové, že všechny jejich souřadnice jsou rovny 1, resp. L.

A interval $I_{\langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle}$ na prostoru $\mathbb{R}^m$ bude značit množinu všech prvků $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ takových, že $\mathbf{l}$ leží mezi body $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ nebo $\mathbf{l}$ je rovno $\mathbf{j}$ či $\mathbf{k}$. My toto značení budeme potřebovat jen pro případy, kdy $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ budou mít buď všechny souřadnice nezáporné nebo všechny souřadnice nekladné, a tedy pro všechna $i : 1 \leq i \leq m$ bude platit: $|j_i| \leq |l_i| \leq |k_i|$. Podobně, symbol $I_{(\mathbf{j},\mathbf{k})}$ bude značit množinu všech $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ takových, které leží mezi body $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$, ale nejsou jim rovny.

$\triangle$

Nejprve formulujme následující užitečné lemma.

Lemma 3.3.3 *Mějme* $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^m$ *a označme*

$$J = \{(\mathbf{k} - \mathbf{1}/2)\delta, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{N}^m \cap [\mathbf{1}, \mathbf{1}/\delta]\} \tag{3.14}$$

pro nějaké $\delta > 0$ *takové, že* $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$. *Uvažujme uzavřené koule* $B(\mathbf{j}, \frac{\delta}{2})$ *v prostoru* $\mathbb{R}^m$ *se středy* $\mathbf{j} \in J$ *a s poloměry* $\frac{\delta}{2}$ *v supremální metrice. Jestliže* $||\mathbf{s} - \mathbf{t}||_2 < \delta$, *potom*

$$|X(\mathbf{s}) - X(\mathbf{t})| \leq 4 \max_{\mathbf{j} \in J} \sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{j}, \frac{\delta}{2})} |X(\mathbf{z}) - X(\mathbf{j})|.$$

Důkaz: Vidíme, že za těchto podmínek patří body $\mathbf{s}, \mathbf{t}$ do stejných nebo sousedních koulí $B(\mathbf{j}, \frac{\delta}{2})$. Absolutní hodnota všech souřadnic bodu $(\mathbf{s} - \mathbf{t})$ je menší nebo rovna δ (protože euklidovská norma $(\mathbf{s} - \mathbf{t})$ je menší nebo rovna δ). Tedy vzdálenost bodů $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$ v supremální metrice je menší nebo rovna δ (což je poloměr koulí).

Předpokládejme tedy, že $\mathbf{s} \in B(\mathbf{j}, \frac{\delta}{2})$ a $\mathbf{t} \in B(\mathbf{i}, \frac{\delta}{2})$. Koule $B(\mathbf{j}, \frac{\delta}{2})$ a $B(\mathbf{i}, \frac{\delta}{2})$ jsou buď sousední nebo totožné. A protože předpokládáme, že jsou to koule vůči supremální metrice, potom bod $\frac{\mathbf{j}+\mathbf{i}}{2}$ je buď středem koule (pokud jsou totožné) nebo náleží oběma těmto koulím (jsou uzavřené).

A tak dostáváme

$$|X(\mathbf{s}) - X(\mathbf{t})| \leq |X(\mathbf{s}) - X(\mathbf{j})| + |X(\mathbf{j}) - X(\frac{\mathbf{j}+\mathbf{i}}{2})| + |X(\frac{\mathbf{j}+\mathbf{i}}{2}) - X(\mathbf{i})| + |X(\mathbf{i}) - X(\mathbf{t})|,$$

čímž je lemma dokázáno.

Q.E.D.

Následující tvrzení 3.3.4 dokazuje větu 3.3.2.

Tvrzení 3.3.4 *Posloupnost náhodných procesů* $(X_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)_{n \in \mathbb{N}}$ *se spojitými trajektoriemi je těsná v* $(C^{0,\gamma}([0,1]^m), || \cdot ||)$, *jestliže jsou splněny následující podmínky:*

(i) Posloupnost $(X_n(\mathbf{0}))$ *je těsná.*

(ii) Existují konstanty $K, \alpha, \beta > 0$ *takové, že jsou splněny podmínky (3.11), (3.12) a (3.13).*

Důkaz tohoto tvrzení vychází z důkazů vět (Billingsley, 1968, Th 12.1–12.3) a využívá následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.3.5 *Uvažujme net náhodných veličin* $(S_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I}$*, kde*

$$I = \{\mathbf{k}\delta/(2L),\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m \cap [-\mathbf{L}, \mathbf{L}]^m\} \tag{3.15}$$

pro nějaké $L \in \mathbb{N}$*. Jestliže tento net splňuje pro všechna* $\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2 \in I$*, všechna* $\varepsilon > 0$ *a nějaké konstanty* $K, \alpha, \beta > 0$ *následující nerovnost*

$$\mathrm{P}(|S_{\mathbf{i}^1} - S_{\mathbf{i}^2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^\alpha}||\mathbf{i}^1 - \mathbf{i}^2||_2^{\alpha\beta}, \tag{3.16}$$

podmínku (3.12) a $S_{\mathbf{0}} = 0$*, potom existuje konstanta* M*, která závisí pouze na* α, β, K, m *taková, že*

$$\mathrm{P}(\max_{\mathbf{i}\in I:\ \mathbf{0}\leq\mathbf{i}\leq(\frac{\delta}{2})\mathbf{v}} |S_{\mathbf{i}}| \geq \varepsilon) \leq \frac{M}{\varepsilon^\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

pro všechny m*-dimenzionální vektory* $\mathbf{v}$ *obsahující pouze* $1, -1$*.*

Důkaz tvrzení 3.3.4: Nejprve ukážeme, že posloupnost je těsná v prostoru spojitých funkcí $C([0,1]^m)$ a poté, že je těsná v jeho podprostoru $C^{0,\gamma}([0,1]^m)$.

Pro těsnost v prostoru $C([0,1]^m)$ nám stačí ukázat, že pro všechna kladná ε a η existuje kladné δ takové, že

$$\mathrm{P}(w(X_n, \delta) \geq 4\varepsilon) \leq \eta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

kde

$$w(X_n, \delta) = \sup_{\mathbf{s},\mathbf{t}:||\mathbf{s}-\mathbf{t}||_2<\delta} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{t})|. \tag{3.19}$$

Připomeňme lemma 3.3.3 a použijme koule se středy $\mathbf{j} \in J$ (viz (3.14)) a poloměry δ v supremální metrice. Pokud bude pro δ takové, že $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$ splněna nerovnost

$$\sum_{\mathbf{j}\in J} \mathrm{P}(\sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},\frac{\delta}{2})} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| \geq \varepsilon) \leq \eta, \tag{3.20}$$

potom bude také splněna nerovnost (3.18). Dokažme tedy nerovnost (3.20).

Potřebujeme omezit každý člen ze součtu (3.20). Fixujme $n, L, \delta > 0$ a $\mathbf{j} \in J$ a definujme si nové proměnné $S_{\mathbf{i}}$:

$$S_{\mathbf{i}} := X_n(\mathbf{j} + \mathbf{i}) - X_n(\mathbf{j}), \tag{3.21}$$

kde $\mathbf{i} \in I$, viz (3.15).

Podle (3.11) dostaneme pro každé $\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2 \in I$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|S_{\mathbf{i}^1} - S_{\mathbf{i}^2}| \geq \varepsilon) &= \mathrm{P}(|X_n(\mathbf{j} + \mathbf{i}_1) - X_n(\mathbf{j}) - X_n(\mathbf{j} + \mathbf{i}_2) + X_n(\mathbf{j})| \geq \varepsilon) \\
&= \mathrm{P}(|X_n(\mathbf{j} + \mathbf{i}_1) - X_n(\mathbf{j} + \mathbf{i}_2)| \geq \varepsilon) \\
&\leq \frac{K}{\varepsilon^\alpha}||\mathbf{i}^1 - \mathbf{i}^2||_2^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Teď využijeme tvrzení 3.3.5. Konstanta M (z nerovnosti (3.17)) nezávisí na L, a tak ze spojitosti procesu dostáváme:

$$\mathrm{P}(\sup_{\mathbf{j}\leq\mathbf{s}\leq\mathbf{j}+\mathbf{v}\frac{\delta}{2}} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| \geq \varepsilon) \leq \frac{M}{\varepsilon^\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha\beta}. \tag{3.22}$$

Protože kouli o poloměru $\frac{\delta}{2}$ v supremální metrice můžeme překrýt pomocí nejvýše 2^m částí ve tvaru $[\mathbf{0}, \frac{\delta}{2}\cdot\mathbf{v}]$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^m$ a obsahuje pouze $+1, -1$) dostáváme

$$\mathrm{P}(\sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},\frac{\delta}{2})} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| \geq \varepsilon) \leq \frac{M_1}{\varepsilon^\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha\beta}, \tag{3.23}$$

kde M_1 závisí pouze na K, α, β, m.

Jednotkový interval $[0,1]^m$ můžeme pokrýt pomocí δ^{-m} koulí se středy $\mathbf{j} \in J$ a poloměru $\frac{\delta}{2}$ v supremální metrice, můžeme tedy psát

$$\sum_{\mathbf{j}\in J}\mathrm{P}(\sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},\frac{\delta}{2})} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| \geq \varepsilon) \leq \frac{M_2}{\varepsilon^\alpha}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha\beta-m}, \tag{3.24}$$

kde konstanta M_2 závisí opět pouze na konstantách K, α, β, m.

Speciálně pro volbu $\delta = 2^{1-k}$ a $\varepsilon = K2^{-k\gamma}$ dostáváme:

$$\sum_{\mathbf{j}\in J}\mathrm{P}(\sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},1/2^k)} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| \geq K2^{-k\gamma}) \leq \frac{M_2}{K^\alpha}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha\beta-m-\alpha\gamma}. \tag{3.25}$$

Následující součet je pro α, β, γ, které splňují $\beta - m/\alpha > \gamma$, omezený

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{M_2}{K^\alpha}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha\beta-m-\alpha\gamma} < +\infty.$$

Můžeme tedy pro každé $\varepsilon, \eta > 0$ najít $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\varepsilon > K2^{-k\gamma}$ a pravá strana nerovnosti (3.25) je menší nebo rovna η. Jestliže položíme $\delta = 2^{1-k}$, dostaneme z nerovnosti (3.25) nerovnost (3.20).

Protože podmínka (3.18) je splněna, je posloupnost těsná v prostoru spojitých funkcí $C([0,1]^m)$.

Dále tedy potřebujeme ukázat těsnost v podprostoru $C^{0,\gamma}([0,1]^m)$. Chceme tedy ukázat, že pro všechna kladná ε existuje konstanta $\bar{K}_\varepsilon$ taková, že trajektorie procesů $(X_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)_{n\in\mathbb{N}}$ splňují podmínku (3.10) s konstantami γ a $\bar{K}_\varepsilon$ s pravděpodobností alespoň $1-\varepsilon$.

Vidíme tedy, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje konstanta $K_\varepsilon > 0$ taková, že

$$\mathrm{P}(\exists k \in \mathbb{N} : \max_{\mathbf{j}\in J}\sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},1/2^k)} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{j})| > K_\varepsilon 2^{-k\gamma}) \leq \varepsilon. \tag{3.26}$$

Položme

$$\Omega_\varepsilon^n = \{\omega : \forall k \in \mathbb{N} : \max_{j\in J} \sup_{\mathbf{s}\in B(\mathbf{j},1/2^k)} |X_n(\omega,\mathbf{s}) - X_n(\omega,\mathbf{j})| \leq K_\varepsilon 2^{-k\gamma}\},$$

potom $\mathrm{P}(\Omega_\varepsilon^n) \geq 1-\varepsilon$. Dále předpokládejme pouze $\omega \in \Omega_\varepsilon^n$. A ukažme, že existuje konstanta $\bar{K}_\varepsilon > 0$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^m : \ |X_n(\omega,\mathbf{s}) - X_n(\omega,\mathbf{t})| \leq \bar{K}_\varepsilon ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||_2^\gamma.$$

Ke každé dvojici $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0,1]^m$ můžeme najít konstantu l takovou, že

$$\frac{1}{2^l} \leq ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||_2 < \frac{2}{2^l}.$$

Využijeme lemma 3.3.3 s $\delta := 2^{1-l}$ a dostáváme pro $\omega \in \Omega_\varepsilon^n$

$$\begin{aligned} |X_n(\mathbf{s}) - X_n(\mathbf{t})| &\leq 4 \cdot \max_{\mathbf{j}\in J} \sup_{\mathbf{u}\in B(\mathbf{j},1/2^l)} |X_n(\mathbf{u}) - X_n(\mathbf{j})| \\ &\leq 4 \cdot K_\varepsilon 2^{-l\gamma} \\ &\leq 4 \cdot K_\varepsilon ||\mathbf{s}-\mathbf{t}||_2^\gamma. \end{aligned}$$

Položme $\bar{K}_\varepsilon := 4K_\varepsilon$.

Odvodili jsme, že pro $\gamma < \beta - \frac{m}{\alpha}$ můžeme pro všechna $\varepsilon > 0$ najít konstantu $\bar{K}_\varepsilon > 0$ takovou, že každý proces $(X_n(t), t \in [0,1]^m)$ je hölderovský s konstantami $\gamma, \bar{K}_\varepsilon$ s pravděpodobností alespoň $1-\varepsilon$.

Dále můžeme pro všechna $\varepsilon > 0$ najít kompaktní podmnožinu C_ε prostoru $C^{0,\gamma}([0,1]^m)$ takovou, že platí: $\mathrm{P}(X_n \in \mathsf{C}_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. (Pro každé kladné ε a každý proces $(X_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0,1]^m)$ najdeme podmnožinu $\mathsf{C}^n_{\varepsilon/2^n}$ takovou, že $\mathrm{P}(X_n \in \mathsf{C}^n_{\varepsilon/2^n}) \geq 1 - \varepsilon/2^n$ a položíme $\mathsf{C}_\varepsilon := \cap_{n=1}^{+\infty} \mathsf{C}^n_{\varepsilon/2^n}$.)

Q.E.D.

Zbývá dokázat tvrzení 3.3.5.

Důkaz tvrzení 3.3.5: Nejprve si všimněme, že $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathrm{P}(E_1) \wedge \mathrm{P}(E_2)$. A tak pro $\mathbf{i}, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{k}$ dostáváme z podmínky (3.16) nerovnost:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|S_\mathbf{i} - S_{\mathbf{l}_1}| \geq \varepsilon, |S_{\mathbf{l}_2} - S_\mathbf{k}| \geq \varepsilon) &\leq \left(\frac{K}{\varepsilon^\alpha} (||\mathbf{i}-\mathbf{l}_1||_2)^{\alpha\beta}\right) \wedge \left(\frac{K}{\varepsilon^\alpha} (||\mathbf{l}_2-\mathbf{k}||_2)^{\alpha\beta}\right) \\ &\leq \frac{K}{\varepsilon^\alpha} (\max(||\mathbf{i}-\mathbf{l}_1||_2, ||\mathbf{l}_2-\mathbf{k}||_2))^{\alpha\beta}. \qquad (3.27) \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{n} \in I$ položme (připomeňme, že $\mathbf{l} \in I_{\langle \mathbf{0},\mathbf{n}\rangle}$ značí, že $\mathbf{l}$ leží mezi body $\mathbf{0}$ a $\mathbf{n}$)

$$\begin{aligned} M_\mathbf{n}' &:= \max_{\mathbf{l}\in I_{\langle \mathbf{0},\mathbf{n}\rangle}} \min\{|S_\mathbf{l}|, |S_\mathbf{n} - S_\mathbf{l}|\} \\ M_\mathbf{n} &:= \max_{\mathbf{i}\in I_{\langle \mathbf{0},\mathbf{n}\rangle}} |S_\mathbf{i}|. \end{aligned}$$

Podobně jako v (Billingsley, 1968, Th 12.1) ukážeme, že

$$\mathrm{P}(M'_{\mathbf{n}} \geq \varepsilon) \leq \frac{\hat{K}}{\varepsilon^{\alpha}} ||\mathbf{n}||_2^{\alpha\beta}, \tag{3.28}$$

kde konstanta $\hat{K}$ závisí pouze na α, β, K, m. Přesněji, konstanta $\hat{K}$ je taková, že $\hat{K} \geq 3^m K$ a zároveň je dostatečně velká, aby platila nerovnost (3.31).

Pro důkaz (3.28) využijeme indukci. Nejprve ukážeme, že nerovnost (3.28) platí pro $\mathbf{n} : |\mathbf{n}| \leq \mathbf{1}\delta/(2L)$ (kde $|\mathbf{n}|$ značíme $(|n_1|, |n_2|, \cdots, |n_m|)$). Díky (3.27) můžeme pro $\mathbf{i} \in I$ takové, že $\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{0}, \mathbf{n} \rangle}$ psát:

$$\mathrm{P}(|S_{\mathbf{i}}| \geq \varepsilon, |S_{\mathbf{n}} - S_{\mathbf{i}}| \geq \varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^{\alpha}} (\max(||\mathbf{i}||_2, ||\mathbf{n} - \mathbf{i}||_2))^{\alpha\beta} \leq \frac{K}{\varepsilon^{\alpha}} ||\mathbf{n}||_2^{\alpha\beta}. \tag{3.29}$$

Protože $\mathbf{i} \in I$ a $\mathbf{n}$ jsou taková, že $|\mathbf{n}| \leq \mathbf{1}\delta/(2L)$ je zřejmé, že takových $\mathbf{i}$, která leží mezi $\mathbf{0}$ a $\mathbf{n}$ není více než 2^m.

A tak díky (3.29) je podmínka (3.28) splněna s konstantou $K2^m$.

Podobně ukážeme splnění podmínky pro všechna $\mathbf{n}$ taková, že $|\mathbf{n}| \leq \delta/L$, jen s konstantou $K3^m$.

Teď mějme $\mathbf{h} \in I$ takové, že podmínka (3.28) je splněna pro všechna $\mathbf{n} \in I$ taková, že $\mathbf{n} \in I_{\langle \mathbf{0}, \mathbf{h})}$. A potřebujeme ukázat, že potom je tato podmínka splněna také pro $\mathbf{h}$.

Prostor mezi body $\mathbf{j}$ a $\mathbf{j}+\mathbf{h}$ rozdělíme do dvou částí, k tomu využijeme dvou referenčních bodů, které získáme následujícím způsobem. Nechť h_k je největší (v absolutní hodnotě) souřadnice bodu $\mathbf{h}$, potom jedním referenčním bodem bude bod $\mathbf{r}_1$, který bude mít stejné souřadnice jako bod $\mathbf{h}$, jen k-tá souřadnice bude rovna $\mathrm{sign}(h_k)\lfloor \frac{|h_k|}{2} \rfloor_I$, kde $\lfloor x \rfloor_I = \lfloor x \cdot \frac{2L}{\delta} \rfloor \cdot \frac{\delta}{2L}$ a $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x. Druhým referenčním bodem bude bod $\mathbf{r}_2$, který bude mít stejné souřadnice jako bod $\mathbf{0}$, jen k-tou souřadnici bude mít $\mathrm{sign}(h_k)\lfloor \frac{|h_k|}{2} \rfloor_I + \mathrm{sign}(h_k)\delta/(2L)$. Protože předpokládáme, že $\mathbf{i} \in I$ a $\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{0}, \mathbf{h})}$, potom buď $\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{0}, \mathbf{r}_1 \rangle}$ nebo $\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{h})}$. Navíc

$$||\mathbf{r}_1||_2, ||\mathbf{h} - \mathbf{r}_2||_2 \leq ||\mathbf{h}||_2 \sqrt{1 - \frac{3}{4m}} = ||\mathbf{h}||_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{1 - \frac{1}{2}\log_2(4 - 3/m)}.$$

Položme:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \max_{\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{0}, \mathbf{r}_1 \rangle}} \min\{|S_{\mathbf{i}}|, |S_{\mathbf{r}_1} - S_{\mathbf{i}}|\}, \\ U_2 &:= \max_{\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{h})}} \min\{|S_{\mathbf{i}} - S_{\mathbf{r}_2}|, |(S_{\mathbf{h}} - S_{\mathbf{r}_2}) - (S_{\mathbf{i}} - S_{\mathbf{r}_2})|\} \\ &= \max_{\mathbf{i} \in I_{\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{h})}} \min\{|S_{\mathbf{i}} - S_{\mathbf{r}_2}|, |S_{\mathbf{h}} - S_{\mathbf{i}}|\}, \end{aligned}$$

kde maximum bereme přes $\mathbf{i} \in I$ v odpovídající části. Všimněme si, že člen U_2 je podobný členu U_1, pokud bychom nahradili prvek $\mathbf{i}$ prvkem $\mathbf{i} + \mathbf{r}_2$. Dále položme

$$D_l := \min\{|S_{\mathbf{r}_l}|, |S_{\mathbf{h}} - S_{\mathbf{r}_l}|\}, \quad l = 1, 2.$$

Z indukčních předpokladů a z podmínky (3.27) dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U_l \geq \varepsilon) &\leq \frac{\hat{K}}{\varepsilon^\alpha} ||\mathbf{h}||_2^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))\alpha\beta}, \\ \mathrm{P}(D_l \geq \varepsilon) &\leq \frac{K}{\varepsilon^\alpha} ||\mathbf{h}||_2^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Členy U_l, D_l jsme definovali tak, že:

$$\min\{|S_{\mathbf{i}}|, |S_{\mathbf{h}} - S_{\mathbf{i}}|\} \leq U_l + D_l \qquad \forall \mathbf{i} \text{ v odpovídající části.}$$

Tedy pro bod $\mathbf{h}$ dostáváme

$$M_{\mathbf{h}}^{'} \leq \max\{U_1 + D_1, U_2 + D_2\},$$

a tedy

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{h}}^{'} \geq \varepsilon) \leq \mathrm{P}(U_1 + D_1 \geq \varepsilon) + \mathrm{P}(U_2 + D_2 \geq \varepsilon).$$

Pro všechna $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ taková, že $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U_l + D_l \geq \varepsilon) &\leq \min_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 : \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon} (\mathrm{P}(U_l \geq \varepsilon_1) + \mathrm{P}(D_l \geq \varepsilon_2)) \\ &\leq \min_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 : \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon} \left(\frac{\hat{K}}{\varepsilon_1^\alpha} ||\mathbf{h}||_2^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))\alpha\beta} + \frac{K}{\varepsilon_2^\alpha} ||\mathbf{h}||^{\alpha\beta} \right) \\ &\leq \hat{K}\, ||\mathbf{h}||^{\alpha\beta} \min_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 : \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon_1^\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha\beta(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))} + \frac{K}{\varepsilon_2^\alpha \hat{K}} \right). \end{aligned}$$

A hledáme minimum následujícího členu:

$$\min_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 : \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon_1^\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha\beta(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))} + \frac{1}{\varepsilon_2^\alpha} \frac{K}{\hat{K}} \right).$$

Potřebujeme tedy najít nejmenší hodnotu členu:

$$\min_{0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon} \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1^\alpha} + \frac{C_2}{(\varepsilon - \varepsilon_1)^\alpha} \right),$$

což je

$$\frac{1}{\varepsilon^\alpha} \left(C_1^{\frac{1}{1+\alpha}} + C_2^{\frac{1}{1+\alpha}} \right)^{1+\alpha}.$$

Pokud použijeme naše konstanty, dostaneme:

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\left(\left(\frac{K}{\hat{K}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha\beta(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))}{1+\alpha}}\right)^{1+\alpha}. \tag{3.30}$$

A potřebujeme takové konstanty, aby člen (3.30) byl menší nebo roven $\varepsilon^{-\alpha}2^{-1}$. Přesněji tedy potřebujeme, aby:

$$2\left(\left(\frac{K}{\hat{K}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha\beta(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m))}{1+\alpha}}\right)^{1+\alpha}\leq 1. \tag{3.31}$$

Připomeňme podmínku (3.12) na konstanty α, β. Máme

$$\alpha\beta > \frac{2}{\log_2\frac{4m}{4m-3}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m)}.$$

A tedy

$$D := \alpha\beta\left(1-\frac{1}{2}\log_2(4-3/m)\right) > 1.$$

Nerovnost (3.31) můžeme zapsat ve tvaru

$$\left(\frac{K}{\hat{K}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{D}{1+\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{D-1}{1+\alpha}}\right).$$

Protože

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{D-1}{1+\alpha}} > 0$$

můžeme zvolit konstantu $\hat{K}$ takovou, že $\hat{K} \geq 3^m K$ a zároveň je dostatečně velká, aby nerovnost (3.31) byla splněna. Tedy platnost nerovnosti (3.28) je dokázána indukcí.

Zbývá si povšimnout, že

$$M_{\mathbf{n}} \leq M_{\mathbf{n}}^{'} + |S_{\mathbf{n}}|.$$

a tudíž platí

$$\mathrm{P}(M_{\mathbf{n}} \geq \varepsilon) \leq \mathrm{P}(M_{\mathbf{n}}^{'} \geq \varepsilon/2) + \mathrm{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \varepsilon/2). \tag{3.32}$$

První člen na pravé straně již byl omezen, chybí tedy jen omezit druhý člen. A pro ten můžeme využít nerovnosti (3.16), abychom dostali:

$$\mathrm{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^{\alpha}}||\mathbf{n}||_2^{\alpha\beta},$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Q.E.D.

3.4 Martingalové aproximace

V první části této podkapitoly ukážeme zobecnění Doobovy nerovnosti pro adaptované procesy s nelineárním růstem rozptylu. Jedná se o zobecnění věty od Peligradové a Uteva, viz tvrzení 1.4.15. Peligradová a Utev mají ve svém tvrzení podmínku (1.11), jako normující člen používají $n^{3/2}$. Podmínka (3.33) naší věty se liší tím, že jako normující člen využívá člen $\sqrt{n}\sigma_n$ (a tedy povoluje nelineární růst rozptylu).

Ve druhé části ukážeme princip invariance pro neadaptované procesy a nakonec se podíváme, jaké existují různé možnosti aproximace posloupností martingalovými diferencemi, jaký je mezi nimi vztah a zda nám zaručují principy invariance či centrální limitní větu, resp. za jakých podmínek.

3.4.1 Zobecnění Doobovy nerovnosti

Věta 3.4.1 *Nechť $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je stacionární posloupnost náhodných veličin adaptovaných na filtraci $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, položme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, a $\sigma_n^2 = \mathrm{E}S_n^2$. Předpokládejme, že*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2}{n\sigma_n} < +\infty. \tag{3.33}$$

Potom existuje nějaká pomalu se měnící neklesající funkce $\bar{l}$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $2^{r-1} < n \le 2^r$ platí:

$$\mathrm{E}\left(\max_{1\le i\le n} S_i^2\right) \le n\left(2||X_1||_2 + \bar{l}(2^r)(1+\sqrt{2})\Delta_r\right)^2, \tag{3.34}$$

kde

$$\Delta_r = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{||\mathrm{E}(S_{2^j}|\mathcal{F}_0)||_2}{\sigma_{2^j}}. \tag{3.35}$$

Funkce $\bar{l}$ může být definována následovně:

$$\bar{l}(n) := \max_{0\le k\le n} l(k), \tag{3.36}$$

kde $l(\cdot)$ je pomalu se měnící funkce taková, že $\sigma_n = \sqrt{n}l(n)$.

Než začneme dokazovat větu, dokážeme tři pomocná lemmata.

Lemma 3.4.2 *Nechť $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je stacionární posloupnost náhodných veličin adaptovaných na filtraci $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, nechť $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a $\sigma_n^2 = \mathrm{E}S_n^2$. Předpokládejme, že platí podmínka (3.33), potom :*

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sigma_n).$$

Důkaz: Označme si

$$\begin{aligned} V_n &= ||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 \\ K_n &= ||S_n - \mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2. \end{aligned}$$

Potom $\sigma_n^2 = V_n^2 + K_n^2$, a tedy podmínku (3.33) můžeme zapsat:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2}{n\sigma_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n}{n\sqrt{K_n^2 + V_n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1 + \frac{K_n^2}{V_n^2}}} < +\infty.$$

Naším cílem je ukázat, že

$$\frac{V_n}{\sigma_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K_n^2}{V_n^2}}} \to 0 \text{ pro } n \to +\infty.$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K_n^2}{V_n^2}}} \not\to 0 \text{ pro } n \to +\infty.$$

Předpokládáme tedy, že existuje nějaké kladné ε a nějaká posloupnost $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow +\infty$ taková, že pro všechna n_k z této posloupnosti:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K_{n_k}^2}{V_{n_k}^2}}} \geq \varepsilon.$$

Po úpravě dostáváme:

$$\frac{K_{n_k}^2}{V_{n_k}^2} \leq \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \tag{3.37}$$

pro všechna n_k.

Dále vyšetřeme, jak se chová posloupnost $\left(\frac{K_n^2}{V_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. O posloupnosti $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ víme (viz (Peligrad and Utev, 2005, L 2.6)), že je subaditivní, tedy $V_{i+j} \leq V_i + V_j$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$. Pro posloupnost K_n^2 můžeme psát:

$$\begin{aligned} K_{i+j}^2 &= ||S_{i+j} - \mathrm{E}(S_{i+j}|\mathcal{F}_0)||_2^2 \\ &= \mathrm{E}\sum_{k=1}^{i+j}(P_k S_{i+j})^2 \\ &= \mathrm{E}\sum_{k=1}^{i}(P_k S_{i+j})^2 + \mathrm{E}\sum_{k=i+1}^{i+j}(P_k S_{i+j})^2 \\ &= \mathrm{E}\sum_{k=1}^{i}(P_k S_{i+j})^2 + \mathrm{E}\sum_{k=1}^{j}(P_k S_j)^2 \\ &\geq ||S_j - \mathrm{E}(S_j|\mathcal{F}_0)||_2^2 = K_j^2. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, nerovnost:

$$K_{i+j}^2 \geq \max(K_i, K_j).$$

Pro zlomek $\frac{K_n^2}{V_n^2}$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} \frac{K_{i+j}^2}{V_{i+j}^2} &\geq \frac{\max(K_i^2, K_j^2)}{(V_i + V_j)^2} \\ &\geq \frac{\max(K_i^2, K_j^2)}{4\max(V_i^2, V_j^2)} \\ &\geq \frac{1}{4}\min\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_j}{V_j}\right)^2. \end{aligned}$$

Tato nerovnost platí pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$. Proto, pokud označíme

$$A_n := \left\{ i; 1 \leq i \leq n, \frac{K_i^2}{V_i^2} \leq 4\frac{K_n^2}{V_n^2} \right\},$$

potom mohutnost této množiny je pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

My předpokládáme posloupnost $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pro kterou platí podmínka (3.37), tedy pro všechna n_k existuje alespoň $\lceil \frac{n_k}{2} \rceil$ indexů $i : 1 \leq i \leq n_k$, pro které

$$\frac{K_i^2}{V_i^2} \leq 4\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \tag{3.38}$$

Pokud je splněna nerovnost (3.38), potom platí:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{K_i^2}{V_i^2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}} =: \delta.$$

A tak dostáváme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{K_n^2}{V_n^2}}} \geq \delta \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_{k+1}} \frac{n_{k+1}-n_k}{2}. \tag{3.39}$$

Nutnou podmínkou pro konvergenci levé strany nerovnosti (3.39) je

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 1. \tag{3.40}$$

Pro každou posloupnost $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pro kterou je splněna podmínka (3.40) existuje nějaké $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{n_{k+1}-n_k}{2n_{k+1}} \geq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}-2^k}{2\cdot 2^{k+1}}.$$

Jelikož
$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}-2^k}{2\cdot 2^{k+1}} = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{4},$$
řada
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{K_n^2}{V_n^2}}}$$
diverguje také, což je spor s předpokladem. Tvrzení je dokázáno.

Q.E.D.

Připomeňme, že díky tomuto lemmatu a Wu a Woodroofeovi (Wu and Woodroofe, 2004, L 1), viz lemma 1.4.12, vyplývá z podmínky (3.33) existence pomalu se měnící funkce $l(x)$ takové, že $\sigma_n = \sqrt{n}l(n)$. Snadno nahlédneme, že potom také funkce definovaná v (3.36) je pomalu se měnící.

Lemma 3.4.3 *Jsou-li splněny podmínky věty 3.4.1, potom pro funkci $\bar{l}$ definovanou v (3.36), pro Δ_r, viz (3.35), a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $2^{r-1} < n \leq 2^r$ platí:*
$$\mathrm{E}S_n^2 \leq n\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^r)}{2}\Delta_r\right)^2. \tag{3.41}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $r = 0$ a $n = 1$ nerovnost platí. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $r \in \mathbb{N}$ nerovnost (3.41) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \leq 2^{r-1}$. A dokažme, že platí také pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $2^{r-1} < n \leq 2^r$. Podobně jako Peligradová a Utev (Peligrad and Utev, 2005) v důkazu věty 1 můžeme psát (připomeňme, že $\bar{l}(n)$ a Δ_r jsou neklesající):
$$||\mathrm{E}(S_{2^{r-1}}|\mathcal{F}_0)||_2 \leq \sqrt{2^{r-1}}\bar{l}(2^{r-1})(\Delta_r - \Delta_{r-1})$$
a díky tomu dále dostáváme (využitím stacionarity a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti:
$$\begin{aligned}
||S_n||_2^2 &\leq ||S_{n-2^{r-1}} + S_n - S_{n-2^{r-1}}||_2^2 \\
&\leq ||S_{n-2^{r-1}}||_2^2 + ||S_n - S_{n-2^{r-1}}||_2^2 + 2\mathrm{E}(S_{n-2^{r-1}}(S_n - S_{n-2^{r-1}})) \\
&\leq ||S_{n-2^{r-1}}||_2^2 + ||S_n - S_{n-2^{r-1}}||_2^2 + 2\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(S_{n-2^{r-1}}(S_n - S_{n-2^{r-1}})|\mathcal{F}_{n-2^{r-1}})\right) \\
&\leq ||S_{n-2^{r-1}}||_2^2 + ||S_{2^{r-1}}||_2^2 + 2||S_{n-2^{r-1}}||_2||\mathrm{E}(S_{2^{r-1}}|\mathcal{F}_0)||_2 \\
&\leq (n-2^{r-1})\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}\Delta_{r-1}\right)^2 + 2^{r-1}\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}\Delta_{r-1}\right)^2 \\
&\quad + 2\sqrt{n-2^{r-1}}\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}\Delta_{r-1}\right)\sqrt{2^{r-1}}\bar{l}(2^{r-1})(\Delta_r - \Delta_{r-1}) \\
&\leq n\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}\Delta_{r-1}\right)^2 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2n\left(||X_1||_2+\frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}\Delta_{r-1}\right)\frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2}(\Delta_r-\Delta_{r-1}) \\
\leq\ & n\left(||X_1||_2+\frac{\bar{l}(2^{r})}{2}\Delta_{r}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Lemma 3.4.4 *Nechť $(Y_i)_{i=1}^n$ je náhodný vektor s konečnými druhými momenty takový, že pro každé $i : 1 \leq i \leq n$ je náhodná veličina Y_i měřitelná vůči σ-algebře $\mathcal{F}_i = \sigma(X_j, j \leq i)$, kde $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je stacionární proces, který splňuje podmínku (3.33). Nechť $n \leq 2^r$. Jestliže pro všechna a, b takové, že $1 \leq a \leq b \leq n$ a pro nějakou kladnou konstantu C platí:*

$$
\mathrm{E}\left(\sum_{l=a}^{b} Y_l\right)^2 \leq C^2(b-a+1), \tag{3.42}
$$

potom pro Δ_r, viz (3.35), a funkci $\bar{l}(\cdot)$ definovanou v (3.36) platí:

$$
\left|\mathrm{E}\sum_{l=1}^{n-1} Y_l(S_n-S_l)\right| \leq \frac{\bar{l}(2^r)}{2}Cn\Delta_r. \tag{3.43}
$$

Důkaz: Použijeme indukci. V indukčním kroku ukážeme platnost poněkud obecnější nerovnosti než je nerovnost (3.43), a to následující nerovnosti, kde počet sčítanců k je menší nebo roven n a nerovnost platí pro všechna přirozená j taková, že $j + k \leq n$. Potom

$$
\left|\mathrm{E}\sum_{l=j+1}^{j+k-1} Y_l(S_{j+k}-S_l)\right| \leq \frac{\bar{l}(2^s)}{2}Ck\Delta_s, \tag{3.44}
$$

kde s je takové, že $k \leq 2^s$.

Pro $k = 2$ a libovolné j takové, že $j + 2 \leq n$ nerovnost (3.44) platí, neboť

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}Y_{j+1}X_{j+2} &= \mathrm{E}(Y_{j+1}\mathrm{E}(X_{j+2}|\mathcal{F}_{j+1})) \\
&\leq ||Y_{j+1}||_2 \cdot ||\mathrm{E}(X_1|\mathcal{F}_0)||_2 \\
&\leq C\Delta_1\sigma_1 \leq \frac{\bar{l}(2)}{2}C2\Delta_1.
\end{aligned}
$$

Dále předpokládejme, že lemma platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$ taková, že $k \leq 2^{s-1}$ a zafixujme $k : 2^{s-1} < k \leq 2^s \wedge n$. Můžeme psát (pro všechna přirozená $j : j+k \leq n$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=j+1}^{j+k-1} Y_l(S_{j+k}-S_l) &= \sum_{l=j+1}^{j+k-2^{s-1}-1} Y_l(S_{j+k-2^{s-1}}-S_l) + \sum_{l=j+k-2^{s-1}}^{j+k-1} Y_l(S_{j+k}-S_l) + \\
&\quad + \sum_{l=j+1}^{j+k-2^{s-1}-1} Y_l(S_{j+k}-S_{j+k-2^{s-1}}) \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Z indukčního předpokladu dostáváme:

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{E}I_1| &\leq \frac{\bar{l}(2^{s-1})}{2} C(k-2^{s-1})\Delta_{s-1},\\
|\mathrm{E}I_2| &\leq \frac{\bar{l}(2^{s-1})}{2} C 2^{s-1}\Delta_{s-1}.
\end{aligned}
$$

Třetí člen můžeme omezit:

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{E}I_3| &\leq ||S_{j+k} - S_{j+k-2^{s-1}}||_2 \left|\left|\sum_{l=j+1}^{j+k-2^{s-1}-1} Y_l\right|\right|_2\\
&\leq C\sqrt{k-2^{s-1}}\sqrt{2^{s-1}}\bar{l}(2^{s-1})(\Delta_s - \Delta_{s-1})\\
&\leq \frac{\bar{l}(2^{r-1})}{2} Ck(\Delta_s - \Delta_{s-1}).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Důkaz věty 3.4.1 Důkaz této věty probíhá podobným způsobem jako důkaz věty (Peligrad and Utev, 2006, Th 1). Označme

$$
M_n = \max_{1\leq i\leq n} |S_i| \quad \text{a} \quad K_m = \max_{1\leq j\leq m} \frac{1}{j}\mathrm{E}(\max_{1\leq i\leq j} S_i^2).
$$

Nejprve ukážeme, že pro všechna $n : 2^{r-1} \leq n \leq 2^r$ platí

$$
\mathrm{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} S_i^2\right) \leq n\left(2\bar{l}(2^r)K_n^{\frac{1}{2}}\Delta_r + 4\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^r)}{2}\Delta_r\right)^2\right). \tag{3.45}
$$

Potom dostaneme:

$$
K_n \leq 2\bar{l}(2^r)K_n^{\frac{1}{2}}\Delta_r + 4\left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^r)}{2}\Delta_r\right)^2
$$

a odvodíme, že

$$
K_n^{\frac{1}{2}} \leq 2||X_1||_2 + \bar{l}(2^r)(\sqrt{2}+1)\Delta_r).
$$

Tím bude věta dokázána.

Pro důkaz nerovnosti (3.45) použijeme podobných argumentů jako Peligradová a Utev v (Peligrad and Utev, 2006, dk Th 1) a nerovnosti (Dedecker and Rio, 2000, (3.4)). Jedinou změnou je použití lemmatu 3.4.4 místo lemmatu (Peligrad and Utev, 2006, L 2.2), tedy lemmatu s konstantou $\bar{l}(2^r)$.

Položme $S_0 = 0$ a označme

$$
M_n^+ = \max_{1\leq j\leq n} S_j^+ = \max(0, S_1, \ldots, S_n)
$$

a

$$M_n^- = \max_{1\le j\le n}\left(-S_j^-\right) = \max(0, -S_1, \dots, -S_n).$$

Využijeme následující nerovnost z (Dedecker and Rio, 2000, (3.4)):

$$(M_n^+)^2 \le 4(S_n^+)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^+ X_k.$$

A použitím podobné nerovnosti také pro M_n^- a sečtením M_n^+ a M_n^- dostaneme:

$$M_n^2 \le 4(S_n)^2 - 4\sum_{k=1}^{n}(M_{k-1}^+ - M_{k-1}^-)X_k.$$

Protože $X_k = (S_n - S_{k-1}) - (S_n - S_k)$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=1}^{n}(M_{k-1}^+ - M_{k-1}^-)X_k = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n}(M_{k-1}^+ - M_{k-1}^-)((S_n - S_{k-1}) - (S_n - S_k)) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1}(M_k^+ - M_k^-)(S_n - S_k) - \sum_{k=1}^{n}(M_{k-1}^+ - M_{k-1}^-)(S_n - S_k) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1}((M_k^+ - M_k^-) - (M_{k-1}^+ - M_{k-1}^-))(S_n - S_k).
\end{aligned}$$

A tedy pro $D_k = (M_k^+ - M_{k-1}^+) - (M_k^- - M_{k-1}^-)$ dostáváme

$$M_n^2 \le 4(S_n)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} D_k(S_n - S_k).$$

Snadno vidíme, že

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=a+1}^{b} D_k\right| &\le \left((M_b^+ - M_a^+) \vee (M_b^- - M_a^-)\right) \\
&\le \max_{a\le i\le b}|S_i - S_a|.
\end{aligned}$$

Díky stacionaritě dostáváme:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{k=a+1}^{b} D_k\right)^2 \le \mathrm{E}\left(\max_{1\le i\le b-a} S_i^2\right)^2 = (b-a)K_{b-a} \le (b-a)K_n.$$

A z lemma 3.4.4, kde položíme $Y_k = D_k$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $C = K_n^{\frac{1}{2}}$, dostáváme

$$\left| \mathrm{E} \sum_{k=1}^{n-1} D_k(S_n - S_k) \right| \leq \frac{\bar{l}(2^r)}{2} n K_n^{\frac{1}{2}} \Delta_r.$$

A tedy (s využitím (3.41))

$$\mathrm{E}M_n^2 \leq 4n \left(||X_1||_2 + \frac{\bar{l}(2^r)}{2} \Delta_r \right)^2 + 2\bar{l}(2^r) n K_n^{\frac{1}{2}} \Delta_r.$$

Q.E.D.

Poznámka: Zobecnění této nerovnosti mělo být využito pro důkaz zobecněného principu invariance od Peligradové a Uteva, věta 1.4.14. Magda Peligradová se ale domnívá, že podmínky (3.33) a (1.11) jsou ekvivalentní.

$\triangle$

3.4.2 Princip invariance pro neadaptované procesy

Naším cílem je ukázat princip invariance pro neadaptované procesy. Přesněji, dokážeme větu podobnou větě (Wu and Woodroofe, 2004, Cor 3), viz věta 1.4.13. Wu a Woodroofe dokázali princip invariance pro adaptované procesy. My zde ukážeme za podobných předpokladů princip invariance obecně pro neadaptované procesy.

K tomu využijeme martingalovou aproximaci neadaptovaných stochastických procesů s nelineárním růstem rozptylu, kterou představil Volný ve své práci (Volný, 2006, Th 3). Pro důkaz principu invariance pro neadaptované procesy budeme potřebovat nejprve zobecnit následující lemma, viz (Wu and Woodroofe, 2004, L 5).

Výsledky této kapitoly jsou obsaženy v práci (Klicnarová and Volný, 2007).

V celé této části předpokládáme náhodné veličiny X_0 takové, že $\mathrm{E}(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ a $\mathrm{E}(X_0|\mathcal{F}_{+\infty}) = X_0$, jinými slovy, že platí $X_0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_i X_0$.

Připomeňme také, že σ-algebry $\mathcal{F}_i$, viz (1.6), jsou definovány tak, že $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$ pro všechna $i \in \mathbb{Z}$ a projekce P_i jsou definovány:

$$P_i f = \mathrm{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathrm{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}).$$

Lemma 3.4.5 *Nechť posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je adaptovaná na filtraci $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a nechť pro nějaké $q > 1$ platí:*

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sqrt{n} \log^{-q} n).$$

Potom existuje martingal $M_1, M_2, \ldots$ se stacionárními přírůstky, pro který platí: $||S_n - M_n||_2 = o(\sqrt{n} \log^{1-q} n)$.

Pro neadaptované posloupnosti získáme toto lemma v následujícím tvaru.

Lemma 3.4.6 *Předpokládejme, že pro nějaké $q > 1$ platí:*

$$||\mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_0)||_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n) \quad a \quad ||S_n - \mathrm{E}(S_n|\mathcal{F}_n)||_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n). \quad (3.46)$$

Potom existuje martingalová aproximace $M_1, M_2, \ldots$ se stacionárními přírůstky, pro kterou platí $||S_n - M_n||_2 = o(\sqrt{n}\log^{1-q} n)$.

Důkaz: Využijeme stejného postupu jako Volný v důkazu věty (Volný, 2006, Th 5). Náhodné veličiny $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si rozložíme jako $X_k = X_k^{'} + X_k^{''}$, kde $X_k^{'} = \mathrm{E}(X_k|\mathcal{F}_k)$ a $X_k^{''} = X_k - \mathrm{E}(X_k|\mathcal{F}_k)$. Potom posloupnost $(X_k^{'})_{k\in\mathbb{N}}$ je adaptovaná na filtraci $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a splňuje podmínky lemmatu 3.4.5, tedy existuje martingal $(M_k^{'})_{k\in\mathbb{N}}$ takový, že

$$||S_n^{'} - M_n^{'}||_2 = o(\sqrt{n}\log^{1-q} n). \quad (3.47)$$

Dále definujme veličinu $Z_k = U^k V X_0^{''}$, kde operátor V je definovaný v (1.10). Potom posloupnost $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je adaptovaná na filtraci $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. A podobně jako Volný v tvrzení (Volný, 2006, Cor 1) dostaneme:

$$\left|\left|\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k|\mathcal{F}_0\right)\right|\right|_2 = ||S_n^{''} - \mathrm{E}(S_n^{''}|\mathcal{F}_n)||_2,$$

kde $S_n^{''} = \sum_{i=1}^{n} X_n^{''}$. A tedy dostáváme

$$\left|\left|\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k|\mathcal{F}_0\right)\right|\right|_2 = o(\sqrt{n}\log^{-q} n).$$

Tedy posloupnost $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ splňuje také podmínky lemmatu 3.4.5, a tedy existuje martingal $(M_k^{''})_{k\in\mathbb{N}}$ se striktně stacionárními přírůstky, který splňuje

$$||\sum_{k=1}^{n} Z_k - M_n^{''}||_2 = o(\sqrt{n}\log^{1-q} n).$$

Tento martingal můžeme psát jako součet martingalových diferencí:

$$M_k^{''} = \sum_{i=1}^{k} D_i^Z,$$

kde platí: $D_i^Z = U D_{i-1}^Z$. Připomeňme, že $X_k^{''} = U^k X_0^{''}$ a $Z_k = U^k V X_0^{''}$, tedy $X_k^{''} = V^{-1} U^{-2k} Z_k$. Uvědomme si, že

$$V D_k^Z = \sum_{i\in\mathbb{Z}} U^{-i} P_0 U^{-i} D_k^Z = \sum_{i\in\mathbb{Z}} U^{-2i} P_i D_k^Z = U^{-2k} D_k^Z.$$

Použijeme-li tedy stejnou transformaci pro martingalové diference (jako pro veličiny Z_k), dostaneme

$$D_k'' = V^{-1}U^{-2k}D_k^Z = D_k^Z.$$

Lemma je dokázáno.

Q.E.D.

Dále si připomeňme lemma 6 z práce (Wu and Woodroofe, 2004), které také potřebujeme pro důkaz principu invariance.

Lemma 3.4.7 *Nechť $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou a konečnými druhými momenty. Položme $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Potom*

$$\mathrm{E}(\max_{j\le n} T_j^2) \le d\sum_{j=0}^{d} 2^{d-j}||T_{2^j}||_2^2,$$

kde $d = \lfloor \log_2 n\rfloor$.

Důkaz: Viz (Wu and Woodroofe, 2004).

Teď tedy formulujme a dokažme princip invariance pro obecně ne nutně adaptované posloupnosti. Důkaz probíhá obdobně jako důkaz principu invariance pro adaptované posloupnosti, (Wu and Woodroofe, 2004, Th 3), ovšem musíme využít lemmatu 3.4.6.

Věta 3.4.8 *Jestliže $f \in H_{+\infty}\ominus H_{-\infty}$ a platí podmínka (3.46) pro nějaké $q \ge 2$, funkce $f \in L_p$ pro nějaké $p > 2$, potom pro $\sigma_n := ||S_n||_2$ existuje konečná limita $\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma_n^2}{n}$ a proces*

$$\mathbb{S}_n(t) := \frac{1}{\sigma_n} S_{\lfloor nt\rfloor}$$

konverguje v distribuci k Wienerovu procesu na prostoru $D[0,1]$.

Důkaz: Položme $R_n = S_n - M_n$, kde M_n jsou definovány v lemmatu 3.4.6, D_{ni} jsou jejich přírůstky a označme

$$\mathbb{M}_n(t) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} D_{nk}.$$

Dále budeme značit G_n, resp. K_n, rozdělení procesu $\mathbb{S}_n$, resp. procesu $\mathbb{M}_n$, na prostoru $D[0,1]$. Potom podle principu invariance pro martingalové diference (viz např. (Štěpán, 1987, V VI.5.6)) $K_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi$ pro $n\to+\infty$, kde Ψ je rozdělení Wienerova procesu.

A tak nám bude stačit, pokud ukážeme, že

$$\mathrm{P}\left(\max_{k\le n}\frac{|R_k|}{\sigma_n}\ge\varepsilon\right)\to 0$$

pro všechna $\varepsilon>0$.

Nechť $\gamma=\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}$. Položme $a=a_m=\lceil 2^{\gamma m}\rceil$ a $b=b_m=\lceil 2^{(1-\gamma)m}\rceil$. Potom

$$\max_{j\le 2^m}|R_j|\le\max_{1\le k\le b}\left[|R_{ak}|+\max_{0\le j\le a}|R_{ak+j}-R_{ak}|\right].$$

Protože

$$\begin{aligned}\max_{0\le j\le a}|R_{ak+j}-R_{ak}| &\le \max_{0\le j\le a}|M_{ak+j}-M_{ak}|+\max_{0\le j\le a}|S_{ak+j}-S_{ak}|\\ &\le \max_{0\le j\le a}|M_{ak+j}-M_{ak}|+a\max_{j\le 2^m}|X_j|\end{aligned}$$

pro všechna k, dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\max_{j\le 2^m}|R_j|\ge 3\varepsilon 2^{\frac{m}{2}}) &\le \mathrm{P}\left(\max_{1\le j,k\le 2^m,|j-k|<a}\frac{|M_k-M_j|}{2^{\frac{m}{2}}}\ge\varepsilon\right)+\\ &+\mathrm{P}\left(\max_{j\le 2^m}\frac{X_j}{2^{\frac{m}{2}}}\ge\frac{\varepsilon}{a}\right)+\mathrm{P}\left(\max_{k\le b}\frac{|R_{ak}|}{2^{\frac{m}{2}}}\ge\varepsilon\right),\end{aligned}$$

první člen na pravé straně konverguje k nule z principu invariance pro martingalové diference.

Pro druhý člen dostáváme:

$$\mathrm{P}\left(\max_{j\le 2^m}\frac{X_j}{2^{\frac{m}{2}}}\ge\frac{\varepsilon}{a}\right)\le\frac{a^p}{\varepsilon^p}2^{m(1-\frac{p}{2})}\mathrm{E}|X_1|^p=2^{m(1-\frac{p}{2}+\gamma p)}\frac{\mathrm{E}|X_1|^p}{\varepsilon^p},$$

tedy tento člen také konverguje k nule pro $m\to+\infty$.

Zbývá ukázat konvergenci třetího členu. Využijeme lemma 3.4.7, připomeňme, že $d=\lfloor\log_2 b\rfloor$, a dostáváme:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\max_{k\le b}\frac{|R_{ak}|}{2^{\frac{m}{2}}}\ge\varepsilon\right) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}\left(\max_{k\le b}\frac{|R_{ak}|}{2^{\frac{m}{2}}}\right)^2\\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d}{2^m}\sum_{i=0}^{d}2^{d-i}||R_{a2^i}||_2^2\\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d}{2^m}\sum_{i=0}^{d}2^{d-i}\frac{o(a2^i)}{\log^{2(q-1)}(a2^i)}\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{abd}{2^m}o\left(\frac{1}{m^{2q-3}}\right)=o(m^{4-2q}),\end{aligned}$$

protože z konstrukce konstant máme $ab = O(2^m)$, $d = O(m)$. Pro $q \geq 2$ nám třetí člen také konverguje k nule, a tedy věta je dokázána.

Q.E.D.

3.4.3 Diagonální aproximace

V této části se podíváme, jakými různými způsoby lze aproximovat stacionární posloupnost posloupností martingalových diferencí a ukážeme, jaké vztahy platí mezi jednotlivými typy aproximací. Pro jednoduchost značení budeme používat operátory Q_k a R_k definovány v 1.8 a 1.9.

Definice 3.4.9 *Řekneme, že pro funkci f existuje* ***slabá diagonální aproximace****, jestliže existuje posloupnost přirozených čísel $(k_n, k_n = o(n))_{n\in\mathbb{N}}$ takových, že je splněno*

(i) pro $f_n = \sum_{i=-k_n}^{k_n} P_i f$ máme

$$\frac{1}{\sigma_n}||S_n(f - f_n)||_2 \to 0,$$

(ii) pro $f_n = m_n + g_n - Ug_n$ s

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{i=-k_n}^{k_n} P_0 U^i f, \\ g_n &= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n-i} P_{-i} U^j f_n - \sum_{i=0}^{k_n-1} \sum_{j=1}^{k_n-i} P_i U^{-j} f_n, \end{aligned}$$

je $||g_n||_2 = o(\sigma_n)$.

Definice 3.4.10 *Řekneme, že pro funkci f existuje* ***silná diagonální aproximace****, jestliže existuje taková posloupnost $(d_n, d_n = o(n))_{n\in\mathbb{N}}$, že pro všechny posloupnosti $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pro které je $k_n \geq d_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

(i) pro $f_n = \sum_{i=-k_n}^{k_n} P_i f$ máme

$$\frac{1}{\sigma_n}||S_n(f - f_n)||_2 \to 0,$$

(ii) pro $f_n = m_n + g_n - Ug_n$, kde

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{i=-k_n}^{k_n} P_0 U^i f \\ g_n &= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n-i} P_{-i} U^j f_n - \sum_{i=0}^{k_n-1} \sum_{j=1}^{k_n-i} P_i U^{-j} f_n \end{aligned}$$

je $||g_n||_2 = o(\sigma_n)$.

Definice 3.4.11 *Řekneme, že funkce f má* ***Wuovu-Woodroofeovu aproximaci****, krátce* ***WW-aproximaci****, jestliže*

$$||Q_0(S_n(f))||_2 = o(\sigma_n) \text{ a } ||R_n(S_n(f))||_2 = o(\sigma_n).$$

Tvrzení 3.4.12 *Jestliže funkce f má slabou diagonální aproximaci, potom má také WW-aproximaci.*

Důkaz:

$$\begin{aligned} ||Q_0(S_n(f))||_2 &= ||\sum_{i=-\infty}^{0}(\sum_{j=1}^{n} P_iU^jf)||_2 \\ &\leq ||\sum_{i=-\infty}^{-k_n}(\sum_{j=1}^{n} P_iU^jf)||_2 + ||\sum_{i=-k_n+1}^{0}(\sum_{j=1}^{i+k_n} P_iU^jf)||_2 + \\ &\qquad +||\sum_{i=-k_n+1}^{0}(\sum_{j=i+k_n+1}^{n} P_iU^jf)||_2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

A snadno vidíme, že

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 &\leq ||S_n(f - f_n)||_2 \\ I_2 &\leq ||Ug_n||_2 = ||g_n||_2. \end{aligned}$$

Tedy díky předpokladu tvrzení dostáváme, že $||Q_0(S_n(f))||_2 = o(\sigma_n)$, pro člen $||R_n(S_n(f))||_2$ dostaneme výsledek analogicky.

Q.E.D.

Tvrzení 3.4.13 *Existuje funkce f, která má WW-aproximaci, ale nemá silnou diagonální aproximaci. Jinými slovy, existuje proces, který má WW-aproximaci a zároveň pro každou posloupnost $(d_n = o(n))_{n\in\mathbb{N}}$ můžeme najít posloupnost $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že $k_n \geq d_n$ a pokud položíme $f_n = \sum_{i=-k_n}^{k_n} P_i f$, potom*

$$\frac{1}{\sigma_n}||S_n(f - f_n)||_2 \not\to 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{||g_n||_2}{\sigma_n} \not\to 0.$$

Poznámka: Předpokládáme, že obdobné tvrzení neplatí pro slabou diagonální aproximace, a tedy předpokládáme, že slabá diagonální aproximace je ekvivalentní s WW-aproximací, ale tento výsledek ještě není dokončen.

△

Důkaz: Sestrojme proces, který má WW-aproximaci, ale nemá silnou diagonální aproximaci.

Mějme funkci e takovou, že $||e||_2 = 1$ a zároveň $e \in H_0 \ominus H_{-1}$. Označme pro $i, j \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
K_j &= \lfloor \exp j^2 \rfloor, \\
N_i &= 2\sum_{j=0}^{i-1} K_j + 1, \\
b_j &= \frac{1}{j^2}
\end{aligned}
$$

a položme $K_0, N_0 = 0,\ b_0 = 1$. Teď definujme funkce $f_i, \bar{f}_i$ pro $i \in \mathbb{N}$:

$$
f_i := \sum_{k=1}^{K_i} \left(-\frac{1}{k}\right) e \circ T^k + \sum_{k=0}^{K_i-1} \frac{1}{k+1} e \circ T^{-k}, \tag{3.48}
$$

$$
\bar{f}_i := f_i \circ T^{-N_i-K_i}. \tag{3.49}
$$

A položme

$$
f = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \bar{f}_i + b_0 e.
$$

Ukážeme, že funkce f má WW-aproximaci, ale nemá silnou diagonální aproximaci. Poznamenejme, že jsme funkci f definovali tak, že je $\mathcal{F}_0$-měřitelná, proto pro ověření WW-aproximace stačí ukázat, že $||Q_0(S_n(f))||_2 = o(\sigma_n)$.

Nejprve se podívejme, jak se chovají funkce $\bar{f}_i$. Z konstrukce funkcí $(\bar{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vidíme, že

$$
\bar{f}_i \in H_{-N_i} \ominus H_{-N_i-2K_i}.
$$

Tedy

$$
\bar{f}_i \circ T^k \in H_{-N_i+k} \ominus H_{-N_i-2K_i+k}
$$

a

$$
S_n(\bar{f}_i) \in H_{-N_i+n} \ominus H_{-N_i-2K_i+1}.
$$

Můžeme si také všimnout, že pouze pro

$$
j \in [-N_i + n, -N_i + n - 2K_i + 2] \cup [-N_i - 1, -N_i - 2K_i + 1]
$$

jsou j-té projekce funkcí $S_n(\bar{f}_i)$ nenulové, tj. $P_j(S_n(\bar{f}_i)) \neq 0$.

Navíc si všimněme, že pro $n, j \in \mathbb{N}$ existuje i takové, že:

$$
||P_j(S_n(f)||_2^2 = ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_i)||_2^2 = (1 + y_j)^2,
$$

kde y_j je koeficient projekce $P_j(S_n(\bar{f}_i))$. Z konstrukce funkce $\bar{f}_i$ platí

$$
-1 \leq y_j \leq 0. \tag{3.50}
$$

Pro WW-aproximaci potřebujeme dokázat, že $||Q_0(S_n(f))||_2 = o(\sigma_n)$.
Nejprve připomeňme, že

$$\begin{aligned} ||S_n(f)||_2 &\geq ||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2, \\ ||S_n(f)||_2 &\leq ||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2 + ||Q_0(S_n(f))||_2. \end{aligned}$$

Potřebujeme tedy odhadnout členy $||Q_0(S_n(f))||_2$ a $||S_n(f)-Q_0(S_n(f))||_2$. Nejprve odhadněme člen $||S_n(f)-Q_0(S_n(f))||_2$. Z výše uvedených poznámek je zřejmé, že stačí odhadnout členy $||P_j(S_n(f_0+\bar{f}_i))||_2^2$ pro $j \geq 0$.

Fixujme $n \in \mathbb{N}$. Potom můžeme najít $I \in \mathbb{N}$ takové, že $N_I \leq n < N_{I+1}$. Nejprve uvažujme $i \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \geq N_i + 2K_i, \quad \text{tedy} \quad i \leq I-1, \tag{3.51}$$

a odhadneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N_i+n-2K_i+1}^{n-N_i} ||P_j(S_n(f))||_2^2 &= \sum_{j=-N_i+n-2K_i+1}^{n-N_i} ||P_j(S_n(f_0+\bar{f}_i))||_2^2 \qquad (3.52) \\ &= 2\sum_{j=-N_i+n-K_i+2}^{n-N_i} (1+y_j)^2 + (1+y_{n-N_i-K_i+1})^2 + 1. \end{aligned}$$

Díky (3.50) můžeme psát pro všechna $j \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2y_j \leq (1+y_j)^2 \leq 1 + y_j.$$

A tedy dostaneme

$$\begin{aligned} (3.52) &\leq 2\sum_{j=-N_i+n-K_i+2}^{n-N_i} (1+y_j) + (1+y_{n-N_i-K_i+1}) + 1 \\ &= 2\sum_{j=2}^{K_i}\left(1 - \frac{1}{i^2}\sum_{k=j}^{K_i}\frac{1}{k}\right) + \left(1 - \frac{1}{i^2}\sum_{k=1}^{K_i}\frac{1}{k}\right) + 1 \\ &\leq 2\left(K_i - 1 - \frac{1}{i^2}\sum_{j=2}^{K_i}\log\frac{K_i+1}{j}\right) + 2 - \frac{1}{i^2}\log(K_i+1) \\ &= 2K_i - \frac{1}{i^2}((2K_i-1)\log(K_i+1) - 2\sum_{j=2}^{K_i}\log j) \\ &\leq 2K_i - \frac{1}{i^2}((2K_i-1)\log(K_i+1) - 2[x\log x - x]_2^{K_i+1}) \\ &= 2K_i - \frac{1}{i^2}((2K_i-1)\log(K_i+1) - 2(K_i+1)\log(K_i+1) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2(K_i+1)+4\log 2-4) \\
&= 2K_i - \frac{1}{i^2}(2K_i + 4\log 2 - 2 - 3\log(K_i+1)) \\
&\leq 2K_i - \frac{2K_i - 3\log(K_i+1)}{i^2}
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
(3.52) &\geq 2\sum_{j=-N_i+n-K_i+2}^{n-N_i}(1+2y_j) + (1+2y_{n-N_i-K_i+1}) + 1 \\
&= 2\sum_{j=2}^{K_i}\left(1 - \frac{2}{i^2}\sum_{k=j}^{K_i}\frac{1}{k}\right) + \left(1 - \frac{2}{i^2}\sum_{k=1}^{K_i}\frac{1}{k}\right) + 1 \\
&\geq 2\left(K_i - 1 - \frac{2}{i^2}\sum_{j=2}^{K_i}\log\frac{K_i}{j-1}\right) + 2 - \frac{2}{i^2}(1+\log(K_i)) \\
&= 2K_i - \frac{2}{i^2}((2K_i-1)\log(K_i) - 2\sum_{j=2}^{K_i}\log(j-1) + 1) \\
&\geq 2K_i - \frac{2}{i^2}((2K_i-1)\log(K_i) - 2[x\log x - x]_1^{K_i-1} + 1) \\
&= 2K_i - \frac{2}{i^2}(2K_i + \log(K_i) - 1) \\
&\geq 2K_i - \frac{4K_i + 2\log K_i}{i^2}.
\end{aligned}
$$

Dostáváme (připomeňme, že $K_i = \lfloor \exp i^2 \rfloor$)

$$
(3.52) \sim 2K_i + O\left(\frac{K_i}{\log K_i}\right).
$$

Tedy přídavek všech takových $\bar{f}_i$ k členu $||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2^2$ je přibližně

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I-1}\left(2K_i - \frac{4K_i + 2\log K_i}{i^2}\right) &\geq N_I - 1 - \sum_{i=1}^{I-1}\frac{4K_i + 2\log K_i}{i^2} \\
&\sim N_I + O\left(\frac{K_{I-1}}{\log K_{I-1}}\right). \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Teď se podívejme na případ, kdy i je takové, že nesplňuje podmínku (3.51). Jestliže $i \geq I+1$, potom $||S_n(\bar{f}_i) - Q_0(S_n(\bar{f}_i))||_2 = 0$. A tedy stačí studovat případ, kdy $i = I$. Tento případ rozdělíme do tří částí.

1. Nechť $n = N_I + K_I$.

   V tomto případě použijeme podobných kroků jako v předchozím případě a dostaneme:

$$K_I - \frac{2}{I^2} K_I \leq \sum_{j=-N_I+n-K_I+1}^{n-N_I} ||P_j(S_n(f_0+\bar{f}_I))||_2^2 \leq K_I - \frac{1}{I^2}(K_I - \log(K_I+1)). \tag{3.54}$$

   Pro $||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2^2$ jsme tedy získali, připomeňme, že v tomto případě je $n \sim K_I$ a $\log K_I \sim I^2$,

$$\begin{aligned} ||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2^2 &\geq (3.53) + K_I - \frac{2}{I^2} K_I && (3.55) \\ &\geq n + O\left(\frac{K_{I-1}}{\log K_{I-1}}\right) - \frac{2}{I^2} K_I \\ &= n + o(n). \end{aligned}$$

2. Nechť $N_I < n < N_I + K_I$.

   Potřebujeme odhadnout člen

$$\sum_{j=1}^{n-N_I} ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_I))||_2^2, \tag{3.56}$$

   kde v tomto případě je $n - N_i < K_i$, a tak použitím podobných argumentů jako výše dostáváme:

$$\begin{aligned} (3.56) &\leq n - N_I - \frac{1}{I^2} \sum_{j=N_I-n+K_I+1}^{K_I} \sum_{k=j}^{K_I} \frac{1}{k} \\ &\leq n - N_I - \frac{1}{I^2} \sum_{j=N_I-n+K_I+1}^{K_I} \log \frac{K_I+1}{j} \\ &\leq n - N_I - \frac{1}{I^2}((n - N_I)\log(K_I+1) - [x \log x - x]_{K_I-n+N_I+1}^{K_I+1}) \\ &= n - N_I - \frac{1}{I^2}((n - N_I - K_I - 1)(\log(K_I+1) - \\ &\qquad - \log(K_I - n + N_I + 1)) + n - N_I)) \end{aligned}$$

   a

$$(3.56) \geq n - N_I - \frac{2}{I^2} \sum_{j=N_I-n+K_I+1}^{K_I} \sum_{k=j}^{K_I} \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned}
&\geq n - N_I - \frac{2}{I^2} \sum_{j=N_I-n+K_I+1}^{K_I} \log \frac{K_I}{j-1} \\
&\geq n - N_I - \frac{2}{I^2}((n - N_I + 1)\log(K_I) - [x\log x - x]_{K_I-n+N_I-1}^{K_I}) \\
&= n - N_I - \frac{2}{I^2}((n - N_I - K_I + 1)(\log(K_I) - \\
&\qquad - \log(K_I - n + N_I - 1)) + n - N_I + 1).
\end{aligned}$$

A tak máme:

$$n - N_I - \frac{1}{I^2}(n - N_I) \leq (3.56) \leq n - N_I.$$

V tomto případě máme pro člen $||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2^2$:

$$\begin{aligned}
||S_n(f) - Q_0(S_n(f))||_2^2 &\geq (3.53) + n - N_I - \frac{1}{I^2}(n - N_I) \qquad (3.57)\\
&\geq n + O\left(\frac{K_{I-1}}{\log K_{I-1}}\right) - \frac{1}{I^2}(n - N_I) \\
&= n + o(n).
\end{aligned}$$

3. Nechť $N_I + K_I < n < N_I + 2K_I$.

   Teď potřebujeme odhadnout člen

$$\sum_{j=1}^{n-N_I} ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_I))||_2^2, \qquad (3.58)$$

   tentokrát je $n - N_i \geq K_i$, proto tento člen musíme rozdělit na dvě části, a to následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n-N_I} ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_I))||_2^2 = \\
&\qquad = \sum_{j=n-N_I-K_I+1}^{n-N_I} ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_I))||_2^2 + \sum_{j=1}^{n-N_I-K_I} ||P_j(S_n(f_0 + \bar{f}_I))||_2^2,
\end{aligned}$$

   kde umíme odhadnout první člen na pravé straně, protože se jedná o stejný odhad jako v (3.54). Odhadněme tedy druhý člen na pravé straně. Tento člen můžeme vyjádřit jako

$$\sum_{j=1}^{n-N_I-K_I} (1 + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n-N_I-K_I} \left(1 - \frac{1}{I^2} \sum_{j=j}^{K_I} \frac{1}{k}\right)^2. \qquad (3.59)$$

$$
\begin{aligned}
(3.59) \quad &\leq \sum_{j=1}^{n-N_I-K_I}\left(1-\frac{1}{I^2}\sum_{j=j}^{K_I}\frac{1}{k}\right)\\
&\leq (n-N_I-K_I)-\frac{1}{I^2}\sum_{j=1}^{n-N_I-K_I}\log\frac{K_I+1}{j}\\
&\leq (n-N_I-K_I)-\frac{1}{I^2}\left((n-N_I-K_I)\log(K_I+1)-\sum_{j=1}^{n-N_I-K_I}\log j\right)\\
&\leq (n-N_I-K_I)\left(1-\frac{\log(K_I+1)}{I^2}\right)+\\
&\qquad +\frac{1}{I^2}\left([x\log x-x]_1^{n-N_I-K_I}+\log(n-N_I-K_I)\right)\\
&= (n-N_I-K_I)\left(1-\frac{\log(K_I+1)}{I^2}\right)+\\
&\qquad +\frac{1}{I^2}\left((n-N_I-K_I+1)\log(n-N_I-K_I)-(n-N_I-K_I)+1\right),\\
(3.59) \quad &\geq \sum_{j=1}^{n-N_I-K_I}\left(1-\frac{2}{I^2}\sum_{j=j}^{K_I}\frac{1}{k}\right)\\
&\geq (n-N_I-K_I)-\frac{2}{I^2}\left(\sum_{j=2}^{n-N_I-K_I}\log\frac{K_I}{j-1}+1+\log K_I\right)\\
&\geq (n-N_I-K_I)-\frac{2}{I^2}((n-N_I-K_I-1)\log(K_I)-\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{n-N_I-K_I-1}\log j+1+\log K_I)\\
&\geq (n-N_I-K_I)(1-\frac{2\log(K_I)}{I^2})+\frac{2}{I^2}([x\log x-x]_1^{n-N_I-K_I}+\\
&\qquad +\log(n-N_I-K_I)+1+\log K_I)\\
&= (n-N_I-K_I)(1-\frac{2\log(K_I)}{I^2})+\\
&+\frac{2}{I^2}\left((n-N_I-K_I+1)\log(n-N_I-K_I)-(n-N_I-K_I)+2+\log K_I\right).
\end{aligned}
$$

Teď vezměme konstantu $c : 0 < c < 1$ takovou, že $n - N_I - K_I = cK_I$, a dostáváme

$$
\begin{aligned}
(3.59) \quad &\leq cK_I\left(1-\frac{\log(K_I+1)}{I^2}\right)+\frac{1}{I^2}((cK_I+1)\log(cK_I)-cK_I+1)\\
&\leq cK_I-\frac{1}{I^2}\left(cK_I-1+cK_I\log\frac{1}{c}-\log(cK_I)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.59) \quad &\geq cK_I\left(1-\frac{2\log(K_I)}{I^2}\right)+\frac{2}{I^2}((cK_I+1)\log(cK_I)-cK_I+2+\log K_I)\\
&= cK_I\left(1-\frac{2\log(K_I)}{I^2}\right)+\frac{2}{I^2}((cK_I+1)(\log c+\log K_I)-cK_I+2+\log K_I)\\
&\geq cK_I-\frac{2}{I^2}\left(cK_I+cK_I\log\frac{1}{c}-\log(cK_I)-\log K_I-2\right)\\
&\geq cK_I-\frac{2}{I^2}\left(cK_I(1+\log\frac{1}{c})\right)\\
&\geq cK_I-\frac{2}{I^2}\left(cK_I(1+\frac{1}{c})\right).
\end{aligned}
$$

A tak pro člen (3.58) můžeme odvodit:

$$K_I(c+1)-\frac{2}{I^2}(K_I(c+1)+K_I)\leq (3.58)\leq (c+1)K_I.$$

Pro všechny členy $||S_n(f)-Q_0(S_n(f))||_2^2$ dostáváme, $n\sim K_I(c+1)$,

$$
\begin{aligned}
||S_n(f)-Q_0(S_n(f))||_2^2 &\geq (3.53)+K_I(c+1)-\frac{2}{I^2}(K_I(c+1)+K_I) && (3.60)\\
&\geq n+O\left(\frac{K_{I-1}}{\log K_{I-1}}\right)-\frac{4}{I^2}(K_I(c+1)) && (3.61)\\
&= n+o(n).
\end{aligned}
$$

A tak jsme odvodili, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí

$$||S_n(f)-Q_0(S_n(f))||_2^2=n+o(n).$$

Teď se zabývejme členem $||Q_0(S_n(f))||_2$. Pro odhad velikosti tohoto členu použijeme následující nerovnost: $x_i,y_i\geq 0$: $(x_i-y_i)^2\leq(x_i^2+y_i^2)$. A dostaneme

$$||Q_0(S_n(f))||_2^2\leq\sum_{i=0}^{+\infty}I_i^n,$$

kde $I_i^n=\sum_{j=-\infty}^{0}||P_j(S_n(\bar{f}_i))||_2^2$.

Odhad členu I_i^n rozdělíme opět do tří částí.

1. Nechť i je takové, že $n\geq N_i+2K_i$, což znamená, že $i\leq I-1$. V tomto případě

$$I_i^n\leq 2\sum_{j=1}^{K_i}\left(\frac{1}{i^2}\sum_{k=j}^{K_i}\frac{1}{k}\right)^2. \tag{3.62}$$

$$
\begin{aligned}
I_i^n &\le \frac{2}{i^4}((1+\log K_i)^2 + \sum_{j=2}^{K_i} \log^2 \frac{K_i}{j-1}) \\
&\le \frac{2}{i^4}(1 + 2\log K_i + \log^2 K_i + (K_i - 1)\log^2 K_i - \sum_{j=1}^{K_i-1} \log^2 j) \\
&\le \frac{2}{i^4}(1 + 2\log K_i + \log^2 K_i + (K_i - 1)\log^2 K_i - \\
&\qquad\qquad - [x\log^2 x - 2x\log x + 2x]_1^{K_i}) \\
&\le \frac{2}{i^4}(2 + 2(K_i+1)\log K_i + \log^2 K_i - 2K_i) \\
&\le \frac{5K_i}{i^2}.
\end{aligned}
$$

Tedy přídavek členu I_i^n je maximálně (z konstrukce K_i)

$$
\sum_{i=1}^{I-1} \frac{5K_i}{i^2} \le \frac{5K_{I-1}}{(I-1)^2} + \sum_{i=1}^{I-2} \frac{5K_i}{i^2} \le \frac{6K_{I-1}}{(I-1)^2} \le \frac{6n}{(I-1)^2}. \tag{3.63}
$$

2. Nechť i je takové, že $n \le N_i$, to je $i \ge I+1$. Potom

$$
I_i^n \le \frac{1}{i^4}\left(2\sum_{j=1}^{K_i}\left(\sum_{k=j}^{j+n-1}\frac{1}{k}\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\left(\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-j+1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{k}\right)^2\right) = \frac{2}{i^4}(J_i^1 + J_i^2). \tag{3.64}
$$

Použitím nerovnosti $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \le n(\sum_{i=1}^n a_i^2)$ odvodíme pro J_i^1:

$$
\begin{aligned}
J_i^1 &\le \sum_{j=1}^{K_i} n \sum_{k=j}^{j+n-1} \frac{1}{k^2} \\
&\le n\sum_{j=2}^{K_i}\left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j+n-1}\right) + n\left(2 - \frac{1}{n}\right) \\
&= n(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \sum_{j=K_i}^{K_i+n-1}\frac{1}{j}) + n\left(2 - \frac{1}{n}\right) \\
&\le n(3 + \log n).
\end{aligned}
$$

A pro člen J_i^2

$$
J_i^2 \le \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor-j+1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \frac{1}{k^2}
$$

$$\le \sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-j}-\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right)+\left(2-\log\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$$
$$\le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\log\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2-\log\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

A tak jsme pro tento případ získali

$$I_i^n \le \frac{2}{i^4} n\log n.$$

A přídavek takových $\bar{f}_i$ k velikosti členu $||Q_0(S_n(f))||_2^2$ je maximálně (protože $n \le N_{I+1}$)

$$\sum_{i=I+1}^{+\infty}\frac{2}{i^4}n\log n \le n\sum_{i=I+1}^{+\infty}\frac{2}{i^2}\le\frac{2n}{I}. \tag{3.65}$$

3. Nechť $i = I$. Pro $n : K_I \le n < N_I + 2K_I$ můžeme psát

$$||Q_0(S_n(\bar{f}_I)||_2^2 \le 3\sum_{j=1}^{K_I}\left(\frac{1}{I^2}\sum_{k=j}^{K_I}\frac{1}{k}\right)^2. \tag{3.66}$$

A dostaneme stejně jako v (3.62)

$$||Q_0(S_n(\bar{f}_I)||_2^2 \le \frac{10K_I}{I^2}.$$

Zbývá tedy odhadnout velikost členu $||Q_0(S_n(\bar{f}_I)||_2^2$ pro případ $N_I < n < K_I$. Pak dostáváme:

$$\begin{aligned}
||Q_0(S_n(\bar{f}_I)||_2^2 &\le \frac{1}{I^4}[2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=K_I-j}^{K_I}\frac{1}{k}\right)^2+2\sum_{j=1}^{K_I-n}\left(\sum_{k=K_I-j-n+2}^{K_I-j+1}\frac{1}{k}\right)^2+ \\
&\qquad +2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}\right)^2] \\
&\le \frac{1}{I^4}\left[4n+2\sum_{j=1}^{K_I-n}n\sum_{k=K_I-j-n+2}^{K_I-j+1}\frac{1}{k^2}\right] \\
&\le \frac{2n}{I^4}\left[2+\sum_{j=1}^{K_I-n}\left(\frac{1}{K_I-j-n+1}-\frac{1}{K_I-j+1}\right)\right] \\
&\le \frac{2n}{I^4}\left[2+\sum_{l=1}^{K_I-n}\frac{1}{l}\right] \\
&\le \frac{2n}{I^4}[3+\log(K_I-n)] \\
&\le \frac{3n}{I^2}.
\end{aligned}$$

Pro všechna n jsme dostali:

$$||Q_0(S_n(f))||_2^2 \leq \frac{20n}{I-1} = O\left(\frac{n}{I}\right)$$

Protože $I \to +\infty$ (připomeňme, že $I - 1 \leq \log n \leq I + 1$), když $n \to +\infty$, dostáváme Wuovu-Woodrofeovu aproximaci.

Snadno nahlédneme, že diagonální aproximace neexistuje. Pro každou posloupnost $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ můžeme najít podposloupnost $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kde k_n zvolíme následujícím způsobem. Najdeme $I \in \mathbb{N}$ takové, že $N_I < n \leq N_{I+1}$, a položíme $k_n := N_I + K_I$. Potom pro $n = N_{I+1}$ a pro dostatečně velká I platí:

$$\begin{aligned}
||S_n(f-f_n)||_2^2 &\geq \sum_{i=-N_I-K_I+1}^{0} \left(P_i(S_n(f-f_n))\right)^2 \\
&\geq (N_I+K_I)\left(1-\frac{1}{(I+1)^2}\sum_{j=K_{I+1}-N_I-K_I}^{K_{I+1}}\frac{1}{j}\right)^2 \\
&\geq (N_I+K_I)\left(1-\frac{1}{(I+1)^2}(\log(K_{I+1}-K_I-N_I)-\log(K_{I+1}))\right)^2 \\
&\sim (N_I+K_I)\left(1-\frac{1}{(I+1)^2}(1-\frac{\exp I^2}{\exp{(I+1)^2}})\right)^2 \\
&\sim \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Tedy neexistuje diagonální aproximace.

$\triangle$

Literatura

Aldous, D., J. and Eagleson, G., K. (1978). On mixing and stability of limit theorems. *The Annals of Probability*, 6(2):325–331.

Bickel, P., J. and Wichura, M., J. (1971). Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(5):1656–1670.

Billingsley, P. (1961). The Lindeberg-Lévy theorem for martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:788–792.

Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.

Dedecker, J. and Merlevéde, F. (2002). Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem. *The Annals of Probability*, 30:1044–1081.

Dedecker, J., Merlevéde, F., and Volný, D. (2006). On the weak invariance principle for non adapted sequences under projective criteria. *In preparation.*

Dedecker, J. and Rio, E. (2000). On the functional central limit theorem for stationary processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Prob. Statist.*, 36(1):1–34.

Doukhan, P. (1994). *Mixing: Properties and Examples.* Number 85 in Lecture Notes in Statistics. Springer.

Dudley, R., M. (2000). *Notes on empirical processes.* Lecture notes.

Fremlin, D., H. (2005). *Measure Theory*, volume 4. Torres-Fremlin, Essex.

Hall, P. and Heyde, C. (1980). *Martingale limit theory and its application.* Academic Press, New York.

Hamadouche, D. (2000). Invariance principles in Hölder spaces. *Portugaliae Mathematica*, 57:127–153.

Hoffman-Jørgensen, J. (1994). *Probability with a view toward statistics*, volume 1. Chapman & Hall, New York.

Husová, J. (2002). Stable convergence in central limit theorems. In Šafránková, J., editor, *WDS 2002 Proceedings.*

Husová, J. (2004). Slabá konvergence suprema náhodných procesů. In Antoch, J. and Dohnal, G., editors, *ROBUST 2004. Sborník prací 13. letní školy JČMF.*

Husová, J. (2005a). Extremes of stochastic processes. In *MME 2005. Proceedings of 23rd International Conference Mathematical Methods in Economics.*

Husová, J. (2005b). Stabilní konvergence procesů. In Kováčová, M., editor, *Aplimat 2005. Proceedings of 4th International Conference Aplimat.*

Ibragimov, I., A. (1963). A central limit theorem for a class of dependent random variables. *Theory of Probability and Its Application*, 8:83–89.

Jakubowski, A. (1997a). From convergence of functions to convergence of stochastic processes. On Skorohod‘s sequantial approach to convergence in distribution. *A Volume in Honour of A. V. Skorokhod*, VSP.

Jakubowski, A. (1997b). A non-Skorohod topology on the Skorohod space. *Electronical Journal of Probability*, 2(4):21p.

Kallenberg, O. (1997). *Foundations of Modern Probability.* Springer, New York.

Kelley, J. L. (1997). *General Topology.* Springer, New York.

Kerkyacharian, G. and Roynette, B. (1991). Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. I*, 312:877–882.

Klicnarová, J. (2007). Central limit theorem for hölder processes on $\mathbb{R}^m$-unit cube. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 48(1):83–91.

Klicnarová, J. and Volný, D. (2007). An invariance principle for non adapted processes. *To appear in C.R. Acad. Sci. Paris.*

Lachout, P. (1985). A note on the martingale central limit theorem. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 26(4):637–640.

Lachout, P. (2000). *Diskrétní martingaly.* Učební text.

Lamperti, J. (1962). On convergence of stochastic processes. *Transaction of the American Mathematical Society*, 104:430–435.

Ledoux, M. and Talagrand, M. (1991). *Probability in Banach Spaces.* Springer-Verlag, New York.

Lukeš, J. and Malý, J. (1993). *Míra a integrál.* Karolinum, Praha.

Machkouri, M. E., Klicnarová, J., and Outchi, L. (2007). Invariance principle for a class of stationary stochastic processes. *To send into Electronic Communication in Probability.*

Maxwell, M. and Woodroofe, M. (2000). Central limit theorems for additive functionals of Markov chains. *The Annals of Probability*, 28:713–724.

McLeish, D., L. (1974). Dependent central limit theorem and invariance principles. *The Annals of Probability*, (2):620–628.

Mordecki, E. (1999). Necessary conditions for stable convergence of semimartingales. *Theory of Probability and Its Applications*, 44(1):217–221.

Neuhaus, G. (1971). On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(4):1285–1295.

Peligrad, M. and Utev, S. (2005). A new maximal inequality and invariance principle for stationary sequences. *The Annals of Probability*, 33:798–815.

Peligrad, M. and Utev, S. (2006). Central limit theorem for stationary linear processes. *The Annals of Probability*, 34(4):1608–1622.

Račkauskas, A. and Suquet, C. (1998). Random fields and central limit theorem in some generalized Hölder spaces. *Proceedings of the 7th international Vilnius conference*, pages 599–616.

Račkauskas, A. and Suquet, C. (2001). Invariance principles for adaptive self-normalized partial sums processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 95:63–81.

Račkauskas, A. and Suquet, C. (2004). Central limit theorems in Hölder topologies for Banach space valued random fields. *Theory of Probability and its Applications*, 49(1):77–92.

Rényi, A. (1963). On stable sequences of events. *Sankhyã Series A*, 25:293–302.

Straf, M., L. (1970). Weak convergence of stochastic processes with several parameters. *Proceedings of the 6th Berkley Symposium Math. Statist. Prob.*

Topsøe, F. (1970). *Topology and Measure.* Springer-Verlag, Berlin.

van der Vaart, A., W. and Wellner, J. A. (1996). *Weak Convergence and Empirical Processes.* Springer-Verlag, New York.

Volný, D. (2006). Martingale approximations of non adapted stochastic processes with nonlinear growth of variance. In Bertail, P., editor, *Dependence in Probability and Statistics*, volume 187 of *Lecture notes in Statistics*, pages 141–156. Springer.

Štěpán, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha.

Wu, W. (2006). A strong convergence theory for stationary processes. *In preparation, 37 pages.*

Wu, W. and Min, W. (2005). On linear processes with dependent innovations for sums of stationary processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 115:939–958.

Wu, W. and Woodroofe, M. (2004). Martingale approximations for sums of stationary processes. *The Annals of Probability*, 32(2):1674–1690.

Yoshihara, K. (1992). *Weakly Dependent Stochastic Sequences and Their Applications*, volume 1. Sanseido Co., Tokyo.