Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Monika Babiaková

Kreditné riziko

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2007

Ďakujem vedúcemu práce Doc. RNDr. Janovi Hurtovi za cenné pripomienky a venovaný čas a tiež Bc. Tomášovi Maradovi a Bc. Alene Babiakovej za pomoc v začiatkoch.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 14.12.2007 Monika Babiaková

Obsah

Názov práce: Kreditné riziko
Autor: Monika Babiaková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedúceho: Jan.Hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Základnou témou tejto diplomovej práce je modelovanie kreditného rizika (rizika z nesplatenia) z pohľadu portfólia. V úvode je stručný popis mier používaných na kvantifikáciu kreditného rizika a prehľad modelov. Najväčšia časť práce je venovaná popisu faktorových modelov, ako sú simulačné modely CreditMetrics a KMV vychádzajúce z Mertonovho modelu firmy a analytický model CreditRisk$^+$ využívajúci postupy používané v poistnej matematike. Uvedené sú aj dva alternatívne modely: model podmienenej nezávislosti a simulácia výberom podľa dôležitosti. V druhej - praktickej časti práce je popis programov v *Mathematice* vytvorených na základe týchto modelov, ktoré sú následne použité na analýzu kreditného rizika modelového portfólia kupónových obligácií. Dôraz je pritom kladený na kalibráciu jednotlivých modelov tak, aby boli výsledky z nich získané porovnateľné. V závere sú modely stručne zhodnotené z hľadiska ich praktického použitia.

Kľúčové slová: kreditné riziko, faktorové modely, CreditMetrics, CreditRisk$^+$.

Title: Credit Risk
Author: Monika Babiaková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jan.Hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The main topic of this diploma thesis is the credit risk (default risk) modeling from the portfolio view. The work is introduced by a brief description of credit risk measures and a review of models. The largest part of this thesis is focused on a description of factor models, such as simulation-based KMV and CreditMetrics resulting from Merton's model of a firm and analytical CreditRisk$^+$ utilizing actuarial mathematics procedures. The alternative models based on a conditional independence and importance sampling are also described. The second part of the work contains a description of *Mathematica* programmes resulting from the models. These programmes are consequently used to analyze a credit risk of a sample coupon obligations portfolio. To make the results comparable the emphasis is placed on calibration of a particular models. The thesis is concluded by comparison of these models in terms of their usability.

Keywords: credit risk, factor models, CreditMetrics, CreditRisk$^+$.

Úvod

Firmy sú pri svojej činnosti vystavené mnohým druhom rizík. Medzi hlavné patrí tržné, operačné a kreditné riziko. V posledných pätnástich až dvadsiatich rokoch sa spolu s prudkým nárastom počtu poskytovaných pôžičiek a úverov a takisto v dôsledku krachu niektorých veľkých firiem, stala naliehavejšou potreba modelovať a kvantifikovať kreditné riziko, tj. riziko z nesplatenia. V súčasnosti sa dôležitosť modelov kreditného rizika ukazuje aj v súvislosti so zavádzaním európskych pravidiel kapitálovej primeranosti Basel II [1].

Vo svojej práci sa zameriam na modelovanie kreditného rizika na úrovni portfólia pomocou faktorových modelov. V prvej kapitole zavádzam základné pojmy a miery používané na kvantifikovanie kreditného rizika. Obsahuje taktiež stručný prehľad modelov.

Druhá kapitola popisuje simulačné modely kreditného rizika. Stručne sa zmieňujem o modele firmy KMV. Venujem sa najmä modelu CreditMetrics, ktorý je vo veľkej miere používaný v praxi. Uvádzam taktiež alternatívne prístupy, a to využitie podmienenej nezávislosti alebo generovanie náhodných veličín výberom podľa dôležitosti. Tretia kapitola je venovaná takmer výhradne podrobnému popisu analytického modelu CreditRisk$^+$.

V štvrtej kapitole uvádzam hlavné časti programov, ktoré som vytvorila v *Mathematice*. Tieto následne používam v piatej kapitole na výpočty a simulácie pri analýze kreditného rizika modelového portfólia kupňových obligácií. Záver kapitoly je venovaný zhodnoteniu výsledkov a porovnaniu jednotlivých modelov.

Kapitola 1

Kreditné riziko

1.1 Základné pojmy

Kreditné riziko (Credit Risk, riziko z nesplatenia) môžeme zjednodušene definovať ako neistotu, či protistrana dostojí svojim (finančným) záväzkom či už kvôli neschopnosti alebo neochote splácať. Inak povedané, je to potenciálna strata v dôsledku **kreditnej udalosti**, ktorou môže byť zmena kreditnej kvality alebo default protistrany. Za **default** sa považuje nesplnenie záväzkov do určitej doby po ich splatnosti (napr. u retailových portfólií je to obvykle 90 dní). **Kreditnou kvalitou** rozumieme úverovú bonitu protistrany a kvantifikujeme ju pomocou **ratingu**. Jeden ratingový systém pozostáva z konečnej množiny ratingov označovaných písmenami, číslami alebo ich kombináciou. Firmy v praxi používajú hodnotenia vydávané ratingovými agentúrami (najznámejšie sú Standard & Poor's a Moody's Investors) alebo si vytvárajú vlastné interné modely hodnotenia klientov. Proces priradenia ratingu sa nazýva **skóring**. **Kreditný derivát** je finančný inštrument (často finančný derivát) slúžiaci ako istá forma ochrany alebo poistenia pred nepriaznivým vývojom kreditnej kvality protistrany.

Kreditné riziko delíme na riziko straty v dôsledku zmeny kreditného rozpätia (vyjadreného zmenou ratingu) u tržne oceňovaných produktov (tzv. Credit Spread Risk) a riziko straty v dôsledku nedodržania finančných záväzkov protistranou (Credit Default Risk). Ďalej nás môže zaujímať kreditné riziko jedného samostatne stojaceho aktíva (Stand-alone Credit Risk) alebo skupiny viacerých aktív v portfóliu (Portfolio Credit Risk).

1.2 Miery kreditného rizika

Aby sme mohli s kreditným rizikom pracovať a porovnávať rizikovosť aktív, musíme ho nejakým spôsobom kvantifikovať. Môžeme použiť rôzne miery rizika. Všetky sú odvodené od náhodnej veličiny predstavujúcej veľkosť straty (alebo ako uvidíme neskôr hodnoty) aktíva alebo skupiny aktív. Každá poskytuje inú informáciu o kreditnom riziku a nedá sa jednoznačne určiť, ktorá miera je nejlepšia. Uvádzam ich prehľad podobne ako je uvedený napr. v [3]. Označme D náhodnú veličinu nadobúdajúcu hodnotu 1 (default v priebehu daného časového obdobia) s pravdepodobnosťou p a hodnotu 0 s pravdepodobnosťou $1 - p$. p sa nazýva **pravdepodobnosť defaultu** a vždy sa vzťahuje k určitému časovému horizontu. Označme ďalej EAD (Exposure at Default) hodnotu aktíva na konci daného obdobia (**expozícia**) predstavujúcu maximálnu možnú stratu v prípade defaultu a SEV (Severity of Loss) náhodnú veličinu znamenajúcu podiel z expozície, ktorý bude stratený v prípade defaultu. Často sa tiež vyjadruje ako 1-**výťažnosť pohľadávky** (Recovery Rate). Potom

$$L = EAD.SEV.D$$

je celková strata a stredná hodnota $\mathrm{E}L$ sa nazýva **očakávaná strata**. Za predpokladu, že EAD je nenáhodná a SEV a D sú nezávislé, je

$$\mathrm{E}L = EAD.LGD.p,$$

kde $LGD = \mathrm{E}(SEV)$ (Loss Given Default). V praxi predpoklad nezávislosti obvykle nie je splnený a navyše EAD je často tiež náhodná veličina.

Očakávaná strata je dobrá pre predstavu o polohe náhodnej veličiny L, ale držať kapitál (resp. vytvoriť rezervu na straty) veľkosti $\mathrm{E}L$ nepredstavuje pre firmu dostatočnú ochranu pred prípadnými defaultami. Existuje totiž príliš veľké riziko, že skutočná strata bude vyššia a to by mohlo viesť až k strate solventnosti. Ďalšou mierou, ktorá sa používa, je preto **neočakávaná strata**

$$\sqrt{\mathrm{var}L} = \sqrt{\mathrm{var}(EAD.SEV.D)},$$

tj. smerodatná odchýlka straty. V určitom zmysle vyjadruje veľkosť rozptýlenosti straty L okolo očakávanej straty $\mathrm{E}L$, a teda mieru neistoty.

Na tomto mieste treba poznamenať, že doteraz sme uvažovali stratu vzťahujúcu sa k jednému aktívu. Z pohľadu kreditného rizika je však oveľa dôležitejšie uvažovať stratu vzhľadom k celému portfóliu aktív, označme ju L_{PF}. Je

$$L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} EAD_i.SEV_i.D_i,$$

kde L_i, $i = 1, \ldots, n$, sú straty vzťahujúce sa k jednotlivým aktívam a podobne EAD_i, SEV_i a D_i majú význam ako v predchádzajúcom texte. Potom očakávaná strata z pohľadu portfólia je (opäť za predpokladu nenáhodnosti EAD_i a nezávislosti SEV_i a D_i)

$$\mathrm{E}L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}L_i = \sum_{i=1}^{n} EAD_i.LGD_i.p_i$$

a neočakávaná strata je

$$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} EAD_i.EAD_j.\mathrm{cov}(SEV_i.D_i, SEV_j.D_j)}.$$

Pre nenáhodné SEV_i dostávame

$$\mathrm{var}L_{PF} = \sum_{i,j=1}^{n} EAD_i.EAD_j.LGD_i.LGD_j.\sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}.\mathrm{corr}(D_i, D_j),$$

lebo D_i, $i = 1, \ldots, n$ majú alternatívne rozdelenie s parametrami p_i. Z tohoto vzťahu vyplýva, že korelácie defaultov zohrávajú dôležitú úlohu pri modelovaní kreditného rizika. Pri $\mathrm{corr}(D_i, D_j) = 0 \ \forall\, i \neq j$ hovoríme o dokonalej diverzifikácii. V tomto prípade je rozptyl straty portfólia súčtom rozptylov strát jednotlivých aktív. Ak je pre nejaké i, j $\mathrm{corr}(D_i, D_j) < 0$, hovoríme o tzv. zaistení (hedging) a znamená to, že riziká týchto dvoch aktív sa čiastočne (alebo v teoretickom prípade úplne) rušia. Najčastejším prípadom však býva pozitívna korelovanosť aktív v portfóliu, ktorá významnou mierou zvyšuje kreditné riziko. Vo väčšine modelov kreditného rizika je preto dôraz kladený práve na modelovanie korelácií defaultov.

Vytvoriť rezervu veľkosti očakávaná strata + neočakávaná strata sa však v praxi ešte stále ukazuje byť nedostatočnou ochranou firmy pred defaultami. Stále existuje nezanedbateľná šanca, že strata presiahne túto hodnotu a firma sa môže stať insolventnou. V praxi sa navyše ukazuje, že rozdelenie náhodnej veličiny L_{PF} sa vyznačuje výraznou šikmosťou a relatívne „ťažkým chvostom“ v oblasti vyšších strát. Je to spôsobené tým, že aktíva v portfóliu s vysokou pravdepodobnosťou budú prinášať relatívne nízke výnosy, ale s malou pravdepodobnosťou môže dôjsť aj k veľkým stratám v dôsledku defaultu. Preto stredná hodnota a rozptyl neposkytujú dostatočné informácie o rozdelení veľkosti straty. Ďalšou veličinou, ktorá sa používa na meranie kreditného rizika, je **hodnota v riziku** (Value at Risk) na hladine α. Definujeme ju ako kvantil

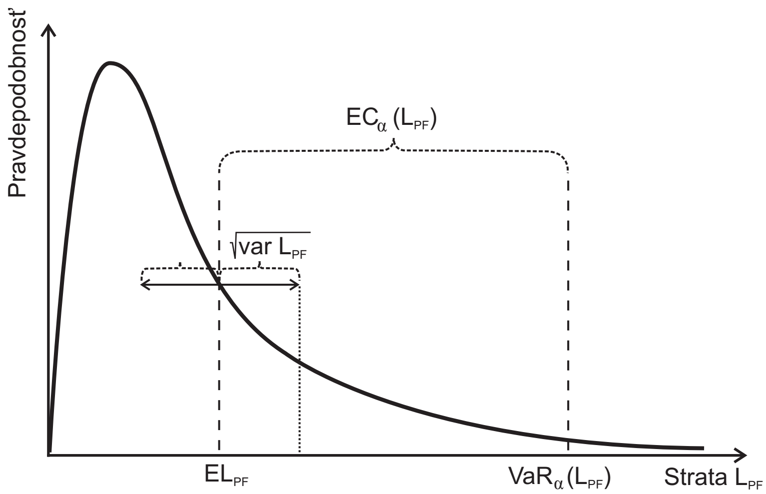
$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_{PF}) = \inf\{q > 0 \mid \mathrm{P}(L_{PF} \leq q) \geq \alpha\} \tag{1.1}$$

a interpretujeme ako hodnotu, ktorú strata nepresiahne s pravdepodobnosťou α alebo väčšou. Udáva sa v peňažných jednotkách alebo ako percentuálny podiel z celkovej (strednej) hodnoty portfólia. S hodnotou v riziku súvisí definícia **ekonomického kapitálu**

$$\mathrm{EC}_\alpha(L_{PF}) = \mathrm{VaR}_\alpha - \mathrm{E}L_{PF}.$$

Vyjadruje hodnotu kapitálu, ktorý by mala firma držať nad rámec očakávanej straty, aby bola s pravdepodobnosťou α ochránená proti veľkým stratám.

Vidíme, že všetky miery sú odvodené z veľkosti straty portfólia. Rozdelenie náhodnej veličiny L_{PF} hraje kľúčovú úlohu pri riadení kreditného rizika. Vzťahy medzi jednotlivými mierami ilustruje nasledujúci obrázok.



Obr. 1.1: Miery kreditného rizika

Alternatívnu mieru rizika predstavuje **očakávaná extrémna strata** (Tail Value at Risk, Expected Shortfall) na hladine α

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(L_{PF}) = \mathrm{E}[L_{PF} \mid L_{PF} \geq \mathrm{VaR}_\alpha],$$

čiže očakávaná strata za podmienky, že strata presiahne hodnotu v riziku na hladine α. Na hodnotenie aktív vzhľadom k danému portfóliu sa používa **marginálna hodnota v riziku** na hladine α. Je to rozdiel medzi VaR_α straty portfólia obsahujúceho dané aktívum a VaR_α straty pôvodného portfólia. Rozdiel medzi hodnotou v riziku samostatne stojaceho aktíva a jeho marginálnou hodnotou v riziku predstavuje veľkosť diverzifikácie rizika.

1.3 Prehľad modelov

Ako bolo uvedené vyššie, rozdelenie náhodnej veličiny L_{PF} je kľúčové pri riadení kreditného rizika. Existujú dva základné postupy na jeho odhad: Monte Carlo simulácia a analytická aproximácia.

Pri **simulačnom prístupe** je obvykle vygenerovaný veľký počet možných strát (resp. hodnôt) portfólia, tzv. scenárov. Postup získavania týchto veličín sa líši model od modelu. Niektoré modely pracujú s náhodným časom defaultu, iné s náhodnými prechodmi medzi ratingami, atd. Výhodou je možnosť simulácie viacerých veličín v rámci jedného modelu (napr. veľkosť expozícií alebo miery obnovenia), a teda možnosť zahrnutia napr. tržného rizika. Z veľkostí strát v jednotlivých scenároch potom získame empirické rozdelenie náhodnej veličiny a ľahko odvodíme ľubovolnú mieru rizika. Zvyčajnou nevýhodou tohoto prístupu býva vysoká výpočtová a časová náročnosť pre veľké portfóliá. Aby sa totiž dosiahla dostatočná presnosť odhadu rizika, musí byť vygenerovaný veľký počet scenárov. V 2. kapitole uvádzam vybrané simulačné modely.

Pri **analytickom prístupe** sa obvykle pracuje s rozdelením pravdepodobností veličín, ktoré vstupujú do modelu. Z nich sa potom určitým spôsobom odvodí rozdelenie pravdepodobností straty (alebo hodnoty) portfólia. Pri najjednoduchších modeloch zvolíme vhodnú rodinu rozdelení (s kladnou šikmosťou a „ťažkým chvostom") charakterizovanú prvým a druhým momentom. Zo známych charakteristík portfólia, ako sú expozície, pravdepodobnosti defaultu alebo korelácie medzi nimi, odhadneme strednú hodnotu a druhý centrálny moment straty L_{PF}. Z rodiny rozdelení vyberieme to, ktoré zodpovedá odhadnutým parametrom a z neho určíme miery rizika. Výpočet na základe takéhoto analytického modelu je zvyčajne veľmi rýchly, má však mnohé nevýhody. Odhad (obvykle priemernej) korelácie medzi defaultami aktív môže významnou mierou zvýšiť chybu modelu. Otázkou je aj voľba vhodnej rodiny rozdelení. Môžeme voliť napr. z beta-, gamma- alebo F-rozdelenia, pričom každé z nich má iné „chvosty" a tie sú veľmi dôležité pre určenie hodnoty v riziku. Voľba rodiny rozdelení je teda ďalším zdrojom chyby modelu. Viac komplexné a zložitejšie analytické modely uvádzam v 3. kapitole.

Väčšina modelov kreditného rizika sa potýka s problémom nedostatku historických dát o kreditných udalostiach, lebo tieto sú v skutočnosti relatívne vzácne. To obvykle neumožňuje dostatočne dobré odhady vstupných parametrov tak, aby bolo možné kreditné udalosti a korelácie medzi nimi modelovať priamo. Podľa prístupu k modelovaniu prechodov medzi ratingami a výťažností pohľadávok môžeme kvantitatívne modely kreditného rizika rozdeliť na štrukturálne modely a modely s redukovanou formou (pozri napr. [2]).

Štrukturálne modely (Structural Models, Asset Value Models) vychádzajú z predpokladu, že kreditné udalosti sú spúšťané zmenami hodnoty firmy. Preto sa zameriavajú najmä na modelovanie vývoja hodnoty firmy a opierajú sa o ekonomické základy teórie firmy. Vačšina modelov predpokladá, že default nastáva v okamžiku, keď hodnota firmy prvý krát klesne pod danú hranicu. Môžeme si to predstavit tak, že v tom okamžiku už firma nedisponuje aktívami dostatočnej hodnoty tak, aby bola schopná dostáť svojim záväzkom. Alternatívny prístup predpokladá, že rozhodnutie o bankrote je na držiteľoch akcií firmy a tí sa rozhodujú na základe ocenenia svojej vlastnej pozície. Výťažnosti pohľadávok sú v týchto modeloch tiež často dané ako funkcia hodnoty firmy.

V **modeloch s redukovanou formou** (Reduced-Form Models) sú kreditné udalosti špecifikované v závislosti na skokovom náhodnom procese, podobne výťažnosti pohľadávok sú dané exogénne. Rozlišujeme dva typy: modely založené na intenzite a modely kreditných migrácií. U prvého sa kladie dôraz na modelovanie náhodného času defaultu ako času skoku u jednoskokového náhodného procesu. Druhý typ modeluje prechody medzi kreditnými ratingami pomocou Markovovho procesu. Špeciálnou skupinou sú *faktorové modely* kreditných migrácií, kde sa intenzity migrácií modelujú ako funkcie mikro- a makroekonomických faktorov. Faktory teda tvoria základ pre zahrnutie korelácií do modelu.

V nedávnej dobe vyvinuté praktické prístupy k riadeniu kreditného rizika sa zameriavajú na výpočet rozdelenia pravdepodobností strát v prípade defaultu pre portfóliá inštrumentov citlivých na kreditné riziko. Rozdelenie pravdepodobností je odhadované na základe „reálnych“ (tj. získaných z historických dát) pravdepodobností, takže tieto modely neposkytujú priamo metódy na oceňovanie kreditných derivátov. Modely, ktoré sa v poslednom období používajú v praxi sú:

- CreditMetrics od RiskMetrics Group, J. P. Morgan ([10])
- Credit Monitor a Portfolio Manager od KMV ([6], resp. [3])
- CreditRisk$^+$ od Credit Suisse First Boston ([5])
- Creditscore a RiskCalc od Moody's
- CreditPorfolioView od McKinsey's ([11], resp. [15])

Kapitola 2

Simulačné modely

Pri popise simulačných modelov sa zameriam najmä na CreditMetrics a z neho odvodené modely, uvádzam tiež základnú kostru modelu KMV. CreditMetrics od J. P. Morgan a model firmy KMV patria medzi štrukturálne modely, ale zároveň ich môžeme zaradiť aj medzi faktorové modely. Opierajú sa o Mertonov model [12] tak, že predpokladajú vývoj hodnoty firmy ako geometrický Brownov pohyb. Na základe neho potom modelujú kreditné udalosti. Hlavným dôvodom takéhoto prístupu je fakt, že historické dáta potrebné na modelovanie kreditného rizika sú dosť obmedzené. Počet pozorovaných defaultov, resp. prechodov medzi ratingami nie je obvykle dosť veľký na dostatočne presné odhady korelácií a tie hrajú v modelovaní kreditného rizika podstatnú úlohu. Použitie faktorov a tržne dostupných dát umožní odhad týchto korelácií. Metodológia CreditMetrics je voľne prístupná, základný model je uvedený v [10], ale existujú aj rôzne jeho obmeny a doplnenia. KMV neodkryla verejne detaily svojho modelu, ale jeho sumarizáciu môžeme nájsť vo viacerých zdrojoch (napr. v [2], [6]). Ja sa opieram o model tak, ako bol popísaný v [3].

Označme V_i^t hodnotu firmy $i = 1, \ldots, n$ v čase t. Modely pracujú s logaritmickými výnosmi $r_i^t = \ln(V_i^t / V_i^0)$. Označme $\mathbf{r^t} = (r_1^t, \ldots, r_n^t)'$. Predpokladá sa, že logaritmické výnosy v závislosti na čase splňujú stochastickú diferenciálnu rovnicu (pozri [2])

$$d\mathbf{r^t} = \boldsymbol{\mu}\, dt + B\, d\mathbf{W_t},$$

kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$ je vektor konštánt, B je matica $(n \times m)$ konštánt a $\mathbf{W_t} = (W_t^1, \ldots, W_t^m)'$ je m-dimenzionálny geometrický Brownov pohyb (pozri [13]). Potom platí

$$\mathbf{r^t} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}\, t, \Gamma\, t),$$

kde $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times n} = BB'$ je kovariančná matica a $\gamma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Koeficient σ_i^2 reprezentuje rozptyl logaritmických výnosov a ρ_{ij} koreláciu medzi logaritmickými výnosmi z aktív, ktorá sa často zjednodušene nazýva korelácia aktív (Asset Correlation). Rozdelenie logaritmických výnosov $\mathbf{r^t}$ prirodzeným spôsobom závisí na trende

$\boldsymbol{\mu}$ (Drift) a na čase t. Pri určovaní kreditného rizika musí byť vždy stanovený časový horizont ku ktorému riziko posudzujeme. V ďalšom budem uvažovať $t = 1$ a namiesto označenia $\mathbf{r^1}$ budem používať $\mathbf{r}$. Bude teda

$$\mathbf{r} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Gamma). \tag{2.1}$$

2.1 KMV Model

Model firmy KMV vychádza z predpokladu, že logaritmické výnosy z aktív protistrán $i = 1, \ldots, n$ majú reprezentáciu tvaru

$$r_i = \beta_i \, \xi_i + \varepsilon_i. \tag{2.2}$$

ξ_i sa nazýva zložený faktor protistrany i, pretože obvykle je váženým súčtom viacerých faktorov. β_i vyjadruje lineárnu závislosť r_i na ξ_i, ε_i sa dá chápať ako chyba odhadu. Platí (2.1). Ďalej sa predpokladá, že $\forall\, i = 1, \ldots, n$ sú ξ_i a ε_i nezávislé a normálne rozdelené. Naviac ε_i sa predpokladajú nekorelované, čo v tomto prípade implikuje nezávislosť. Z toho vyplýva, že r_i sú korelované výhradne prostredníctvom zložených faktorov, a preto ich môžeme považovať za systematickú časť rizika. ε_i naproti tomu predstavuje riziko špecifické pre protistranu i. Rozklad rizika na systematickú a špecifickú (idiosynkratickú) časť je

$$\operatorname{var} r_i = \beta_i^2 \operatorname{var} \xi_i + \operatorname{var} \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Podiel

$$R_i^2 = \frac{\beta_i^2 \operatorname{var} \xi_i}{\operatorname{var} r_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

predstavuje časť rizika, ktorú môžeme vysvetliť zloženým faktorom a nazýva sa koeficient determinácie. Model KMV ďalej predpokladá rozklad zložených faktorov na

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{K} w_{i,k} \Psi_k, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde Ψ_k predstavujú indexy pre priemysel $(1, \ldots, K_0)$ a krajiny $(K_0 + 1, \ldots, K)$ a $w_{i,k} \geq 0 \; \forall\, i, k$ sú príslušné váhy, pre ktoré platí

$$\sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} = \sum_{k=K_0+1}^{K} w_{i,k} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ďalšou úrovňou modelu je rozklad indexov na nezávislé globálne faktory

$$\Psi_k = \sum_{m=1}^{M} b_{k,m} \Gamma_m + \delta_k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

kde δ_k je rezíduum špecifické pre Ψ_k. Vo vektorovom zápise dostávame

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}\, W(B\, \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.4}$$

kde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\beta_{ij} = \beta_i$ ak $i = j$ a $\beta_{ij} = 0$ ak $i \neq j$, ďalej $W = (w_{i,k})$ je matica $(n \times K)$ váh indexov, $B = (b_{k,m})$ je matica $(K \times M)$, $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_M)'$ je vektor globálnych faktorov, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_K)'$ je vektor reziduí a vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ predstavuje idiosynkratické časti rizika.

Definujme štandardizovaný logaritmický výnos z aktív

$$\widetilde{r}_i = \frac{r_i - \mathrm{E}\, r_i}{\sigma_i} = \frac{\beta_i}{\sigma_i}\widetilde{\xi}_i + \frac{\widetilde{\varepsilon}_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

kde $\sigma_i^2 = \operatorname{var} r_i$, $\widetilde{\xi}_i = \xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i$ a $\widetilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \mathrm{E}\,\varepsilon_i$. Potom pri predpoklade nezávislosti a nekorelovanosti faktorov a za použitia (2.3) dostávame

$$\operatorname{corr}(\widetilde{r}_i, \widetilde{r}_j) = \frac{\beta_i}{\sigma_i}\frac{\beta_j}{\sigma_j}\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\xi}_j) = \frac{R_i}{\sqrt{\operatorname{var}\widetilde{\xi}_i}}\frac{R_j}{\sqrt{\operatorname{var}\widetilde{\xi}_j}}\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\xi}_j). \tag{2.6}$$

Podľa (2.5) dostávame z (2.4) vektorový zápis štandardizovaných logaritmických výnosov

$$\widetilde{\mathbf{r}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}} + \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\, W(B\,\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} + \widetilde{\boldsymbol{\delta}}) + \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

kde matica $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ vznikne z $\boldsymbol{\beta}$ vynásobením prvkov $1/\sigma_i$ a $\mathrm{E}\,\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathrm{E}\,\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathrm{E}\,\widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0}$. Na odhad korelácií aktív potrebujeme teda vzhľadom k (2.6) poznať strednú hodnotu

$$\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}') = W\left(B\,\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}\,\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}')B' + \mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\delta}}\,\widetilde{\boldsymbol{\delta}}')\right)W'.$$

Odvodenie možno nájsť v [3]. Matice $\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}\,\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}')$ a $\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\delta}}\,\widetilde{\boldsymbol{\delta}}')$ sú diagonálne s prvkami $\operatorname{var}\Gamma_m$, $m = 1, \ldots, M$, resp. $\operatorname{var}\delta_k$, $k = 1, \ldots, K$ na diagonálach. Takže vidíme, že korelácie aktív firiem závisia iba na korelácií podkladových faktorov.

Ako už bolo uvedené, model spoločnosti KMV patrí medzi štrukturálne modely, a teda predpokladá, že kreditné udalosti sú odvodené od zmien v hodnote aktív firmy (protistrany). Uvažujme pre jednoduchosť len dva stavy: default a nedefaultný stav. Potom predpokladáme, že default nastáva práve vtedy, keď hodnota aktív firmy v danom časovom horizonte klesne pod určitú hranicu. Pripomeňme, že V_i^t je hodnota aktív firmy i v čase t a uvažujme naďalej pre jednoduchosť $t = 1$ rok. Pre každú firmu majme kritickú hranicu C_i tak, že default (o rok) nastane práve vtedy, keď $V_i^1 < C_i$. Definujme náhodnú veličinu $D_i = \mathbf{1}\{V_i^1 < C_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, kde $\mathbf{1}\{J\}$ je indikátor javu J. Potom

$$D_i \sim \mathrm{Alt}(p_i), \quad \text{kde } p_i = \mathrm{P}(V_i^1 < C_i).$$

V_i^1 je tzv. latentná náhodná veličina, p_i je (ročná) pravdepodobnosť defaultu. Pripomeňme predpoklad, že proces hodnoty aktív firmy závisí na podkladových faktoroch. Logaritmický výnos $\ln(V_i^1/V_i^0)$ môžeme po štandardizácii, s použitím (2.5) a (2.3) a po zjednodušení značenia napísať v tvare

$$r_i = R_i\,\xi_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

kde $r_i \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\xi_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ a $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, 1 - R_i^2)$ $\forall\, i = 1, \dots, n$. Potom existuje c_i zodpovedajúce C_i tak, že

$$D_i = \mathbf{1}\left\{r_i < c_i\right\} \sim \mathrm{Alt}(\mathrm{P}(r_i < c_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $p_i = \mathrm{P}(r_i < c_i)$ a vzhľadom k normálnemu rozdeleniu r_i máme $c_i = \Phi^{-1}(p_i)$. Podmienku pre default $r_i < c_i$ môžeme s použitím (2.7) prepísať do tvaru

$$\varepsilon_i < \Phi^{-1}(p_i) - R_i\, \xi_i,$$

resp. po štandardizácii ε_i do tvaru

$$\widetilde{\varepsilon_i} < \frac{\Phi^{-1}(p_i) - R_i\, \xi_i}{\sqrt{1 - R_i^2}}, \quad \text{kde } \widetilde{\varepsilon_i} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Pravdepodobnosť defaultu protistrany i teda môžeme v závislosti na faktore ξ_i vyjadriť ako

$$p_i(\xi_i) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - R_i\, \xi_i}{\sqrt{1 - R_i^2}}\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.8}$$

Pripomeňme, že zložené faktory sú váženým súčtom indexov pre priemysel a krajiny. Jednoduchým dosadzovaním rôznych hodnôt indexov do vzťahu (2.8) môžeme skúmať vplyv stavu ekonomiky na pravdepodobnosti defaultov jednotlivých protistrán.

Je nutné spomenúť, že podstatná časť modelu firmy KMV je venovaná získaniu hodnoty aktív firmy z hodnoty základného kapitálu. Dôvodom je fakt, že hodnota základného kapitálu je na rozdiel od hodnoty aktív firmy pozorovateľná na trhu. Naproti tomu model CreditMetrics (ako bude uvedené v ďalšej časti) používa odhad korelácií výnosov zo základného kapitálu ako náhradu za korelácie výnosov z aktív firmy. Zjednodušené odvodenie hodnoty aktív zo základného kapitálu pomocou Mertonovho modelu a Black-Scholesovej formule možno nájsť v [3].

2.2 CreditMetrics

CreditMetrics je nástroj na odhad kreditného rizika portfólia v dôsledku zmien hodnôt aktív spôsobených zmenou kreditnej kvality protistrán. V tomto modele budeme hodnotiť kreditnú kvalitu protistrán pomocou konečnej množiny ratingov. Základný model CreditMetrics umožňuje analytický výpočet neočakávanej straty pomocou združených pravdepodobností prechodov medzi ratingami. Pre veľkosť portfólia n je však R^n možných združených ratingov (R je počet možných ratingov) a výpočet sa tak stane časovo náročným, pričom výsledkom je len očakávaná a neočakávaná strata, ale nie hodnota v riziku. Preto sa v rámci základného modelu CreditMetrics vo svojej práci zameriam na simulačný prístup k odhadu kreditného rizika. Podrobná metodológia je uvedená v [10].

Ratingy a matica pravdepodobností prechodu

Model predpokladá, že poznáme počiatočné **ratingy** jednotlivých protistrán. Tieto sú vydávané ratingovými agentúrami (napr. Standard&Poor's, Moody's), ale je možné použiť aj ocenenia kreditnej kvality na základe interných skóringových modelov. Vzhľadom k tomu, že každá ratingová agentúra používa iný systém hodnotenia, je dôležité, aby všetky ostatné dáta boli konzistentné so zvoleným typom.

Rating v určitom zmysle vyjadruje kreditnú kvalitu protistrany, a teda náchylnosť k defaultu, táto sa však v čase môže meniť. Spôsob, akým predpokladáme, že sa bude vyvíjať vyjadrujú **pravdepodobnosti prechodu** medzi ratingami. Musia sa vzťahovať k **časovému obdobiu**, v rámci ktorého odhadujeme kreditné riziko. Konvenciou je voliť časový horizont 1 rok. Pri kratších časových obdobiach hrozí nedostatok historických dát s prechodmi medzi ratingami, dlhšie obdobie zase môže spôsobiť stratu aktuálnosti historických dát na to, aby dostatočne dobre predpovedali migrácie v budúcnosti. Ratingové agentúry obvykle poskytujú aj matice pravdepodobností prechodu. Niekedy sa môže stať, že odhad pravdepodobnosti je nulový alebo matica vykazuje vlastnosti, ktoré nepokladáme za „prirodzené“ a žiadúce. Je to spôsobené práve nedostatkom pozorovaní. Takéto matice sa obvykle ďalej upravujú. Očakávané vlastnosti matíc a druhy úprav sú uvedené v [10].

Model CreditMetrics považuje maticu pravdepodobností prechodu za vstupný parameter. Predpokladá, že protistrany sú na počiatku ohodnotené „správnymi“ ratingami (tj. agentúry používajú rovnaké štandardy oceňovania pre rôzne priemyselné odvetvia a krajiny a ich metódy sú konzistentné v čase). Ďalej predpokladá, že protistrany s rovnakým ratingom sa v budúcnosti budú chovať podobne.

Expozície

Keďže model CreditMetrics predpokladá, že kreditné riziko plynie nielen z možného defaultu, ale aj zo zmien kreditnej kvality protistrany, je dôležité určiť pre každý budúci rating novú hodnotu aktíva (expozíciu) L_i^j, $i = 1, \ldots, n$, $j \in$\{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}, kde D predstavuje default. Kvôli lepšej interpretovateľnosti sa používa hodnota aktíva namiesto straty aktíva pre daný rating. Modeluje sa potom rozdelenie pravdepodobností hodnoty portfólia $L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} L_i$, kde L_i nadobúda hodnoty L_i^j s príslušnými pravdepodobnosťami prechodu a hodnota v riziku sa získa obmenou vzťahu (1.1):

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \sup\{q \mid \mathrm{P}(L_{PF} \geq q) \geq \alpha\}. \tag{2.9}$$

Je to teda veličina, pod ktorú neklesne hodnota portfólia s pravdepodobnosťou α. Napr. pre kupónovú obligáciu uvažujeme v budúcnosti výplaty kupónov a nominálnej hodnoty v čase splatnosti. Pre každý nedefaultujúci rating diskontujeme budúce platby do času, v ktorom určujeme kreditné riziko, pomocou kriviek forwardových úrokových mier. Každá krivka prísluší danému ratingu.

Pre defaultujúci stav volíme iný postup. V praxi sa totiž ukazuje, že default ešte neznamená, že stratíme celú hodnotu aktíva. CreditMetrics používa u obligácií nominálnu hodnotu vynásobenú výťažnosťou pohľadávky. Problémom býva určenie výťažnosti, pričom jej hodnota je velmi dôležitá, lebo významným spôsobom ovplyvňuje konečné kreditné riziko portfólia. Všeobecne sa má za to, že výťažnosti pohľadávok sú veľmi neistým parametrom a závisia aj na type expozície. V zjednodušenom prístupe ich môžeme považovať za konštantné a nahradiť ich určitou priemernou hodnotou. Sofistikovanejší prístup predpokladá výťažnosť pohľadávky náhodnú. Najvhodnejším rozdelením v tomto prípade sa zdá byť beta rozdelenie. Základný model CreditMetrics umožňuje modelovať výťažnosti ako náhodné veličiny, lebo empirické rozdelenie hodnoty portfólia sa získava pomocou simulácií.

Hodnota firmy a korelácie

Ako bolo povedané v úvode, CreditMetrics, rovnako ako KMV, predpokladá vývoj hodnoty firmy podľa Mertonovho modelu. Vychádza z predstavy, že meniaca sa hodnota firmy mení aj jej kreditnú kvalitu. Na základe známeho počiatočného ratingu a pravdepodobností prechodov môžeme teda určiť isté hranice C_i^j (i-ta firma, j-ta hranica), ktoré keď hodnota firmy prekročí na konci zvoleného obdobia, bude sa meniť aj jej rating. (Analogický prístup ako u KMV pre default s hranicou C_i.) Tento prístup je zvolený z toho dôvodu, že pomocou korelácií medzi hodnotami aktív protistrán budeme modelovať korelácie prechodov medzi ratingami. Tie sú dôležitým parametrom modelu a významne ovplyvňujú riziko portfólia.

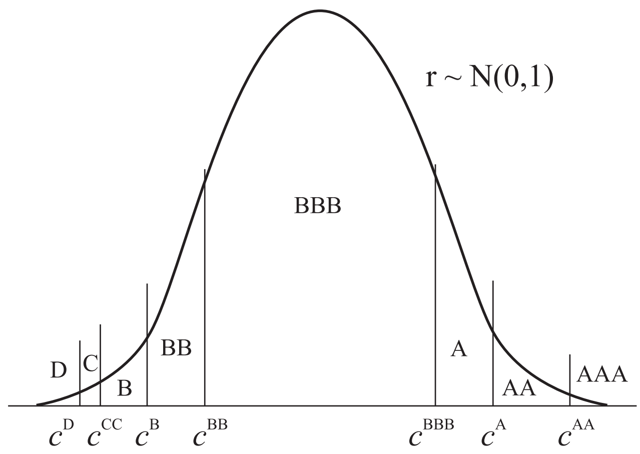
Analogicky ako v modele KMV budeme namiesto samotnej hodnoty firmy uvažovať logaritmický výnos z jej aktív $\widetilde{r}_i$ (za obdobie 1 rok), ktorý má normálne rozdelenie. Predpokladáme tiež, ze existujú hranice pre $\widetilde{r}_i$ zodpovedajúce hraniciam C_i^j. Pretože nezáleží na absolútnych hodnotách týchto hraníc, ale na pravdepodobnostiach, že $\widetilde{r}_i$ sa bude nachádzať v jednotlivých intervaloch, budeme ďalej pracovať so štandardizovanými logaritmickými výnosmi

$$r_i = \frac{\widetilde{r}_i - \mathrm{E}\,\widetilde{r}_i}{\sqrt{\mathrm{var}\,\widetilde{r}_i}} \sim N(0,1), \quad i = 1,\dots,n.$$

Kvôli názornosti odvodenia budem používať ratingovú škálu vydávanú agentúrou Standard&Poor's. Maticu pravdepodobností prechodu medzi ratingami považujeme za danú, takže stačí pre každý počiatočný rating z {AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC} vypočítať hranice c^j, $j \in$ {AA, A, BBB, BB, B, CCC, D} tak, aby

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(R = \mathrm{D}) = \mathrm{P}(r_i \le c^{\mathrm{D}}) = \Phi(c^{\mathrm{D}}), \\ &\mathrm{P}(R = \mathrm{CCC}) = \mathrm{P}(c^{\mathrm{D}} < r_i \le c^{\mathrm{CCC}}) = \Phi(c^{\mathrm{CCC}}) - \Phi(c^{\mathrm{D}}), \text{ atd.,} \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde R je rating v čase 1, Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia. Stačí teda spočítať len 49 hodnôt. Vzťah medzi logaritmickým výnosom z aktív a ratingami ilustruje nasledujúci obrázok. Pravdepodobnosť prechodu do určitého ratingu je obsah plochy pod funkciou hustoty normálneho rozdelenia medzi zodpovedajúcimi hraničnými bodmi.



Obr. 2.1: Výnos z aktív a hraničné body pre počiatočný rating BBB

Pri simulácii sa vygeneruje náhodné číslo $\widehat{r}_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ a podľa počiatočného ratingu a intervalu, do ktorého patrí sa určí koncový rating. Keby boli jednotlivé protistrany nezávislé, mohli by sme pre každú generovať čísla individuálne. CreditMetrics však zachytáva korelovanosť firiem pri prechodoch medzi ratingami tak, že predpokladá vektor logaritmických výnosov

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)' \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma),$$

kde Σ je korelačná matica n-rozmerného normálneho rozdelenia. Zostáva teda určiť korelácie medzi logaritmickými výnosmi z aktív jednotlivých firiem.

CreditMetrics sa na tomto mieste odlišuje od modelu KMV, lebo používa odhady korelácií logaritmických výnosov zo základného kapitálu ako náhradu za korelácie aktív firmy. Je to z dôvodu lepšej dostupnosti tržných dát potrebných na ich odhad. Na druhej strane to vnáša do modelovania kreditného rizika ďalšiu nepresnosť. Aby sme nemuseli pre každú dvojicu firiem odhadovať koreláciu zvlášť, CreditMetrics predpokladá jej odvodenie pomocou korelácií priemyselných indexov v rôznych krajinách. To je ďalší rozdiel oproti KMV modelu, ktorý uvažoval zvlášť priemyselné indexy a zvlášť indexy pre krajiny. Prehľad indexov používaných v CreditMetrics je uvedený v [10]. Pre každý index I_k, $k = 1, \dots, K$ predpokladáme odhad smerodatnej odchýlky logaritmických výnosov σ_k a korelácií $\rho_{k,l} = \mathrm{corr}(I_k, I_l)\ \forall\ l = 1, \dots, K$. Predpokladajme štandardizované logaritmické výnosy zo základného kapitálu firmy i napr. v tvare

$$r_i = w_{i,k_1} z_{k_1} + w_{i,k_2} z_{k_2} + w_i \varepsilon_i, \quad w_{i,k_1}, w_{i,k_2} \neq 0, \tag{2.11}$$

kde z_{k_1} a z_{k_2} sú štandardizované logaritmické výnosy z indexov I_{k_1} a I_{k_2} (nazývajú sa aj **faktory**- odtiaľ pomenovanie faktorové modely); z_{k_1}, $z_{k_2} \sim \mathrm{N}(0,1)$ a $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ je idiosynkratická časť výnosu firmy i. $\forall\, i = 1, \dots, n$ predpokladáme ε_i nezávislé na výnosoch z indexov a tiež nezávislé navzájom. Nech α_i je podiel z výnosov firmy i, ktorý je závislý na výnosoch z indexov. Potom kladieme

$$w_i = \sqrt{1 - \alpha_i^2}, \tag{2.12}$$

lebo $\mathrm{var}\, r_i = 1$. Ďalej nech z podielu indexov pripadá α_{i,k_1} na I_{k_1} a α_{i,k_2} na I_{k_2}. Potom je

$$w_{i,k_1} = \alpha_i\, \alpha_{i,k_1} \frac{\sigma_{k_1}}{\widehat{\sigma}}, \quad w_{i,k_2} = \alpha_i\, \alpha_{i,k_2} \frac{\sigma_{k_2}}{\widehat{\sigma}}, \tag{2.13}$$

kde

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\alpha_{i,k_1}^2\, \sigma_{k_1}^2 + \alpha_{i,k_2}^2\, \sigma_{k_2}^2 + 2\, \alpha_{i,k_1}\, \alpha_{i,k_2}\, \sigma_{k_1}\, \sigma_{k_2}\, \rho_{k_1,k_2}}. \tag{2.14}$$

Zovšeobecnenie na ľubovolný počet faktorov je zrejmé. Na výpočet korelácií logaritmických výnosov zo základného kapitálu dvoch firiem použijeme vzťah obdobný ako (2.11). Výsledok bude závisieť iba na príslušných $w_{i,k}$ a koreláciách výnosov z indexov.

Označme $C = (\rho_{k,l})_{k,l=1}^{K}$ maticu korelácií indexov a I jednotkovú maticu s rozmermi $(n \times n)$. Nech ďalej $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)'$ je vektor logaritmických výnosov zo základného kapitálu firiem, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_K)'$ je vektor logaritmických výnosov z indexov a napokon $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ je vektor idiosynkratických častí. V maticovom zápise máme

$$\mathbf{r} = W_1\mathbf{z} + W_2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{r} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \mathbf{z} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, I). \tag{2.15}$$

W_1 je matica $(n \times K)$ s prvkami w_{ik} vypočítanými podľa (2.13). W_2 je matica $(n \times n)$ s prvkami w_i (2.12) na diagonále, ostatné prvky sú nulové. Označme ďalej

$$W = (W_1 | W_2) \tag{2.16}$$

maticu $(n \times K + n)$ a

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \ldots & \rho_{1,K} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \ldots & \rho_{2,K} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K,1} & \rho_{K,2} & \ldots & \rho_{K,K} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

maticu $(K + n \times K + n)$ korelácií indexov aj idiosynkratických častí. Potom

$$\Sigma = W \, \overline{C} \, W' \tag{2.18}$$

je matica korelácií logaritmických výnosov zo základného kapitálu firiem.

Algoritmus

Predpokladajme, že poznáme korelačnú maticu Σ a hranice c_i^j pre každú protistranu $i = 1, \ldots, n$ a pre každý rating $j \in$ {AA, A, BBB, BB, B, CCC, D}. Spôsob generovania hodnôt L_{PF} môžeme vyjadriť algoritmom:

1. Vygeneruj $\widehat{\mathbf{r}} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$,
2. Pre každú hodnotu $\widehat{r_i}$, $i = 1, \ldots, n$, urči pomocou hraníc c_i^j koncový rating R_i, pozri (2.10),
3. Každému $i = 1, \ldots, n$ priraď koncovú hodnotu aktíva $\widehat{L_i}^{R_i}$,
4. Spočítaj $\widehat{L}_{PF} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{L_i}^{R_i}$.

Takto získame hodnotu portfólia pre jeden scenár. Celý postup sa zopakuje M krát a zo získaných hodnôt sa určí empirické rozdelenie L_{PF}.

Chyba odhadu

Odhady mier rizika odvodené z empirického rozdelenia sú subjektívne vzhľadom ku konkrétnym vygenerovaným hodnotám. Okrem chyby modelu musíme teda brať do úvahy aj chyby týchto odhadov.

Označme $\widehat{L}_{PF}^{(1)}, \ldots, \widehat{L}_{PF}^{(M)}$ vygenerované hodnoty portfólia pre jednotlivé scenáre a $L_{PF}^{(1)}, \ldots, L_{PF}^{(M)}$ nech sú tieto hodnoty zoradené vzostupne. Ďalej nech $\mu = \mathrm{E}L_{PF}$ a $\sigma^2 = \mathrm{var}L_{PF}$ sú skutočné parametre rozdelenia L_{PF} a

$$\widehat{\mu}_M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\widehat{L}_{PF}^{(m)}, \quad \widehat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{m=1}^{M}(\widehat{L}_{PF}^{(m)} - \widehat{\mu}_M)^2$$

sú výberová stredná hodnota a výberový rozptyl na základe M simulácií. $\widehat{L}_{PF}^{(1)}, \ldots, \widehat{L}_{PF}^{(M)}$ sú nezávislé realizácie náhodnej veličiny L_{PF}. Podľa centrálnej limitnej vety môžeme pre dostatočne veľké M aproximovať rozdelenie $\sum_{m=1}^{M}\widehat{L}_{PF}^{(m)} \sim \mathrm{N}(M\,\mu, M\,\sigma^2)$, teda

$$\widehat{\mu}_M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\widehat{L}_{PF}^{(m)} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{M}\right).$$

Keďže skutočné hodnoty parametrov μ a σ^2 nepoznáme, nahradíme ich odhadmi a dostaneme interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu L_{PF} na hladine blížiacej sa k $1-\beta$ pre $M \to \infty$

$$\left(\widehat{\mu}_M + u_{\frac{\beta}{2}}\,\widehat{\sigma}_M/\sqrt{M}\,,\ \widehat{\mu}_M - u_{\frac{\beta}{2}}\,\widehat{\sigma}_M/\sqrt{M}\right),$$

kde $u_{\frac{\beta}{2}} = \Phi^{-1}(\beta/2)$ je kvantil štandardného normálneho rozdelenia. Vidíme, že pri zvyšujúcom sa počte simulácií M, sa interval spoľahlivosti zužuje.

Určenie intervalu spoľahlivosti pre smerodatnú odchýlku je o niečo zložitejšie, lebo sa ťažšie určuje rozptyl odhadu. Postupuje sa tak, že M hodnôt $\widehat{L}_{PF}^{(m)}$ sa rozdelí do K rovnako veľkých skupín (predpokladám deliteľnosť bez zvyšku) a pre každú zvlášť sa odhadne smerodatná odchýlka $\widehat{\sigma}^{(1)}, \ldots, \widehat{\sigma}^{(K)}$. Rozptyl týchto odhadov označím s^2. Obdobnou úvahou ako pre strednú hodnotu dostanem potom interval spoľahlivosti pre smerodatnú odchýlku L_{PF} na hladine približne $1-\beta$

$$\left(\widehat{\sigma}_M + u_{\frac{\beta}{2}}\,s/\sqrt{K}\,,\ \widehat{\sigma}_M - u_{\frac{\beta}{2}}\,s/\sqrt{K}\right).$$

Na rozdiel od predchádzajúcich veličín sa odhad hodnoty v riziku určí ako istá hodnota z $L_{PF}^{(m)}$, $m = 1, \ldots, M$ v poradí. Nemôžeme teda priamo použiť centrálnu limitnú vetu. Nech VaR_α je skutočná hodnota v riziku rozdelenia L_{PF}. Označme $N_{1-\alpha}$

počet vygenerovaných scenárov takých, že hodnota portfólia je menšia než VaR_α. Je zrejmé, že $N_{1-\alpha} \sim \mathrm{Bi}(M, 1-\alpha)$ a pre dostatočne veľké M ho môžeme aproximovať normálnym rozdelením $\mathrm{N}(M(1-\alpha), M(1-\alpha)\alpha)$ (súčet nezávislých náhodných veličín s alternatívnym rozdelením). Teda s pravdepodobnosťou asi $1-\beta$ bude $N_{1-\alpha}$ v intervale

$$\left(M(1-\alpha) + u_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{M(1-\alpha)\alpha}\,,\, M(1-\alpha) - u_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{M(1-\alpha)\alpha}\right).$$

Veličina $N_{1-\alpha}$ však nie je pozorovateľná, lebo nepoznáme skutočnú hodnotu VaR_α. Označme

$$d = \lfloor M(1-\alpha) + u_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{M(1-\alpha)\alpha} \rfloor \text{ (celá dolná časť)}, \tag{2.19}$$

$$h = \lceil M(1-\alpha) - u_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{M(1-\alpha)\alpha} \rceil \text{ (celá horná časť) a} \tag{2.20}$$

$$m = \lfloor M(1-\alpha) \rfloor. \tag{2.21}$$

Stačí si uvedomiť, že jav $d < N_{1-\alpha} < h$ je to isté ako $L_{PF}^{(d)} < \mathrm{VaR}_\alpha < L_{PF}^{(h)}$. Z toho plynie, že

$$\mathrm{P}\left(L_{PF}^{(d)} < \mathrm{VaR}_\alpha < L_{PF}^{(h)}\right) = \mathrm{P}\left(d < N_{1-\alpha} < h\right) \doteq 1-\beta.$$

Hodnotu v riziku na hladine α teda odhadujeme hodnotou $L_{PF}^{(m)}$ a požadovaný interval spoľahlivosti je

$$\left(L_{PF}^{(d)}, L_{PF}^{(h)}\right). \tag{2.22}$$

Poznámka ku korelácii defaultov

Vzhľadom k následnej kalibrácii modelu na portfólio, je dôležité si uvedomiť, že korelácia defaultov nezodpovedá koreláciám vypočítaným v matici Σ (2.18). Definujme si pre dve protistrany i a j, $i \neq j$ identifikátory defaultov: $D_i = \mathbf{1}\left\{r_i < c_i^{\mathrm{D}}\right\}$, $D_j = \mathbf{1}\{r_j < c_j^{\mathrm{D}}\}$. Sú to náhodné veličiny s alternatívnym rozdelením a parametrami p_i^{D} a p_j^{D}. Korelácia defaultov je potom

$$\begin{aligned}\varrho_{ij} &:= \mathrm{corr}(D_i, D_j) = \\ &= \frac{\mathrm{cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\mathrm{var}\, D_i.\mathrm{var}\, D_i}} = \frac{\mathrm{E}D_i\, D_j - \mathrm{E}D_i.\mathrm{E}D_j}{\sqrt{\mathrm{var}\, D_i.\mathrm{var}\, D_j}} = \frac{p_{ij}^{\mathrm{D}} - p_i^{\mathrm{D}}.p_j^{\mathrm{D}}}{\sqrt{p_i^{\mathrm{D}}(1-p_i^{\mathrm{D}})p_j^{\mathrm{D}}(1-p_j^{\mathrm{D}})}},\end{aligned} \tag{2.23}$$

kde p_{ij}^{D} je združená pravdepodobnosť defaultov dlžníkov i a j. Podľa modelu CreditMetrics teda máme

$$p_{ij}^{\mathrm{D}} = \mathrm{P}(r_i < c_i^{\mathrm{D}}, r_j < c_j^{\mathrm{D}}) = \Phi(c_i^{\mathrm{D}}, c_j^{\mathrm{D}}), \tag{2.24}$$

kde $\Phi(r_i, r_j)$ je distribučná funkcia združeného normálneho rozdelenia s kovarianciami zodpovedajúcimi prvkom v matici Σ.

2.3 Podmienená nezávislosť

Doteraz popísaný model CreditMetrics sa vyznačuje veľkou flexibilitou pri aplikácii na rôzne typy aktív a takisto dostatočnou komplexnosťou, lebo použité predpoklady nie sú príliš obmedzujúce. Na druhej strane však v dôsledku relatívne pomalej konvergencie v závislosti na počte vygenerovaných scenárov M je časovo aj výpočetne náročný (M krát generujeme n-rozmerné normálne rozdelenie, kde n je počet korelovaných aktív v portfóliu). Alternatívu môže predstavovať použitie rozdelení podmienených faktormi (tj. logaritmickými výnosmi z indexov), pozri [7]. Podmienené rozdelenia sú nezávislé, čo umožňuje explicitne odvodiť niektoré vzťahy a hoci simulácii sa celkom nevyhneme, mohla by byť menej časovo náročná.

Naďalej predpokladajme logaritmický výnos zo základného kapitálu protistrany i, $i = 1, \ldots, n$, v tvare (2.11), resp. v maticovom zápise (2.15), za platnosti uvedených predpokladov nezávislosti a normálneho rozdelenia. Uvažujme pre prehľadnejšie odvodenie len 2 faktory pre celé portfólio. Teda je

$$r_i = w_{i,1} z_1 + w_{i,2} z_2 + w_i \varepsilon_i,$$

kde $w_{i,1}$, $w_{i,2}$, w_i sú váhy vplyvu faktorov z_1, z_2, ε_i na r_i. Ďalej majme pre každú protistranu určené hranice c_i^j, $j \in$ {AA, A, BBB, BB, B, CCC, D} obdobne ako v (2.10). Teda default v pôvodnom modele nastáva práve vtedy, keď $r_i \le c_i^{\mathrm{D}}$, atd. Predstavme si ale, že hodnoty faktorov sú známe $z_1 = \overline{z}_1$, $z_2 = \overline{z}_2$. Potom default v upravenom modele nastane práve vtedy, keď

$$\varepsilon_i \le \frac{c_i^{\mathrm{D}} - w_{i,1}\overline{z}_1 - w_{i,2}\overline{z}_2}{w_i}.$$

Keďže ε_i, $i = 1, \ldots, n$ sú nezávislé a normálne rozdelené, sú defaulty jednotlivých protistrán podmienene nezávislé a pre podmienené pravdepodobnosti defaultov platí

$$p_i^{\mathrm{D}}(\overline{z}_1, \overline{z}_2) := \mathrm{P}(R_i = \mathrm{D} | z_1 = \overline{z}_1, z_2 = \overline{z}_2) = \Phi\left(\frac{c_i^{\mathrm{D}} - w_{i,1}\overline{z}_1 - w_{i,2}\overline{z}_2}{w_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.25}$$

kde R_i je rating protistrany i v čase 1. (pozn.: porovnaj s (2.8)) Podobne pre ostatné ratingy platí podmienená nezávislosť a podmienené pravdepodobnosti prechodu sú

$$\begin{aligned} p_i^{\mathrm{CCC}}(\overline{z}_1, \overline{z}_2) &:= \mathrm{P}(R_i = \mathrm{CCC} | z_1 = \overline{z}_1, z_2 = \overline{z}_2) = \\ &= \Phi\left(\frac{c_i^{\mathrm{CCC}} - w_{i,1}\overline{z}_1 - w_{i,2}\overline{z}_2}{w_i}\right) - \Phi\left(\frac{c_i^{\mathrm{D}} - w_{i,1}\overline{z}_1 - w_{i,2}\overline{z}_2}{w_i}\right), \quad \text{atd.} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Označme R={AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D} množinu ratingov a L_i^j hodnotu i-teho aktíva pri ratingu $j \in R$. Potom vďaka podmienenej nezávislosti protistrán je podmienená stredná hodnota náhodnej veličiny $L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} L_i$

$$\mu(z_1, z_2) := \mathrm{E}[L_{PF}|z_1, z_2] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[L_i|z_1, z_2] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in R} p_i^j(z_1, z_2)\, L_i^j \tag{2.27}$$

a podmienený rozptyl

$$\sigma^2(z_1, z_2) := \mathrm{var}[L_{PF}|z_1, z_2] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[L_i|z_1, z_2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in R} p_i^j(z_1, z_2)\, (L_i^j - \mu_i(z_1, z_2))^2. \tag{2.28}$$

V [7] nájdeme 3 možnosti ako aproximovať podmienené rozdelenie L_{PF}. Jednou z nich je použitie centrálnej limitnej vety, lebo L_{PF} je súčtom veľkého počtu podmienene nezávislých náhodných veličín. Budeme teda podmienené rozdelnie L_{PF} pokladať približne za normálne

$$L_{PF}|(z_1, z_2) \sim \mathrm{N}\left(\mu(z_1, z_2), \sigma^2(z_1, z_2)\right).$$

Distribučná funkcia podmieneného rozdelenia má aproximáciu

$$\mathrm{P}(L_{PF} \leq x \,|\, z_1, z_2) = \Phi\left(\frac{x - \mu(z_1, z_2)}{\sqrt{\sigma^2(z_1, z_2)}}\right)$$

a napokon distribučná funkcia nepodmieneného rozdelenia L_{PF} má vyjadrenie

$$\mathrm{P}(L_{PF} \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z_1, z_2)\, \Phi\left(\frac{x - \mu(z_1, z_2)}{\sqrt{\sigma^2(z_1, z_2)}}\right) dz_1\, dz_2,$$

kde $\phi(z_1, z_2)$ je hustota združeného normálneho rozdelenia (z_1, z_2). Na odhad distribučnej funkcie sa použije simulácia. Postup môžeme vyjadriť nasledovným algoritmom.

Algoritmus

Predpokladáme logaritmické výnosy v tvare (2.15).

1. Vygeneruj $\widehat{\mathbf{z}} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C)$,
2. $\forall\, i = 1, \ldots, n$, $j \in \mathrm{R}$, spočítaj podmienené pravdepodobnosti $p_i^j(\widehat{\mathbf{z}})$ analogicky ako v (2.25), (2.26),
3. $\forall\, i = 1, \ldots, n$ spočítaj podmienenú strednú hodnotu $\mu_i(\widehat{\mathbf{z}})$ veličiny L_i,

4. Spočítaj podmienenú strednú hodnotu $\mu(\widehat{\mathbf{z}})$ a podmienený rozptyl $\sigma^2(\widehat{\mathbf{z}})$ hodnoty portfólia podľa (2.27) a (2.28).

Tento postup zopakujeme M krát. Odhady nepodmienených momentov L_{PF} vypočítame zo vzťahov

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mu(\widehat{\mathbf{z}}_m), \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} (\mu(\widehat{\mathbf{z}}_m) - \widehat{\mu})^2 + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \sigma^2(\widehat{\mathbf{z}}_m). \tag{2.29}$$

A napokon odhad distribučnej funkcie L_{PF} vyjadríme ako

$$\mathrm{P}(L_{PF} \leq x) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \Phi\left(\frac{x - \mu(\widehat{\mathbf{z}}_m)}{\sqrt{\sigma^2(\widehat{\mathbf{z}}_m)}}\right). \tag{2.30}$$

2.4 Výber podľa dôležitosti

Pojmom výber podľa dôležitosti (Importance Sampling) sa označuje simulačná metóda na odhad charakteristík náhodnej veličiny, ktorá je zameraná na redukciu rozptylu daného odhadu. To sa dosiahne vhodnou zmenou pravdepodobnostnej miery. V [8] možno nájsť matematické základy tejto metódy spolu s množstvom príkladov jej aplikácie vo finančnej matematike (napr. pri oceňovaní opcií, v teórii ruinovania, a taktiež pri odhade tržného a kreditného rizika). Za vhodnú zmenu pravdepodobnostnej miery sa považuje taká, ktorá prisúdi väčšiu váhu „dôležitým“ hodnotám náhodnej veličiny. V prípade kreditného rizika pôjde o zväčšenie pravdepodobnosti defaultu.

Pre názornosť uvažujme náhodnú veličinu X s hodnotami v $\mathbb{R}$ a s hustotou f. Chceme odhadovať

$$\mu = \mathrm{E}\, h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x)\, dx, \tag{2.31}$$

kde h je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Obvyklým nestranným odhadom strednej hodnoty je

$$\widehat{\mu}(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} h(\widehat{X}_m),$$

kde $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_M$ je náhodný výber z rozdelenia s hustotou f. Nech g je iná hustota taká, že $f(x) > 0 \implies g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Potom strednú hodnotu $h(X)$ možno vyjadriť aj ako

$$\mathrm{E}\, h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\, dx.$$

To sa dá chápať ako stredná hodnota z náhodnej veličiny $h(X)\frac{f(X)}{g(X)}$, kde X by malo rozdelenie s hustotou g:

$$\mu = \mathrm{E}_g \left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right).$$

Nestranným odhadom μ je teda aj

$$\widehat{\mu}_g(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} h(\widehat{X}_m^g) \frac{f(\widehat{X}_m^g)}{g(\widehat{X}_m^g)},$$

kde $\widehat{X}_1^g, \ldots, \widehat{X}_M^g$ je náhodný výber z rozdelenia s hustotou g. Snaha je nájsť vhodnú hustotu g tak, aby rozptyl odhadu $\widehat{\mu}_g(M)$ bol menší než rozptyl $\widehat{\mu}(M)$. Keďže oba odhady sú nestranné, je to ekvivalentné podmienke

$$\mathrm{E}_g \left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 = \mathrm{E} \left(h(X)^2 \frac{f(X)}{g(X)} \right) < \mathrm{E}\, h(X)^2. \tag{2.32}$$

Pri aplikácii výberu podľa dôležitosti v oblasti kreditného rizika sa ukazuje byť vhodnou exponenciálna zmena miery (Exponential Twisting). Definujme funkciu ψ ako logaritmus z momentovej vytvorujúcej funkcie náhodnej veličiny X:

$$\psi(\theta) := \log \mathrm{E} e^{\theta X} = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f(x) dx.$$

Hľadáme vhodnú hustotu g pri zmenenej pravdepodobnostnej miere v tvare

$$f_\theta(x) := \frac{e^{\theta x}}{e^{\psi(\theta)}} f(x) \quad \forall\, \theta : \psi(\theta) < \infty.$$

(Ľahko sa ukáže, že $f_\theta(x)$ splňuje potrebné vlastnosti hustoty nejakého rozdelenia pravdepodobností.) Máme

$$\frac{f(X)}{f_\theta(X)} = \exp\{\psi(\theta) - \theta X\}. \tag{2.33}$$

Nie je ťažké dokázať, že pre strednú hodnotu a rozptyl X pri rozdelení f_θ platí

$$\psi'(\theta) = \mathrm{E}_\theta X, \quad \psi''(\theta) = \mathrm{var}_\theta X. \tag{2.34}$$

Výber podľa dôležitosti možno aplikovať na odhad pravdepodobnosti $\mathrm{P}(L_{PF} \leq x)$ pri zachovaní predpokladov modelu CreditMetrics. Pri praktickom použití tohoto modelu na portfólio sa však tento postup ukázal byť príliš časovo náročný. Bolo to spôsobené hlavne zdĺhavým (numerickým) hľadaním riešenia rovnice (2.39) pre každý scenár, lebo funkcia $\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)$ mala príliš zložitú štruktúru. Budem preto uvažovať zjednodušený faktorový model s dvoma stavmi: nech p_i je pravdepodobnosť defaultu, potom náhodná veličina L_i nadobúda hodnotu $\overline{L}_i$ (veľkosť straty) s pravdepodobnosťou p_i a hodnotu 0 s pravdepodobnosťou $1 - p_i$. Je teda

$$L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad \text{kde } L_{PF} \text{ predstavuje stratu portfólia,}$$

$$\mathbf{r} = W_1\mathbf{z} + W_2\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \mathbf{r} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \mathbf{z} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, I),$$

$$p_i := \mathrm{P}(R_i = \mathrm{D}) = \mathrm{P}(L_i = \overline{L}_i) = \mathrm{P}(r_i \leq c_i) = \Phi(c_i),$$

(pozri časť 2.2). Pri aplikácii výberu podľa dôležitosti sa využije podmienená nezávislosť defaultov na hodnotách faktorov $\mathbf{z}$ (pozri časť 2.3). Ďalej teda predpokladajme tieto hodnoty **pevne dané**. V súlade s (2.31) sa odhaduje

$$\mathrm{P}(L_{PF} > x) = \mathrm{E}\, \mathbf{1}\{L_{PF} > x\}, \tag{2.35}$$

kde $\mathbf{1}\{J\}$ je indikátor javu J. Použijem exponenciálnu zmenu miery na podmienené rozdelenie $L_{PF}|\mathbf{z}$. Potom (2.33) má tvar

$$\exp\{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, L_{PF}\}, \tag{2.36}$$

kde

$$\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) = \log \mathrm{E}[e^{\theta\, L_{PF}}|\mathbf{z}] = \log \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[e^{\theta\, L_i}|\mathbf{z}] = \sum_{i=1}^{n} \psi_{L_i|\mathbf{z}}(\theta) \tag{2.37}$$

s využitím podmienenej nezávislosti $L_i,\ i = 1, \ldots, n$, a pri označení

$$\psi_{L_i|\mathbf{z}}(\theta) = \log \mathrm{E}[e^{\theta L_i}|\mathbf{z}] = \log(\tilde{p}_i\, e^{\theta\, \overline{L}_i} + (1 - \tilde{p}_i)), \tag{2.38}$$

kde $\tilde{p}_i,\ i = 1, \ldots, n$, sú podmienené pravdepodobnosti defaultov vypočítané podľa (2.25). (2.36) potom možno vyjadriť v tvare

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \psi_{L_i|\mathbf{z}}(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n} L_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \exp\{\psi_{L_i|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, L_i\}.$$

To je rovnaký výsledok, akoby sme aplikovali exponenciálnu zmenu miery na každú z podmienene nezávislých veličín L_i. Otázkou ostáva voľba θ. Z (2.32) plynie, že sa snažíme nájsť θ také, ktoré minimalizuje

$$\mathrm{E}_\theta\left(\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{2\,\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - 2\,\theta\, L_{PF}}\right) = \mathrm{E}\left(\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, L_{PF}}\right).$$

Pre pevné $x \in \mathbb{R}$ a $\forall\, \theta > 0$ platí

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, L_{PF}}\right) \le e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, x}.$$

Hľadáme teda θ minimalizujúce výraz $\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, x$. Keďže $\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)$ je konvexná (lebo $\psi''_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) \ge 0$), položíme prvú deriváciu rovnú nule a dostávame rovnicu pre výpočet vhodného θ_x

$$\psi'_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta_x) = x. \tag{2.39}$$

Keďže platí (2.34), vidíme, že sme zvolili takú zmenu miery, aby očakávaná strata portfólia (pri danom $\mathbf{z}$) bola rovná x. Tým vlastne kladieme väčší dôraz na defaulty.

Aby sme mohli simulovať straty portfólia, potrebujeme ešte určiť podmienené pravdepodobnosti defaultov pri novej miere. Z definície funkcie ψ plynie, že

$$\psi'_{L_i|\mathbf{z}}(\theta) = (\log \mathrm{E}[e^{\theta L_i}|\mathbf{z}])' = \frac{\mathrm{E}[L_i\, e^{\theta L_i}|\mathbf{z}]}{\mathrm{E}[e^{\theta L_i}|\mathbf{z}]} = \frac{\tilde{p}_i\, \overline{L}_i\, e^{\theta\, \overline{L}_i}}{\tilde{p}_i\, e^{\theta\, \overline{L}_i} + (1 - \tilde{p}_i)}. \tag{2.40}$$

Takisto platí, že

$$\mathrm{E}_\theta[L_i|\mathbf{z}] = \tilde{p}_i(\theta)\, \overline{L}_i, \tag{2.41}$$

kde $\tilde{p}_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, n$, sú podmienenné pravdepodobnosti defaultov pri zmene miery s parametrom θ, ktoré chceme určiť. Z (2.34) plynie rovnosť výrazov v (2.40) a (2.41):

$$\tilde{p}_i(\theta)\,\overline{L}_i = \frac{\tilde{p}_i\,\overline{L}_i\,e^{\theta\,\overline{L}_i}}{\tilde{p}_i\,e^{\theta\,\overline{L}_i} + (1-\tilde{p}_i)}.$$

Riešením tejto rovnice je

$$\tilde{p}_i(\theta) := \frac{\tilde{p}_i\,e^{\theta\,\overline{L}_i}}{\tilde{p}_i\,e^{\theta\,\overline{L}_i} + (1-\tilde{p}_i)} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{2.42}$$

Toto riešenie je v súlade s predpokladmi a požiadavkami výberu podľa dôležitosti pri použití na odhad kreditného rizika. Je totiž

$$\frac{\tilde{p}_i(\theta)}{1-\tilde{p}_i(\theta)} = \frac{\tilde{p}_i}{1-\tilde{p}_i} e^{\theta\,\overline{L}_i}.$$

Vidíme, že pri zmene miery s parametrom $\theta > 0$ zväčšíme pomer pravdepodobnosti defaultu ku pravdepodobnosti „nedefaultu“ (angl. sa tento pomer nazýva *odds*).

Algoritmus

Súhrnom predchádzajúceho je jednoduchý algoritmus, pomocou ktorého vygenerujeme jednu stratu portfólia pri zmenenej pravdepodobnostnej miere:

1. Vygeneruj $\mathbf{z} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C)$,
2. Spočítaj podmienené pravdepodobnosti defaultov $\tilde{p}_i$, $i = 1, \ldots, n$, podľa (2.25),
3. Definuj $\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)$ ako v (2.37) a vypočítaj θ z rovnice $\psi'_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) = x$;
   $\theta_x := \max\{\theta, 0\}$,
4. Spočítaj podmienené pravdepodobnosti defaultov pri novej miere $\tilde{p}_i(\theta_x)$,
   $i = 1, \ldots, n$, podľa (2.42),
5. Generuj L_i, $i = 1, \ldots, n$, také, že $L_i = \overline{L}_i$ s pravdepodobnosťou $\tilde{p}_i(\theta_x)$;
   $L_{PF} := \sum_{i=1}^{n} L_i$,
6. Spočítaj $\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta_x) - \theta_x\, L_{PF}}$.

Tento postup sa zopakuje M krát. Odhadom pravdepodobnosti $\mathrm{P}(L_{PF} > x)$ je potom aritmetický priemer jednotlivých výstupov algoritmu.

Na záver treba ešte upozorniť, že pomocou uvedeného spôsobu použitia výberu podľa dôležitosti sme sa snažili o redukciu rozptylu odhadu rozdelenia L_{PF} **podmieneného** hodnotami $\mathbf{z}$, teda o minimalizáciu

$$\mathrm{var}_\theta\,[\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta) - \theta\, L_{PF}} | \mathbf{z}].$$

Keby sme chceli redukovať nepodmienený rozptyl, museli by sme zmenu miery použiť aj na rozdelenie pravdepodobností náhodného vektora $\mathbf{z}$. Plynie to z rozkladu nepodmieneného rozptylu na súčet

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{var}_\theta\left[\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)-\theta\, L_{PF}}|\mathbf{z}\right]\right) + \mathrm{var}\left(\mathrm{E}_\theta\left[\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)-\theta\, L_{PF}}|\mathbf{z}\right]\right).$$

Nájsť však zmenu miery vhodnú na minimalizáciu druhého člena, čo je vlastne $\mathrm{var}\left(\mathrm{P}(L_{PF} > x|\mathbf{z})\right)$, je pri našich predpokladoch modelu príliš zložité, a preto sa obmedzím len na redukciu podmieneného rozptylu odhadu.

Kapitola 3

Analytické modely

3.1 Jednoduchý analytický model

Najjednoduchší analytický prístup k určeniu kreditného rizika portfólia je uvedený v 1. kapitole. Alternatívnou možnosťou pre veľmi špecifické portfólio je zvoliť rozdelenie s distribučnou funkciou

$$F_{p,\varrho}(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\big(\Phi^{-1}(x)\sqrt{1-\varrho} - \Phi^{-1}(p)\big)\right) \qquad \text{pre } x \in [0,1],$$

kde Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia. Odvodenie s dôkazmi možno nájsť v [3]. V tomto prípade modelujeme percentuálny počet defaultov v uniformnom portfóliu (všetky protistrany majú rovnakú pravdepodobnosť defaultu p, rovnaké korelácie defaultov ϱ a expozície, miera obnovenia je 0). Predpokladáme portfólio s veľkým počtom protistrán. α-kvantil tohoto rozdelenia je potom

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) + \sqrt{\varrho}\, q_\alpha}{\sqrt{1-\varrho}}\right),$$

kde $q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ je α-kvantil štandardného normálneho rozdelenia. (Pozn.: takmer identický výsledok je odvodený v [7] pomocou zákona veľkých čísel.) Keďže v praxi sa portfóliá s danými vlastosťami takmer nevyskytujú, možno tento prístup použiť na prvotný odhad kreditného rizika portfólia, prípadne ako rýchlu metódu na porovnanie rizikovosti viacerých portfólií. Môže tiež slúžiť na odhad senzitivity kreditného rizika portfólia na parametre p a ϱ.

3.2 CreditRisk$^+$

Tento model umožňuje odvodiť explicitné vyjadrenie rozdelenia pravdepodobností straty portfólia pomocou metód používaných v poistnej matematike. Vychádza z myšlienky, že podobne ako portfólio poistiek, je aj portfólio kreditných expozícií vystavené vysokému počtu veľkých rizík (strát) s malou pravdepodobnosťou výskytu. Čiastočne ho môžeme zaradiť medzi faktorové modely, hoci namiesto faktorov používa rozdelenie portfólia na sektory. Metodológia sa nachádza v [5]. Uvádzam základné predpoklady a vzťahy.

Pravdepodobnosti defaultu, sektory a skupiny expozícií

CreditRisk$^+$ modeluje riziko plynúce iba z možného defaultu protistrany a neuvažuje zmenu hodnoty expozície v dôsledku prechodu do iného ratingu. Používa len počiatočné ratingy na stanovenie **pravdepodobností defaultu**. Tieto sú modelované ako spojité náhodné veličiny, ktorých charakteristiky (stredná hodnota a rozptyl) závisia na ratingu. Motivácia je daná faktom, že pravdepodobnosti defaultu odhadnuté na základe historických dát sa môžu z roka na rok meniť.

CreditRisk$^+$ ďalej predpokladá, že defaulty sú určitým spôsobom závislé na rôznych faktoroch (napr. mikro- a makroekonomických), ktoré vplývajú aj na **korelovanosť defaultov** jednotlivých protistrán. Portfólio sa preto delí na **sektory** (napr. krajiny, v ktorých firmy pôsobia). Pre jednoduchosť budem najprv uvažovať, že každý dlžník patrí práve do jedného sektoru. Portfólio je potom zjednotením disjunktných podmnožín - sektorov. Korelovanosť sa modeluje tak, že náhodná pravdepodobnosť defaultu každého dlžníka závisí na parametroch prislúchajúcich sektoru, do ktorého patrí. Nie je teda priamo vstupným parametrom modelu.

Majme **sektory** $S_k,\ k = 1, \ldots, K$. Predpokladá sa, že každý sektor je ovplyvňovaný (jediným) podkladovým faktorom. Uvažujme ďalej dlžníkov patriacich do sektoru S_k. Nech $\widetilde{L_A}$ je veľkosť expozície dlžníka A očistená o mieru obnovenia. Pre celé portfólio uvažujeme vhodne zvolenú peňažnú čiastku L, pomocou ktorej zaokrúhlime veľkosti expozícií. Nech je $\widetilde{L_A} = \widetilde{\nu_A} L$. Každé $\widetilde{\nu_A}$ zaokrúhlime na najbližšie väčšie $\nu_A \in \mathbb{N}$ a označíme $L_A = \nu_A L$. Dlžníkov rozdelíme do **skupín expozícií** podľa rovnakých hodnôt ν_A. Označíme $\nu_{k,j}$ spoločnú veľkosť expozície dlžníkov v skupine $j,\ j = 1, \ldots, J(k),\ k = 1, \ldots, K$ v jednotkách L a $L_{k,j} = \nu_{k,j} L$. Ďalej nech $\mu_A = \widetilde{p_A}\, \widetilde{L_A}$ je očakávaná strata dlžníka A ($\widetilde{p_A}$ je stredná hodnota pravdepodobnosti defaultu a stanovuje sa na základe počiatočného ratingu dlžníka A) a $\eta_A = \mu_A / L$ je očakávaná strata v jednotkách L. Označme napokon $\mu_{k,j}$ očakávanú stratu v skupine j a $\eta_{k,j} = \mu_{k,j}/L$ očakávanú stratu v skupine j v jednotkách L.

CreditRisk$^+$ používa pri odvodení rozdelenia straty portfólia celočíselné násobky L.

Keďže sme expozície zaokrúhľovali nahor, model by nadhodnocoval riziko portfólia. V ďalšom sa teda namiesto $\widetilde{p_A}$ používa upravená stredná hodnota pravdepodobnosti defaultu

$$p_A = \frac{\mu_A}{L_A} = \frac{\eta_A}{\nu_A} \tag{3.1}$$

tak, aby očakávaná strata zostala rovnaká.

Označme N_k počet defaultov v sektore S_k. Je to náhodná veličina s rozdelením

$$N_k \sim \text{Poiss}(\widehat{\lambda_k}), \tag{3.2}$$

kde $\widehat{\lambda_k}$ je tiež náhodná a prestavuje očakávaný počet defaultov v sektore S_k. $\widehat{\lambda_k}$ má strednú hodnotu λ_k a rozptyl σ_k^2. Náhodnú pravdepodobnosť defaultu každého dlžníka A v sektore S_k uvažujeme v tvare

$$\widehat{p_A} = \frac{\eta_A}{\nu_A}\frac{\widehat{\lambda_k}}{\lambda_k}. \tag{3.3}$$

Je

$$\mathrm{E}\,\widehat{p_A} = p_A \quad \text{a} \quad \operatorname{var}\widehat{p_A} = \sigma_A^2,$$

kde rozptyl σ_A^2 sa stanoví na základe počiatočného ratingu dlžníka A. Parametre rozdelenia $\widehat{\lambda_k}$ sa určia tak, aby splňovali definíciu (3.3):

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{\eta_{k,j}}{\nu_{k,j}} = \sum_{A\in S_k} \frac{\eta_A}{\nu_A} = \sum_{A\in S_k} p_A \quad \text{a} \quad \sigma_k = \sum_{A\in S_k} \sigma_A. \tag{3.4}$$

Počet defaultov

Nech $N_{PF} = \sum_{k=1}^{K} N_k$ je počet defaultov v portfóliu. Na určenie rozdelenia tejto náhodnej veličiny sa používa vytvorujúca funkcia prevdepodobností

$$P(z) = \mathrm{E}\, z^{N_{PF}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}(N_{PF} = l)\, z^l.$$

Keďže N_k, $k = 1, \dots, K$ sú nezávislé, môžeme písať

$$P(z) = \prod_{k=1}^{K} P_k(z), \quad \text{kde} \quad P_k(z) = \mathrm{E}\, z^{N_k}.$$

Stačí teda odvodiť vytvorujúcu funkciu pravdepodobností počtu defaultov v sektore. Podľa (3.2) máme, že podmienené rozdelenie N_k je

$$N_k \mid \widehat{\lambda_k} = x \sim \text{Poiss}(x).$$

Podmienená vytvorujúca funkcia pravdepodobností má teda tvar

$$\mathrm{E}[z^{N_k} \mid \widehat{\lambda}_k = x] = e^{x(z-1)}.$$

Z toho dostávame pre nepodmienenú vytvorujúcu funkciu pravdepodobností

$$P_k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}(N_k = l)\, z^l = \sum_{l=0}^{\infty} z^l \int_0^{\infty} \mathrm{P}(N_k = l \mid \widehat{\lambda}_k = x)\, f_k(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}(N_k = l \mid \widehat{\lambda}_k = x)\, z^l \right) f_k(x) dx = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)}\, f_k(x) dx, \quad (3.5)$$

kde $f_k(x)$ je hustota rozdelenia náhodnej veličiny $\widehat{\lambda}_k$.

Náhodná veličina $\widehat{\lambda}_k$ sa obvykle modeluje pomocou Gamma rozdelenia s parametrami $a_k, b_k > 0$. Hustota má tvar

$$f_k(x) = \frac{b_k^{a_k}}{\Gamma(a_k)} e^{-b_k x} x^{a_k - 1} \quad \text{pre } x \in [0, \infty)\,, \quad (3.6)$$

kde $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ je gamma fukcia. Stredná hodnota takéhoto rozdelenia je a_k/b_k a rozptyl a_k/b_k^2. Ako už bolo uvedené, strednú hodnotu a rozptyl náhodnej veličiny $\widehat{\lambda}_k$ odhadujeme pomocou (3.4). Z rovností

$$\lambda_k = a_k/b_k \quad \text{a} \quad \sigma_k^2 = a_k/b_k^2$$

teda určíme parametre rozdelenia

$$a_k = \lambda_k^2/\sigma_k^2 \quad \text{a} \quad b_k = \lambda_k/\sigma_k^2 \quad \forall k = 1, \ldots, K.$$

Dosadením (3.6) do (3.5) a použitím substitúcie a definície gamma funkcie dostávame

$$P_k(z) = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} \frac{b_k^{a_k}}{\Gamma(a_k)} e^{-b_k x} x^{a_k - 1} dx = \left(\frac{b_k}{1 + b_k - z} \right)^{a_k}.$$

Po zjednodušení je vytvorujúca funkcia pravdepodobností počtu defaultov v sektore S_k tvaru

$$P_k(z) = \left(\frac{1 - \gamma_k}{1 - \gamma_k\, z} \right)^{a_k}, \quad \text{kde } \gamma_k = \frac{1}{1 + b_k}.$$

Jej rozvinutím na mocninový rad dostaneme rozdelenie pravdepodobností N_k

$$P(N_k = n) = \binom{n + a_k - 1}{n} \gamma_k^n\, (1 - \gamma_k)^{a_k},$$

takže vidíme, že rozdelenie pravdepodobností počtu defaultov v sektore S_k je negatívne binomické. Pre počet defaultov v celom portfóliu dostávame napokon vytvorujúcu funkciu

$$P(z) = \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{1 - \gamma_k}{1 - \gamma_k\, z} \right)^{a_k}.$$

Veľkosť straty

Rozdelenie veľkosti straty portfólia L_{PF} sa taktiež odvádza pomocou vytvorujúcej funkcie pravdepodobností. Majme

$$G(z) = \mathrm{E} z^{L_{PF}/L} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{P}(L_{PF} = m.L)\, z^m. \tag{3.7}$$

Keďže $L_{PF} = \sum_{k=1}^{K} L_k$ je súčet veľkostí strát v jednotlivých sektoroch a tie sú nezávislé, je

$$G(z) = \prod_{k=1}^{K} G_k(z),$$

kde

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{P}(L_k = m.L)\, z^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{P}(L_k = m.L \mid \widehat{\lambda}_k = x)\, f_k(x)\, dx \tag{3.8}$$

je vytvorujúca funkcia pravdepodobností veľkosti straty v sektore k a $f_k(x)$ je hustota rozdelenia náhodnej veličiny $\widehat{\lambda}_k$ (3.6). Po zámene sumy a integrálu dostaneme v rámci integrálu výraz

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{P}(L_k = m.L \mid \widehat{\lambda}_k = x)\, z^m,$$

čo je vytvorujúca funkcia pravdepodobností veľkosti straty v sektore k za podmienky, že očakávaný počet defaultov $\widehat{\lambda}_k$ je rovný x. Potom aj pravdepodobnosti defaultov jednotlivých protistrán v sektore sú nenáhodné

$$\widehat{p}_A = \frac{\eta_A}{\nu_A} \frac{x}{\lambda_k}, \tag{3.9}$$

pozri vzťah (3.3). (CreditRisk$^+$ v skutočnosti pri odvádzaní vzťahov pre vytvorujúce funkcie používa vzorce, akoby počet defaultov dlžníka mal Poissonove rozdelenie s parametrom $\widehat{p}_A$. Keďže sú však pravdepodobnosti defaultov veľmi malé, je pravdepodobnosť, že nastane viac ako jeden default zanedbateľná.) Za predpokladu **podmienenej nezávislosti defaultov v sektore** môžeme teda s použitím Poissonovho rozdelenia a Taylorovho rozvoja exponenciály podmienenú vytvorujúcu funkciu pravdepodobností veľkosti straty v sektore S_k vyjadriť ako

$$\exp\left\{ \sum_{A \in S_k} \widehat{p}_A (z^{\nu_A} - 1) \right\} = \exp\left\{ \frac{x}{\lambda_k} \sum_{A \in S_k} \frac{\eta_A}{\nu_A} (z^{\nu_A} - 1) \right\} = e^{x(H_k(z) - 1)}. \tag{3.10}$$

V prvej rovnosti sa použije vzťah (3.9), v druhej definujeme funkciu

$$H_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{J(k)} \frac{\eta_{k,j}}{\nu_{k,j}} z^{\nu_{k,j}}}{\sum_{j=1}^{J(k)} \frac{\eta_{k,j}}{\nu_{k,j}}} = \frac{\sum_{A \in S_k} \frac{\eta_A}{\nu_A} z^{\nu_A}}{\sum_{A \in S_k} \frac{\eta_A}{\nu_A}} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{A \in S_k} \frac{\eta_A}{\nu_A} z^{\nu_A} \quad \forall k = 1, \ldots, K. \tag{3.11}$$

Dosadením (3.10) a (3.6) do (3.8) (po zámene sumy a integrálu) dostaneme vyjadrenie vytvorujúcej funkcie pravdepodobností veľkosti straty v sektore S_k v tvare

$$G_k(z) = \int_0^\infty e^{x(H_k(z)-1)} \frac{b_k^{a_k}}{\Gamma(a_k)} e^{-b_k x} x^{a_k-1} dx.$$

Po podobných úpravách ako pre počet defaultov v sektore máme $\forall\, k = 1, \dots, K$

$$G_k(z) = \left(\frac{1-\gamma_k}{1-\gamma_k\, H_k(z)} \right)^{a_k}, \quad \text{kde } \gamma_k = \frac{1}{1+b_k}.$$

A napokon vytvorujúca funkcia pravdepodobností straty celého portfólia je

$$G(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1-\gamma_k}{1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{\eta_{k,j}}{\nu_{k,j}} z^{\nu_{k,j}}} \right)^{a_k}.$$

Vytvorujúca funkcia jednoznačne určuje rozdelenie náhodnej veličiny. Na základe (3.7) stačí teda určiť koeficienty stojace pri z^m, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Doteraz sme predpokladali, že každý dlžník patril práve do jedného sektoru. Aby bol model komplexný, uvažujme teraz, že jeho pravdepodobnosť defaultu môže byť ovplyvnená viacerými sektormi. Mieru vplyvu pre každéhho dlžníka A vyjadríme pomocou váh $w_{Ak} \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, kde $\sum_{k=1}^K w_{Ak} = 1$. Je zrejmé, že teraz už portfólio nie je zjednotením disjunktných sektorov. Obdobne ako v (3.3) je však náhodná pravdepodobnosť defaultu dlžníka A v tvare

$$\widehat{p_A} = \frac{\eta_A}{\nu_A} \sum_{k=1}^K w_{Ak} \frac{\widehat{\lambda_k}}{\lambda_k}. \tag{3.12}$$

Parametre rozdelenia $\widehat{\lambda_k}$ sa určia obdobne ako v (3.4):

$$\lambda_k = \sum_A w_{Ak}\, p_A \quad \text{a} \quad \sigma_k = \sum_A w_{Ak}\, \sigma_A, \qquad k = 1, \dots, K. \tag{3.13}$$

Rovnosť (3.11) sa nahradí vzťahom

$$H_k(z) = \frac{\sum_A w_{Ak} \frac{\eta_A}{\nu_A} z^{\nu_A}}{\sum_A w_{Ak} \frac{\eta_A}{\nu_A}} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_A w_{Ak} \frac{\eta_A}{\nu_A} z^{\nu_A}, \qquad k = 1, \dots, K. \tag{3.14}$$

Potom vytvorujúca funkcia pravdepodobností veľkosti straty portfólia má tvar

$$G(z) = \int_0^\infty \!\!\cdots \int \exp\left\{ \sum_{k=1}^K x_k (H_k(z) - 1) \right\} f(x_1, \dots, x_K)\, dx_1 \dots dx_K,$$

kde $f(x_1, \ldots, x_K)$ je hustota združeného rozdelenia $(\widehat{\lambda_1}, \ldots, \widehat{\lambda_K})$. Za predpokladu nezávislosti sektorov je

$$f(x_1, \ldots, x_K) = \prod_{k=1}^{K} f_k(x_k),$$

kde každá $f_k(x_k)$ má tvar (3.6). Pre nezávislé sektory teda dostávame, že

$$G(z) = \prod_{k=1}^{K} \int_0^{\infty} e^{x_k(H_k(z)-1)} f_k(x_k)\, dx_k = \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{1-\gamma_k}{1-\gamma_k\, H_k(z)} \right)^{a_k}, \tag{3.15}$$

kde $H_k(z)$ je (3.14) a $\gamma_k = \frac{1}{1+b_k}$.

Poslednou časťou modelu je zahrnutie špecifického rizika (pozn.: v modele CreditMetrics ho predstavovala náhodná veličina ε_i). V CreditRisk$^+$ sa na to určí špeciálny sektor, nech je to napr. S_K. Tomuto sektoru explicitne priradíme nulový rozptyl $\sigma_K = 0$. Potom $\widehat{\lambda_K} = \lambda_K$ s pravdepodobnosťou 1 a z (3.12) dostávame, že špecifická časť pravdepodobnosti defaultu $\widehat{p_A}$ je skoro určite $w_{\mathrm{A}K} p_A$, teda nezávislá na ostatných dlžníkoch.

Pravdepodobnosti $p_m := \mathrm{P}(L_{PF} = m.L)$ v (3.7) sa dajú počítať rekurentne ([5]) zo vzťahu

$$p_{m+1} = \frac{1}{c_0(m+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,m)} b_i\, p_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,m-1)} c_{j+1}\,(m-j)\, p_{m-j} \right), \tag{3.16}$$

kde

$$\begin{aligned} B(z) &= b_0 + \cdots + b_r\, z^r \\ C(z) &= c_0 + \cdots + c_s\, z^s \end{aligned}$$

sú polynómy také, že

$$\frac{d}{dz}(\log G(z)) = \frac{B(z)}{C(z)}.$$

Takéto polynómy vždy existujú, lebo

$$\frac{d}{dz}(\log G(z)) = \sum_{k=1}^{K} \frac{G_k'(z)}{G_k(z)} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\frac{a_k\,\gamma_k}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{n} w_{ik}\, p_i\, \nu_i\, z^{\nu_i - 1}}{1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{n} w_{ik}\, p_i\, z^{\nu_i}}.$$

$p_0 = \mathrm{P}(L_{PF} = 0)$ sa určí ako $G(0)$.

Poznámka ku korelácii defaultov

Kvôli kalibrácii modelov na portfólio potrebujeme vyjadriť koreláciu defaultov jednotlivých dvojíc protistrán. Majme teda dlžníkov A a B, $A \neq B$. Potom korelácia ich defaultov má vyjadrenie

$$\varrho_{AB} = (p_A\, p_B)^{1/2} \sum_{k=1}^{K-1} w_{Ak}\, w_{Bk} \left(\frac{\sigma_k}{\lambda_k}\right)^2, \tag{3.17}$$

kde p_A a p_B sú stredné hodnoty pravdepodobností defaultov a σ_k a λ_k majú tvar (3.13). (Pre odvodenie rovnosti pozri [5].)

Kapitola 4

Popis programov

Na spracovanie dát, výpočty a simulácie používam program *Mathematica*. Uvádzam hlavné časti programov spolu so stručným popisom vzťahu k už vyloženej teórii. Za známe dáta považujem vektor počiatočných ratingov aktív v portfóliu, maticu pravdepodobností prechodov medzi ratingami, maticu hodnôt aktív v portfóliu pri rôznych ratingoch, vektor smerodatných odchýliek výnosov z indexov a maticu ich korelácií a napokon parametre (váhy) určujúce vplyv jednotlivých indexov na prvky portfólia.

4.1 CreditMetrics

Na výpočet korelačnej matice Σ podľa (2.18) som definovala samostatnú funkciu:

```
correlationmatrix[mC_,vsigma_,valfa_,mV_]:=
  Module[{K,n,vsigma2,mW,mCC,mWW},
      K=Length[vsigma];n=Length[valfa];
      vsigma2=Table[Sqrt[Sum[mV[[k, i]]*mV[[k,j]]*mC[[i,j]]*
                  vsigma[[i]]*vsigma[[j]],{i,1,K},{j,1,K}]],{k,n}];
      mW=Table[valfa[[k]]*mV[[k,i]]*vsigma[[i]]/
                                          vsigma2[[k]],{i,K},{k,n}];
      mCC=Table[0,{K+n},{K+n}];
      Table[mCC[[i,j]]=mC[[i,j]],{i,K},{j,K}];
      Table[mCC[[i,i]]=1,{i,K+1,K+n}];
      mWW=Table[0,{n+K},{n}];
      Table[mWW[[i,j]]=mW[[i,j]],{i,K},{j,n}];
      Table[mWW[[i+K,i]]=Sqrt[1-valfa[[i]]^2],{i,n}];
      Transpose[mWW].mCC.mWW];
```

Vstupnými parametrami sú matica korelácií výnosov z indexov C (`mC_`), vektor smerodatných odchyliek výnosov z indexov $(\sigma_1, \dots, \sigma_K)$ (`vsigma_`), vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

predstavujúci vplyv indexov na výnosoch firiem (valfa_) a matica $(\alpha_{i,k})_{i=1,k=1}^{n\ \ K}$ vplyvu jednotlivých indexov na výnosoch firiem (mV_) (pozri časť 2.2, Hodnota firmy a korelácie). Vektor vsigma2 obsahuje $\widehat{\sigma}_i,\ i = 1,\ldots,n$, vypočítané podľa (2.14), matica mW obsahuje váhy $w_{i,k},\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,K$, pozri (2.13). Matica mCC je vlastne $\overline{C}$, (2.17) a mWW je matica W', teda (2.16). Posledný riadok je výpočet matice Σ podľa (2.18).

Pri samotnej simulácii využívam pomocnú funkciu na určenie koncového ratingu protistrany na základe jej počiatočného ratingu (pr_), matice (7×7) hraníc vypočítaných podľa (2.10) (qm_) a pseudonáhodného čísla z rozdelenia N(0,1) (x_):

```
rating[pr_,x_,qm_]:=Which[
  x<=qm[[pr,1]],8,
  qm[[pr,1]]<x&&x<=qm[[pr,2]],7,
  qm[[pr,2]]<x&&x<=qm[[pr,3]],6,
  qm[[pr,3]]<x&&x<=qm[[pr,4]],5,
  qm[[pr,4]]<x&&x<=qm[[pr,5]],4,
  qm[[pr,5]]<x&&x<=qm[[pr,6]],3,
  qm[[pr,6]]<x&&x<=qm[[pr,7]],2,
  qm[[pr,7]]<x,1];
```

Číselné hodnoty $1,\ldots,8$ zodpovedajú ratingom AAA,...,D. Teda počiatočný rating môže byť 1 až 7. Koncový ratig sa určí na základe intervalu, do ktorého „padne“ x$\in \mathbb{R}$.

Hlavnú časť programu predstavuje funkcia, ktorá generuje hodnoty portfólia pomocou postupu vyloženého v časti 2.2:

```
CreditMetrics[pr_,tm_,corr_,exp_,m_]:=
  Module[{n,tm1,tm2,qm,gen,fr,fexp,pv},
      n=Length[pr];
      tm1=Map[Reverse,tm];
      tm2=ColumnDrop[Table[FoldList[Plus,0,tm1[[n]]],{n,7}],1];
      qm=Quantile[NormalDistribution[0,1],tm2];
      gen=RandomArray[MultinormalDistribution[Table[0,{n}],corr],m];
      fr=Table[rating[pr[[k]],gen[[l,k]],qm],{l,m},{k,n}];
      fexp=Table[exp[[k,fr[[l,k]]]],{l,m},{k,n}];
      pv=Map[Apply[Plus,#]&,fexp]];
```

Vstupné dáta sú vektor počiatočných ratingov (pr_), matica pravdepodobností prechodu medzi ratingami (tm_) s rozmermi (8 × 8), korelačná matica Σ vypočítaná pomocou funkcie correlationmatrix (corr_), matica hodnôt aktív pre jednotlivé ratingy L_i^j, $i = 1, \ldots, n$, $j \in \{\text{AAA}, \ldots, \text{D}\}$ (`exp_`) a počet scenárov M (`m_`). `tm1` a `tm2` sú pomocné matice na výpočet `qm`, tj. matice hraníc c_i^j, $i \in \{\text{AAA}, \ldots, \text{CCC}\}$, $j \in \{\text{AA}, \ldots, \text{D}\}$ podľa (2.10). `gen` je matica $(M \times n)$, kde každý riadok zodpovedá jednému scenáru, teda je to pseudonáhodný vektor $\widehat{\mathbf{r}}' = (\widehat{r}_1, \ldots, \widehat{r}_n) \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$. Na základe `qm` a s použitím pomocnej funkcie `rating` sa každému $\widehat{r}_i$, $i = 1, \ldots, n$ pre jednotlivé scenáre priradí koncový rating a vznikne matica `fr` s rozmermi $(M \times n)$. Koncovým ratingom sa potom pomocou matice `exp` priradia koncové hodnoty aktív, `fexp`. Výstupom je vektor `pv` dĺžky M budúcich hodnôt portfólia pre jednotlivé scenáre `g1`$=(\widehat{L}_{PF}^{(1)}, \ldots, \widehat{L}_{PF}^{(M)})$. Z nich sa potom určí empirické rozdelenie L_{PF} a miery rizika. $\mathrm{E}L_{PF}$ sa odhaduje ako `Mean[g1]`, $\mathrm{var}L_{PF}$ ako `Variance[g1]`. Odhad hodnoty v riziku na hladine α (`alfa`) sa určí pomocou príkazu `Quantile[g1,1-alfa]`. Interval spoľahlivosti tohoto odhadu na hladine $1 - \beta$ (`beta`) sa určí podľa (2.22) ako `(g1zor[[d]],g1zor[[h]])`, kde h a d sa určia z (2.19)

```
d=Floor[m (1-alfa)+Quantile[NormalDistribution[0,1],beta/2]*
                                              Sqrt[m (1-alfa) alfa]];
h=Ceiling[m (1-alfa)-Quantile[NormalDistribution[0,1],beta/2]*
                                              Sqrt[m (1-alfa) alfa]];
```

a `g1zor` je vzosupne usporiadaný vektor `g1`, ktorý získame použitím príkazu `g1zor=Sort[g1]`.

4.2 Podmienená nezávislosť

Pre potreby algoritmu s podmieneným rozdelením som definovala samostatnú funkciu na výpočet váhovej matice W (2.16), lebo táto je považovaná za vstupný parameter:

```
weightsmatrix[mC_,vsigma_,valfa_,mV_]:=
  Module[{K,n,vsigma2,mW,mWW},
      K=Length[vsigma];n=Length[valfa];
      vsigma2=Table[Sqrt[Sum[mV[[k,i]]*mV[[k,j]]*mC[[i,j]]*
                  vsigma[[i]]*vsigma[[j]],{i,1,K},{j,1,K}]],{k,n}];
      mW=Table[valfa[[k]]*mV[[k,i]]*vsigma[[i]]/
                                        vsigma2[[k]],{i,K},{k,n}];
      mWW=Table[0,{n+K},{n}];
      Table[mWW[[i,j]]=mW[[i,j]],{i,K},{j,n}];
      Table[mWW[[i+K,i]]=Sqrt[1-valfa[[i]]^2],{i,n}];
      Transpose[mWW]];
```

Vstupné dáta aj postup výpočtu je rovnaký ako u funkcie `correlationmatrix`, lebo matica W' (`mWW`) je použitá pri výpočte matice Σ. Ďalej si definujem distribučnú funkciu a hustotu štandardného normálneho rozdelenia:

```
Φ[x_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],x];
ϕ[x_]:=PDF[NormalDistribution[0,1],x];
```

Samotný algoritmus predstavuje nasledujúca funkcia:

```
podmienenanezavislost[mC_,tm_,pr_,mW_,exp_,m_]:=
  Module[{K,n,tm1,tm2,qm,gen,W1,mat1,mat2,mat3,podmpsti,
                                    mat4,podshy,podsha,mat5,podr},
      n=Length[pr];K=Length[mC[[1]]];
      tm1=Map[Reverse,tm];
      tm2=ColumnDrop[Table[FoldList[Plus,0,tm1[[n]],{n,7}],1];
      qm=Quantile[NormalDistribution[0,1],tm2];
      gen=RandomArray[MultinormalDistribution[Table[0,{K}],mC],m];
      W1=Table[mW[[i,j]],{i,n},{j,K}];
      mat1=Table[W1.gen[[i]],{i,m}];
      mat2=Table[Φ[(qm[[pr[[i]],j]]-mat1[[k,i]])/mW[[i,K+i]]],
                                              {k,m},{i,n},{j,7}];
      mat3=Table[0,{m},{n},{9}];
      Table[mat3[[k,i,9]]=1,{k,m},{i,n}];
      Table[mat3[[k,i,j]]=mat2[[k,i,j-1]],{k,m},{i,n},{j,2,8}];
      podmpsti=Table[mat3[[k,i,j+1]]-mat3[[k,i,j]],{k,m},{i,n},{j,8}];
```

```
mat4=Table[Map[Reverse,podmpsti[[k]]]*exp,{k,m}];
podshy=Table[Apply[Plus,mat4[[k,i]]],{k,m},{i,n}];
podsha=Table[Apply[Plus,podshy[[k]]],{k,m}];
mat5=Table[Map[Reverse,podmpsti[[k]]]*
        Table[(exp[[i,j]]-podshy[[k,i]])^2,{i,n},{j,8}],{k,m}];
podr=Table[Apply[Plus,Apply[Plus,mat5[[k]]]],{k,m}];
{m,podsha,podr}];
```

Vstupné parametre sú matica korelácií výnosov z indexov C (mC_), matica pravdepodobností prechodu medzi ratingami (tm_), vektor počiatočných ratingov (pr_), váhová matica W vypočítaná pomocou funkcie weightsmatrix (mW_), matica hodnôt aktív pre jednotlivé ratingy L_i^j, $i = 1, \ldots, n$, $j \in \{\text{AAA}, \ldots, \text{D}\}$ (exp_) a počet scenárov M (m_). Na úvod sa vypočíta matica qm kvantilov c_i^j, $i \in \{\text{AAA}, \ldots, \text{CCC}\}$, $j \in \{\text{AA}, \ldots, \text{D}\}$ podľa (2.10) rovnako ako vo funkcii CreditMetrics. Ďalej sa vygeneruje matica pseudonáhodných čísel gen ($M \times K$), kde každý riadok predstavuje jeden scenár $\widehat{\mathbf{z}} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C)$. W1 je matica W_1 (pozri (2.18)). Nasleduje výpočet podmienených pravdepodobností prechodu pre každý scenár. mat1 je pomocná matica ($M \times n$) obsahujúca systematické časti rizika (teda $\sum_{k=1}^K w_{i,k}\widehat{z}_k$ $\forall\, i = 1, \ldots, n$ a pre každý scenár). mat2 je trojrozmerná matica ($M \times n \times 7$) obsahujúca hodnoty

$$\Phi\left(\frac{c_i^j - \sum_{k=1}^K w_{i,k}\widehat{z}_k}{w_i}\right) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,\ j \in \{\text{AA}, \ldots, \text{D}\}$$

a opäť pre každý scenár. mat3 je pomocná matica na výpočet podmpsti. To je trojrozmerná matica ($M \times n \times 8$), ktorej prvky sú podmienené pravdepodobnosti prechodu pre každý scenár, protistranu a rating vypočítané obdobne ako v (2.25), resp. (2.26). mat4 obsahuje podmienené pravdepodobnosti z podmpsti vynásobené hodnotami aktív L_i^j, $i = 1, \ldots, n$, $j \in \{\text{AAA}, \ldots, \text{D}\}$. Slúži na výpočet matice ($M \times n$) podmienených stredných hodnôt aktív (podshy), z ktorej za vypočítajú podmienené stredné hodnoty portfólia (vektor ($1 \times M$) podsha) pre jednotlivé scenáre podľa (2.27). A napokon mat5 je pomocná matica na výpočet vektora ($1 \times M$) podr podmienených rozptylov hodnoty portfólia podľa (2.28). Výstupom tejto funkcie je list obsahujúci počet scenárov m, vektor podmienených stredných hodnôt podsha a vektor podmienených rozptylov podr. Tento list sa potom použije ako vstupný parameter podmrozd_ nasledujúcich funkcií:

```
dfLpf[podmrozd_,x_]:=
  Sum[Φ[(x-podmrozd[[2,i]])/Sqrt[podmrozd[[3,i]]]],
                                 {i,podmrozd[[1]]}]/podmrozd[[1]]
hustotaLpf[podmrozd_,x_]:=
  Sum[φ[(x-podmrozd[[2,i]])/Sqrt[podmrozd[[3,i]]]]/
            Sqrt[podmrozd[[3,i]]],{i,podmrozd[[1]]}]/podmrozd[[1]]
```

Tieto definujú odhad distribučnej funkcie a hustoty rozdelenia L_{PF} podľa (2.30) ako funkciu od x. Z nich sa následne pomocou príkazu `FindRoot` na riešenie rovníc, kde neexistuje explicitné vyjadrenie, vypočíta hodnota v riziku na požadovanej hladine α:

```
FindRoot[dfLpf[podmrozd,x]==1-alfa,{x,x0}],
```

kde `x0` je počiatočný bod iterácií. Odhad nepodmienenej strednej hodnoty a rozptylu L_{PF} určíme z rovností (2.29) pomocou definovaných funkcií:

```
sh[podmrozd_]:=Mean[podmrozd[[2]]];
rozptyl[podmrozd_]:=
      Variance[podmrozd[[2]]]*(podmrozd[[1]]-1)/podmrozd[[1]]+
                                             +Mean[podmrozd[[3]]];
```

4.3 Výber podľa dôležitosti

Pri simuláciách výberom podľa dôležitosti sa na výpočet váhovej matice W zo vstupných dát použije funkcia `weightsmatrix` definovaná v časti 4.2. Hlavnou časťou programu je funkcia, ktorá generuje straty portfólia pri zmenenej pravdepodobnostnej miere pre pevné x pomocou postupu vyloženého v časti 2.4:

```
importancesampling[mC_,tm_,pr_,mW_,loss_,x_,pi1_,pi2_,m_]:=
  Module[{K,n,qv,gen,W1,mat1,podmpsti,mat2,ψi,ψ,
                                     ψder,v1,θx,podmpstiθx,kr,Lpf,est},
      n=Length[pr];K=Length[mC[[1]]];
      qv=Take[Quantile[NormalDistribution[0,1],
                                      Flatten[ColumnnDrop[tm,7]]],7];
      gen=RandomArray[MultinormalDistribution[Table[0,{K}],mC],m];
      W1=Table[mW[[i,j]],{i,n},{j,K}];
      mat1=Table[W1.gen[[i]],{i,m}];
      podmpsti=Table[Φ[(qv[[pr[[i]]]]-mat1[[k,i]])/mW[[i,K+i]]],
                                                      {k,m},{i,n}];
      Table[podmpsti[[k]]=Map[Reverse,podmpsti[[k]]],{k,m}];
      mat2=Table[podmpsti[[k]](e^(θ*(loss/100)))
                                           -podmpsti[[k]]+1,{k,m}];
      ψi=Log[mat2];
      ψ=Table[Apply[Plus,ψi[[k]]],{k,m}];
      ψder=D[ψ,θ];
      v1=Table[FindRoot[ψder[[k]]==(x/100),{θ,pi1,pi2}],{k,m}];
      θx=Table[(θ/.v1[[k,1]]),{k,m}];
      Table[θx[[k]]=Max[0,θx[[k]]],{k,m}];
      podmpstiθx=Table[podmpsti[[k,i]]e^(θx[[k]](loss[[i]]/100))/
                      (mat2[[k,i]]/.{θ->θx[[k]]}),{k,m},{i,n}];
      kr=Table[If[Random[]<podmpstiθx[[k,i]],
                                       loss[[i]]/100,0],{k,m},{i,n}];
      Lpf=Table[Apply[Plus,kr[[k]]],{k,m}];
      est=Table[If[Lpf[[k]]>(x/100),1,0]*
                 e^((ψ[[k]]/.{θ->θx[[k]]})-θx[[k]]Lpf[[k]]),{k,m}]];
```

Vstupné dáta sú obdobné ako pre CreditMetrics a podmienenú nezávislosť. Vektor $(1 \times n)$ `loss_` nahradil maticu expozícií. Pribudlo `x_` - pevná hodnota x, pre ktorú počítame pravdepodobnosť a `pi1_` a `pi2_` - počiatočné body pre iteračný výpočet θ_x. Začiatok výpočtu je analogický s programom `podmienenanezavislost`: určí sa vektor hraníc - kvantilov `qv` a matica W_1 (`W1`), vygenerujú sa $\widehat{\mathbf{z}} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C)$ pre jednotlivé scenáre (`gen`) a z nich sa spočítajú podmienené pravdepodobnosti defaultov (`podmpsti`) podľa (2.25) (predpokladám platnosť definície `Φ[x_]` v časti

4.2). Matica `mat2` s rozmermi $(M \times n)$ obsahuje podmienené momentové vytvorujúce funkcie $\mathrm{E}[e^{\theta L_i}|\mathbf{z}]$ pre každého dlžníka a pre každý scenár. Ich zlogaritmovaním a sčítaním v rámci každého scenára dostaneme hodnoty $\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)$, tj. vektor ψ hodnôt vypočítaných podľa (2.37). ψ`der` je vektor ich derivácií podľa θ. Z rovnice (2.39) určím vhodné θ_x pre každý scenár a otestujem kladnosť. Výsledkom je vektor θ`x`. Z prvkov matice `podmpsti` sa vypočítajú s použitím vektora θ`x` podmienené pravdepodobnosti defaultov pri zmenenej pravdepodobnostnej miere podľa vzorca (2.42) - prvky matice `podmpsti`θ`x`. `kr` je potom matica $(M \times n)$ vygenerovaných koncových strát pre jednotlivých dlžníkov a scenáre. Pre každý scenár sa spočíta hodnota $\mathbf{1}\{L_{PF} > x\}\, e^{\psi_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta_x) - \theta_x L_{PF}}$. Výstupom funkcie je vektor `est` týchto hodnôt. Ich jednoduchý aritmetický priemer (získame ho pomocou príkazu `Mean`) je odhadom $\mathrm{P}(L_{PF} > x)$.

Kapitola 5

Príklad

5.1 Portfólio

Pre možnosť porovnania jednotlivých modelov som si zostavila modelové portfólio na základe údajov vydaných *Society of Actuaries* (SoA) v [14]. Portfólio je veľkosti $n = 1000$, obsahuje kupónové obligácie s dobami do splatnosti od jedného do desiatich rokov, výplaty kupónov sa uvažujú ročne. Kvalitatívne rozdelenie portfólia (tj. počet aktív v ratingových skupinách na počiatku uvažovaného obdobia) zodpovedá druhému a tretiemu stĺpcu v tabuľke 5.1 (zdroj: Figure 8 [14]). Podiel jednotlivých ratingových skupín na celkovej expozícii portfólia je v štvrtom stĺpci, piaty stĺpec vyjadruje absolútnu expozíciu ratingových skupín v peňažných jednotkách (zdroj: Table 7 a Table 8 [14]). Šiesty stĺpec predstavuje priemerné hodnoty Severity of Loss (1-výťažnosť pohľadávky), zdroj Table 2 [14]. Historicky sa však v týchto hodnotách ukazujú výrazné odchýlky podliehajúce napr. hospodárskemu cyklu. Preto uvažujem aj „horšiu“ variantu zníženia výťažnosti o desať percentných bodov (posledný stĺpec).

R.s.	Počet expozícií		Hodnota expozícií		SEV 1	SEV 2
AAA	9%	90	8,799%	175 330,0	33%	43%
AA	11%	110	8,147%	162 340,0	33%	43%
A	28%	280	26,879%	535 600,0	26%	36%
BBB	38%	380	47,610%	948 677,0	35%	45%
BB	8%	80	6,017%	119 893,0	29%	39%
B	4%	40	1,829%	36 448,8	39%	49%
CCC	2%	20	0,718%	14 309,7	51%	61%

Tabuľka 5.1: Parametre portfólia

Dáta spracované *Society of Actuaries* pochádzajúce z viacerých poisťovní boli z ich interných ratingových systémov prevedené na ratingovú škálu Standard&Poor's.

Výsledkom je štatistika prechodov medzi ratingami a tzv. CREs (Table 15, [14]). CRE (Credit Risk Event) zahŕňa okrem samotného defaultu aj reštrukturalizáciu pohľadávky alebo jej predaj pred defaultom. Konečný efekt je však veľmi podobný ako pri samotnom defaulte (teda návratnosť ucitej časti z očakávanej hodnoty), preto budem CRE brať ako default a tabuľku 5.2 budem považovať za maticu pravdepodobností prechodu.

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	93,81	2,99	2,16	0,84	0,08	0,07	0,03	0,01
AA	2,04	88,78	7,47	1,25	0,18	0,18	0,04	0,08
A	1,09	1,74	88,78	7,37	0,53	0,25	0,12	0,12
BBB	0,17	0,75	4,72	89,12	3,28	0,85	0,48	0,63
BB	0,20	0,34	0,80	9,22	81,11	3,81	0,93	3,59
B	0,14	0,31	0,99	4,87	6,44	79,19	2,11	5,96
CCC	0,62	0,16	1,87	2,18	3,35	10,12	75,49	6,23

Tabuľka 5.2: Matica pravdepodobností prechodov medzi ratingami (v %)

Portfólio som najprv skonštruovala tak, že aktíva boli závislé na piatich spoločných faktoroch. Váhy pre model CreditMetrics som brala ako dané a aby bolo modely možné porovnať, pokúšala som sa kalibrovať váhy v modele CreditRisk$^+$ tak, aby zostala zachovaná korelačná štruktúra. Zo vzťahov (2.23) a (3.17) som teda zostavila sústavu rovníc ($\sigma_k/\lambda_k = 1$, pozri časť 5.4)

$$\frac{\varrho_{ij}}{\sqrt{p_i\, p_j}} = \sum_{k=1}^{5} w_{ik}\, w_{jk}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = i+1, \ldots, n,$$

kde ϱ_{ij} je korelácia defaultov dlžníkov $i \neq j$ v modele CreditMetrics, p_i, p_j sú stredné hodnoty pravdepodobností defaultov v modele CreditRisk$^+$ a w_{ik}, w_{jk} sú hľadané váhy modelu CreditRisk$^+$. Keďže som ani po siedmich hodinách riešenia tejto sústavy v programe *Mathematica* nedostala riešenie, rozhodla som sa napokon vo všetkých modeloch uvažovať jeden spoločný faktor, čo umožní jednoduchšiu kalibráciu modelov a porovnanie výsledkov.

5.2 CreditMetrics

V modele CreditMetrics uvažujem podkladový faktor $z \sim \mathrm{N}(0,1)$, je teda $K = 1$. Korelačná matica C je jednotková (1×1) a matica Σ korelácií medzi $r_i,\ i = 1, \ldots, n$, závisí iba na váhach (pozri (2.17) a (2.18)). Váhovú maticu budem uvažovať v dvoch variantách: pre $\alpha_i = 0,18$ (potom korelácia r_i a r_j pre $i \neq j$ je $\rho_{ij} = 0,0324$) a $\alpha_i = 0,3$ (potom $\rho_{ij} = 0,09$), aby som mohla porovnať vplyv korelovanosti aktív na výsledné miery rizika.

Zostáva určiť expozície aktív pri prechode do jednotlivých ratingov. Na to som použila forwardové úrokové miery uvádzané v [10]. Hodnota aktíva v prípade defaultu sa určila ako podiel (1-SEV) z nominálnej hodnoty obligácie. Vznikajú tak dve varianty pre vstupné expozície do modelu.

Pre váhový parameter $\alpha_i = 0,18$ je determinant korelačnej matice Σ rádovo 10^{-13}, a tak som na generovanie hodnôt portfólia použila funkciu `CreditMetrics`, počet scenárov $M = 25\ 000$. Pre každú z variant expozícií trvala simulácia približne 18 minút. Výsledné odhady mier kreditného rizika sú v tabuľke 5.3. Tretí a štvrtý (resp. šiesty a siedmy) stĺpec sú odhady krajných bodov intervalov spoľahlivosti pre hodnoty v riziku na hladine 90% (pozri odstavec Chyba odhadu v časti CreditMetrics).

Miery rizika	SEV 1			SEV 2		
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,992 62	1,992 56	1,998 67	1,990 46	1,990 40	1,990 53
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,005 55	0,005 49	0,005 61	0,006 68	0,006 62	0,006 74
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,982 65	1,982 45	1,982 81	1,978 32	1,978 12	1,978 51
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,977 04	1,976 71	1,977 40	1,971 01	1,970 59	1,971 38
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,974 67	1,974 09	1,975 01	1,967 88	1,967 29	1,968 47
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,969 47	1,968 23	1,970 39	1,961 17	1,959 72	1,962 35

Tabuľka 5.3: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,18$

Pre váhu $\alpha_i = 0,3$ sa na generovanie scenárov nedala použiť funkcia `CreditMetrics`. Je to spôsobené tým, že korelácie medzi $r_i,\ i = 1, \ldots, n$, sú príliš veľké a determinant korelačnej matice Σ je rádovo 10^{-39}, takže ho *Mathematica* považuje za nulový a nedokáže generovať normálne rozdelenie s touto korelačnou maticou. Musela som teda pristúpiť k obmene funkcie `CreditMetrics` a to tak, že vstupným parametrom bola váhová matica W (2.16), generovali sa náhodné výbery $\mathbf{z} \sim \mathrm{N}_K(\mathbf{0}, C)$ (resp. v tomto zjednodušenom prípade $z \sim \mathrm{N}(0,1)$) a $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, I)$ a potrebné r_i sa dopočítali zo vzťahu $\mathbf{r} = W_1\mathbf{z} + W_2\boldsymbol{\varepsilon}$. Zvyšný postup bol rovnaký ako v `CreditMetrics`. Opäť som vygenerovala $M = 25\ 000$ scenárov, simulácia každej z variant trvala približne 19 minút, takže vidíme, že časová náročnosť sa oproti prvej variante zvýšila minimálne. Výsledné odhady mier kreditného rizika sú v tabuľke 5.4. Rovnako ako v tabuľke 5.3

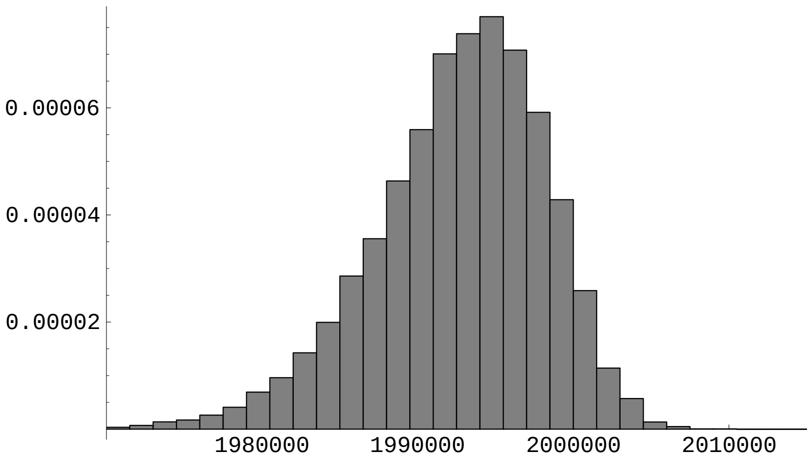
sú tretí a štvrtý (resp. šiesty a siedmy) stĺpec krajné body intervalov spoľahlivosti na hladine 90%.

Miery rizika	SEV 1			SEV 2		
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,992 57	1,992 47	1,992 66	1,990 45	1,990 34	1,990 57
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,009 09	0,008 99	0,009 19	0,010 74	0,010 64	0,010 85
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,975 45	1,975 07	1,975 81	1,970 18	1,969 69	1,970 64
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,961 96	1,960 96	1,963 01	1,954 63	1,953 35	1,955 63
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,956 06	1,955 02	1,957 54	1,946 78	1,945 28	1,948 43
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,943 57	1,939 38	1,946 00	1,932 35	1,927 86	1,934 33

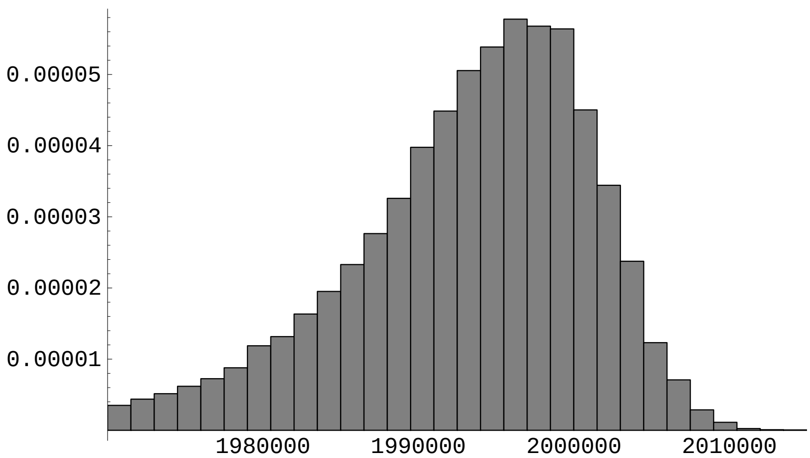
Tabuľka 5.4: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,3$

Vidno, že pri relatívne malej zmene váhy dochádza k jasne pozorovateľným zmenám v smerodatnej odchýlke a hodnotách v riziku veličiny L_{PF}, pričom tieto sa prejavujú výraznejšie pre portfólio s horšou očakávanou výťažnosťou pohľadávok. CreditMetrics som aplikovala aj pre váhy $\alpha_i = 0,5$ a $\alpha_i = 0,8$, pričom som pozorovala až desaťnásobný nárast potreby ekonomického kapitálu (na hladine 99,9%) a na histogramoch bola patrná výrazná šikmosť s „ťažkými chvostami“.

Rozdelenie pravdepodobností L_{PF} ilustrujú nasledujúce histogramy. Oba sú pre hodnoty SEV 1. Pre SEV 2 sú výsledky veľmi podobné. Vidíme, že pri 2,5-násobnom zväčšení korelácie logaritmických výnosov je „chvost“ pre nižšie hodnoty portfólia „ťažší“.



Obr. 5.1: Histogram rozdelenia L_{PF} pre $\alpha_i = 0,18$



Obr. 5.2: Histogram rozdelenia L_{PF} pre $\alpha_i = 0,3$

5.3 Podmienená nezávislosť

Prístup pomocou podmieneného rozdelenia prechodov medzi ratingami stavia na štruktúre modelu CreditMetrics. Preto všetky vstupné dáta zostávajú zachované. Na rozdiel od klasického modelu CreditMetrics stačí generovať K-rozmerné rozdelenie namiesto n-rozmerného, kde $K << n$. Na druhej strane sa však pre každý scenár musia znovu prepočívatať podmienené pravdepodobnosti prechodov. Podľa [7] sa vyznačuje relatívne rýchlejšou konvergenciou v závislosti na počte scenárov. To sa potvrdilo, lebo už po 500 vygenerovaných scenároch sa hodnoty $\mathrm{VaR}_{95\%}$ a $\mathrm{VaR}_{99\%}$ veľmi nelíšili od hodnôt stanovených na základe 5000 scenárov. Pre $\mathrm{VaR}_{99,5\%}$ a $\mathrm{VaR}_{99,9\%}$ sú tieto hodnoty porovnateľné po 2000 scenároch.

Model podmienenej nezávislosti som aplikovala na 4 alternatívy portfólia rovnako ako v predchádzajúcej časti. Pre každú variantu som vygenerovala 5000 scenárov, pričom každá simulácia trvala približne 80 minút. K tomu treba ešte pripočítať získavanie kvantilov z (2.30) numerickými metódami. Výsledky sú zhrnuté v tabuľkách 5.5 a 5.6.

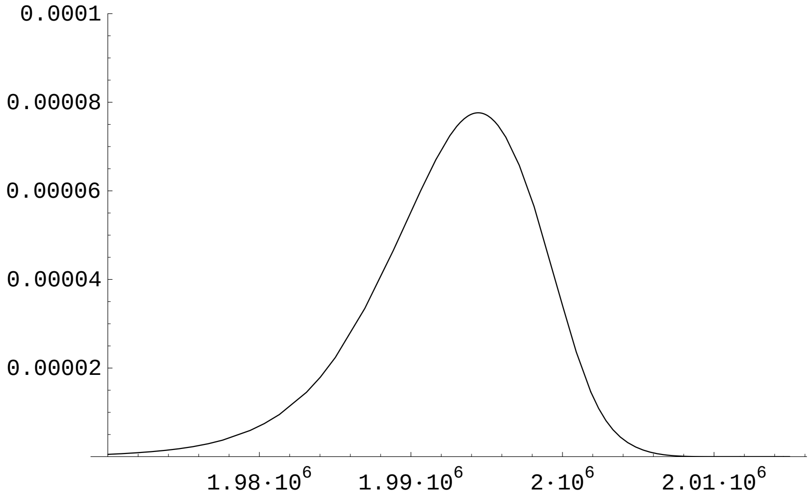
Miery rizika	SEV 1	SEV 2
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,992 64	1,990 52
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,005 60	0,006 68
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,982 48	1,978 35
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,976 31	1,971 29
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,973 79	1,968 29
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,968 73	1,960 92

Tabuľka 5.5: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,18$

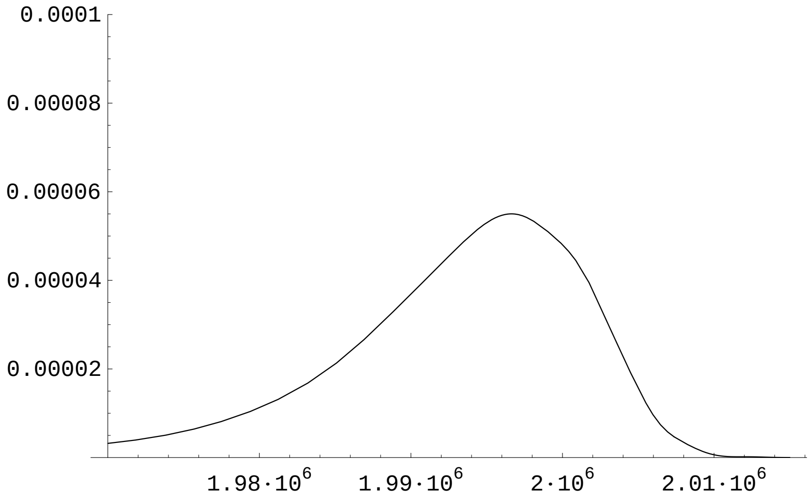
Miery rizika	SEV 1	SEV 2
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,992 52	1,990 43
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,009 21	0,010 87
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,975 07	1,969 62
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,961 57	1,954 42
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,956 35	1,947 74
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,945 16	1,929 82

Tabuľka 5.6: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,3$

Nasledujúce grafy ilustrujú rozdelenie pravdepodobností L_{PF} opäť pre variantu s SEV 1. A znovu je patrné, že pre portfólio s korelovanejšími prvkami je v oblasti nižších hodnôt „ťažší chvost“.



Obr. 5.3: Hustota rozdelenia L_{PF} pre $\alpha_i = 0,18$



Obr. 5.4: Hustota rozdelenia L_{PF} pre $\alpha_i = 0,3$

5.4 CreditRisk$^+$

V analógii s predchádzajúcimi modelmi uvažujem sektory $S_k,\ k = 1,2$. Teda sektor S_1 zodpovedá faktoru z a sektor S_2 zodpovedá idiosynkratickej časti rizika ε_i. Závislosť pravdepodobnosti defaultu na sektoroch teda zodpovedá závislosti náhodnej veličiny r_i na faktoroch. Za pravdepodobnosť defaultu $\widetilde{p}_i$, $i = 1,\dots,n$, volím pravdepodobnosť defaultu z tabuľky 5.2 podľa počiatočného ratingu. Rozptyl pravdepodobnosti defaultu sa nedá určiť jednoznačne. Z historických dát plynie (Table 3 v [5], ktorý čerpá zo štatistík Moody's Investors a Table 2 v [9] podľa štatistík Standard-&Poor's [4]), že pomer smerodatnej odchýlky pravdepodobnosti defaultu a jej strednej hodnoty sa pohybuje v rozmedzí 0,5 až 1,5. Budem teda uvažovať dve varianty: $\sigma_i/p_i = 1$ a $\sigma_i/p_i = 1,5$. Model CreditRisk$^+$ uvažuje len 2 stavy. V prípade, že nenastane default, strata je nulová. V prípade defaultu budem za stratu $\widetilde{L}_i$ považovať rozdiel hodnoty aktíva zodpovedajúci jeho počiatočnému ratingu a hodnoty v prípade defaultu. A napokon za hodnotu, v ktorej násobkoch budem straty počítať som zvolila $L = 50$. Na základe týchto údajov spočítam ν_i a p_i (podľa (3.1)) pre každého dlžníka.

Zostáva určiť váhy pre jednotlivé sektory v (3.12), aby sme mohli dopočítať všetky potrebné parametre a vyjadriť momentovú vytvorujúcu funkciu v tvare (3.15). Ako som už spomínala, zvolila som model 2 sektorov, aby bol výpočet týchto váh jednoduchší, lebo sa budem snažiť zachovať korelačnú štruktúru defaultov. Vezmime si najprv váhovú maticu v CreditMetrics s $\alpha_i = 0,18$. Potom korelácie logaritmických výnosov r_i sú pre všetky dvojice dlžníkov rovnaké a rovné 0,0324. Z (2.23) a (2.24) plynie, že korelácie defaultov závisia iba na počiatočnom ratingu. Majme teda dlžníkov $i \neq j$ s počiatočným ratingom AAA. Ich pravdepodobnosti defaultov sú rovnaké, môžeme teda písať

$$\varrho_{ij} = \frac{\Phi(c_i^{\mathrm{D}}, c_i^{\mathrm{D}}) - (p_i^{\mathrm{D}})^2}{p_i^{\mathrm{D}}(1 - p_i^{\mathrm{D}})} = \frac{\Phi(-3,71902, -3,71902) - 0,0001^2}{0,0001(1 - 0,0001)},$$

kde c_i^{D} sú kvantily rozdelenia $\mathrm{N}(0,1)$ dané modelom CreditMetrics, p_i^{D} sú pravdepodobnosti defaultu a $\Phi(r_i, r_j)$ je distribučná funkcia dvojrozmerného normálneho rozdelenia s kovariančnou maticou $\begin{pmatrix} 1 & 0,0324 \\ 0,0324 & 1 \end{pmatrix}$. Pre CreditRisk$^+$ je korelácia defaultov v tvare (3.17), kde $K = 2$. Uvažujme najprv $\sigma_i/p_i = 1$, $i = 1,\dots,n$. Zo vzťahov (3.13) plynie, že potom aj $\sigma_k/\lambda_k = 1$, $k = 1,2$. Pre uvažovaných dlžníkov $i \neq j$ s počiatočným ratingom AAA teda máme

$$w_{i1}.w_{j1} = \frac{\varrho_{ij}}{\sqrt{p_i\, p_j}},$$

kde p_i, p_j sú stredné hodnoty pravdepodobnosti defaultu. Keďže $w_{i1} = w_{j1}$, dostávame jednoznačné vyjadrenie pre váhu sektoru S_1 dlžníkov s počiatočným ratingom AAA. Váha w_{i2} sa dopočíta z rovnosti $w_{i1} + w_{i2} = 1$. Rovnaký postup sa použije pre všetky ratingy, verziu $\sigma_i/p_i = 1,5$, váhovú maticu $\alpha_i = 0,3$ a obe varianty expozíciií (resp. strát). Prehľad vypočítaných váh pre sektor S_1 je v tabuľkách 5.7 a 5.8 (používam označenie σ_1 pre $\sigma_i/p_i = 1$ a σ_2 pre $\sigma_i/p_i = 1,5$).

R.s.	SEV 1, σ_1	SEV 1, σ_2	SEV 2, σ_1	SEV 2, σ_2
AAA	0,812 029	0,541 353	0,808 461	0,538 974
AA	0,685 122	0,456 748	0,681 211	0,454 141
A	0,658 544	0,439 029	0,653 456	0,435 638
BBB	0,542 474	0,361 650	0,540 039	0,360 206
BB	0,427 766	0,285 177	0,422 585	0,281 724
B	0,390 076	0,260 051	0,386 293	0,257 529
CCC	0,400 775	0,267 183	0,386 038	0,257 359

Tabuľka 5.7: Váhy sektoru S_1 pre $\alpha_i = 0,18$

R.s.	SEV 1, σ_1	SEV 1, σ_2	SEV 2, σ_1	SEV 2, σ_2
AAA	1,665 600	1,110 400	1,658 280	1,105 520
AA	1,320 250	0,880 165	1,312 710	0,875 141
A	1,254 370	0,036 246	1,244 680	0,289 785
BBB	0,987 459	0,658 306	0,983 518	0,655 679
BB	0,745 784	0,497 190	0,736 752	0,491 168
B	0,672 370	0,448 247	0,665 849	0,443 900
CCC	0,690 148	0,460 099	0,664 772	0,443 181

Tabuľka 5.8: Váhy sektoru S_1 pre $\alpha_i = 0,3$

Všimnime si, že v druhej tabuľke vychádzajú niektoré váhy väčšie ako jedna, čo je v rozpore s uvádzanou teóriou (teoretické parametre Gamma rozdelenia vychádzajú záporné), no napriek tomu dávajú tieto varianty zmysluplné výsledky.

Na základe týchto dát vyjadrím vytvorujúcu funkciu pravdepodobností náhodnej veličiny L_{PF} (3.7) v tvare (3.15) a pomocou rekurentného vzorca (3.16) vypočítam pravdepodobnosti strát. Model CreditRisk$^+$ som aplikovala na 8 alternatív portfólia. Výsledku sú zhrnuté v tabuľkách 5.9 a 5.10.

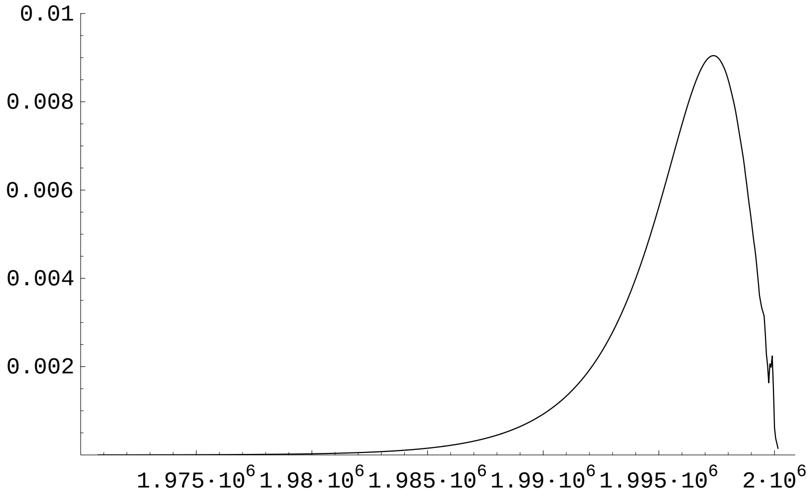
Miery rizika	SEV 1, σ_1	SEV 1, σ_2	SEV 2, σ_1	SEV 2, σ_2
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,995 69	1,995 66	1,993 41	1,993 20
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,002 99	0,002 99	0,004 29	0,004 28
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,989 95	1,990 05	1,985 25	1,985 40
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,985 45	1,984 65	1,978 90	1,977 75
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,983 50	1,982 15	1,976 15	1,974 30
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,978 95	1,976 25	1,969 75	1,965 95

Tabuľka 5.9: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre $\alpha_i = 0,18$

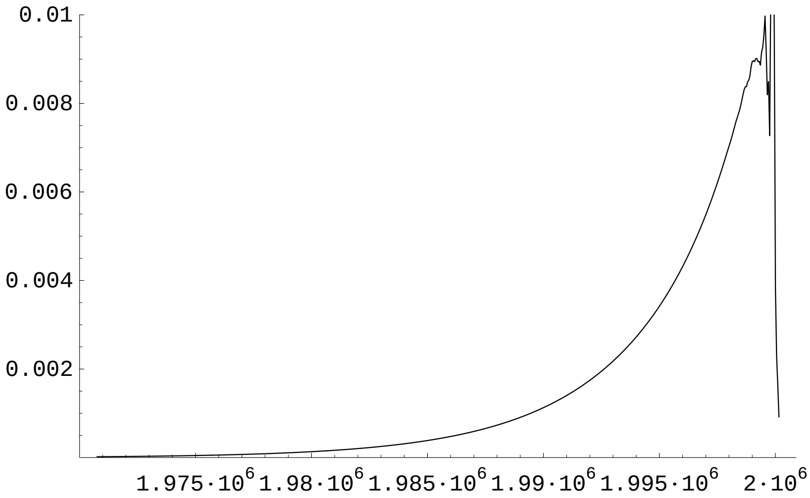
Miery rizika	SEV 1, σ_1	SEV 1, σ_2	SEV 2, σ_1	SEV 2, σ_2
$\mathrm{E}L_{PF}$	1,995 29	1,994 35	1,992 94	1,991 83
$\sqrt{\mathrm{var}L_{PF}}$	0,004 58	0,004 68	0,006 55	0,006 60
$\mathrm{VaR}_{95\%}$	1,986 10	1,986 65	1,980 35	1,980 50
$\mathrm{VaR}_{99\%}$	1,978 85	1,977 15	1,969 55	1,967 15
$\mathrm{VaR}_{99,5\%}$	1,975 55	1,972 90	1,964 90	1,961 15
$\mathrm{VaR}_{99,9\%}$	1,967 85	1,962 65	1,954 10	1,946 80

Tabuľka 5.10: Miery rizika v jednotkách 10^6 pre $\alpha_i = 0,3$

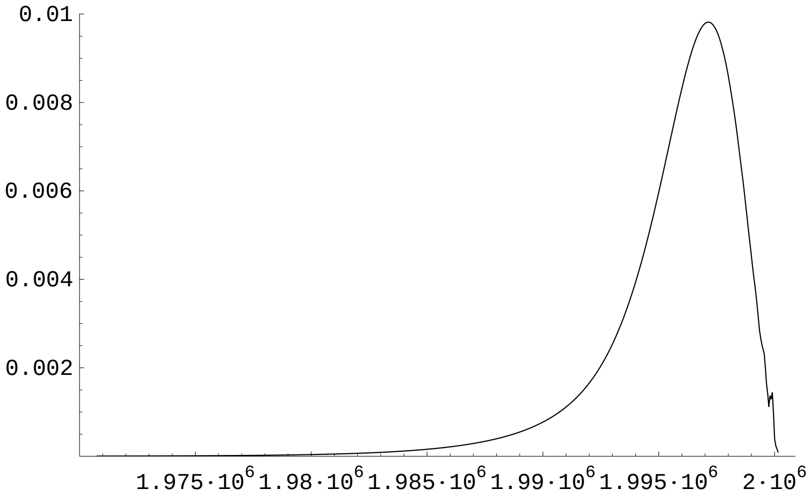
Nasledujúce grafy ilustrujú rozdelenie pravdepodobností L_{PF} pre variantu s SEV 1. Na rozdiel od predchádzajúcich modelov už nie je tak zjavné, že by pre variantu s korelovanejšími prvkami portfólia vychádzali „ťažšie chvosty“. Naproti tomu si môžeme všimnúť, že v oblasti malých strát je graf „skokovitý“. Predpokladám, ze je to spôsobené zápornými váhami u idiosynkratických častí.



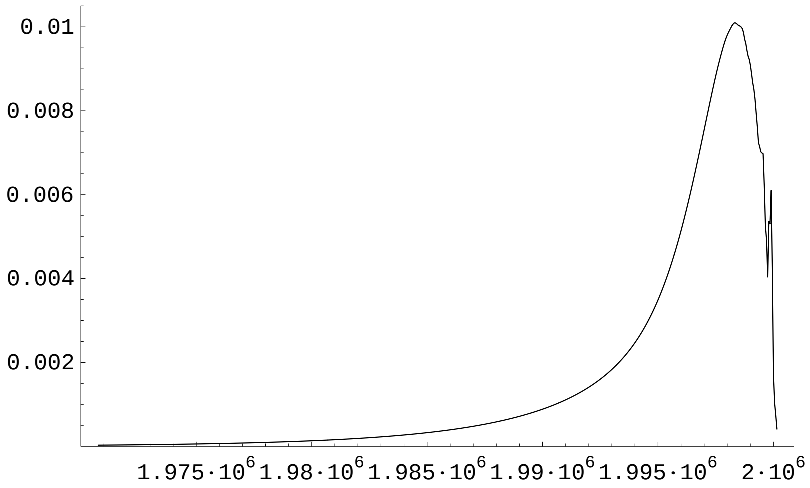
Obr. 5.5: Graf pravdepodobností hodnôt L_{PF} pre $\alpha_i = 0,18$, $\sigma_i/p_i = 1$



Obr. 5.6: Graf pravdepodobností hodnôt L_{PF} pre $\alpha_i = 0,3$, $\sigma_i/p_i = 1$



Obr. 5.7: Graf pravdepodobností hodnôt L_{PF} pre $\alpha_i = 0,18$, $\sigma_i/p_i = 1,5$



Obr. 5.8: Graf pravdepodobností hodnôt L_{PF} pre $\alpha_i = 0,3$, $\sigma_i/p_i = 1,5$

5.5 Výber podľa dôležitosti

Pri použití výberu podľa dôležitosti predpokladám rovnako ako v CreditMetrics a v modele podmienenej nezávislosti jeden podkladový faktor $z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Uvažujem naďalej dve varianty expozícií (výťažností pohľadávok) a dve verzie váhových matíc. Budem odhadovať pravdepodobnosť, že strata $L_{PF} = \sum_{i-1}^{n} L_i$ presiahne určitú hodnotu x. Keďže funkciu `importancesampling` som naprogramovala tak, že u každého dlžníka predpokladám len 2 možné stavy v budúcnosti, budem za `x` voliť hodnoty v riziku na rôznych hladinách získané pomocou modelu CreditRisk$^+$ (a to pre variantu $\sigma_i/p_i = 1$). Na základe použitia týchto vstupných dát môžeme teda predjímať výsledky, tj. že výsledné hodnoty by mali byť menšie ako 5%, resp. 1%, 0,5% alebo 0,1%.

SEV 1		SEV 2	
P(L_{PF} >10 250)	4,682%	P(L_{PF} >14 950)	4,810%
P(L_{PF} >14 750)	0,899%	P(L_{PF} >21 300)	0,858%
P(L_{PF} >16 700)	0,423%	P(L_{PF} >24 050)	0,399%
P(L_{PF} >21 250)	0,133%	P(L_{PF} >30 450)	0,088%

Tabuľka 5.11: Odhady pravdepodobností pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,18$

Počiatočné body iterácií `pi1` a `pi2` pre numerické riešenie rovnice (2.39) sú vstupným parametrom funkcie, lebo pre rôzne hodnoty strát `loss` a úrovne `x` vychádza riešenie inak. Toto riešenie je zároveň závislé na konkrétnom vygenerovanom faktore $\widehat{z} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Preto treba pred spustením funkcie `importancesampling` na konkrétne dáta odhadnúť interval, do ktorého spadajú riešenia pre rôzne $\widehat{z}$. Funkcia $\psi'_{L_{PF}|\mathbf{z}}(\theta)$ je rastúca na celom obore hodnôt, preto `pi1` a `pi2` sú počiatočné body pre numerické riešenie rovnice (2.39) metódou sečníc.

SEV 1		SEV 2	
P(L_{PF} >14 100)	4,311%	P(L_{PF} >19 850)	4,587%
P(L_{PF} >21 350)	0,735%	P(L_{PF} >30 650)	0,875%
P(L_{PF} >24 650)	0,411%	P(L_{PF} >35 300)	0,342%
P(L_{PF} >32 350)	0,083%	P(L_{PF} >46 100)	0,091%

Tabuľka 5.12: Odhady pravdepodobností pre portfólio s váhami $\alpha_i = 0,3$

Pre každú zo šestnástich možností som vygenerovala 3000 scenárov (pre menšie počty opakovaní do 1000 scenárov vychádzajú výsledky veľmi nepresné). Doba trvania simulácií bola rôzna, závisí na konkrétnom čase potrebnom pre numerické riešenie rovníc, pohybovala sa od 70 do 190 min. Výsledky sú zhrnuté v tabuľkách 5.11 a 5.12.

5.6 Porovnanie výsledkov

Z dosiahnutých výsledkov pri použití modelov kreditného rizika na vzorové portfólio možno usúdiť, že klasický model CreditMetrics a model s využitím podmienenej nezávislosti poskytujú približne rovnaké výsledky, čo sa týka strednej hodnoty, smerodatnej odchýlky aj hodnôt v riziku, pre rôzne typy korelácii aj výťažností pohľadávok. Najväčší rozdiel pozorujeme u $\text{VaR}_{99,9\%}$ pre SEV 2, $\alpha_i = 0,3$, čo je pochopiteľné, lebo ide o najextrémnejšiu z uvažovaných kombinácií. Pri mnou použitých počtoch opakovaní sa javí CreditMetrics ako výrazne menej časovo náročný. Musím však zdôrazniť, že model podmienenej nezávislosti poskytoval relatívne presné výsledky už po 500 až 1000 scenároch, zatiaľ čo CreditMetrics konvergoval pomalšie.

Z výsledkov získaných použitím modelu CreditRisk$^+$ sa javí, že podceňuje riziko strát. Je to patrné už pri očakávaných hodnotách a smerodatných odchýlkach hodnoty portfólia. Hodnoty v riziku sú väčšie pre všetky varianty. Relatívne „lepšie“ výsledky sa zdajú byť pri použití $\sigma_i/p_i = 1,5$. Pretože v [9] bolo ukázané (pri použití CreditMetrics s dvoma stavmi a prevedení CreditRisk$^+$ na simulačný model), že oba modely poskytujú porovnateľné výsledky, teda že majú približne rovnako ťažké „chvosty“ predpokladám, že rozdiely sú spôsobené využitím možnosti prechodu aktíva do rôznych ratingov v modele Credit Metrics, a tým zmeny jeho hodnoty. Nezanedbateľnú chybu iste predstavujú aj zaokrúhľovacie chyby pri rekurentnom výpočte pravdepodobností strát.

Model s použitím výberu podľa dôležitosti predstavuje alternatívny prístup ku kvantifikácii kreditného rizika portfólia. Z matematického pohľadu ide o zaujímavý model. Z praktického hľadiska sa však zdá že je príliš časovo náročný, hoci vyžaduje oveľa menej simulácií, než odhad tých istých pravdepodobností bez zmeny pravdepodobnostnej miery. Nevýhodu určite predstavuje aj nutnosť simulácie pre každú hladinu hodnoty v riziku zvlášť. Zo získaných výsledkov sa javí, že podceňuje riziko.

Z pohľadu praktického použitia skúmaných modelov by sa teda dalo povedať, že CreditRisk$^+$ predstavuje rýchlu metódu analýzy kreditného rizika portfólia. Pozornosť treba venovať voľbe rozptylu pravdepodobností defaultov a voľbe váh, aby korelácie defaultov zodpovedali modelovanému portfóliu. Z jeho štruktúry vyplýva, že je vhodný najmä pre cenné papiere, u ktorých môžeme relatívne dobre odhadovať veľkosť straty v prípade defaultu, lebo straty sú modelované ako konštanty. Rýchlosť výpočtu je však na druhej strane vykúpená viacerými nedostatkami, ako je napr. nemožnosť modelovať náhodné výťažnosti pohľadávok. Model takisto neuvažuje možnosť zmeny hodnoty aktíva v dôsledku zmeny jeho ratingu.

Na druhú stranu CreditMetrics je vďaka svojmu simulačnému prístupu vysoko flexibilný. Umožňuje modelovať nielen náhodné výťažnosti, ale aj hodnoty aktív pri jednotlivých ratingoch. Je schopný zahrnúť do odhadu kreditného rizika portfólia aj tržné riziko a môže byť aplikovaný aj na širokú škálu finančných derivátov. Pri simulácii viacerých veličín už však musíme počítať s väčšou časovou náročnosťou. A na rozdiel od analytických modelov musíme vziať do úvahy aj chybu plynúcu z náhodnosti konkrétnych vygenerovaných veličín, ktoré sme použili na odhad mier kreditného rizika. Pozornosť treba, rovnako ako u modelu CreditRisk$^+$, venovať voľbe váh a odhadu korelácií a rozptylov podkladových faktorov.

Všeobecne možno zo získaných výsledkov uzavrieť, že vo všetkých uvedených modeloch je dôležité nepodceňovať vstupné parametre, či už sa to týka korelovanosti defaultov, predpokladanej výťažnosti pohľadávok alebo pravdepodobností defaultov. Videli sme, že zmena váhovej, resp. korelačnej matice má nezanedbateľný vplyv na výsledné miery rizika. Podobný efekt je aj pri zmene očakávanej výťažnosti pohľadávok. Vhodnou k analýze nepriaznivého vývoja je stress testing týchto vstupných dát.

Záver

Vo svojej diplomovej práci som sa zaoberala kreditným rizikom. V úvode som sa snažila predstaviť motiváciu, prečo je potrebné sa kreditným rizikom zaoberať a vedieť ho efektívne merať, priniesla som aj prehľad súčasných modelov. Zamerala som sa na jednu skupinu modelov vhodných na analýzu kreditného rizika portfólia, tzv. faktorových modelov. Ukázala som, že aj u týchto modelov existujú dva diametrálne odlišné pohľady na problematiku, tj. využitie logaritmických výnosov zo základného kapitálu a simulácií na strane jednej a analytické aktuárske modelovanie náhodných pravdepodobností defaultov na strane druhej. Snažila som sa predstaviť aj alternatívne novšie metódy, ako je využitie podmienenej nezávislosti a simulácia výberom podľa dôležitosti. Aplikáciou na modelové portfólio som sa snažila upozorniť na výhody a úskalia jednotlivých modelov a porovnať výsledky, ktoré však nemožno generalizovať na všeobecné portfólio. V budúcnosti bude vývoj v oblasti kreditného rizika pravdepodobne smerovať k zefektívňovaniu súčasných modelov a najmä k ich praktickej aplikácii na kreditné deriváty.

Literatúra

[1] Basel Committee on Banking Supervision: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards.* Bank for International Settlements, 2005. http://www.bis.org/publ/bcbs118.pdf?noframes=1

[2] Bielecki, T. R., Rutkowski, M.: *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[3] Bluhm, J., Overbeck, L., Wagner, C.: *An Introduction to Credit Risk Modeling.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[4] Brand, L., Bahar, R.: *Ratings Preformance 1997: Stability & Transition.* Special Report Standard & Poor's, 1998.

[5] Credit Suisse Group: *CreditRisk$^+$.* Credit Suisse First Boston, 1997. www.csfb.com/institutional/research/assets/creditrisk.pdf

[6] Crosbie, P. J.: *Modeling default risk.* KMV Corporation, San Francisco, 1997. www.kmv.com

[7] Finger, C. C.: *Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions.* CreditMetrics Monitor April 1999, Morgan Guaranty Trust Company, New York, 1999.
www.riskmetrics.com/pdf/journals/crmm0499_Conditional_Indep.pdf

[8] Glasserman, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[9] Gordy, M. B.: *A Comparative Anatomy of Credit Risk Models.* Federal Reserve System, 1998.
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=148750

[10] Gupton, G. M., Finger, C. C., Bhatia, M.: *CreditMetrics-Technical Document.* Morgan Guaranty Trust Company, New York, 1997.
www.riskmetrics.com/pdf/dnldtechdoc/CMTD1.pdf

[11] McKinsey & Company: *CreditPortfolioView 2.0-Technische Dokumentation.* 2001.

[12] Merton, R. C.: *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.* The Journal of Finance, Vol. 29, 1974.

[13] Prášková, Z.: *Základy náhodných procesů II.* Nakladatelství Karolinum, Praha, 2004.

[14] Society of Actuaries: *1986-2002 Credit Risk Loss Experience Study: Private Placement Bonds.* 2006.
http://www.soa.org/files/pdf/Report2002.20060418.pdf

[15] Wilson, T.: *Portfolio credit risk I a II.* Risk, Vol. 9 a 10, 1997.