UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Fraktály jako motivační prvek v matematice na 2. st. ZŠ

Fractals as a stimulating element in mathematics at secondary school

Autor: Zdeněk Borecký

Vedoucí práce: PhDr. Michaela Kaslová

Studijní obor: Specializace v pedagogice – Matematika se zaměřením na vzdělávání, kombinované studium

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením PhDr. Michaely Kaslové za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne . . . .

Zdeněk Borecký

Na tomto místě bych chtěl poděkovat PhDr. Michaele Kaslové za trpělivost a inspiraci při psaní této práce, Mgr. Zině Boháčové a Mgr. Karlu Hübnerovi za možnost provést praktickou část této práce na Gymnáziu Jaroslava Žáka v Jaroměři a své rodině a nejbližším za neutuchající podporu.

Anotace

Název práce: Fraktály jako motivační prvek v matematice na 2. st. ZŠ

Autor: Zdeněk Borecký

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí práce: PhDr. Michaela Kaslová

Práce se zabývá fraktály a možnostmi jejich užití jako motivačního prvku v matematice na druhém stupni základní školy. V první části práce je obecně popsána fraktální geometrie, dále je uvedená její stručná historie a problémy, které motivovaly její vznik. Poté je podána krátká charakteristika žáka na druhém stupni základní školy.

Na tuto teoretickou část úzce navazuje praktická část, která obsahuje scénáře hodin, které přibližují fraktální geometrii žákům druhého stupně základní školy a ukazují její souvislosti se školní matematikou i se světem přírody, komentované přepisy záznamů praktické realizace těchto scénářů a analýzu domácích úkolů vypracovaných žáky.

Praktická část potvrdila, že je zařazení tohoto tématu do učiva druhého stupně vhodné, vzbuzující nejen zájem žáků, ale i odhalující řadu momentů, kde se střetává dosavadní pohled na Eukleidovskou geometrii a teorii míry s geometrií fraktální.

Klíčová slova: fraktál, zlomek, Mandelbrot, nekonečno, obsah, délka, motivace, matematika, měření

Annotation

Title: Fractals as a stimulating element in mathematics at secondary school

Author: Zdeněk Borecký

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: PhDr. Michaela Kaslová

The work deals with fractals and the options of using them as a stimulating element in mathematics at secondary school. The first part describes the fractal geometry in general, then there is given a brief description of its history and the problems which inspired its development. Subsequently there is given a short characteristics of a pupil at secondary school.

This theoretical part is closely linked to the practical part, which contains scenarios of lesssons during which the fractal geometry is being lectured at the secondary school and the connections of the fractals to school mathematics and to the world of the nature are being revealed, and annotated transcriptions of the realisation of these scenarios and analysis of the homework done by the pupils.

The practical part has proved, that this topic is suitable to be incluced in the secondary school curriculum and that it not only arouses interest of the pupils, but also it reveals many situations in which current perception of Euclidean geometry and measure theory collides with the fractal geometry.

Keywords: fractal, fraction, Mandelbrot, infinity, surface, length, motivation, mathematics, measuring

Obsah

1 Úvod

Fraktály jsou objekty geometrie, které, ač byly popsány a formalizovány relativně nedávno ve srovnání s objekty klasické Eukleidovské geometrie, mnohem lépe odpovídají nepravidelným a zdánlivě „nematematickým“ tvarům, které najdeme v přírodě – od rostlin, přes pohoří, mraky, řeky, pobřeží ostrovů, po plíce, mozky nebo cévní systémy živočichů.

Přestože fraktály kromě přírody najdeme i v různých oborech lidské činnosti (jak ve vědě a technice, tak ve všech druzích umění), je fraktální geometrie stále ne zcela probádaným odvětvím. To spolu se souvislostí fraktálů s nekonečnem a působivou estetikou jejich grafických modelů jim dává nádech jakési atraktivity a tajemna, v některých interpretacích možná i filosofické přesahy.

Díky tomuto všemu pro mě bylo téma fraktálů atraktivním, a právě proto jsem si ho zvolil. Myslel jsem si zpočátku sice, že mám dobrou představu o tom, čím se fraktální geometrie zabývá, ale již zpočátku studia literatury jsem byl ohromen jak poutavou historií vývoje této disciplíny, tak šířkou témat a oborů, jichž se dotýká.

Pokud toto fungovalo u mě, předpokládám, že ten samý jev by bylo možné využít k motivaci při výuce žáků mnohem mladších, než u kterých by se s výukou fraktálů běžně předpokládalo, a to právě prostřednictvím jejich vizuální stránky a zajímavých přesahů.

Ve své práci chci nejprve v teoretické části podat úvod do fraktální geometrie, její historie, uvést dělení fraktálních struktur, uvést jejich nejznámější a nejtypičtější příklady a ukázat, kde lze v každodenní praxi fraktály nalézt (např. biologie, výtvarné umění, hudba, ekonomie, ekologie atd.). Dále pak nastíním možné souvislosti fraktálů s didaktikou matematiky a jejich využití při výuce, proto podám charakteristiku žáka ve věku od 11 do 15 let, tj. žáka druhého stupně ZŠ, respektive nižšího gymnázia, a to jak z hlediska psychologického, biologického i sociálního.

To vše proto, abych ze získaných znalostí mohl vycházet v praktické části, kde vytvořím scénáře hodin, které využívají principy fraktální geometrie tak, aby žákům na druhém stupni ZŠ pomohly uchopit různé matematické pojmy a principy, jejichž výklad konvenčním způsobem jim často činí potíže nebo je určen až mnohem starším žákům. Tyto scénáře pak realizuji v praxi při vyučování na zvolené škole a vyhodnotím jejich efektivitu a adekvátnost.

Očekávám, že tyto scénáře budou inspirovat jak pedagogy, pro něž se mohou stát v praxi využitelnou pomůckou a námětem ke kreativní práci se třídou v hodinách matematiky, tak žáky, jimž mohou ukázat nové způsoby uvažování, předvést přesahy matematiky do praxe mnoha různých oborů a prohloubit mezipředmětové vztahy.

Jednotlivé kapitoly také mohou posloužit samostatně jako studijní text nejen pedagogům, ale i studentům a laikům, jako určité teoretické minimum pro nahlédnutí do oboru fraktální geometrie.

2 Teoretická část

2.1 Historie fraktálů

2.1.1 Prehistorie fraktálů

Historií fraktálů se zabývá řada prací, proto si nekladu za cíl provést hluboké historické bádání, ale pouze podat jednoduchý přehled historie fraktálů a ukázat, jakou pozici k nim matematická veřejnost zaujímala. Toto pokládám za důležité, protože za všech okolností je dobré znát dějiny problematiky jíž se zabýváme, a navíc můžeme při práci se žáky vysledovat paralely s historickým vývojem (neznalost – odmítání – přijetí – pochopení).

Slovo fraktál (z lat. *fractus* – rozlámaný, rozbitý) se poprvé objevilo v roce 1975, ovšem struktury, které dnes za fraktály považujeme, se objevovaly už o mnoho dříve. Konzervativní matematickou společnost ale odpuzovaly jejich zdánlivě nepřirozené až absurdní vlastnosti, takže od nich dávala velice rychle ruce pryč. Za nejspíše první takové případy můžeme považovat pokusy o nalezení funkcí, které by byly sice spojité, ale bez derivace (jejich graf by tedy byl z dnešního pohledu fraktálem). Dlouho se mělo za to, že objevitelem první spojité, ale nediferenciovatelné funkce je Karl Weierstrass (1815-1897), který svou funkci uveřejnil na přednášce na Královské Akademii Věd v Berlíně v roce 1872 [16], ale v roce 1930 se ukázalo, že Weierstrasse o mnoho let předběhl Bernardo Bolzano (1781-1848). Zapříčinil se o to český matematik Karel Rychlík (1885-1968), když uveřejnil část Bolzanovy matematické pozůstalosti, a postaral se tak o historickou senzaci. [31] Chladný dobový přístup k této problematice však může ilustrovat citát francouzského matematika Charlese Hermita (1822-1901), který roku 1893 prohlásil že se “*odvrací s hrůzou a ošklivostí od té politováníhodné rány, jíž jsou funkce bez derivací...*“. [1, str. 29]

Další z těchto „matematických monster“ (někdy se také používá vcelku výmluvné označení „patologické křivky“) [14] byla objevena nedlouho poté (více se o jednotlivých množinách rozepíši v kapitole 2.4.1): v roce 1883 Georg Cantor (1845-1918), který mimo jiné navštěvoval i Weierstrassovy přednášky, popsal to, čemu dnes říkáme Cantorova množina, v roce 1904 Helge von Koch (1870-1924) popsal křivku, která podle něj dostala přívlastek Kochova, 1915 Wacław Sierpiński (1882-1969) publikoval svůj slavný trojúhelník a konečně v roce 1918 dva francouzští matematici, taktéž Pierre Fatou

(1878-1929) a Gaston Julia (1893-1978), nezávisle na sobě popsali množiny komplexních čísel, jejichž grafická reprezentace z pohledu Eukleidovské geometrie vykazovala patologické vlastnosti.

Ve stejném roce také Felix Hausdorff (1868-1942) rozšířil pojem dimenze a odvodil vzorec pro množiny s neceločíslenou dimenzí. Tento abstraktní pojem ovšem zatím neměl žádnou reálnou reprezentaci, a tudíž ani upotřebení. Na hlavní průlom a následně i vznik celého nového odvětví geometrie se muselo počkat až do druhé poloviny dvacátého století, kdy se problematikou patologických křivek a matematických monster začal zabývat Benoit Mandelbrot.

2.1.2 Benoit Mandelbrot

2.1.2.1 Život

Benoit Mandelbrot [benua mandelbro] se narodil 20.11.1924 v polské Varšavě do rodiny litevských židů, která do Polska utekla před tíživou politickou situací. Ač se jeho otec živil prodejem oblečení, jeho matka byla dentistkou a i zbytek jeho rodiny měl silnou akademickou tradici. V roce 1936, což nejspíše souviselo se vzestupem Adolfa Hitlera , ale i s lepšími možnostmi vzdělání pro jejich děti, emigrovali Mandelbrotovi dále do Francie, kde je přijal Benoitův strýc Szolem Mandelbrojt (1899-1983). Ten byl profesorem matematiky na Collège de France v Paříži a ujal se vzdělání svého synovce, díky čemuž hrál klíčovou roli ve formování jeho vztahu k matematice.

Obrázek 1, zdroj: http://www.medicographia.com/wp-content/uploads/2013/01/89.JPG

V Paříži mladý Benoit studoval na Lycée Rolin, odkud ale v roce 1940 odešel a kvůli nacistické okupaci i s celou rodinou utekl do města Tulle ve střední části Francie, která zatím zůstávala neokupovaná, pouze pod dohledem „loutkové“ vlády. Tam díky pomoci místního rabína dále pokračoval ve studiu na místním lyceu, později na lyceu v Leonu, které bylo zaměřeno na přípravu k přijímacím zkouškám na nejelitnější francouzské univerzity. Ač celá rodina musela žít v permanentním strachu z udání a následné deportace, nacistickou perzekuci díky pomoci přátel, falešným dokladům i vlastní obezřetnosti přečkala bez úhony a v roce 1944 se vrací zpět do Paříže.

Mandelbrotovy výsledky v matematice byly jedny z nejlepších v celé Francii a po úspěšném složení přijímacích zkoušek tedy mohl volit mezi elitními vysokými školami École Polytechnique (poměr přijatých ku celkovému počtu uchazečů byl asi 200 : 3000) a École Normale Supérieure (dále jen ENS, poměr přijatých ku celkovému počtu uchazečů byl asi 15 : 200). Zprvu se rozhodl pro ENS, kde mu ale stačilo studovat celý jeden den, aby zjistil, že úzká specializace školy na čistou, abstraktní matematiku není nic pro něj. Své rozhodnutí tedy přehodnotil a nechal se zapsat na Polytechnique. Tato škola měla sice už od Napoleonových dob status vojenské akademie, což obnášelo strohý režim včetně neustálého nošení uniformy a povinnosti dvanáctiměsíční vojenské služby, ale zároveň se studenti ihned stávali státními zaměstnanci, což pro Mandelbrota znamenalo udělení francouzského občanství.

Po absolvování École Polytechnique dva roky postgraduálně studoval na Caltechu v americké Pasadeně, kde se věnoval termodynamice, problematice turbulentního proudění ale také letectví. Po návratu do Paříže pro něj bylo nepříjemným zjištěním, že neunikne roční vojenské službě, které se jako zahraniční student téměř dokázal vyhnout. Po jejím absolvování začal Mandelbrot pracovat na získání doktorského titulu na Pařížské Univerzitě, kdy si v první části své dizertace vybral téma frekvence výskytu slov, v druhé části se věnoval statistické termodynamice. Psaní této práce mu ovšem narušila nabídka postdoktorandského angažmá na Massachusetts Institute of Technology (MIT), aby ji mohl přijmout, potřeboval disertaci co nejrychleji odevzdat. Myšlenky, které v ní předkládal, byly ale pro bigotní prostředí pařížské matematiky příliš odvážné, což v kombinaci s nesebevědomou a chaotickou prezentací vedlo před komisí k neúspěchu. Zajímavostí také je, že vedoucí Mandelbrotovy práce Georges Darmois (1888-1960), jeho obhajobu zneužil jako možnost pohovořit před předsedou komise, kterým byl vévoda Louis de Broglie (1892-1987), laureát Nobelovy ceny za fyziku za návrh principu korpuskulárně-vlnového dualismu – jedné ze základních tezí kvantové fyziky. Darmois na něj chtěl udělat dojem a zvýšit tím své šance na zvolení do francouzské Akademie věd, jejíž byl de Broglie předsedou. Toto politikaření se mu nakonec vyplatilo, na tom jestli Benoit obhájí, nebo neobhájí, mu vedle toho pranic nezáleželo. S nabídkou z MIT, kvůli které Mandelbrot vlastně se svou dizertací tak spěchal, byl tím pádem paradoxně konec.

Na místo uplatnění na akademické půdě se pro tuto chvíli Mandelbrot rozhodl pro praxi a nastoupil do Phillips Electronics, kde se svými znalostmi spektrální analýzy spolupracoval na vývoji barevného televizoru. Zároveň ale rozvíjel první část své doktorské práce a aplikací neočekávaného statistického rozdělení, takzvané „rozdělení s dlouhým chvostem“, odvodil Zipfův-Mandelbrotův zákon frekvence slov. Ve svých pamětech toto nazývá svým prvním „keplerovským momentem“: *„Když jsem během druhé světové války dospíval, stal jsem se obdivovatelem jednoho významného počinu dávného matematika a astronoma Johanna Keplera (1571-1630). Ten propojil elipsy starořeckých geometrů s omylem řeckých astronomů, kteří se domnívali, že v kruhovém pohybu planet existují a přetrvávají anomálie. Kepler využil svých znalostí ve dvou různých oborech – v matematice a astronomii – aby vypočítal, že pohyb planet nijak anomální není. Jejich oběžná dráha je ve skutečnosti elipsa. Mým snem z mládí bylo objevit něco podobného“* [2, str. 10]. Jak ještě uvidíme těchto momentů bylo v životě ještě několik a že svůj sen beze zbytku naplnil.

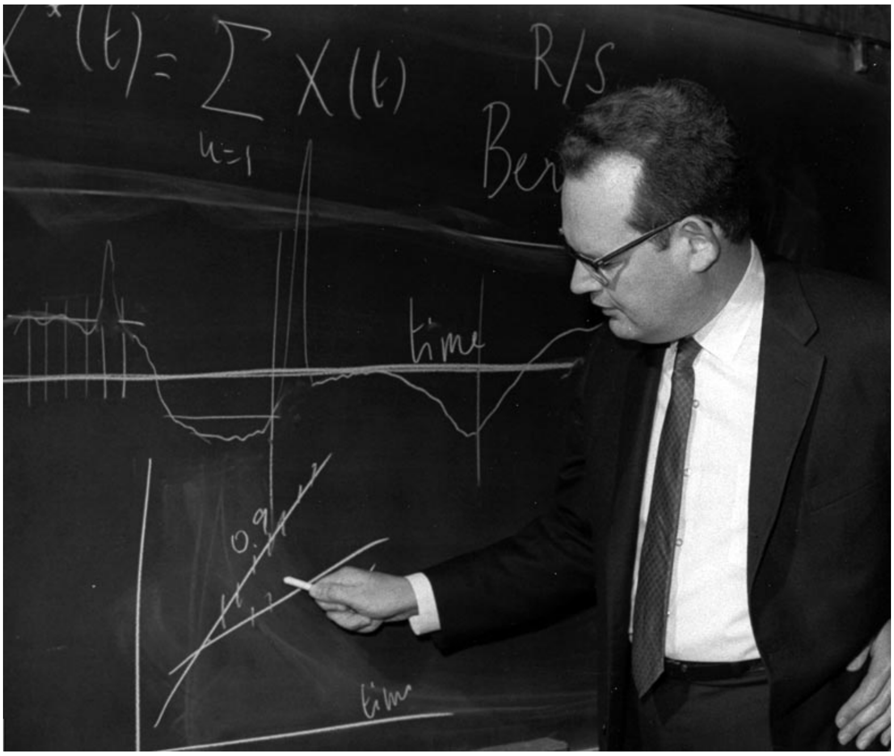
Období po roce 1953 Mandelbrot nazýval svým „velkým postdoktorským turné“, které začal stáží ve Výzkumné elektronické laboratoři na MIT. Nábídku k tomuto působení získal vlastně náhodou (vzpomeňme na předchozí nabídku z MIT, která vedla k jeho první uspěchané a neúspěšné dizertaci) díky jedné ze svých přednášek a to v Londýně v roce 1952, kde ho slyšel Jerome 'Jerry' Wiesner (1915-1994), vedoucí laboratoře a budoucí rektor MIT. Toto místo bylo pro Mandelbrota na rozdíl od Paříže velice inspirativní, protože se zde s otevřenou hlavou setkávali odborníci z nejrůznějších odvětví, od fyziků přes inženýry po lingvisty, a navzájem si předávali poznatky ze svých oborů. Asi nejdůležitější osobou v tomto směru byl pro Mandelbrota Norbert Wiener (1894-1964), průkopník kybernetiky a geniální osobnost přesně na pomezí abstraktní matematiky a praktických aplikací.

Dalším Mandelbrotovým angažmá bylo roční působení na Institutu pokročilých studií na Univerzitě v Princetonu pod záštitou Johna von Neumanna (1903-1957), který byl další inspirující osobností zabývající se jak čistou matematikou, tak její aplikací ve zdánlivě nematematických oborech. Na jedné cestě vlakem se Mandelbrot setkal s dalším velkým vědcem té doby, J. Robertem Oppenheimerem (1904-1967), otcem atomové bomby. Výsledkem tohoto setkání byla nabídka k uspořádání první z cyklu přednášek, který Oppenheimer plánoval. Této příležitosti se Mandelbrot chopil a výsledkem této přednášky byla bouřlivá debata, ve které von Neumann a Oppenheimer, dvě vysoké autority na tehdejší vědecké scéně, hájili Mandelbrota a jeho výzkum.

Po roce na Princetonu se v roce 1954 Mandelbrot vrátil do Paříže, kde působil jako pomocný výzkumný profesor placený z Národního centra pro vědecký výzkum. Toto období pro něj nebylo vědecky nejplodnější, seznámil se ale s Paulem Lévym (1886-1971), kontroverzní matematickou osobností, ale zároveň průkopníkem teorie pravděpodobnosti a inspirátorem výzkumu mnoha dalších vědců. Dalším důležitým momentem tohoto období byla svatba s Aliette Kagan v roce 1955 a následné líbanky na usedlosti La Boverie u Ženevy, které se neplánovaně protáhly na dva roky a během kterých se narodil jejich první syn Laurent. Těsně před svatbou se totiž seznámil s Jeanem Piagetem (1896-1980), profesorem psychologie na ženevské univerzitě, který právě získal grant Rockefellerovy nadace na založení centra, které se mělo věnovat interdisciplinárnímu výzkumu. Potřeboval externího poradce, který jednak ovládá matematiku a zároveň je dostatečně otevřený ostatním oborům.

Po dvou letech strávených v Piagetově Centru pro genetickou epistemologii se Mandelbrot na krátko vrátil do Francie, kde začal učit na částečné úvazky na univerzitě v Lille, na pařížské Sorbonně (kam ho prosil a lákal „proradný“ vedoucí jeho disertace, Georgese Darmois – krásný příklad toho, jak se v životě otáčejí role) a na své alma mater – École Polytechnique (kam přišel učit pouhých deset let po jejím absolvování). Zakrátko ale přišla nabídka ze které se nakonec vyklubala životní spolupráce – byl lákán do výzkumných laboratoří IBM což ovšem odmítl s tím, že ho čeká pohodlná práce v Lille navíc poblíž obou babiček jeho syna. Nakonec se dohodli na kompromisu, který spočíval v každoročních krátkých letních působeních v IBM Research Labs v Yorktown Heights severně od New Yorku.

První z nich mělo začít 20. června 1958, ovšem během prvních chvil si Mandelbrot uvědomil, jak moc mu otevřená a dynamická atmosféra tohoto místa vyhovuje oproti nehybnému řádu francouzských univerzit. Ukázal to už první projev, který k Mandelbrotovi a jeho budoucím kolegům měl ředitel výzkumu Emanuel Piore (1908-2000): *„Pokud chcete udělat své ženě radost lepším platem a tím, že budete domů chodit bez práce v aktovce, klidně nám to řekněte.(...)Možná se ale pro někoho z vás stane čistý vědecký výzkum posedlostí. V pořádku. Skvělé. Výzkum vám dá na výběr z nekonečného počtu vzrušujících a dobře odměňovaných úkolů. Někdo z vás možná dokonce sní o tom, že z něj bude velký vědec. Vynikající! Můžeme si dovolit, aby několik vědců dělalo na svých vlastních věcech.“* [2, str. 208] Přemluvil tedy svou manželku, aby ho do USA následovala s tím, že nejlépe bude zdržet se tam jeden až dva roky. Z nich se nakonec vyklubalo pětatřicet let, které byly pro obě strany po vědecké stránce nejplodnější (tedy nejen po věděcké, protože krátce po přistěhování se manželům Mandelbrotovým narodil druhý syn, Didier).



Obrázek 2, zdroj: http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/images/icp/V514851W11182V59/us__en_us__ibm100__fractals__mandelbrot_chalk__783x686.jpg

Společnost IBM byla v té době zdánlivě znevýhodněna, protože do konkurenčních výzkumných center, jako byly MIT, Bell Labs, General Electric, tekl proud vládních peněz, který vyprovokovalo vypuštění sondy Sputnik a následná snaha Američanů vyrovnat se technologicky SSSR. IBM proto musela poněkud uvolnit pravidla pro nábor zaměstnanců a díky tomu přijímala mnoho lidí, nad kterými konkurenční instituce ohrnovaly nos. To bylo ale většinou kvůli malichernostem jako například spory s akademickými oponenty nebo třeba jen jejich neortodoxní přístup. Ze zdánlivé nevýhody se tím pádem stala přednost, protože IBM tím získala do týmu otevřené a kreativní vědce, díky nimž se na dlouho dostala do čela vědeckých inovací. Další nespornou výhodou, které Mandelbrot zcela jistě využil, byla technologická vybavenost. Pracoval u zrodu zařízení jako jsou počítače, tiskárny, obrazovky, což mu později umožnilo provádět konstrukce fraktálních množin, které jsou nesmírně náročné na kvantitu výpočtů (vzpomeňme na Gastona Juliu a Pierra Fatoua, kteří de facto objevili fraktály o padesát let před Mandelbrotem, ale nikdy nebyli schopni provést potřebné výpočty a tak své množiny nikdy nespatřili a tedy ani nemohli následně interpretovat jejich geometrické vlastnosti.).

Během působení si u IBM si Mandelbrot často „odskakoval“ učit na různé univerzity po celých Spojených Státech. To bylo možné díky štědré politice, která u IBM v tomto směru panovala – nebyl problém si vzít na rok dovolenou a odjet učit na univerzitu a IBM dokonce po celou dobu hradila rozdíl mezi platem u IBM a platem na univerzitě, pokud byl nižší. Díky tomu mohl Mandelbrot působit na Harvardu (hostoval zde několikrát, ale nejúspěšnější pro něj byl ročník 1979/80, který on sám označil jako svůj „zázračný rok“, kdy mimo jiné objevil Mandelbrotovu množinu), MIT, Chicagské univerzitě nebo na Yale, kde nakonec v roce 1987 zakotvil až o svého odchodu do penze v roce 2004. Po dvanácti letech na Yale pak získal prestižní Sterlingovu profesuru, titul, který může držet pouze čtyřicet osob zároveň. Mandelbrot k tomu trefně poznamenal, že do akademického světa vstoupil mezi několika málo vybranými jedinci přijímacími zkouškami na ENS a École Polytechnique a ve stejně úzkém kruhu Sterlingovy profesury ho i opustil.

Mandelbrotovy objevy z let 1979/80 strhly lavinu přednáškových turné, na kterých po celém světě prezentoval vizuální stránku matematiky, kterou objevil, ocenění a čestných titulů (Hondova cena, Humboldtova cena, medaile Lewise Fry Richardsona, IBM Fellowship, medaile Prezidenta Italské Republiky a mnoho dalších) a matematických konferencí, věnovaných právě fraktální geometrii, na kterých ale kromě matematiků vystupovaly i osobnosti z jiných odvětví a demonstrovaly a diskutovaly se přesahy fraktálů do ostatních oborů.

Obrázek 3, zdroj: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e3/Benoit_Mandelbrot,_TED_2010.jpg/220px-Benoit_Mandelbrot,_TED_2010.jpg

Benoit Mandelbrot umřel ve věku nedožitých 86 let 14.10.2010 ve městě Cambridge ve státě Massachusetts, USA na rakovinu slinivky. [2] [11]

2.1.2.2 Dílo

Mandelbrot je právem nazýván otcem fraktálů a to ne proto, že by je snad objevil (protože jak bylo již napsáno výše, mnoho důležitých fraktálních objektů bylo popsáno dlouho před ním), ale jako první přišel s účinným nástrojem, kterým dokázal fraktály matematicky popsat. Ve svých knihách *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze* (1975, v originále *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*) a *Fraktální geometrie přírody* (1982, v originále *The Fractal Geometry of Nature*) položil základní kameny novému odvětví geometrie, které se od té doby rychle vyvíjelo a našlo uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti. K těmto objevům Mandelbrot dospěl na základě studia a řešení několika na první pohled navzájem nesouvisejících problémů. Chtěl bych zde pohovořit o třech nejsignifikantnějších z nich: měření délky pobřeží, chyby na telefonních linkách IBM a vývoj cen bavlny na burze.

Tím prvním byly výsledky Lewise Fry Richardsona (1881-1953), který se zabýval problémem měření délky pobřeží ostrova Korsiky. [1] Zjistil, že délky pobřeží se na různých mapách liší až několikanásobně (a tak velké odchylky nebylo možno svést na chybu měření). Zkusil tedy měřit pobřeží různou délkou měřidla a výsledky vynesl do grafu. U každé „spořádané“ křivky, například kružnice, dochází k tomu, že se zkracující se délkou měřidla k nule, naměřená délka konverguje k určité konkrétní hodnotě (ostatně toto je jeden ze způsobů experimentálního určení Ludolfova čísla – právě díky této konvergenci může být tato konstanta vůbec stanovena). Naproti tomu délka pobřeží se k žádné konvergenci nechystala, naopak s klesající délkou měřidla rostla dál a dál, limitně až do nekonečna (tento jev se nazývá Richardsonův efekt). Důvod tohoto se zdá být na první pohled zřejmý – dlouhé měřidlo vystihne jen hrubé obrysy ostrova, kratší postihne různé poloostrovy, měřidlo v řádech metrů zachytí ohyby pláže, v řádech centimetrů obrysy kamínků a tak bychom mohli pokračovat dále přes rozměry molekul, atomů i subatomárních částic – ale popsáno matematickou řečí tento objev způsobil vznik celé nové geometrie.

Obrázek 4, zdroj: http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/printsrc/obr26.jpg

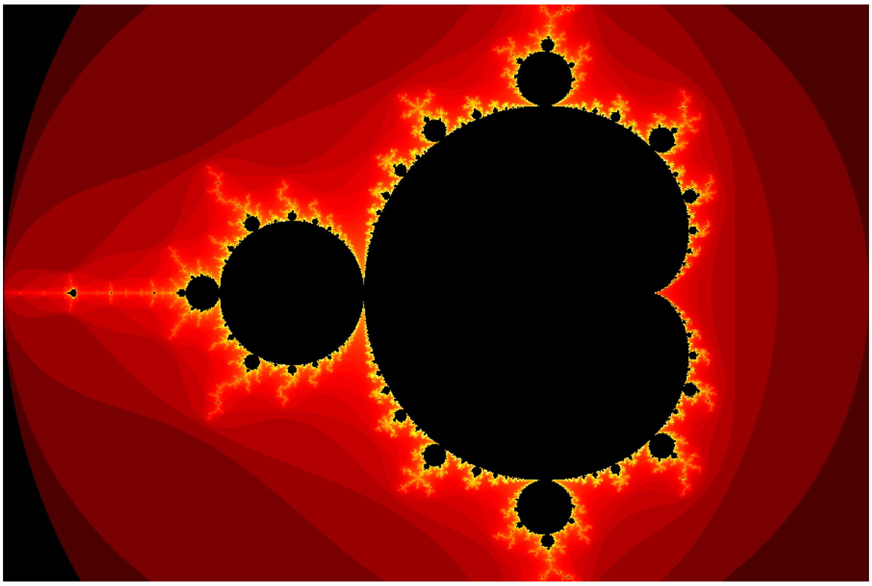
Výsledkem Richardsonova měření, na které Mandelbrot navázal, je tedy model pobřeží jako nekonečně dlouhé křivky s nezachytitelným množstvím detailů, které ovšem ohraničuje konečnou plochu. A tímto se dostáváme k asi prvotní motivaci pro vznik fraktální geometrie – potřeba jednoduše popsat a modelovat složité a (zdánlivě) nepravidelné přírodní tvary (ostrov, pohoří, řeka, blesk, atp.), jejichž popis pomocí algebraických vzorců Eukleidovské geometrie by byl až absurdně komplikovaný.

Druhým problémem, který Mandelbrota přivedl k hlubšímu zkoumání fraktálů, byly trable inženýrů v IBM s šumem při přenosu informací po telefonních linkách. Chyby se objevovaly stejně nepředvídatelně, jako mizely a žádné z konvenčních způsobů oprav (výměny jednotlivých komponentů vedení, zesílení hodnot signálu, aby překryl šum, atd.) nepomáhaly. K řešení tohoto problému tedy přizvali skupinu specialistů, mezi kterými byl i Benoit. Nechal si vytisknout časové rozložení výskytu chyb v čase a všiml si, nápadné podobnosti tohoto grafu a již výše zmíněné Cantorovy množiny [13]. Četnost shluků chyb byla totiž stejná v jakémkoli časovém měřítku neboli graf byl invariantní vůči změně měřítka – což je jedna z hlavních vlastností fraktálů jak je Mandelbrot později definoval.

Naprostou náhodou se Mandelbrotovi připletl do cesty ještě jeden zapeklitý problém – jakým způsobem kolísá cena bavlny na burze [9]. Díky dobrým konexím se mu podařilo sehnat enormní množství detailní dokumentace, takřka den po dni, za posledních sto let. Po zaznamenání dat do grafu si uvědomil stejnou věc jako při studiu chyb na linkách IBM – graf vypadal stále stejně, nezávisle na měřítku. Míra „klikatosti“ grafu byla stále stejná, ať se díval na dny, týdny, měsíce, roky. K matematickému vyjádření této „klikatosti“ mu pak výborně posloužila, do té doby nepoužitá, Hausdorffova dimenze.

Shrnutím nejen těchto výsledků a následným bádáním Mandelbrot založil nový obor geometrie a jako první dokázal jednoduše a elegantně popsat nepravidelné tvary, na nichž Eukleidovská geometrie dosud selhávala.

Vrcholem jeho práce v geometrii pak byl objev množiny, která díky tomu nese jeho jméno. Ta vzniká nekonečným opakováním triviální kvadratické rovnice aplikované na body Gaussovy roviny a bývá považována za nejsložitější matematický tvar. [10] Touto množinou navíc dovršil výzkum Fatoua a Julii, který několik desítek let vězel na mrtvém bodě. (Sám Mandelbrot se s ním zabýval v životě několikrát, dokonce uvažoval, že si ho zvolí za téma své dizertace. Zjistil ovšem, že s ním v danou chvíli není schopen pohnout vpřed ani o píď a zvolil jiné téma.).



Obrázek 5, zdroj: https://rosettacode.org/mw/images/2/2a/Mandelbrot-Javascript.png

Mimo to Mandelbrot přispěl svým dílem v mnoha dalších oblastech vědy i techniky: již zmíněný Zipfův-Mandelbrotův zákon uspokojivě modeloval četnost výskytu slov v textu; během svého působení na MIT a Princetonu publikoval v Brooklynském institutu sborník, který sice okamžitou pozornost nevzbudil, ale v budoucnu z něj vzešly objevy jako například McMillanova nerovnost z teorie kódování; dokázal hypotézy hydrologa Harolda Edwina Hursta, které pak mimo jiné ovlivnily stavbu Asuánské přehrady; jeho modely pohybů cen na finančních trzích měly dalekosáhlé dopady v ekonomii a v neposlední řadě v astronomii úspěšně aplikoval fraktální model rozložení hmoty ve vesmíru. [1] [2]

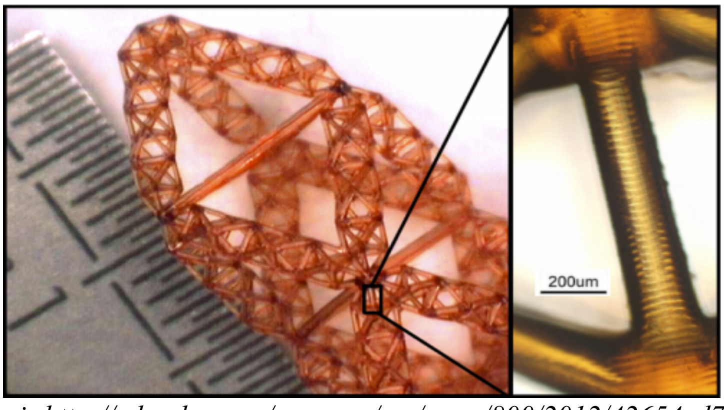
2.1.2.3 Osobnost B. Mandelbrota jako inspirace

Benoit Mandelbrot za sebou zanechal nezpochybnitelný odkaz ve vědě a v tom, jak změnil naše vnímání světa (ať už o tom víme nebo ne – byl jsem překvapený, co všechno ovlivnil a jak málo je oproti tomu známý). Kromě toho je ale jen samotný jeho životní osud velice inspirativní. Jako červená nit celým jeho životem probíhá jeho silná vůle a sebedůvěra. Jak v jeho komplikovaném dětství a dospívání v nacisty okupované Francii, kdy mu nejednou šlo o život, tak jako jeho schopnost ke zdánlivě skandálním rozhodnutím (opuštění ENS, neustálé stěhování z místa na místo a od oboru k oboru, odmítání stabilních postů atd.), které často vzbuzovaly nelibost jeho rodiny, ale hlavně v jeho velmi brzy vytyčeném cíli učinit revoluční objev a stejně jako Johannes Kepler spojit dvě zdánlivě nespojitelné oblasti a způsobit vědeckou revoluci. Svým životní příběhem nás může inspirovat v tom, že není důležité odkud jsme, že není důvod si stěžovat na to, jak nás osud znevýhodnil (Mandelbrot byl litevským židem narozeným v Polsku, který následně několikrát migroval mezi Francií, Švýcarskem a USA – těžko si lze představit klikatější životní dráhu), ale že důležitá je jen naše vlastní píle a vůle kráčet za svým snem i když nás od našeho přesvědčení celý svět zrazuje. Na závěr bych rád uvedl větu z první kapitoly jeho pamětí, kdy srovnává vědeckou kariéru sebe a svého strýce (toho stejného, který ho často kritizoval za jeho rozhodnutí, který se radši věnoval samoúčelné abstrakci v matematice a nechápal Benoitovu snahu o nalezení praktického uplatnění matematiky): *„Ze vzdálenější perspektivy by mohla dráha Szolemova vědeckého života vypadat rovná jako šíp, kdežto moje byla nesporně fraktální.“*.[2, str. 104]

2.1.3 Současnost

V současnosti probíhá především hledání dalších aplikací nebo výskytů fraktálních principů. Například v únoru 2015 astronomové z University of Hawaii analyzovali data z Keplerova teleskopu a došli k závěru, že frekvence, se kterou přicházel signál z pozorovaného pulsaru (rotující hvězda) KIC 5520878, vykazuje fraktální charakter [17] (podobně jako frekvence, s níž přicházely chyby na telefonních linkách v Mandebrotových dobách u IBM.).

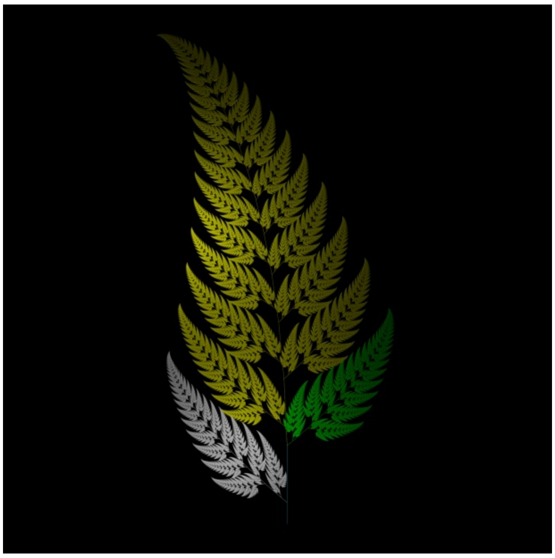
Vrátíme-li se na zem, tým vědců na University of Nottingham se zabýval stavebními konstrukcemi s fraktální strukturou. Zjistili, že pokud použijí stejnou strukturu na několika různých úrovních rozměrů, materiál si zachová svou pevnost, ale hmotnost klesá [18]. Zároveň ale dodávají, že tyto principy byly v architektuře intuitivně používány už dávno před nimi – stačí se blíže podívat na opěrné systémy gotických chrámů a rozety v jejich



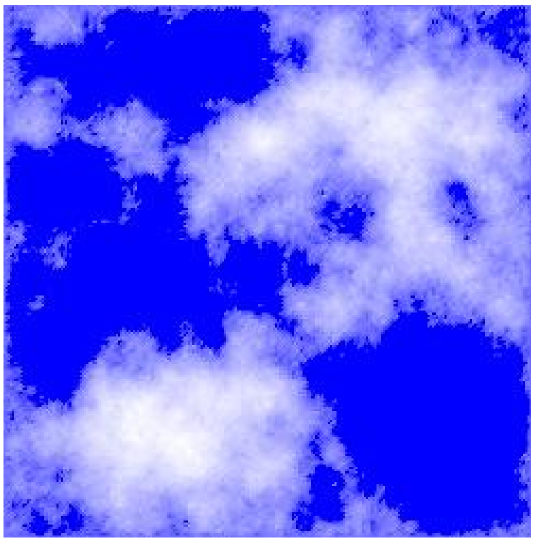
Obrázek 6, zdroj: http://cdn.phys.org/newman/csz/news/800/2012/42654ed7db19cbb0.png oknech nebo slavnou Eiffelovu věž, která používá nosníky stejného tvaru, které liší pouze rozměry [19].

Výzkum na Clarksonově Univerzitě v USA z roku 2011 srovnával tvary rakovinných buněk se zdravými [20]. Na snímcích z elektronového mikroskopu bylo patrné, že zdravé buňky sice vykazují na svém povrchu fraktální strukturu, ale značně proměnlivou. Naproti tomu struktura na povrchu rakovinných buněk byla mnohem více konstantní, řekli bychom, že se více blížila přísně matematickým fraktálům, jejichž struktura se, až na velikost, opakuje naprosto přesně. Toto pozorování pak slouží jako podklad při vývoji mechanismů a nástrojů, které by dokázaly rakovinné buňky identifikovat mnohem dříve před vznikem nádoru a předejít jak nepříjemné léčbě chemoterapií nebo ozařováním, tak i samotnému onemocnění. Ve zdravotnictví se taktéž zkoumají možnosti využití fraktální analýzy frekvence srdečního tepu k diagnóze nemocí srdce. [29]

Široké uplatnění nachází principy fraktální geometrie v počítačové grafice. Právě proto, že pro fraktál stačí zadefinovat výchozí podmínky a způsob, kterým se bude původní tvar zmenšovat a replikovat, je z hlediska výpočetního výkonu a paměti daleko méně náročnější, než kdyby bylo potřeba definovat a vykreslovat každý pixel zvlášť. S fraktální grafikou se tak setkáváme všude, kde se uměle vykreslují ostrovy, pohoří, řeky, vodopády, stromy, oblaka atd. [29]

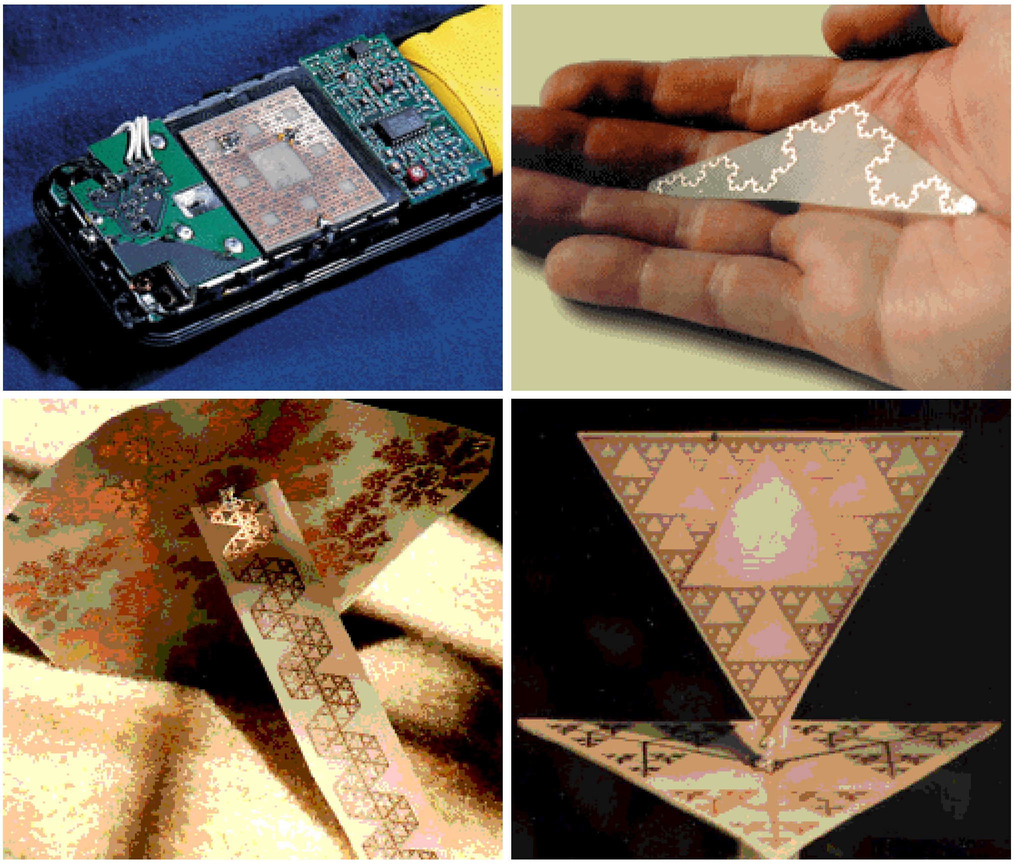


Obrázek 7, zdroj: http://www.publicdomainpictures.net/pictures/150000/nahled/fractal-fern-ii.jpg



Obrázek 8, zdroj: http://davis.wpi.edu/~matt/courses/fractals/cloud.jpg

Nathan Cohen, toho času profesor na univerzitě v Bostonu, v roce 1995 (s výzkumem ovšem začal již v roce 1988) publikoval možnosti využití fraktálních tvarů při stavbě antén přijímajících elektromagnetické vlnění. Taková anténa má díky své struktuře mnoho různých rezonančních frekvencí, proto může přijímat mnoho různých druhů signálu. [29] Navíc její rozměry jsou nepatrné v porovnání se svou širokou využitelností. Antény ve tvaru fraktálů se proto dnes běžně používají v mobilních telefonech a dalších zařízeních, které potřebují být schopna komunikovat mnoha různými způsoby při zachování malých rozměrů (Běžný mobil dnes potřebuje zvládnout telefonní signál v několika různých pásmech, Wi-Fi, Bluetooth, GPS, 3G, 4G, LTE aj. a stále se vám přitom vejít do kapsy. Toto je možné jen díky fraktálním anténám.).



Obrázek 9, zdroj: http://www.antenna-theory.com/antennas/fractal-antennas.gif

2.2 Teorie fraktálů

2.2.1 Soběpodobnost

Nejjednodušším způsobem, jak definovat fraktály, je říct, že jsou to soběpodobné útvary. Soběpodobností (matematickou řečí *invariance vůči změně měřítka*) rozumíme vlastnost nějakého tvaru nebo objektu, jehož části jsou zmenšenými kopiemi celku [12]. Tato definice ovšem není dostačující, protože by ji splňovala například i přímka, která při libovolném zvětšení vypadá také stále stejně.

2.2.2 Fraktální dimenze

Benoit Mandelbrot proto definoval fraktály jako množiny, jejichž Hausdorffova (neboli fraktální) dimenze je ostře větší než jejich dimenze topologická. Někdy se setkáme i s definicí, která pouze uvádí, že fraktál má neceločíselnou Hausdorffovu dimenzi. To ovšem také není správná definice, ač ji většina fraktálů splňuje. Například Peanova křivka má totiž Hausdorffovu dimenzi rovnu dvěma, přesto fraktálem nepochybně je. Její topologická dimenze je totiž rovna jedné a tudíž je ostře menší než Hausdorffova a původní znění Mandelbrotovy definice splňuje.

Abychom mohli Hausdorffovu/fraktální dimenzi nějak interpretovat, potřebujeme si nejdříve vyjasnit klasickou topologickou dimenzi. Ta je vždy celočíselná a objekt, který lze homomorfní transformací, která se skládá pouze ze stlačování a ohýbání, převést na n-simplex, má topologickou dimenzi rovnu n. Simplex je konvexní obal množiny $n+1$ afinně nezávislých bodů (ovšem může být umístěný v prostoru dimenze i vyšší než n). Pro $n = 0$ je to bod, pro $n = 1$ úsečka délky 1, pro $n = 2$ pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky 1, pro $n = 3$ čtyřstěn s hranami délky 1 atd. [15] Algebraicky je také možné chápat topologickou dimenzi podle počtu nezávislých proměnných, pomocí nichž lze danou množinu algebraicky vyjádřit. Bod je vyjádřen pouze svými souřadnicemi, ale žádnou proměnnou, proto je jeho dimenze nulová. V algebraickém vyjádření přímky v rovině ($y = ax+b;\ a, b, x, y \in \mathbb{R}$) je nezávislá proměnná jen jedna, obvykle x, která probíhá všechna reálná čísla (nebo v případě úsečky nějakou jejich spojitou uzavřenou podmnožinu) a proměnná y je na ní závislá. Analogicky bychom mohli pokračovat pro plošné a prostorové útvary, vždy je počet nezávislých proměnných v jejich algebraickém vyjádření roven jejich topologické dimenzi.

Hausdorffova dimenze pak charakterizuje objekty, které jsou „něco mezi“ dvěma sousedními topologickými dimenzemi. Například Kochova křivka s dimenzí $D \simeq 1{,}2619$ zabírá vlastně v rovině „více“ místa než úsečka, ale ještě ji nevyplňuje celou.

Vzorec pro výpočet Hausdorffovy dimenze pro nejjednodušší matematické fraktály odvodíme od běžných objektů s celočíselnou dimenzí. [1], [21] Intuitivně víme, že pokud máme úsečku délky l, pro libovolné celé K ji lze „vydláždit“ (každý bod je pokryt právě jednou) $N = K$ stejnými částmi, jejichž délka bude rovna l/K a každá z těchto částí získáme z původní úsečky homotetií s poměrem $r = 1/K$. Přesuneme-li se do roviny, obdélník o rozměrech a,b lze pokrýt $N = K^2$ částmi o rozměrech a/K, b/K, které získáme z celku homotetií s poměrem $r = 1/K = 1/N^{1/2}$. Analogicky pro kvádr bude poměr této homotetie $r = 1/K = 1/N^{1/3}$. Pokud vztah zobecníme, dostáváme $r = 1/K = 1/N^{1/D}$, kde D je Eukleidovská dimenze. Po úpravě a vyjádření D získáme obecný vztah $D = \dfrac{\log N}{\log 1/r}$, který ale pro fraktální útvary dává neceločíselné výsledky a místo topologické dimenze dostáváme dimenzi fraktální. Konkrétní výpočty uvedu vždy u jednotlivých příkladů fraktálů.

2.2.3 Soběpodobnost versus soběpříbuznost

Pojem soběpodobnosti se někdy zužuje a soběpodobnými fraktály rozumíme jen ty, ve kterých se struktura opakuje naprosto přesně a zvětšený detail je identickou kopií celku. Při vzniku těchto fraktálů nefiguruje náhoda a vznikají přesnou aplikací matematických vzorců (říká se jim též deterministické). Tyto fraktály v přírodě nenajdeme.

Proti tomu se pak staví pojem soběpříbuznosti, kdy části objektu nejsou identickými kopiemi celku, ale jsou mu pouze více či méně podobné. Takové fraktály jsou buď čistě přírodní (strom, řeka, hora, mrak) nebo vznikají zahrnutím pravděpodobnostního počtu do vzorců přesných matematických fraktálů (tyto fraktály se používají právě pro modelování přírodních tvarů, například v počítačové grafice).

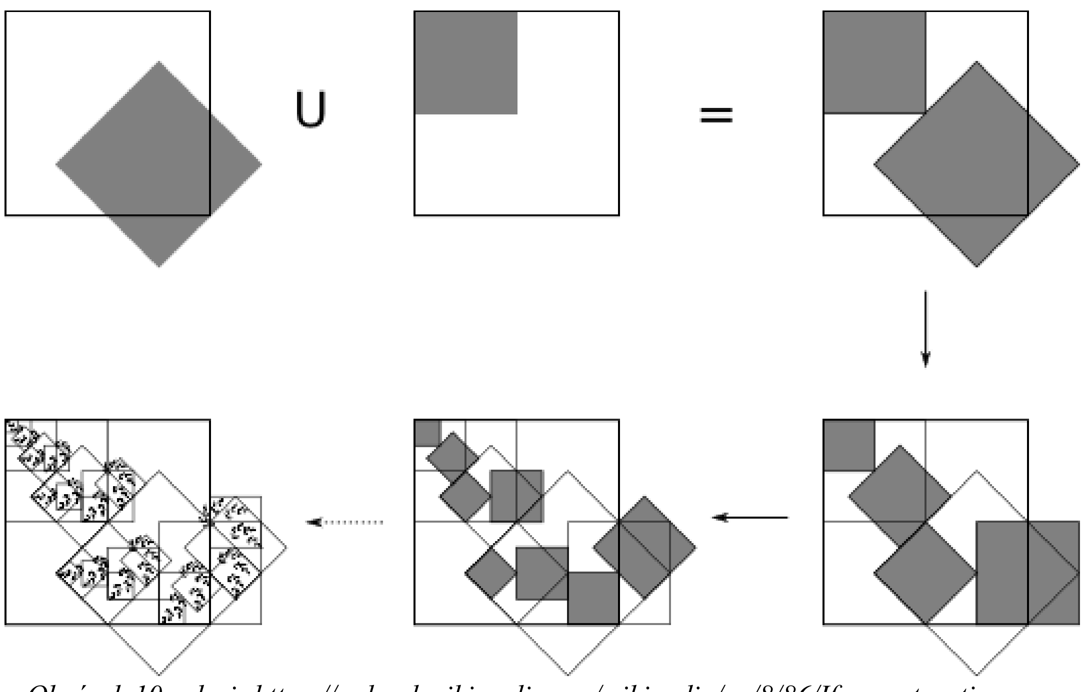
V práci se žáky lze využít jak fraktálů soběpodobných (hlavně při praktických činnostech, kdy žák může například fraktál namalovat a následně popisovat co v něm vzniklý obrázek evokuje a jaké vlastnosti v něm dokáže najít) i soběpříbuzných (*„Uveďte příklady fraktálů, které můžete vidět okolo sebe a proč je to podle vás fraktál?“*)

2.2.4 Principy vzniku fraktálů

V přírodě samozřejmě fraktály vznikly evolucí, jako nejvýhodnější řešení přírodního výběru, z hlediska matematického uvedu tři nejčastější principy.

2.2.4.1 IFS

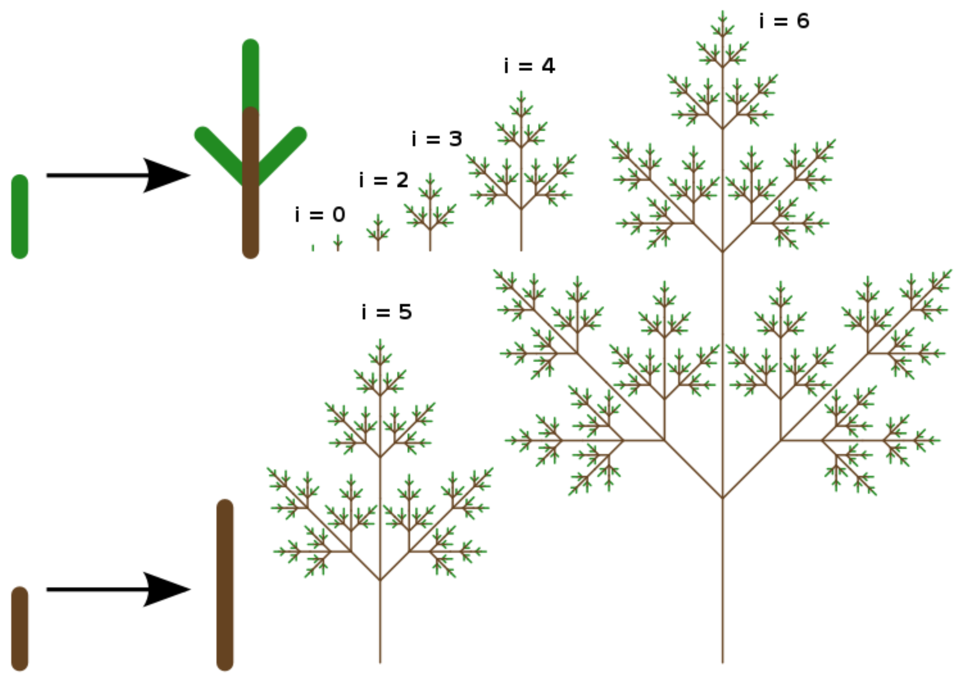
IFS neboli Iterated Function System (česky systém iterovaných funkcí), funguje na principu opakovaných aplikací jedné geometrické transformace na původní tvar, [16] [30] poté na jeho části, pak na části části atd. Na obrázku vidíme několik prvních iterací IFS, který používá dvě zobrazení najednou: první je otočení složené se stejnolehlostí s koeficientem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a druhé pouze stejnolehlost s koeficientem ½ a středem v levém horním rohu původního čtverce. První aplikací tohoto složeného zobrazení získáme z jednoho původního čtverce dva menší, navzájem vůči sobě pootočené. Na každý z nich zvlášť pak aplikujeme stejnou transformaci, čímž získáme čtyři menší čtverce a tak dále, teoreticky až do nekonečna (prakticky do té doby, dokud je to technicky rozumné, tedy například dokud se rozměry detailů nepřibliží rozměru jednotlivých pixelů na zobrazovacím zařízení.)



Obrázek 10, zdroj: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/8/86/Ifs-construction.png

2.2.4.2 L-systém

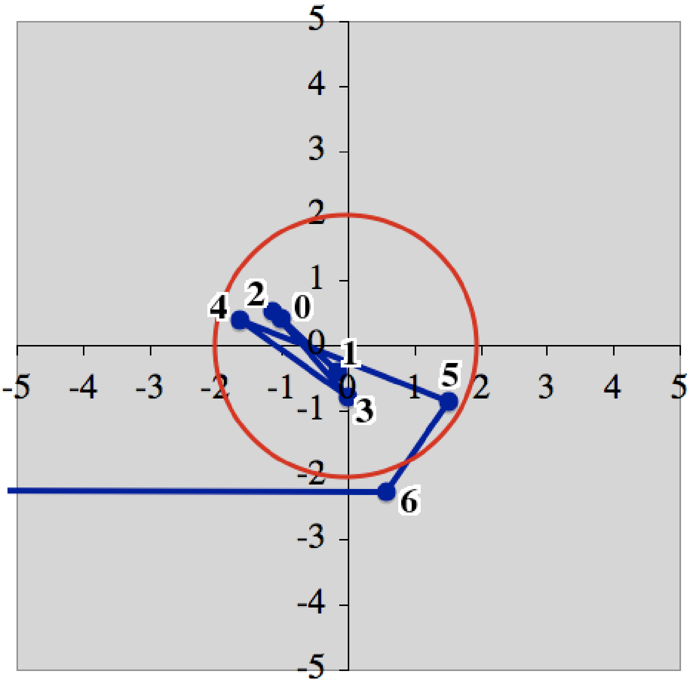
L-systém je způsob generování fraktálů, který v roce 1968 popsal maďarský biolog Aristid Lindenmayer. V základní podobě se skládá ze tří částí: abecedy, axiomu a přepisovacích pravidel. [26] Abeceda je množina symbolů, které reprezentují to, z čeho fraktál budujeme (mohou to být čisla, tóny, geometrické objekty,…). V případě použití v grafice abecedě také najdeme úhel otočení a symboly + a –, které zastupují akci otočení o jednonásobek tohoto úhlu v kladné či záporné orientaci. Axiom (někdy se také můžeme setkat s označením iniciátor) je slovo složené ze znaků abecedy, které udává počáteční stav L-systému. Přepisovací pravidla (může být také jen jedno, někdy se používá označení generátor(y)) pak definují, co se se symboly z abecedy stane během jedné iterace (symbol můžeme nahradit jiným symbolem, popřípadě skupinou symbolů, nebo s ním neudělat nic.). Na obrázku je popsáno několik prvních iterací L-systému generujícího fraktální stromek. V abecedě by se v tomto případě nacházely symboly zastupující zelený stonek, hnědý stonek a úhel otočení roven 45°. Axiom je svisle postavený zelený stonek. Přepisovací pravidla jsou dvě: 1. zelený stonek se nahradí dvěma hnědými stonky a třemi zelenými uspořádanými dle obrázku a hnědý stonek se nahradí dvěma hnědými stonky. První pravidlo zajišťuje vznik nových větvení, druhé pravidlo pak celkový růst.



Obrázek 11, zdroj: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/LsystemTree.svg

2.2.4.3 TEA (Time Escape Algorithms)

Tento princip vytváření fraktálů pracuje v soustavě souřadnic, nejčastěji jí je Gaussova rovina komplexních čísel. Na začátku je jednoduchá algebraická formule, která si jako vstup bere body roviny, které jeden po druhém testuje, zda iterováním vzorce výstupní hodnota konverguje (pak je výchozí bod součástí fraktální množiny) nebo roste nade všechny meze (pak bod do množiny nepatří). [27] Protože pracujeme s absolutní hodnotou komplexních čísel (tedy jejich vzdáleností od počátku soustavy souřadnic), zkoumáme vlastně, za se bod iterováním vzdaluje do nekonečna, nebo se drží v okolí nějakého bodu (takový bod se pak nazývá atraktor). Na začátku je ale třeba zvolit omezení, kolik iterací se smí maximálně provést, protože v opačném případě by algoritmus běžel do nekonečna a nikdy by nedošel k výsledku. Nakonec se body množiny obarví černou barvou, odstín okolí množiny se odvodí od počtu iterací, které bylo nutno provést, aby se zjistilo, že hodnota diverguje.



Obrázek 12, zdroj: http://yozh.org/wp/wp-content/uploads/2010/11//mset005-fig002.png

2.3 Typologie fraktálů

V této kapitole chci uvést některá kritéria dělení fraktálů. Ne snad proto, že by se jednalo o nějaké oficiální dělení, ale spíše z hlediska praktické části mé práce. Zde zavedená nomenklatura by totiž později měla posloužit jako kritérium hodnocení jednotlivých pokusů, především z hlediska motivačního (může se ukázat, že žáci lépe reagovali na jednu či druhou kategorii nebo že na daném rozdělení vůbec nezáleželo).

2.3.1 Fraktály kompoziční a dekompoziční

Toto dělení zavádím po dohodě s PhDr. Kaslovou, nejedná se o všeobecně rozšířené dělení. Shledávám ale jeho užitečnost v tom, že se zabývá grafickou stránkou a způsobem vzniku, což jsou aspekty, které dítě na základní škole vnímá přednostně. Kompoziční fraktály vznikají přidáváním „materiálu“ (např. Kochova vločka), dekompoziční jeho odebíráním (např. Sierpińského trojúhelník). Toto kritérium nemá valný význam z hlediska matematického, ale může ukázat rozdíly ve vnímání testovaných žáků. Dekompoziční fraktál totiž evokuje kolaps, zánik, destrukci (podtrženo tím, když dítěti prozradíme, že má nulovou plochu, že „tam vlastně nic není“), což jsou jevy, které dítě v pubertálním věku přitahují. Naproti tomu kompoziční fraktály by mohly evokovat bobtnání či bujení, což jsou jevy daleko méně atraktivní, pro některé jedince by mohly být snad i odpudivé.

2.3.2 Fraktály ve 2D a ve 3D

Fraktál ve dvoudimenzionálním prostoru je ve výuce typicky reprezentován obrázkem na papíře nebo na tabuli. S těmito fraktály se snadno pracuje, žák je může vytvářet sám, jsou na nich zřejmé vlastnosti fraktálů. Dvojrozměrný fraktál lze vytvářet buď na papíře nebo jeho trojrozměrný model skládáním menších dílů (například čtverečky nebo rovnostranné trojúhelníky vystřižené z papíru, dřevěné kostky apod.). Z přírodních objektů můžeme prezentovat křivku pobřeží ostrova, povodí řeky nebo obrys mraku na obloze.

Trojrozměrné fraktály jsou pro jejich samotné vytváření ve výuce hůře využitelné, protože vyžadují lepší vybavenost pomůckami – potřebujeme buď velké množství materiálu nebo nějakou speciální stavebnici, se kterou se tímto způsobem snadno pracuje (například by se dala použít chemická stavebnice, kterou se zobrazují atomy a vazby mezi nimi). Oproti tomu jako námět pro pozorování nebo diskusi jsou 3D fraktály mnohem vděčnější, protože se v přírodě vyskytují velice často – stromy, květy, ptačí pera, hory a skály, oběhové soustavy živočichů atd.

2.3.3 Matematické a přírodní fraktály

Toto dělení na úrovni základní školy kopíruje rozlišení soběpodobné/soběpříbuzné fraktály. Víme také, že soběpříbuzné fraktály mohou vznikat čistě matematickou cestou zahrnutím náhody a stávají se tak prostředkem k matematickému modelování přírodních tvarů. Toto ovšem převyšuje úroveň ZŠ a zůstaneme tedy u rozlišení matematických fraktálů (struktura se identicky opakuje v jakémkoli měřítku) a přírodních fraktálů (část se celku pouze podobá, např. větev připomíná malý strom). Ve výuce je pak cílem se žáky nalézt paralely mezi oběma typy a naučit je vidět fraktální principy v jejich okolí (V období, kdy jsem začínal psát tuto práci, jsem zažil moment, ve kterém jsem „objevil“ fraktál na pro mě zcela nečekaném místě – u hlávkového salátu. Při jeho loupání jsem odebíral stále menší a menší listy, které měly všechny stejný tvar, zmenšovala se jen velikost a to až do zcela nepatrných rozměrů. Přičítám to počínající profesní deformaci, ale pokud se něco takového naučí vidět i někdo, kdo se matematikou hlouběji nezabývá, budu to považovat za úspěch.).

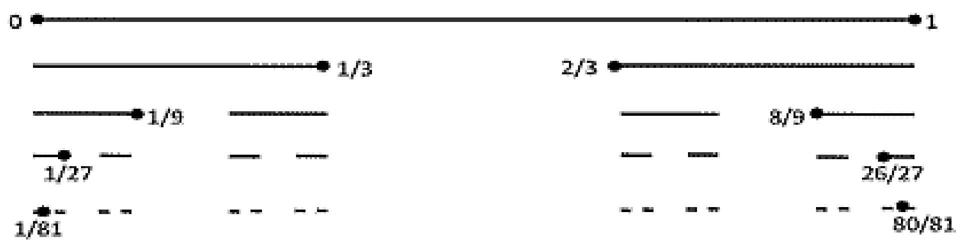
2.4 Příklady fraktálů

2.4.1 Nejznámější matematické fraktály

2.4.1.1 Cantorova množina

Nazývaná také Cantorův prach nebo Cantorovo diskontinuum, byla tato množina popsána již v roce 1883 německým matematikem Georgem Cantorem (1845 – 1918) a bývá považována za první fraktál. Její vznik bývá popisován následovně: začneme s úsečkou jednotkové délky, z níž vyjmeme její prostřední třetinu bez krajních bodů (řečí intervalů z [0,1] vyjmeme $(^1/_3, ^2/_3)$). Tím nám vzniknou dvě části (sjednocení $[0, ^1/_3]$ a $[^2/_3, 1]$), ze kterých ve druhé iteraci opět stejným způsobem vyjmeme jejich střední části ($(^1/_9, ^2/_9)$ a $(^7/_9, ^8/_9)$). Opakováním tohoto postupu do nekonečna nám vznikne nekonečně „řídký“ prach, který ale nikdy nezmizí. Vždy budeme mít co odebírat a vždy nějaká část z původní úsečky zůstane. Pokud dosadíme do vzorce, který jsme odvodili pro fraktální dimenzi, získáme $D = \frac{logN}{\log 1/r} = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0{,}6309$. $N = 2$ znamená, že celek nahrazujeme dvěma částmi a každá z nich je třetinou původní úsečky, proto $r = {}^1/_3$. Cantorova množina se jeví jako množina izolovaných bodů, proto je její topologická dimenze rovna nule a splňuje definici fraktálu.

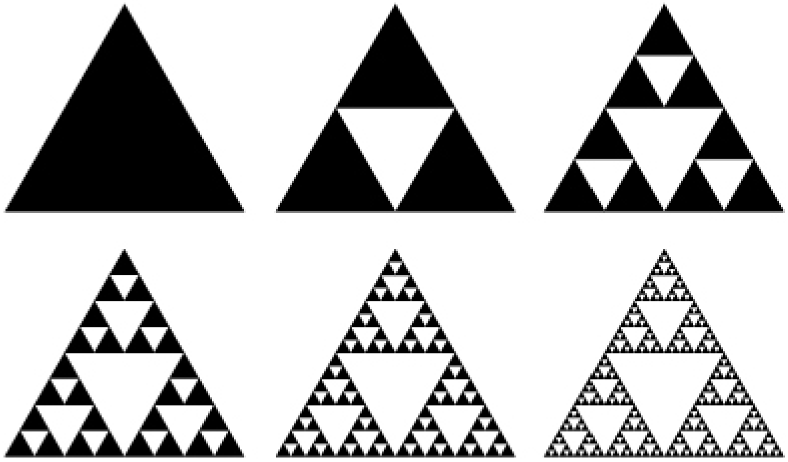
Toto je základní podoba Cantorovy množiny, různých modifikací lze ale vymyslet nepřeberně, stačí si jen pohrát s délkou a počtem části, které vyjímáme.



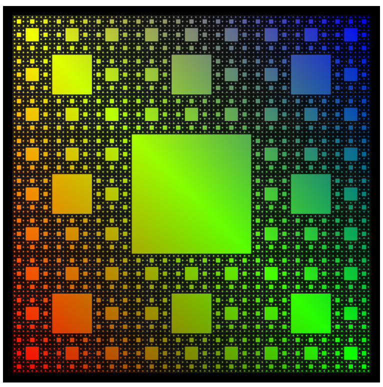
Obrázek 13, zdroj: https://content.ncetm.org.uk/images/microsites/secondary_magazine/issue_73/73_11.gif

2.4.1.2 Sierpińského trojúhelník/koberec, Mengerova houba

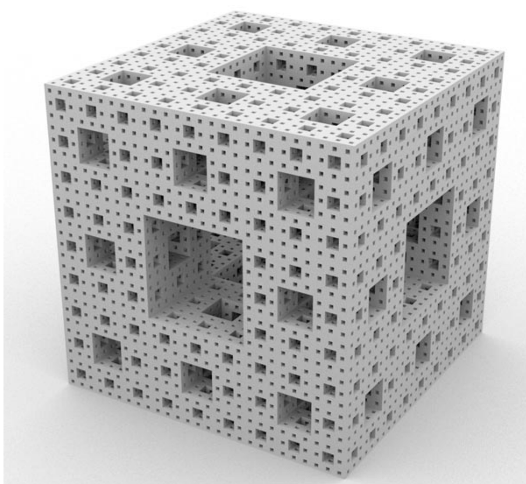
Princip vzniku Cantorovy množiny můžeme rozšířit na objekty o vyšším počtu dimenzí. V roce 1915 tento způsob aplikoval polský matematik Wacław Sierpińský na rovnostranný trojúhelník. Spojením středů stran se trojúhelník rozdělí na čtyři stejné menší trojúhelníky, které mají poloviční rozměry. Prostřední z nich pak vyjmeme, nahradíme tedy celek třemi částmi, které jsou s ním v homotetií s poměrem ½. Tento postup pak aplikujeme znovu na každý za zbylých menších trojúhelníků a tak dále až do nekonečna. Po dosazení do vzorce pro dimenzi získáme $D = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1{,}585$. Stejný postup nám ze čtverce vytvoří tzv. Sierpińského koberec, jehož dimenze je rovna $D = \frac{\log 8}{\log 3} \simeq 1{,}8928$, z krychle tzv. Mengerovu houbu, jejíž dimenze je $D = \frac{\log 20}{\log 3} \simeq 2{,}7268$.



Obrázek 14, zdroj: http://www.cplusplus.com/articles/LyTbqMoL/serpinskiTriangles.jpg



Obrázek 16, zdroj: http://orig05.deviantart.net/0370/f/2010/194/9/2/variation_of_sierpinski_carpet_by_alcandoras.png

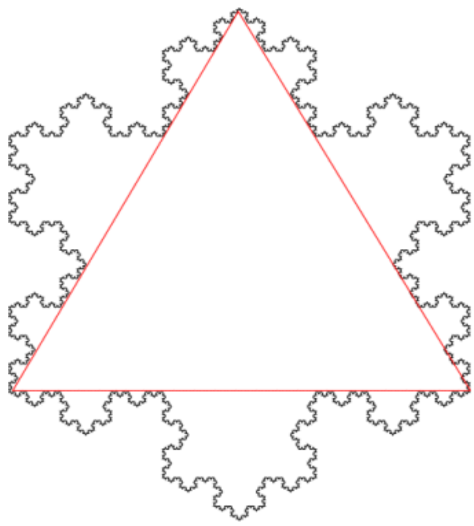


Obrázek 15, zdroj: http://www.sum-rg.at/wp-content/uploads/2015/04/3-Menger-Schwamm.jpg

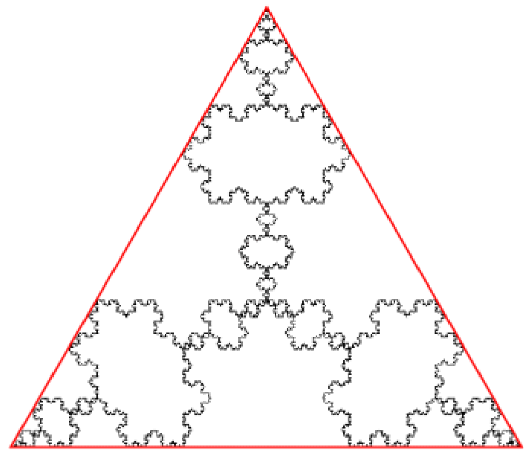
2.4.1.3 Kochova křivka a vločka, Kochův povrch

V roce 1906 definoval švédský matematik Helge von Koch fraktál (tehdy tento pojem samozřejmě ještě neexistoval), který vzniká takto: na začátku máme jednotkovou úsečku, kterou rozdělíme na tři stejné díly. Nad prostředním z nich sestrojíme rovnostranný trojúhelník a jednu jeho stranu, která bývala prostřední třetinou původní úsečky, odstraníme. V prvním kroku tedy získáme lomenou čáru, jejíž délka je $^4/_3$. Ten samý postup pak opakujeme na každém z jejích čtyřech segmentů. Dimenze takto vzniklé křivky, která je po svém objeviteli nazývána Kochovou, je rovna $D = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1{,}2619$. Pokud místo jedné úsečky začneme s rovnostranným trojúhelníkem, získáme obrazech, který připomíná sněhovou vločku a proto se nazývá Kochova vločka (někdy také Kochův ostrov).

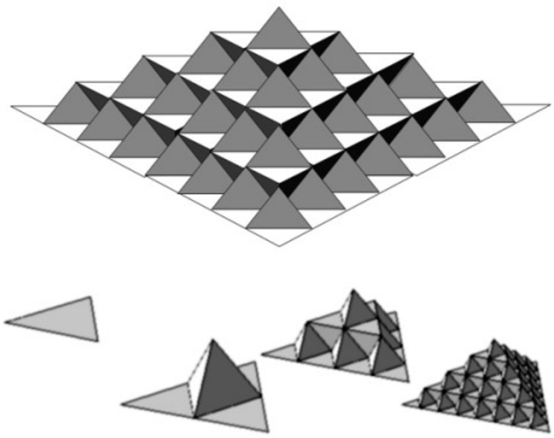
V různých modifikacích pak můžeme například konstruovat rovnostranné trojúhelníky „dovnitř“ (tzv. Kochova antivločka, která má stejnou dimenzi, jako normální Kochova vločka), nebo místo trojúhelníků přidávat čtverce (kvadratická Kochova křivka, $D = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq 1{,}465$), nebo ve 3D nad plochou ve tvaru rovnostranného trojúhelníka (popř. čtverec) vztyčit pravidelný čtyřstěn (respektive kvádr) a získáme Kochův povrch s dimenzí $D = \frac{\log 6}{\log 2} \simeq 2{,}585$ (resp. $D = \frac{\log 13}{\log 3} \simeq 2{,}3347$).



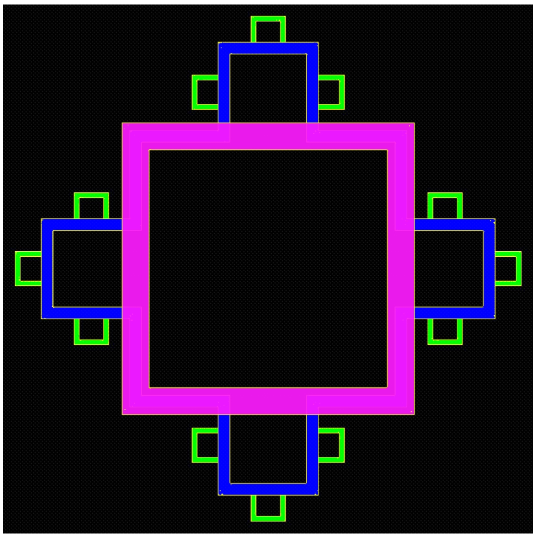
Obrázek 17, zdroj: http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/kcurve/snowflake2.gif



Obrázek 18, zdroj: http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/kcurve/antisnowflake.gif



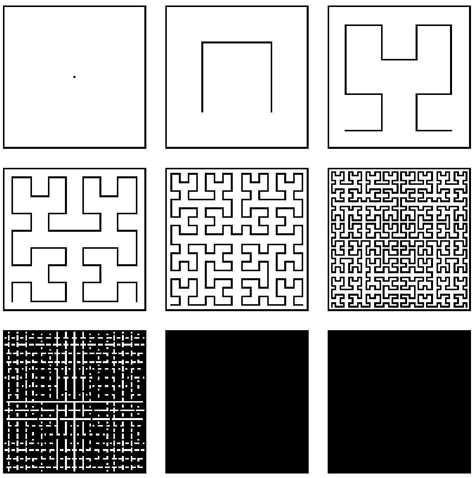
Obrázek 19, zdroj: http://67.media.tumblr.com/5562e4f461e6788eb14d85fb70f72c42/tumblr_niaytfWZxZ1qm1w4ro1_500.jpg



Obrázek 20, zdroj: http://kriche.com.ar/root/programming/recursion/partialSquareKoch2.png

2.4.1.4 Peanova křivka

Peanova křivka (pojmenovaná podle italského matematika Giuseppa Peana, který ji v roce 1890 popsal) je nejstarší z mnoha křivek vyplňujících prostor (anglicky SFC – Space Filling Curve). Tyto fraktály totiž zcela vyplňují n-rozměrný prostor, ve kterém se nacházejí. V případě Peanovy křivky začínáme s jednorozměrnou úsečkou, která ale po nekonečně mnoha iteracích zcela vyplní plochu, tj. prostor o dvou rozměrech (neboli její topologická dimenze je rovna jedné, ale Hausdorffova dvěma).



Obrázek 21, zdroj: http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/794/Peano.gif?file_id=1562

2.4.1.5 Juliova množina

Juliovu množinu vytváříme v rovině komplexních čísel a jedná se o příklad polynomického TEA fraktálu. Vzniká nekonečnou iterací rekurzivního vzorce $z_n = z_{n-1}^2 + c$, kde počáteční hodnotou komplexního čísla z_0 je poloha bodu v rovině a c je komplexní konstanta která zůstává po celou dobu výpočtu stejná. Následně se zkoumá konvergence či divergence výsledné hodnoty. Pokud konverguje (nebo hodnota osciluje), bod do množiny patří, pokud diverguje, bod do množiny nepatří. S nástupem počítačů s vyšším výpočetním výkonem se okolí množiny začalo obarvovat podle toho, kolik iterací bylo nutno provést, aby se rozhodlo o divergenci.

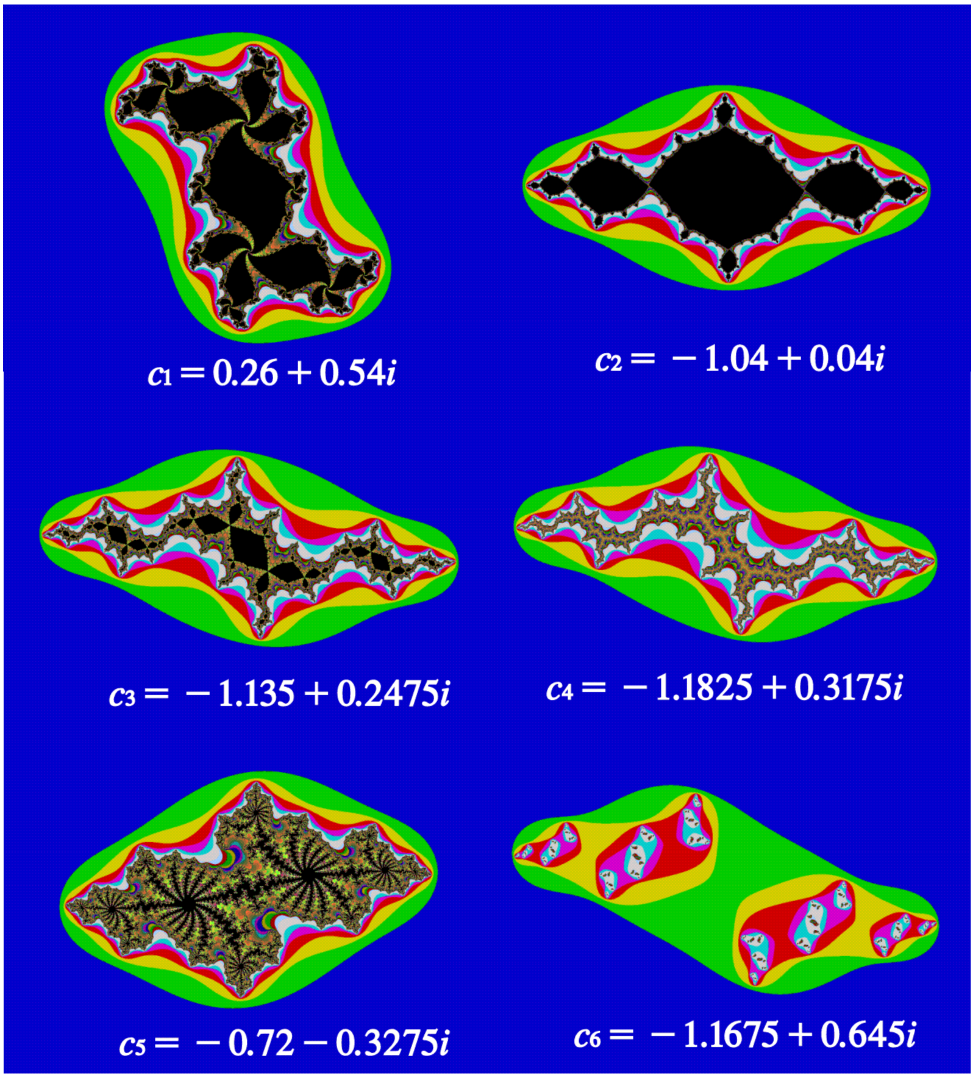
Očividně výsledek bude záviset na volbě hodnoty parametru *c*. Tvarů Juliovy množiny je tudíž nekonečně mnoho a jakákoli změna hodnoty *c* ovlivní výsledný tvar. Ve všech případech je ale hranice množiny nekonečně členitá a její fraktální dimenze je rovna dvěma. [22]

Zajímavé také je, že tuto množinu nezávisle na sobě popsali Gaston Julia a Pierre Fatou. Lišili se pouze v tom, že zatímco Julia do své množiny zahrnul body, pro které hodnota iterací konverguje (tzv. *prisoner set*), Fatou zahrnul body, pro které hodnota diverguje (tzv. *escape set*). Juliova množina a Fatouova množina jsou tedy navzájem komplementární.

Lze dokázat, že pro $|z| > 2$ a $|z| \geq |c|$ posloupnost diverguje. [4] Z předpokladu víme, že $\exists \varepsilon > 0: z = 2 + \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla plyne:

$$
\begin{gathered}
|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c| \\
|z^2| - |c| \leq |z^2 + c| \\
|z^2| - |z| \leq |z^2 + c| \\
|z|(|z| - 1) \leq |z^2 + c| \\
(1 + \varepsilon)|z| \leq |z^2 + c|
\end{gathered}
$$

Víme tedy, že za daných předpokladů je každá další iterace nejméně rovna $(1+\varepsilon)$-násobku předchozího členu, obecně *n*-tá iterace je větší nebo rovna než $(1+\varepsilon)^n$-násobku prvního členu a tedy roste nade všechny meze a do Juliovy množiny nepatří. Toto platí pro každý člen posloupnosti, proto stačí při výpočtech sledovat, zda kterýkoli z členů v absolutní hodnotě nepřesáhl hodnotu $r(c) = \max(c, 2)$. Pokud ji přesáhne, může vykreslovací algoritmus skončit a bod se do Juliovy množiny nezařadí.

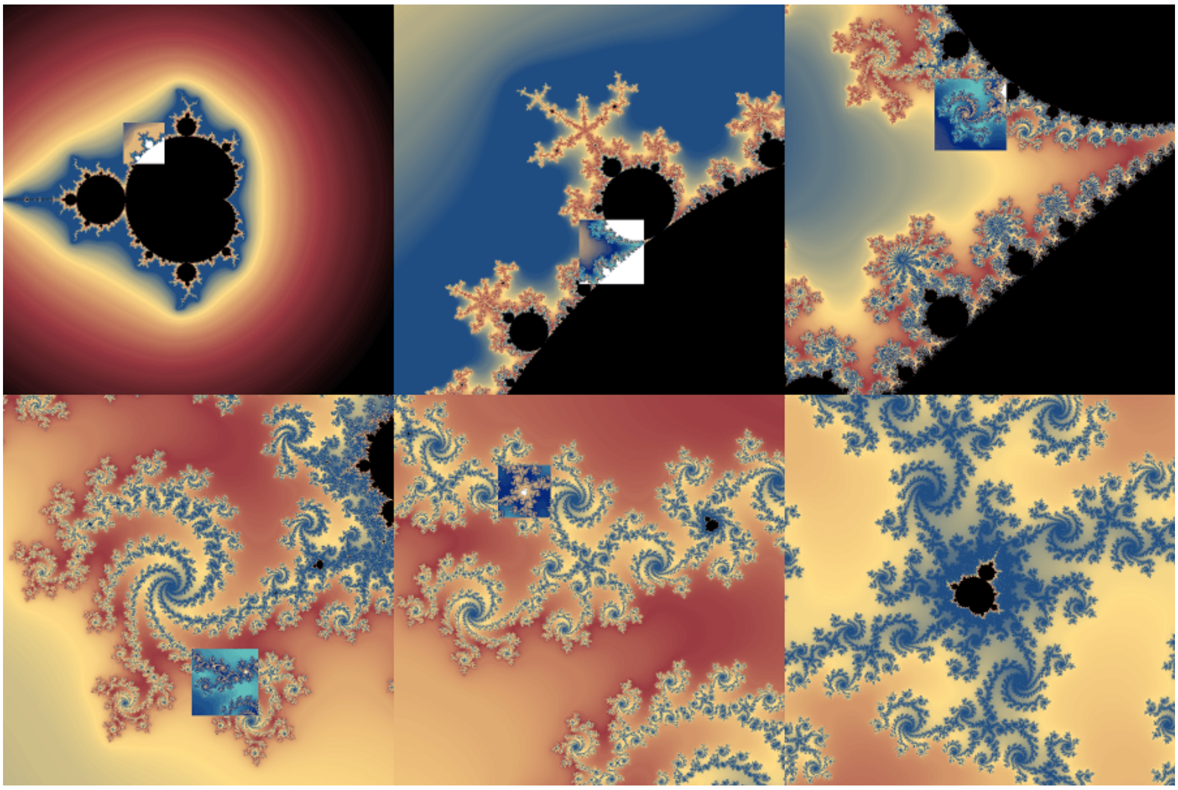


Obrázek 22, zdroj: http://staff.www.ltu.se/~larserik/applmath/chap9en/julia.gif

2.4.1.6 Mandelbrotova množina

Mandelbrotovu množinu popsal nám už dobře známý Benoit Mandelbrot ve snaze o zobecnění Juliova a Fatouova výzkumu. Vzorec, který iterujeme, je na první pohled stejný jako u Julii. Liší se pouze v tom, že pro Juliovu množinu je hodnota parametru c stejná pro celou množinu a počáteční hodnota z_0 je polohou vykreslovaného bodu, u Mandelbrota je hodnota z_0 vždy [0;0] a naopak c je poloha vykreslovaného bodu, proto má Mandelbrotova množina pouze jednu podobu. Po první iteraci je tak $z_1=c$, Mandelbrotova množina je tedy jakýmsi katalogem konstant c, pro něž je Juliova množina spojitá. [22] Z důkazu v předchozí kapitole tedy plyne, že Juliova množina je nespojitá pro všechna $|c| > 2$, pro $|c| < 2$ nelze obecně rozhodnout. Hranice Mandelbrotovy množiny je taktéž fraktální, hodnota její Hausdorffovy dimenze je rovna dvěma.

Mandelbrotova množina se stala jakýmsi emblémem fraktální geometrie a často se říká, že je nejsložitějším objektem v matematice, ač generována takto jednoduchým předpisem.



Obrázek 23, zdroj: http://www.malinc.se/m/images/MandelbrotZoom.png

2.4.2 Fraktály v přírodě

„(Fraktály) jsou v biologii všude. Jsou řešením, se kterým přírodní výběr přicházel znovu a znovu a znovu." (James Brown v dokumentu Fractals: Chasing the hidden dimension) [29]

Prvotní motivací pro Mandelbrotův výzkum, na jehož konci byl vznik fraktální geometrie, byly otázky týkající se světa okolo nás jako: *„Jaký tvar má hora, pobřeží, řeka nebo hranice mezi dvěma povodími? Jaký je tvar mraků plamenů nebo svařovaných spojů? Jaká je hustota rozložení galaxií ve vesmíru?"* [2, str. 9] Fraktály tedy v mnoha případech nalézáme ve světě přírody v mnoha situacích a modifikacích, ale vždy přináší rozmanitost při zachování úspornosti a vždy při bližším zkoumání nabourávají naivní představy o konečné délce či konečném povrchu objektů okolo nás.

Kdykoli se tedy setkáváme s potřebou matematicky modelovat přírodní tvary, přicházejí ke slovu fraktály – stromy, listy, hory, pohoří, jezera, ostrovy, řeky, vodopády, mraky, ptačí peří, kořeny rostlin, všechny tyto „objekty" jsou fraktální povahy a díky Mandelbrotovi máme matematický nástroj, jak s nimi pracovat.

Obrázek 25, zdroj: http://www.citi.io/wp-content/uploads/2015/02/386-6.jpg

Obrázek 24, zdroj: https://www.wired.com/wp-content/uploads/images_blogs/wiredscience/2010/09/fractal_12a.jpg

Obrázek 26, zdroj: http://cdn1-www.webecoist.momtastic.com/assets/uploads/2008/08/fractal-shoreline.jpg

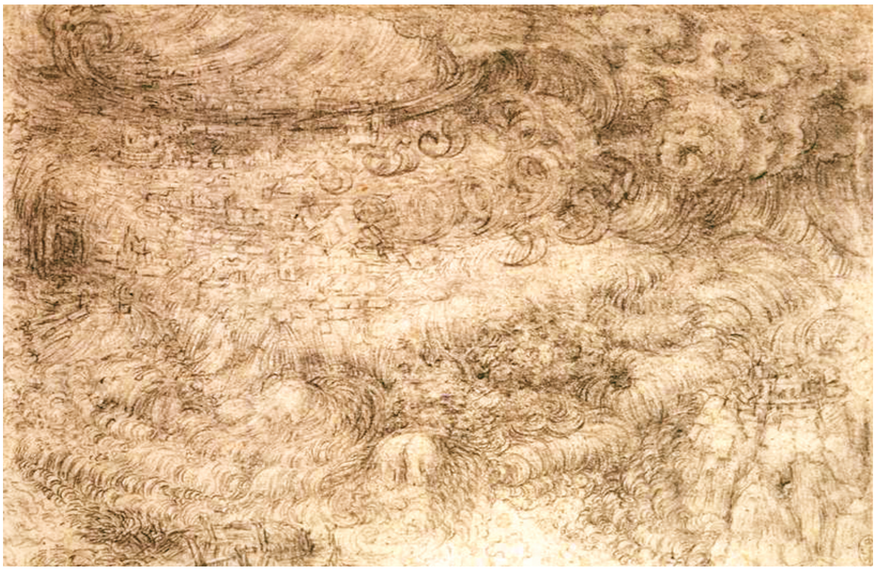
2.4.3 Fraktály v umění

2.4.3.1 Ve výtvarném umění

Od počátku byly fraktály vnímány jako velice dekorativní a Mandelbrotovy výsledky vzbudily kromě zájmu vědců i zájem například návrhářů oblečení. Vždyť jenom motiv tvaru Mandelbrotovy množiny se začal objevovat na oblečení a doplňcích stejným způsobem, jako se používají loga značek nebo kapel. Juliovy množiny, ale i jednodušší fraktály, se začaly používat skrz počítače jako textury na látky i na jiné materiály, právě díky svým jednoduchým předpisům.

Obrázek 27, zdroj: http://images.mentalfloss.com/sites/default/files/styles/article_640x430/public/4hjh3kj634.png

Fraktální principy lze ale nalézt v lidských výtvorech dlouho před Mandelbrotem, protože v přírodě se nacházely odjakživa a někteří jedinci je byli schopni podvědomě vnímat a reprodukovat. Jedním z takových byl i japonský malíř Kacušika Hokusai (1760-1849). [29] Jeho nejznámějším dílem je sbírka dřevotisků *36 pohledů na horu Fudži* (ve skutečnosti jich je ale 46, dalších deset bylo přidáno později), kdy maloval pohledy na tuto horu jednak z různých míst, ale i v různou denní a/nebo roční dobu a za různého počasí. Na nejznámější malbě *Velká vlna u pobřeží Kanagawy* (obr. 27) je hora Fudži v pozadí a jeví se nepatrná proti vlně, která se valí proti rybářským lodím. [24] Fraktální princip je velice patrný, čelo vlny se skládá z mnoha malých vlnek. Fraktály můžeme ale nalézt i v jeho malbách oblaků či stromů. Hokusai samozřejmě nevěděl, že maluje fraktály, tento termín spatřil světlo světa více jak sto let po jeho smrti, on ale nepotřeboval matematické formule, stačilo mu se dívat z čeho se skládá okolní svět a malovat to co viděl. Za zmínku také stojí, že bývá označován jako představitel stylu *ukijo-e*, (v překladu znamená „obrazy prchavého světa“), což by se dalo chápat, jako odkaz na zdánlivou dynamiku, kterou v sobě fraktály ukrývají. Bohužel Hokusai neměl žádné žáky ani následovníky, kteří by převzali jeho odkaz, a tak je v historii umění jeho styl malby unikátní.

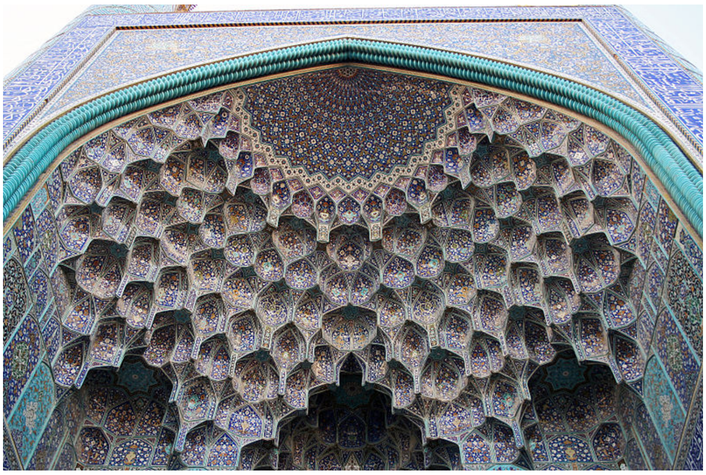


Obrázek 28, zdroj: http://www.backtoclassics.com/images/pics/leonardodavinci/leonardodavinci_floodedcity.jpg

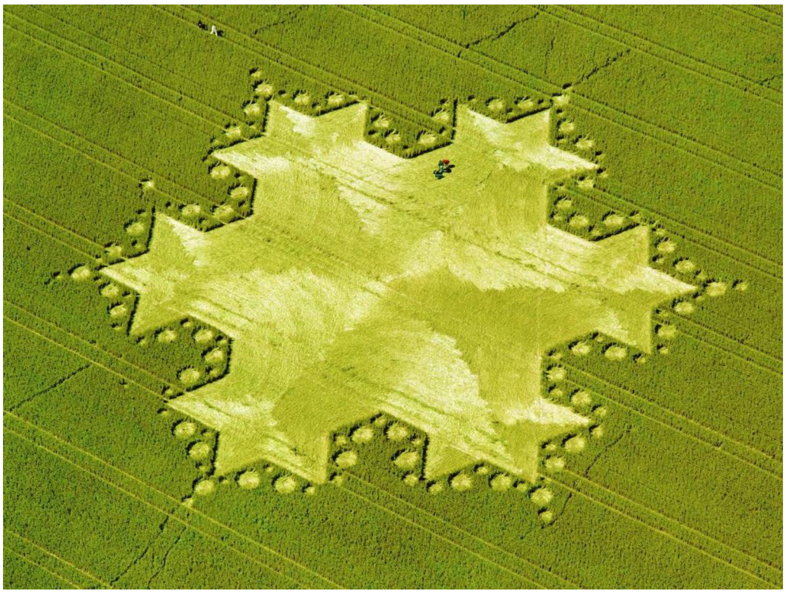
Z dalších výtvarných umělců lze uvést Leonarda da Vinciho (1452-1519) a jeho kresbu *Potopa* (obr. 28), kterou sám Mandelbrot zařadil do své *Fraktální geometrie přírody* [3], francouzského malíře Clauda Lorraina (1600-1682) nebo ruského malíře Vasilije Kandinského (1866-1944), který byl jednou zachycen na videozáznam jak *„maluje na papír o ploše asi čtvrt čtverečního metru. Začal rovnou čarou přes celý papír a pak přidával kratší linie. Když film končil, pracoval na řadě ještě kratších čar; to mi potvrdilo pocit, který jsem měl z pohledu na jeho obrazy: chápal fraktálnost – možná ne uvědoměle, ale intuitivně určitě ano.“* [2, str. 298]

Fraktální vzory můžeme také najít v prapočátcích civilizace, například u domorodých kultur jako byli Inkové a Mayové, ale i starověké kultury oblasti Mezopotámie. Fraktály se často také objevují jako záhadné tvary vytvořené v obilí, což je voda na mlýn zastáncům různých konspiračních teorií. Zda jsou kruhy v obilí dílem mimozemských civilizací nebo jen vtipálků snažících se vyvolat senzaci a zmást veřejnost, to se asi nedozvíme, bez debat ale je, že některé tvary jsou jasným kývnutím směrem k tvarům jako je Kochova vločka nebo samotná Mandelbrotova množina.

Obrázek 30, zdroj: http://rlv.zcache.com/rustic_tribe_mosaic_native_american_indian_pattern_poster-r39b8c3083553407e84039e57b6a97282_wvo_8byvr_324.jpg



Obrázek 29, zdroj: http://interschoolmathematics.pbworks.com/f/1374302778/08sdps%20mosque.JPG



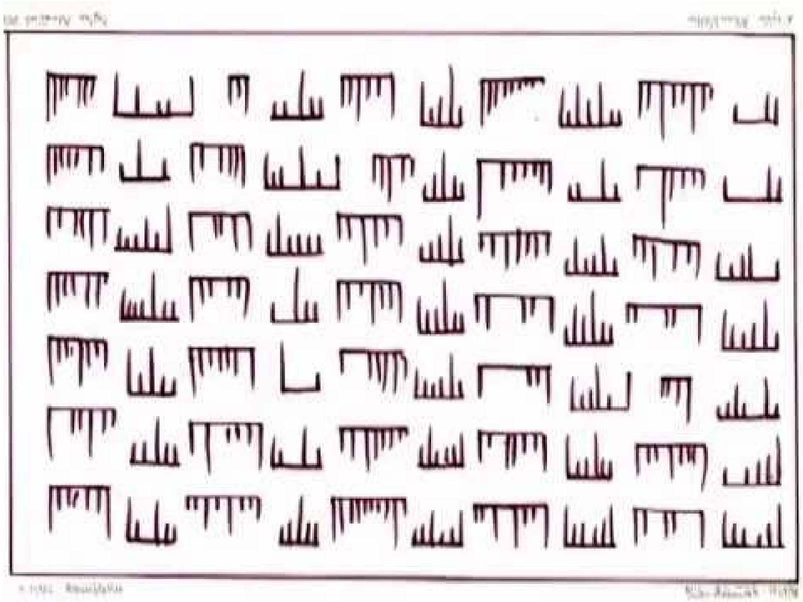
Obrázek 31, zdroj: http://farm3.static.flickr.com/2501/4181031797_a05956f970_o.jpg

2.4.3.2 V hudbě

Jak jsme si řekli u L-systémů, abeceda, ze které algoritmus tvoří fraktál, může obsahovat cokoli, nejen geometrické tvary, ale například i tóny. Skutečně existuje celé odvětví zvané Fraktální hudba, která je převážně generovaná počítači a L-systémů využívá. Například volně šiřitelný software FractMus tvoří na základě matematických melodie a uživatel jen reguluje počáteční podmínky, počty hlasů a nástroje, které je hraní. Pokud půjdeme k jádru věci, dovolím si prohlásit, že pokud vezmeme jakýkoli melodický motiv a umístíme ho opakovaně do jednoho hlasu, do dalšího hlasu ho umístíme tak, že všechny rytmické hodnoty zkrátíme na polovinu, v dalším hlasu na čtvrtinu atd., získáme hudební materiál, který bude dávat smysl. Takto získaná hudba bude mít k umělecky hodnotné skladbě stejně daleko, jako má Sierpińského trojúhelník k Moně Lise, ale uvážíme-li, že jsme k ní došli naprosto mechanickou a netvůrčí aplikací pravidla soběpodobnosti, jako důkaz o univerzálnosti fraktálních principů je to podle mě postačující.

Obrázek 32, Fraktální partitura vytvořená z motivu C-F-D-H

Výše popsaný princip je jedním ze znaků hudebního stylu druhé poloviny dvacátého století *minimalismus*. Ten bývá někdy nazýván (možná výstižněji) repetitivní hudba a je založen na principu opakování různých tónových motivů a jejich modifikací a jejich následné vrstvení přes sebe v jednotlivých hlasech. Pokud jsem tedy v předchozím odstavci popsal skladebnou techniku založenou na přísně soběpodobném fraktálním principu, skladba komponovaná technikou minimalismu by se dala považovat za analogii s fraktály soběpříbuznými. Žádná minimalistická škola nebo sdružení skladatelů repetitivní hudby v historii nevzniklo, a tak se spíše než jako o hudebním stylu mluví o minimalismu jako o skladebné technice, kterou někteří skladatelé uplatňovali třeba jen v částech svých skladeb, jiný pomocí ní komponovali celé koncerty. Z těch nevýznamnějších lze uvést Steva Reicha, Phillipa Glasse, Erika Satieho nebo Morton Feldman. Nemohu nezmínit ani českého skladatele Petra Wajsara a jeho skladbu nazvanou výstižně Minimini (vyšla na CD Milan Adamčiak & Agon Orchestra: Typornamento, Guerilla Records, 2012), která je komponovaná podle grafické partitury Milana Adamčiaka (obr. 33). Wajsar si z ní každý objekt přeložil do tónových motivů, které přes sebe navrstvil, a při poslechu skladby lze dobře identifikovat jednotlivé melodie zaznamenané graficky.



Obrázek 33, zdroj: http://img.youtube.com/vi/0Jp9N72-SKU/0.jpg

Ve svých pamětech Mandelbrot dále uvádí, že jeho přítel, maďarský skladatel György Ligeti mu jednou řekl, že až díky Mandelbrotovým obrázkům pochopil důležitý aspekt hudby: aby dávala smysl, musí být fraktální a proto si v ní nelze dělat co kdo chce. Na matematické konferenci věnované fraktálům, která se konala v 80. letech v německém Bad Neuenahr, pak Ligeti za asistence pianisty zanalyzoval svou skladbu *Désordre* (z jeho prvního sešitu klavírních etud vydaného 1985). S dalším skladatelem u kterého Mandelbrot odhaloval fraktálnost, s Charlesem Wuorinenem, uspořádal Mandelbrot v roce 1990 v Guggenheimově muzeu v New Yorku představení nazvané Hudba a fraktály. Ve svých pamětech o tom píše: *„Je úžasné, jak mohou spolupracovat dva lidé z tak rozdílných kultur, jestliže o to stojí.“* [2, str. 300]

2.5 Fraktály a teorie míry na základní škole

Způsob měření rozměrů objektů v hodinách matematiky na prvním stupni základní školy využívá principu porovnávání měřeného objektu a jednotkovým objektem (např. pokud máme pro měření délky například pravítko s vyznačenými dělícími body po jednom centimetru, je jednotkovým objektem úsečka délky jednoho centimetru), a vyjadřování měřeného rozměru v násobcích jednotkového útvaru. Pracuje se zde pouze s takovými objekty, které jsou celočíselným násobkem jednotkového, velikost je tedy vždy přirozené číslo větší než 0.

Na to navazuje druhý stupeň, kde se v rámci rozšiřování číselných oborů pracuje s principem aproximování měřeného rozměru (M) jeho horní (velikost tzv. obalu) a dolní (velikost tzv. jádra) mezí [6]. Jádrem (J) měřeného objektu je množina všech jednotkových objektů, které jsou měřeným objektem zcela pokryty, obalem (O) objektu je nejmenší množina jednotkových objektů, jež objekt zcela pokrývá.

$$|U_J| \leq |U_M| \leq |U_O|$$

Máme pak jistotu, že hodnota hledaného rozměru měřeného objektu leží mezi hodnotou velikostí jádra a hodnotou velikosti obalu. Chybou měření je pak rozdíl mezi jádrem a obalem.

Pokud velikost jednotkového objektu zmenšíme, získáme přesnější aproximaci, což v praxi probíhá tak dlouho, dokud chyba neklesne pod předem zvolené kladné číslo, kterým udáme požadovanou přesnost měření.

Tento algoritmus probíhá u žáků na základní škole samozřejmě automaticky, bez uvědomování si jednotlivých kroků (*„Přiložím pravítko k úsečce, tak aby první dělící bod splýval s jedním z krajních bodů úsečky, podívám se, kam padne druhý krajní bod. Aha, je to víc než šest, ale méně než sedm, spíš blíže k sedmi, bude to asi sedm centimetrů, šest milimetrů“*), skutečnost, že hledaná hodnota není větší než velikost obalu a není menší než velikost jádra, je zakotvena intuitivně. Obdobně jako s pravítkem při měření délky se zachází se sítí při měření plochy rovinných útvarů.

Této intuicí se však fraktály vzpírají. V některých fraktálů například nelze nalézt jádro (Sierpińského trojúhelník a obecně všechny fraktály, které jsem výše pojmenoval jako dekompoziční), jindy jádro i obal nalezneme, ale hodnota rozměru tyto meze překročí (délka obvodu Kochovy vločky a dalších kompozičních fraktálů). Na tomto rozporu mezi chápáním délky ve školní geometrii a „patologickými“ vlastnostmi fraktálů založím svou strategii výkladu fraktálů a poté se budu snažit se žáky dojít k pochopení, že stejné vlastnosti jako fraktály vykazují i přírodní tvary.

2.6 Charakteristika žáka na druhém stupni ZŠ

Období staršího školního věku, tedy věk, ve kterém jsou žáci na druhém stupni základní školy nebo na nižším gymnáziu, na které je praktická část této práce zaměřena, je charakterizováno především pubertou. Tělesné i duševní změny, které jedinec v tomto věku podstupuje, je třeba z pozice pedagoga znát a ve svém přístupu zohlednit.

2.6.1 Fyzické změny

Období puberty je zahájeno zvýšenou činností endokrinních žláz, které začnou do těla vylučovat ve zvýšené míře hormony, které odstartují sérii změn, kterými se tělo připravuje na pohlavní zralost a schopnost reprodukce. Nejvíce je toto zřetelné u tzv. sekundárních pohlavních znaků (to jsou takové znaky, kterými se od sebe jednotlivá pohlaví liší, ale nejsou přímo součástí pohlavních orgánů) – zrychluje se růst kostry a svalů (ovšem dosti nerovnoměrně, pubertální děti jsou díky tomu často neohrabané a nešikovné), přibývá ochlupení těla (tváře, podpaží, hruď, ruce, nohy, pohlavní orgány) a pohlavní orgány se připravují k činnosti (u chlapců poluce, u dívek menstruace).

2.6.2 Psychické změny

„Děti začínají tím, že své rodiče milují, později je soudí a odsuzují a jen zřídkakdy jim odpouštějí" (Oskar Wilde).

Po stránce duševní je období puberty typické odporem k autoritám (rodiče, učitelé) a snahou osamostatnit se [5]. Dospívající dítě začíná kriticky hodnotit své okolí a nedostatky tvrdě odsuzuje. V tomto období si dítě aktivně vyhledává vzory, ať už skutečné (sportovci, hudebníci,…) nebo fiktivní (postavy z literatury, z videoher či z filmů a seriálů), a své okolí s nimi nekompromisně srovnává. Pod touto slupkou ale často zůstává nejistota spojená s probíhajícími změnami těla, které doprovází pocity trapnosti a studu. Toto období se tedy vyznačuje jakýmsi rebelantstvím vůči všemu, co přichází ze světa dospělých, což zahrnuje i obsah učebnic a standardní učivo. Fraktály díky tomu mohou upoutat pozornost tím, že jsou něčím navíc, něčím co stojí mimo učebnice.

Po duševní stránce člověk v tomto věkovém stádiu dozrává, ale toto dozrávání s sebou často nese spoustu omylů a špatných úsudků vinou nedostatku zkušeností. Rozumové schopnosti se postupně vyrovnávají schopnostem dospělého člověka. Jedná se především o vnímání, fantazii (to se projevuje především formou tzv. denního snění –

hlavně idealizujícího nebo erotizujícího obsahu) [23], abstraktní myšlení a inteligenci. Naopak ideální v tomto období není pozornost a paměť. Proto je potřeba výuku žáků tohoto věku neustále zpestřovat a nepočítat s dlouhými plochami, ve kterých je potřeba koncentrovat se na jeden problém.

S dozráváním k pohlavnímu životu také souvisí zvýšený zájem jak o sama sebe (jaký/á vlastně jsem? Jak mě vnímá okolí?), tak o své okolí (a to především o své vrstevníky a o opačné pohlaví). V návaznosti na to přichází první starosti o volbu povolání, konkrétně v deváté třídě volbou střední školy. Dochází také k navazování prvních milostných vztahů, především platonické povahy. Současná společnost ale mnohá témata detabuizuje a dnes už v tomto věku nejsou výjimkou ani první sexuální zkušenosti. [25] Velkou důležitost a váhu má též přátelství a pocity sounáležitosti ve skupině. Díky tomu se může stát, že se ve třídě vyskytne problematická osobnost, která ostatní přitáhne a ti pak nekriticky přejímají jeho názory. Učitel má pak dvě možnosti, buď se snažit takového jedince získat na svou stranu, nebo ho izolovat od zbytku kolektivu a tím mu znemožnit ovlivňovat ostatní.

Veškeré tyto procesy vedou k završení vývoje v adolescenci (15-19 let), na jejímž konci by se měl z dítěte stát zralý jedinec schopný reprodukce, rozumného uvažování a zodpovědnosti za své činy a rozhodnutí. V patnácti letech k tomu má ovšem ještě daleko a my se tak z pozice pedagoga setkáváme s žáky v nejrozkolísanějším období jejich života, ve kterém často bojkotují všechno a všechny mimo oblast jejich zájmu. To je pro učitele jak výzvou k prověření jeho schopností získat a udržet pozornost, tak mu to dává do ruky několik mocných prostředků, jak žáky získat na svoji stranu i „proti jejich vůli“. Tím mám na mysli především mezipředmětové vztahy a přesahy učební látky do reálného života, které pak mohou korespondovat s jejich zájmy.

3 Praktická část

3.1 Metodologická část

3.1.1 Cíle a úkoly práce

Cíle práce vycházejí z teoretické části.

Cíle praktické části této práce jsou:

1) Vytvořit scénáře hodin, které budou žákům přibližovat principů fraktální geometrie a ukazovat jejich spojitosti jednak s „běžnou“ geometrií, kterou se ve škole učí, tak se světem přírody i techniky.
2) Ověřit realizovatelnost těchto scénářů jejich provedením ve vybrané škole a prověřit jejich vhodnost pro danou věkovou skupinu žactva.
3) Vyhodnotit reakce žáků na danou problematiku i ze zvukových nahrávek hodin a následných přepisů vybraných dialogů a z domácích úkolů, které žáci vypracují. Pouze podle holé aktivity přímo v hodinách však míru zaujetí však posuzovat nelze (viz kapitola …).
4) Ukázat, že tato tématika může vzbudit u žáků větší zájem nejen o matematiku jako o školní předmět, ale i o matematiku jako vědní obor a také jako způsob myšlení.
5) Předvést, že matematika nejsou jen vzorce a rýsování, ale že má i svou estetickou stránku, a také zcela konkrétní přesahy do reálného světa.

3.1.2 Charakteristika vzorku

Výuka proběhne na Gymnáziu Jaroslava Žáka v Jaroměři (jehož jsem absolventem) a to v kvartě, která odpovídá devátému ročníku základní školy. Ve zvolené třídě kvartě ve školním roce 2015/16 je celkem 30 žáků bez inkluze - 20 dívek a 10 chlapců. Z matematiky mělo na posledním vysvědčení známku 1 sedm žáků, známku 2 jedenáct žáků, známku 3 deset žáků, známku 4 dva žáci, průměrná známka z matematiky je 2,23. Učebnice, podle které probíhá v této třídě výuka je MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy (autoři: Jana Coufalová, Šárka Pěchoučková, Jiří Hejl, Miroslav Lávička, FORTUNA 2007, [8]).

3.1.3 Podmínky realizace

V základě lze zvolit dvě odlišné strategie, buď testovat „do hloubky“ (jednu třídu více hodin), nebo „do šířky“ (více tříd, ale v každé zvlášť méně hodin). Zvolil jsem strategii do hloubky, kvůli časovému prostoru pouhého jednoho týdne, který mi byl dán k dispozici. To má výhodu v tom, že testovanou látku lze pojmout z širšího hlediska a jak už název napovídá, jít více do hloubky. Nevýhodou je to, že výsledek je silně ovlivněn konkrétním kolektivem a momentální atmosférou ve třídě a navíc odpadá možnost srovnání a zobecnění. Přístup do šířky naproti tomu umožňuje srovnávat jednotlivé věkové kategorie a to, jak je testovaná látka motivovala či nemotivovala a hledat podmíněnost odlišných reakcí. Nevýhodou oproti strategii do hloubky je to, že v daném časovém limitu lze látku probrat daleko méně detailně.

Časové zařazení tohoto tématu volím v období v devátém ročníku po přijímacích zkouškách na střední školy, tedy období kdy už klasifikace látky obsažené v ŠVP ztrácí pro žáky váhu, což je umocněno pubertálním obdobím, kterým procházejí. Skutečnost, že fraktály stojí mimo osnovy [28], spolu s dalšími způsoby, kterými vybočují z obrazu matematiky, na který jsou žáci zvyklí, může pozitivně ovlivnit motivaci žáků věnovat se matematice.

3.2 Scénáře hodin

Scénáře jsou vytvořeny na základě teoretické části, obsahují cíle, metody, formy práce a předpokládaný průběh vyučovacích hodin.

3.2.1 1. hodina – Úvod do fraktálů grafickou formou

Cíl hodiny:

Vzbudit v žácích praktickou formou zájem o problematiku fraktálů a prostřednictvím toho i o matematiku. Společně pojmenovat vlastnosti fraktálů (nekonečná délka a zároveň konečná plocha). Inspirovat žáky k samostatné tvořivé práci při vymýšlení nových tvarů.

Pomůcky:

Tabule, nakopírované papíry formátu A4 se čtvercovou (vzdálenost uzlových bodů 0,5 cm) a trojúhelníkovou sítí (rovnostranné trojúhelníky, vzdálenost uzlových bodů 1 cm) pro každého žáka, psací potřeby. Eventuálně promítací zařízení propojené s počítačem s programem GeoGebra.

Formy:

Žáci pracují individuálně v lavicích paralelně s komunikací ve třídě a prací na tabuli.

Charakteristika:

„Dnes se seznámíme s trochu jinou stránkou matematiky, budeme si kreslit různé obrázky a pak spolu budeme mluvit o jejich vlastnostech."

Rozdám do prvních lavic hromádky papírů se čtvercovou sítí a dám pokyn, ať si je pošlou dozadu.

„Teď máme před sebou všichni čtverečkovaný papír a chci, abyste si vzali tužku, propisku nebo pastelku, to je jedno, a někam doprostřed, tak abyste měli okolo dost místa, si nakreslili čtverec, který bude mít rozměry 9x9 čtverečků."

Sám ho nakreslím od ruky na tabuli a počkám, až bude mít většina třídy hotovo.

„Teď budeme potřebovat, abychom měli strany rozdělené na tři stejné díly. Kolik čtverečků bude mít jeden takový díl? (čekáme na kolektivní odpověď ze třídy) *Ano, správně, tři. Kdo mi to udělá s tímhle čtvercem, co je na tabuli?* (vyzveme dobrovolníka nebo někoho vybereme)*"*

Počkám, až budou mít hotovo všichni i dobrovolník, co byl u tabule.

„A teď se všichni prosím podívejte, co s tím čtvercem provedeme. Tady k tomu prostřednímu dílu přilepíme takhle jeden menší čtverec."

Nad prostřední díl dokreslím čtverec 3x3.

„*To samé uděláme i na zbývajících třech stranách.*(…) *A teď udělejte to samé i na svých čtvercích.*"

Čekám, jestli se někdo ze žáků nezeptá, jestli budeme takto pokračovat dál. Pokud ne, zeptám se, zda by bylo možné takto pokračovat a jestli ano, tak jak.

Pokud se nikdo neozve, pokračuji dál:

„A teď to samé uděláme i na těch čtyřech menších čtvercích, které jsme k tomu velkému přidali. Ví někdo, jak budou velké, ty co budeme přidávat? (...) Ano, jeden čtvereček. Kdo mi to přijde nakreslit na tabuli?"

Podobnou strategií budu postupovat dál, dokud bude mít přidávání graficky smysl.

(…)

V tomto bodě je dobré promítnout tyto obrazce vytvořené v programu GeoGebra, kde je lze vymodelovat daleko přesněji a s více iteracemi, než je na tabuli nebo na papíře technicky možné. Obrazec také můžeme plynule přibližovat a hlavně měnit počet iterací.

„A teď budeme trochu počítat. Začali jsme s jedním čtvercem. Pak jsme jich přidali kolik? Ano, čtyři. A těch menších jsme přidali kolik? Správně, dvanáct. Odhadl by někdo, kam bychom mohli přidat další a jak by byl velký? A kolik by jich bylo?

(dále rozvíjíme diskusi o počtu přidávaných čtverců – Jak budou velké? Budou se tak dlouho zmenšovat, až zmizí nebo budeme stále něco přidávat? Uměli byste to spočítat, aniž byste si to kreslili? Atd.)

„Teď si představte, že byste to chtěli obejít dokola. Na začátku jsme měli jen jeden čtverec, kolik bychom museli ujít, kdybychom šli přesně po okraji? („4 krát 9, 36 čtverečků, 4 strany") Kdybychom chtěli obejít dokola tu první fázi, kdy jsme přidali čtyři menší čtverečky, kolik ujdeme? Víc, nebo míň? A kolik? A teď bychom chtěli obejít i ty malé čtverečky..."

(dále rozvíjíme diskusi o obvodu obrazce v jednotlivých fázích – Jak bude velký? Bude se zvětšovat do nekonečna nebo se někde zastaví? Uměli byste to spočítat, aniž byste to počítali prstem v obrázku? Atd.)

Pro lepší názornost můžeme výsledky zapisovat do tabulky, která může žákům pomoci dojít k zobecnění.

Tabulka 1:

Fáze obrázku	Počet čtverců	Obvod obrazce	Obsah obrazce
1	1	4	1
2	1+4	4+8/3	1+4/9
3	1+4+12	4+8/3+24/9	1+4/9+12/81
4	1+4+12+36	4+8/3+24/9+72/27	1+4/9+12/81+36/729
5	1+4+12+36+108	4+8/3+24/9+72/27+216/81	1+4/9+12/81+36/729+108/6561

„Když se podíváte na tuhle tabulku, co myslíte? Když budeme opakovat přidávání do nekonečna, co se stane s počtem čtverečků? Ano, ten také poroste do nekonečna. Co obvod? Ano, ten také poroste. Když zkrátíme zlomky, tak vidíme, že přidáváme vždy stejné číslo, proto se růst nezastaví. Ale co obsah? Tam přidáváme stále méně a méně a šlo by najít hranici, přes kterou bychom se nedostali. Jako důkaz stačí, že se ten obrazec vejde na tuto tabuli a ani kdybychom kreslili dál a dál, tak bychom se na tu tabuli stále vešli. Nepřipadá vám to trochu podivné? Máme obrazec, o kterém víme, že jeho obvod je nekonečný, ale plocha, kterou zabírá je nekonečná.“

(Prostor pro diskuzi)

Opakuji na stejném principu v trojúhelníkové síti (Kochova vločka) nebo můžu použít princip odebírání z obrazce (Sierpińského trojúhelník/koberec).

(…)

„Na konec vám zadám domácí úkol. Nakreslete mi do zítra na papír obrázek na stejném principu. Zkuste se ale zamyslet, jestli by se nedaly použít i jiné tvary. My jsme spolu kreslili čtverce a trojúhelníky, ale myslíte, že by to fungovalo třeba i s kruhem? S elipsou? Obdélníkem?“

Očekávané výstupy: Především vzbuzení zájmu o tuto vizuální stránku matematiky a následně i o její další oblasti. Nadprůměrní jedinci doufejme dojdou k závěrům, ke kterým se tato úloha snaží navádět – totiž, že tyto obrázky mají nekonečný obvod, ale ohraničují konečnou plochu.

3.2.2 2. hodina: Srovnání vlastností kružnice, pobřeží ostrova a fraktálů.

Cíl hodiny:

Představit jednu z možností odvození Ludolfova čísla, které se často ve školách vůbec neodvozuje, ale bývá předkládáno jako hotová a nic neříkající konstanta.

Ilustrovat jev, kterému se ve vyšších ročnících přiřadí pojem limity v nevlastním bodě, ale který by touto grafickou metodou měl být pochopitelný žáky na druhém stupni.

Stanovit metodu měření křivek poukázat na problémy a nepřesnosti při měření délky obvodu nerovných objektů, které často musíme nahradit nějakým jejich modelem (v našem případě uzavřenou lomenou čarou). Takový model skutečné délce odpovídá jen přibližně a míra přesnosti závisí na technických možnostech při měření. Tento jev pak zpětně žákům pojmenujeme jako aproximace.

Vystihnout rozdíl mezi kružnicí, jako příkladem „hladkého“ geometrického objektu, a nepravidelnou křivkou, která reprezentuje pobřeží ostrova. Obojí pak dát do souvislosti s fraktálními obrazci, které jsme kreslili v první hodině. (Druhá část této úlohy je totiž variací na problém měření délky pobřeží, kterým se zabýval Richardson a později Mandelbrot, viz kap. 2.1.2.2)

Pomůcky:

Tabule, tabulové kružítko a pravítko, psací potřeby, promítací zařízení, Excel nebo jiný tabulkový kalkulátor schopný vykreslit graf.

Formy:

Kolektivní, práce probíhá zčásti na tabuli a účastní se jí postupně většina třídy, zčásti jsou výsledky promítány na obrazovku a komentovány.

3.2.2.1 První část: Měření kružnice a odvození Ludolfova čísla

Charakteristika:

„Nejdřív mi prosím seberte domácí úkoly, všichni si je prosím podepište, já si je prohlédnu a ty nejzdařilejší dostanou malou jedničku/plus (Cokoli, co pedagog v konkrétní třídě používá jako motivační prostředek.)*.“*

Narýsuji na tabuli kružnici. Na poloměru celkem nezáleží, ale čím větší, tím lepší.

„Tady je kružnice a nás by zajímalo jak je dlouhá. Dovedl by mi to někdo změřit jen s pomocí toho, co tady máme k dispozici (tj. kružítko, pravítko)*?"*

Schválně zdůrazním slovo „změřit". Může se totiž stát, že se z třídy ozve *„To spočítám podle vzorce. Dvě pí er."* nebo něco podobného. Na to zareaguji tím, že chci délku změřit, ne vypočítat (*„Představte si, co dělali lidé, když takový vzorec neznali nebo ještě neexistoval."*). Chci žáky dovést k postupu, kdy se kružítkem kružnice „obkrokuje" (Pro potřeby komunikace ve třídě zavádíme termín „krok" jako délka úsečky určené hroty kružítka.) a změří se obvod n-úhelníka, který tímto do kružnice vepíšeme. Ten může být buď pravidelný (pokud bychom například v kružítku nechali poloměr měřené kružnice), nebo nepravidelný, ale chceme žákům předvést, že na pravidelnosti při tomto způsobu měření nezáleží.

„No tak když se nikdo nehlásí, tak budu muset někoho vybrat. Pojď třeba ty, zkusíme to spolu vymyslet. Poradím ti, zkus využít kružítko. Nech ho tak jak ti ho dávám a přemýšlej, jak by se s ním dala zjistit délka téhle kružnice."

(...)

„Takže tohle je naše první měření. Ať to máme přehledné dáme si to do tabulky, kterou jsem si na to v počítači připravil."

Tabulka 2:

Průměr kružnice:					
Pořadí měření	Délka kroku	Počet kroků	Zbytek	Obvod	Obvod/průměr
1.					
2.					

(Pozn.: Všechny délky uvádíme v centimetrech. „Zbytek" je délka jedné kratší strany mnohoúhelníka, která nutně vznikne, pokud nám náhodou délka kroku nevytvoří pravidelný mnohoúhelník.)

První aproximaci délky kružnice tedy získáme jako „délka kroku" krát „počet kroků" plus „zbytek". Tento vzorec ale žákům nediktujeme, necháme je, aby si tento vztah odvodili (a případně formalizovali) sami.

„Kdo chce jít další? Budeme postupovat stejně, ale teď si zmenšíme vzdálenost, kterou máme 'v kružítku'."

Takto provedeme 4 až 5 měření tak, aby při posledním z nich byla délka kroku nejmenší a aproximace tím pádem nejpřesnější.

„A na začátku hodiny jste tady někdo mluvil o nějakém vzorci, připomenete mi, jak zněl? Ano, 2πr. Tak to nakonec zkusíme také použít a srovnat s tím, co jsme naměřili. 'R' známe, to je poloměr neboli polovina průměru kružnice, co je to teda to 'π'? (To najdu v tabulce! 3,14!) No ale já se neptal kolik to je, já se ptal CO to je. Nevíte? Tak to teď zjistíme."

Vypočteme tedy délku kružnice s pomocí vzorce pro obvod kruhu a tabulkové hodnoty čísla π a uvedeme je jako poslední řádek tabulky.

„Víte co, já zkusím to číslo π napsat tady do posledního sloupce, nepřipadá vám, že se tam docela hodí, k těm číslům, která jsou nad ním? A i když jsme to počítali podle vzorce, jakou myslíte, že bychom potřebovali délku kroku, abychom dostali takovýhle výsledek? Nenapadá nikoho nic? Zkusím tam napsat nulu, třeba to vyjde hezky."

Pak pomocí programu necháme vykreslit graf. Jeden jako závislost obvodu na délce kroku a druhý jako závislost poměru obvodu a průměru na délce kroku. Oba grafy sice ukazují to samé, protože se liší pouze o dělení kladnou konstantou (průměr), což v tomto případě změní jen sklon grafu, ale to pravděpodobně nikdo ze žáků v tomto věku neuvidí.

„Tady teď máme graf, jak se měnila délka, kterou jsme u kružnice naměřili, v závislosti na tom, jak jsme zmenšovali délku toho našeho kroku. Nepřipadá vám na tom něco zajímavé?"

Cílem by měl být závěr, že délka uzavřené lomené čáry se se zkracující délkou kroku zvětšuje, ale nikdy nepřesáhne jistou horní mez, kterou je právě délka kružnice (stejně tak vypočtená hodnota π). Žáky tím směřujeme k pochopení, že délku kružnice bychom byli schopni změřit naprosto přesně jen v případě, že bychom měli k dispozici nekonečný počet nekonečně krátkých kroků.

„Vidíte, proto jsem tady k té vypočítané délce kružnice napsal délku kroku nula. Ono totiž to číslo π nespadlo z nebe, to musel někdo odvodit, aby tím ušetřil ostatním lidem na světě čas, aby ho nemuseli odvozovat sami, ale aby ho mohli rovnou použít ve vzorci. Číslo π totiž velice přesně udává poměr obvodu a průměru kružnice a my jsme si tady ukázali jeden ze způsobů, jak ho lze odvodit. Museli bychom měřit samozřejmě mnohem přesněji, aby se náš výsledek dal použít ve výpočtech, ale chtěl jsem vám ukázat princip. Kdyby to totiž technicky šlo, tak bychom mohli zmenšovat délku kroku jak bychom chtěli, ale pořád by se nám ta délka kružnice zvětšovala a s ní i hodnota π. Co je ale důležité, nikdy by

nepřesáhla nějakou horní hranici. Číslo π je totiž jedno z mnoha takzvaných 'iracionálních čísel'. To jsou čísla, která mají za desetinnou čárkou nekonečně mnoho číslic, a nelze je ani zapsat zlomkem. Takže naprosto přesnou hodnotu π bychom získali, kdybychom mohli mít krok dlouhý nula centimetrů, ale mohli bychom jich udělat nekonečno, což jak jisté tušíte není proveditelné. Proto se dělá to, co jsme tady dělali a říká se tomu cizím slovem 'aproximace', což znamená přiblížení. Chceme se co nejvíc přiblížit hledané hodnotě, ale zároveň víme, že nikdy to neuděláme úplně přesně.“

Data si v počítači uložíme, abychom je mohli použít v následující hodině.

„Chápete aspoň trochu, o co tady běží? Zkuste si to ještě rozmyslet do zítra, kdy si ukážeme jak toto souvisí s těmi obrázky, které jsme si malovali včera. A kdo chce získat plus/malou jedničku/bod navíc, zkuste vymyslet nebo někde zjistit jiný způsob, jak bychom mohli π vypočítat.“

Výstupy:

Pochopit, kde se vzalo číslo π a co reprezentuje, a že při měření nerovných objektů se jejich skutečné délce dokážeme pouze přiblížit. Ukázat, že kružnice i další objekty Euklidovské geometrie mají konečnou délku že naší metodou měření se k ní pouze blížíme.

3.2.2.2 Druhá část: Měření pobřeží ostrova

Charakteristika:

„Takže teď jsme zkusili změřit délku kružnice. Zjistili jsme, že čím přesněji měříme, tím naměříme větší délku, která ale nepřesáhne nějakou horní hranici. Teď zkusíme to samé, ale nebudeme měřit kružnici, ale zkusíme změřit něco, co nemá tak hezký, pravidelný tvar. Napadá mě třeba ostrov. Byl někdo z vás někde na dovolené?

(Prostor pro odpovědi žáků)

Nikdo? Tak mi řekněte ze zeměpisu, jaké znáte ostrov, stačí jeden. (Korsika, Kréta, Mallorca, Grónsko, Havaj, atd. - jeden z nich vybereme) *Já tady najdu na internetu jeho mapu, tady ji promítnu a ty, který jsi tam byl* (nebo kdo ho řekl)*, mi ho pojď překreslit na tabuli. Zkus vystihnout co nejvíc zálivů a poloostrovů, ale nemusí to být za každou cenu co nejpřesnější, hlavně, abychom ho z toho poznali. A neboj se, nakresli ho pěkně veliký. (...) Tak, tady máme náš ostrov, zkusíme ho změřit stejnou metodou, jako jsme to dělali* *s kružnicí. Budeme si to psát do stejné tabulky, akorát už tam nebudeme mít průměr, ani nebudeme počítat číslo π. Kdo se hlásí jako první?*"

Postupujeme stejně jako v první části hodiny, provedeme 4 až 5 měření, přičemž délku kroku postupně zkracujeme. Na závěr opět necháme vykreslit graf závislosti délky křivky na délce kroku a zkusíme ho porovnat z grafem měření kružnice. Pokud jsme měřili přesně a model ostrova byl dostatečně nepravidelný, graf ostrova by měl být mnohem strmější než u kružnice.

„U kružnice jsme si řekli, že tím jak budeme zkracovat krok, tak její délka poroste, ale nepřesáhne přes nějakou hranici. Myslíte, že by se to samé stalo, kdybychom měřili skutečný ostrov?"

(Prostor pro odpovědi žáků.)

„Představte si, že jste třeba tyranosaurus a váš krok měří pět metrů a chcete obejít ostrov přesně dokola. Pak že jste pštros a váš krok měří dva metry. Pak člověk, pak pes, pak kočka, pak myš, pak brouk, pak mravenec, pak blecha a nakonec třeba bakterie. Čím jste menší, tím samozřejmě děláte kratší kroky a tím pádem jich musíte udělat víc, ale taky vaše trasa bude jiná. Zatímco tyranosaura nezajímá kámen, který měří dvacet centimetrů, takový mravenec ho musí pěkně poctivě obejít. Tím pádem se naměřená délka bude také stále zvětšovat, ale na rozdíl od kružnice to nevypadá, že by se ten růst chystal někde zastavit. Takže máme ostrov, který sice má ohraničenou plochu, ale jeho obvod je vlastně nekonečně dlouhý, nepřipomíná vám to něco?"

(Prostor pro odpovědi žáků)

„Ano, stejné vlastnosti měly ty obrázky, které jsme si kreslili první hodinu. Tohoto faktu si kdysi všiml pán jménem Richardson, ale přišlo mu to natolik zvláštní, že o tom nikomu neřekl. A o několik let později to v jeho zápiscích objevil jiný pán jménem Mandelbrot, který takové tvary, které jsou nekonečně dlouhé, ale ohraničují konečnou plochu, nazval 'Fraktály' a díky tomu způsobil v geometrii a potažmo v celé matematice revoluci. V příštích hodinách si o těch fraktálech řekneme něco teoretického, pustíme si o nich dokument a na závěr si ukážeme jedno moc zajímavé použití."

Dále rozvíjíme diskusi o fraktálech, před koncem hodiny dáme námět na pozorování a diskusi ve třídě pro následující hodinu – zkuste najít fraktály ve vašem okolí (příroda, domov, zkuste hledat na internetu)

Výstupy: Uvědomit si, že ve skutečnosti u přírodních objektů nelze hovořit o vlastnostech jako například délka, protože je vlastně nekonečná. Volíme pouze určité měřítko, které odpovídá situaci (satelitní mapa – velké měřítko, člověk na pobřeží ostrova – malé měřítko)

3.2.3 3. hodina: Teoretická stránka fraktální geometrie

Cíl hodiny:

Dát žákům výklad o matematické stránce fraktálů a ukázat, že se nejedná jen o pěkné obrázky, ale o regulérní objekt studia v matematice. Vyjmenováním jednotlivých druhů fraktálů inspirovat žáky k novým přístupům v domácí práci, kterou pak porovnáme s domácím úkolem z první hodiny.

Pomůcky:

Tabule a křída, promítací zařízení

Formy:

Výklad u tabule, žáci si píší do sešitů

Charakteristika:

Krátce zopakuji závěry z předchozích dvou hodin.

„Včera jsme spolu zjistili, že ostrov nebo i další přírodní objekty se chovají podobně jako ty obrázky, které jsme si kreslili první hodinu, totiž že mají často nekonečný obvod nebo povrch, ale konečnou plochu respektive objem. Na samém konci jsme si řekli, že odborně se jim říká fraktály a že je vymyslel jistý pan Mandelbrot. Tedy, abych se vyjádřil správně, on je nevymyslel, fraktální principy existovaly samozřejmě dávno před ním, ale on byl první, kdo je začal brát vážně a začal je vědecky zkoumat. Propojil matematické fraktály, o nichž se doposud hovořilo jako o „matematických monstrech“, a problematiku měření přírodních objektů a díky tomu formuloval metody, díky nimž dokážeme taková „monstra zkrotit“ a zároveň pomocí nich můžeme matematicky modelovat přírodní tvary. Mandelbrot měl docela zajímavý život. Pocházel z rodiny litevských židů, narodil se ale v Polsku, odtamtud se s rodiči přestěhoval do Francie, ve které přežil druhou světovou válku, pak tam vystudoval, poté krátce žil ve Švýcarsku a nakonec se přestěhoval do USA, kde dosáhl největších úspěchů a zůstal tam až do konce života. Příští hodinu si o něm pustíme dokument, kde bude mluvit o tom, co ho k jeho objevům přivedlo.“

(Podle časových možností podám krátký výklad o Mandelbrotově životě, viz kapitola 2.1.2.1)

„Vezměte si teď prosím sešity a nadiktujeme si nejjednodušší fraktální objekty, které v matematice máme, některé z nich už známe, takže si je jenom pojmenujeme. Nejdříve vám musím ale vysvětlit pár pojmů.

Prvním z nich je 'soběpodobnost'. To znamená, vlastnost nějakého objektu, že jeho část má stejný tvar jako celý objekt, pouze v jiném měřítku. To je také základní vlastnost, kterou u fraktálů pozorujeme.

Dále pak máme pojem „soběpříbuznost“. Na rozdíl od soběpodobnosti, část soběpříbuzného objektu je celku pouze nějakým způsobem podobná, není jeho přesnou kopií jako tomu je u soběpodobných objektů.

Poslední pojem je 'iterace'. Iterace, to jsou ty jednotlivé kroky při tvoření fraktálů. Například, když jsme kreslili první hodinu ten čtverec, na začátku jsme měli obyčejný čtverec. První iteraci pak dostaneme, když přidáme první řadu menších čtverců. Druhou iteraci když přidáme další řadu a tak dále. Napište si za prvé: Cantorova množina“

Postupně proberu tyto fraktály: Cantorova množina, Kochova vločka, Sierpińského trojúhelník a koberec, Mengerova houba, Juliovy množiny, Mandelbrotova množina. U každého udám rok a vědce, který ho nadefinoval a vysvětlím stručně princip vzniku (viz kapitola 2.4.1). U všech promítnu obrázek nebo applet v GeoGebře. U Mandelbrotovy množiny pustím video z Youtube s jejím mnohonásobným zvětšováním.

„Tohle jsou tedy nejznámější matematické fraktály, ale samozřejmě jich existuje mnohem víc a od každého lez udělat nespočet modifikací. Teď když tohle všechno znáte, zadám vám znova stejný úkol, jako první hodinu, zase nakreslete fraktál, teď ale víte, jaké všechny možnosti máte, tak zkuste přijít s něčím originálním.“

<u>Výstupy:</u>

Znalost jednotlivých matematických fraktálů. Propojení teorie s úvodními hodinami. Oproti první hodině posun v kreativitě při plnění domácího úkolu.

3.2.4 4. hodina Fraktály v praxi a v přírodě

Cíl:

Ilustrovat přesahy matematiky do skutečného světa a tím motivovat žáky k jejímu studiu a samostatné práci.

Pomůcky:

Promítací zařízení, reproduktory

Formy:

Kolektivní práce s asistencí učitele, Sledování videozáznamu

Charakteristika:

„Nejdřív mi prosím seberte domácí úkoly, všichni si je prosím podepište, já si je prohlédnu a ty nejzdařilejší dostanou malou jedničku/plus (Cokoli, co pedagog v konkrétní třídě používá jako motivační prostředek.)*.“*

„Pamatujete si na toho pána, o kterém jsem vám minule povídal? Pamatuje si někdo jak se jmenoval a čím je významný? Byl to pan Mandelbrot a vymyslel nové odvětví geometrie. Pamatujete si, o co tam šlo?“

(Prostor pro odpovědi žáků)

„Ta jeho geometrie se zabývá takzvanými fraktály, to jsou ty obrázky, jak jsme si je kreslili první hodinu, co mají nekonečný obvod a ať je zvětšujete jak chcete, tak pořád vypadají stejně. Ukázali jsme si, že takovým fraktálem je například i pobřeží ostrova. Včera jsem vám ukázal, jaké fraktály jsou v matematice nejstarší a nejjednodušší. Pustím vám teď pár ukázek z jednoho dokumentárního filmu, který je o fraktálech natočen. Nejdříve uslyšíme mluvit samotného Mandelbrota o tom, jaký měl vztah k matematice a jak k popsání fraktálů dospěl.“

Pustím ukázku z filmu „Fraktály – Hon na skrytou dimenzi“, který je k dispozici na YouTube (čas: 5:47-18:44), kde sám Mandelbrot, ale i další vědci, hovoří o problémech, které ho k objevení fraktální geometrie vedly.

„Zajímavé je, že Mandelbrotovi se spíš líbila grafická stránka matematiky, za což ho jeho učitelé, ale i spolupracovníci často kritizovali nebo přehlíželi.“

(Prostor pro diskusi)

„Dál pustím pár ukázek o různých použití fraktálů v praktickém životě.“

Podle časových možností pustím úryvky z dokumentu „Fraktály – Hon na skrytou dimenzi“. Každou ukázku nejdříve okomenutji, aby žáci předem tušili, o co se bude jednat.

Počítačová grafika (krajiny) – čas: 2:10-5:45

Fraktální antény – čas: 30:42-34:10

Počítačové animace (Star Wars) – čas: 26:25-28:10

„Kdybyste měli chuť, můžete si ten film pustit sami na Youtube, snadno ho tam najdete. Trvá skoro hodinu a je tam toho mnohem víc, než jsme si tady stihli pustit. Nakonec si tady spolu ukážeme, jak se fraktály dají použít v hudbě a budete ji tvořit vy sami. Já si tady otevřu takový program, který umí psát noty a umí nám je pak zahrát. Vybereme si tady obsazení nástrojů, jako má smyčcový orchestr, to znamená dvoje housle, violy, violoncella a kontrabasy. A teď budeme potřebovat vybrat čtyři tóny. Víte kolik je tónů? Je jich dvanáct, ale pro začátek budeme vybírat jenom z jedné stupnice, nejjednodušší je C Dur, to znamená tóny Cé, Dé, É, Ef, Gé, Á, H. Potřebujeme teď vybrat čtyři a záleží nám i na pořadí.“

Postupně vyvolám čtyři žáky, z nichž každý řekne jeden z tónů, které postupně napíšu na tabuli. (Např F, H, E D)

„A teď si vzpomeňme, co bylo hlavním principem u těch fraktálních obrázků.“

(Prostor pro odpovědi žáků)

„Šlo tam o to, že i když jsme je zvětšovali, tak vypadaly pořád stejně. Třeba jsme měli velký trojúhelník, k němu přilepené menší trojúhelníky, na nich ještě menší a tak dále. Ale v hudbě nemáme trojúhelníky, máme jen tóny. Tak co kdybychom zkusili dát do jednoho nástroje tyhle čtyři tóny jako dlouhé noty, do dalšího je zkrátit na polovinu, do třetího na čtvrtinu a tak dál? Jakou znáte nejdelší notu?“

(Prostor pro odpovědi žáků)

„Nejdelší je celá nota, ta trvá čtyři doby. Takže tyhle naše čtyři tóny napíšu v celých notách do kontrabasů a několikrát to zkopíruji za sebe. Když rozdělíme celou notu na polovinu, co získáme? Ano správně, půlovou, proto se tak jmenuje. Takže ty samé tóny napíšu pro violoncella v půlových a zase je zkopíruji. Akorát to udělám tak, aby začínaly o čtyři taky později, abychom slyšeli, jak se připojují. Dál pro violy to budou čtvrťové, zase

zkopíruji. Do druhých houslí osminové a v prvních houslích šestnáctinové. Vždycky je od sebe posunu o čtyři takty, ať hezky slyšíme, jak se ten zvuk postupně zahušťuje. Na konec napíšu ještě jeden akord, aby to bylo hezky ukončené, tím vás nebudu zatěžovat, jak jsem na něj přišel. Tak a teď si to pustíme, ne?"

Postup můžu opakovat s jinými tónovými motivy, nechám žáky samotné určovat pořadí nástrojů atd. Na závěr tohoto tématu pohovořím o hudebním stylu minimalismu (kterému se občas výstižněji říká repetitivní hudba), uvedu ukázky hudebních děl opravdových skladatelů (Philip Glass, Steve Reich, Petr Wajsar, viz kapitola 2.4.3.2)

3.3 Vyhodnocení realizace scénářů ve výuce

3.3.1 Přepisy rozhovorů s komentářem

Téma fraktálů si přímo říká o to, aby bylo pojato interaktivně, s velkým prostorem pro diskuzi a tvořivou činnost. To je ale možné jen v případě, kdy je na tento styl práce třída zvyklá a učitel má dostatek času se daným tématem zabývat. Já jsem ale byl v situaci přesně opačné – před touto konkrétní třídou jsem stál poprvé, takže vzájemné zvyknutí si nějakou chvíli probíhalo, a byl jsem omezen prostorem čtyř vyučovacích hodin, během kterých jsem musel stihnout probrat všechnu připravenou látku. Navíc, pokud učitel učí v dané třídě již nějakou dobu, žáci jsou zvyklí na jeho projev a na jeho formulace. Může se tudíž vyjádřit i celkem nepřesně a žáci přesto pochopí, co měl na mysli. Já jsem tuto výhodu neměl, proto jsem zvolil přístup, kdy jsem mluvil především já, snažil jsem se pojmy vícekrát opakovat a formulovat je více způsoby. Prostor pro diskuzi jsem pak dával jen v klíčových okamžicích, které jsem následně přepsal z audiozáznamu.

Jsem si vědom, že následující přepisy mohou působit zdlouhavě a že by se na první pohled jevilo jako logičtější umístit je mezi přílohy. S ohledem na snadnější vytváření komentářů a hlavně také s ohledem na vyšší komfort a přehlednost při čtení (čtenář nemusí listovat tam a zpět mezi komentáři a přepisy) ale záměrně volím umístění přepisů přímo v textu práce.

V následujícím popisu průběhu výuky používám souběžně strategii komentáře situací i s přihlédnutím k tomu, že jsem dosud ve studiu neměl předmět Didaktika matematiky. Komentáře obsahují poznámky vzhledem k probíhající situaci, vzhledem k dílčím cílům, dále analýzu rozhovoru ve vztahu k jeho matematické podstatě, didaktické poznámky, případně reflexi.

Vysvětlivky: U – já v roli učitele, Ž – žák, T – třída (odpovídalo stejně více žáků zároveň), **K** – komentář (tučné označení je voleno proto, aby byla na první pohled odlišena situace ve třídě a její hodnocení)

3.3.1.1 1. hodina

Začali jsme s kreslením kvadratické Kochovy vločky do čtvercové sítě. Po první iteraci jsem vyzval jednoho žáka, aby na tabuli rozdělil strany menších čtverců na třetiny. To pro něj nebyl problém, ale rozdělil i stranu, kterou menší čtverec přiléhá k většímu. Ještě si evidentně neuvědomoval, že tvoříme spojitý obrazec (pro úsporu času jsem na tabuli plochy čtverců nevybarvoval). To jsem vzápětí upřesnil. Většina třídy byla schopná odhadnout, že můžeme přidat další sadu čtverců, jeden ze žáků se ale otázal

Ž: *„Ven nebo dovnitř?"*

K: To může svědčit jednak o jeho nepozornosti, když jsem říkal, že tvoříme souvislý obrazec, ale také o jeho kreativním myšlení, že se snaží prozkoumávat všechny možnosti.

Na nápadně položenou otázku

U: *„A co bychom s tím mohli udělat teď?"*

jsem dostal hromadnou odpověď

T: *„Přidat další menší čtverečky."*

K: Upozornil jsem, že už to ve čtverečkové síti nebude vycházet podle linek a že budou muset třetiny odhadnout, podle odevzdaných prací to pro ně ale nebyl problém.

Dál jsem se ptal

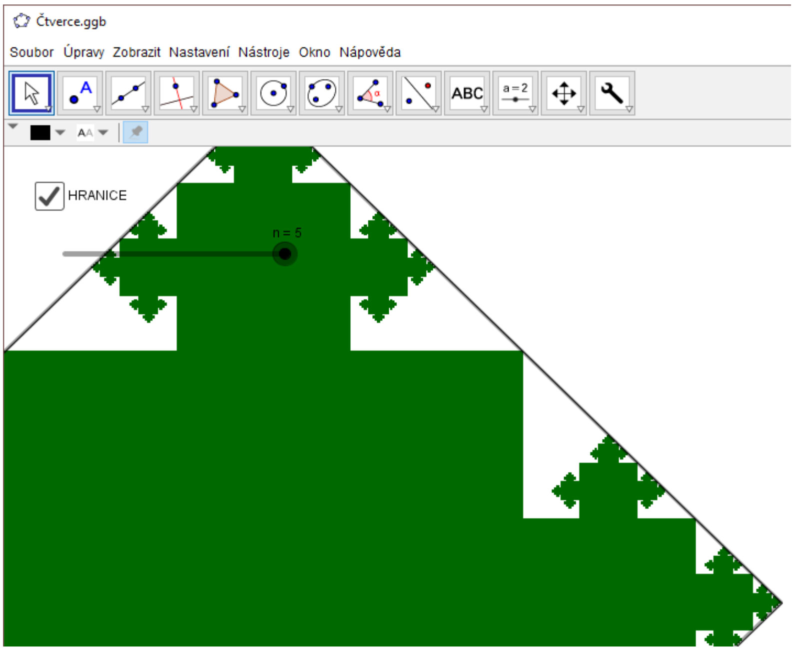
U: *„Mohli bychom pokračovat ještě dál?"*

T: *„Ano."*

U: *„A zastaví se to přidávání někdy?"*

T: *„Ne."*

K: Princip nekonečného zmenšování a přidávání tedy pochopili ihned.



Obrázek 34

Pro ilustraci jsem promítl na televizi nad tabulí ten samý fraktál v Geogebře, kde jsem si ho připravil až do páté iterace s možností měnit jejich počet. Poté jsme přikročili k tvoření tabulky (viz kapitola 3.2.1) a počítání obsahu a obvodu nakresleného obrazce.

K: Zmínka o počítání vzbudila ve třídě mírnou nelibost, což se dá u dané věkové kategorie očekávat. Odpověděl jsem tedy na to tím, že se jedná jen o „jednoduché počítání na prstech“ a že stále jde hlavně o vizuální stránku.

Nakreslil jsem na tabuli tabulku, nadepsal jednotlivé sloupce a vyzval dobrovolníka, aby vyplnil první sloupec.

U: *„Kolik jsme měli na začátku čtverců?“*

Ž: *„Jeden.“*

U: *„Ano, správně. V druhém kroku jsme jich měli kolik?“*

Ž: *„Dva.“*

U: *„Dva?“*

Ž: *„Ne, čtyři.“*

U: *„Kolik? Čtyři? To sice ano, ale celkem jich bylo?“*

Ž: *„Pět.“*

U: *„Ano, ale napiš to jako jedna plus čtyři, ať vidíme, jak jsme je postupně přidávali. V dalším řádku tedy budeme mít jeden čtverec plus čtyři menší plus?“*

Ž: *„Devět krát čtyři… Ne...“*

T: *„Dvanáct.“*

U: *„Ano, dvanáct. V následujícím řádku tedy jedna plus čtyři plus dvanáct plus?“*

T: *„Třicet šest.“*

Ž: *„Třicet šest.“*

U: *„A když si teď představíme, že máme na všech ještě další řadu menších čtverečků?“*

Ž: *„No...“*

T: (smích)

U: *„To už se špatně počítá, radši si představ, že na každý z těch třiceti šesti přidáme tři menší čtverečky, kolik to je?“*

Ž: *„Sto osm."*

U: *„Ano, děkuju, posaď se. A když si představíme, že jdeme dál, tak v dalším kroku bychom přidali kolik?"*

T: *„Tři sta dvacet čtyři."*

U: *„Ano, takže čím jdeme dál, tím přidáváme větší počet, tudíž logicky počet těch čtverečků poroste až do nekonečna. Pojďte mi prosím někdo další napsat obvod. My si řekneme, že ten čtverec má stranu dlouhou..."*

T: *„Devět* (čtverečků)*... Čtyři a půl* (centimetru)*..."*

U: *„Ano, to sice ano, ale my máme v matematice tu skvělou možnost, že můžeme říct, že něco je úplně jinak, než je to na papíře. Takže abychom nepočítali se zbytečně velkými čísly, tak si můžeme říct, že strana toho čtverce není devět, ale je* (rovna) *jedna* (jednotka)*. Takže obvod toho prvního čtverce bude čtyři. A v dalším kroku je délka strany čtverce..."*

Ž: *„Jedna třetina."*

U: *„Ano a za každý čtverec vlastně jednu třetinu* (jednotky) *z celkového obvodu ubereme, ale tři třetiny* (jednotky) *k němu přidáme. Tedy přidáme dvě třetiny za každý z těch čtyřech čtverců. Celkem tedy?"*

Ž: *„Osm třetin."*

U: *„Ano, takže v druhém řádku bude obvod čtyři plus osm třetin. Na další řádek to zas opíšeme, ale tentokrát jsme přidali dvanáct čtverců, ale strana každého z nich byla* (dlouhá)*?"*

Ž: „*Třetina a z toho třetina...*"

U: „*Ano, třetina třetiny, tedy...*"

Ž: „*Devítina.*"

U: „*Ano a za každý jsme jednu ubrali, ale tři přidali. Bylo jich dvanáct, takže dvakrát dvanáct devítin, to je dvacet čtyři devítin."*

(…)

K: Stejným způsobem jsme společně vyplnili celou tabulku, vždy tak, že jsme nechali součty rozepsané, abychom viděli, kolik jsme v jednotlivých iteracích přidávali. Schválně jsem uvedené součty nesčítal, protože by vedly na zlomky s velkými čísly, což většinou žákům základní školy nahání hrůzu. Proto (ale i z časových důvodů) jsem usoudil, že bude jednodušší interpretovat, *o kolik* se dané veličiny mění, než *jak* se mění. Z průběhu dalšího popisu je zjevné, že práce s tabulkou a odhalením závislosti jim nedělala problémy.

U: *„Řekli jsme si, že počet čtverečků, když půjdeme do nekonečna, zastaví se někdy?“*

T: *„Ne.“*

U: *„Správně, pořád to poroste, stále jich bude víc a víc. A co obvod, zastaví se někdy?“*

T: *„Ne!“*

U: *„A dokážete říct proč ne?“*

Ž1: *„Tam jakoby nebude nikdy úplná nula, takže i kdyby tam byla, já nevím nula, nic miliarda, tak…“*

U: *„A jak to víš, že tam nikdy nebude nula?*

Ž2: *„Protože se vždycky jakoby odečte ten obvod toho vnitřního a přičte se* (...) *vyplní se…* (nesrozumitelná nahrávka)“

K: Zde je vidět, že oba žáci chápou, co se v obrázku děje, ale chybí jim buď terminologie, nebo formulační schopnosti ke srozumitelnému popisu situace. S touto skutečností se v následujících hodinách lze setkat ještě několikrát, může to být způsobeno také tím, že žáci nejsou zvyklí často v hodinách diskutovat, a proto těžko hledají slova, když jsou najednou tázání. Nejspíše díky všeobecné neoblíbenosti zlomků a měnícím se číslům nebyli žáci schopni odhalit fakt, že se přidávané zlomky nezmenšují, ale že se přičítá stále stejné číslo. Z časových důvodů jsem je na způsob řešení navedl, po tom už reagovali automaticky.

U: *„No úplně jednoduchý důkaz, podle kterého víme, že se obvod nikdy nezastaví, spočívá ve velice 'náročné' technice, které se říká krácení zlomků.“*

T: *„Jé! No jo. To je přece jasný!“*

U: *„Podívejte, poprvé jsme přidali osm třetin, po druhé jsme přidali dvacet čtyři devítin. A kolik je dvacet čtyři devítin?“*

Ž: *„Osm třetin.“*

T: *„Ahá, no jo.“*

U: *„Ano, osm třetin, pokud to zkrátíme třemi. Když se podíváme dál, kolik je sedmdesát...“*

T: *„Osm třetin, osm třetin!“*

U: *„Ano, a takhle bychom mohli zkrátit všechny zlomky. Takže vidíme, že pokaždé přidáváme stejné číslo, ani se to nezmenšuje, takže proto se bude obvod stále zvětšovat. Ale co obsah? Myslíte, že ten taky poroste do nekonečna?“*

Ž: *„Tak asi ne, když se tak ptáte.“*

T: *„Jo. To jo.“*

U: *„Já se můžu ptát na cokoli, ale...“*

T: (mumlání)

K: Klasická strategie „Kdyby to tak nebylo, tak byste se na to neptal“, forma poznámky odpovídá věku. Princip konvergujícího součtu nekonečné řady na první pokus neodvodili, příčinu toho však nelze jednoznačně určit. Pokusil jsem se je tedy lépe navést.

U: *„Ten se právě zastaví. Kolik jsou čtyři devítiny, když to dám na desetinné číslo?“*

Ž: *„Nula celá, čtyři čtyři čtyři...“*

U: *„Tak, nula celá, čtyři periodických.* (napsal jsem na tabuli) *Kolik je dvanáct jedenaosmdesátin?“*

Ž: *„Nula celá, jedna čtyři osm periodických.“*

U: *„Takže jsme podruhé přidali menší číslo. Takhle bychom přidávali pořád míň a míň, až bychom zjistili že pro obsah máme nějakou horní hranici, přes kterou se nedostaneme. Ukážeme si to na obrázku.* (Otevřel jsem znovu GeoGebru) *A já si tady můžu zapnout zobrazení hranice* (čtverec, který se středy stran dotýká vrcholů původního čtverce)*, to je takovýhle čtverec kolem dokola a teď začnu postupně přidávat. A myslíte, že ty malé čtverečky někdy přelezou přes tuhle hranici?“*

T: *„Ne.“*

U: *„Ano, nepřeleze. I když to zvětším takhle do detailu, podívejte… A takže si shrňme, k čemu jsme vlastně došli: máme obrázek, který kdybyste chtěli nakreslit dokola, tak ho nenakreslíte, protože jeho obvod je nekonečně dlouhý a nemůžeme přece nakreslit nekonečně dlouhou čáru. Ale máme plochu, která je omezená, není to trochu paradox?*

Když máte například kružnici, má konečný obvod a (ohraničuje) konečnou plochu a obojí můžeme přesně změřit nebo spočítat. Ale tady ne.“

K: Rekapitulaci sice mohli provést sami žáci, nejsem si však jist, zda strukturovaně tak, aby mohli dál reagovat. Proto jsem ji zformuloval sám. Během toho pár žáků přikyvovalo, ale zbytek třídy byl potichu zřejmě proto, že porovnávali svou vnitřní řeč s tím, co slyšeli ode mě. Doufal jsem, že je tímto paradoxem ohromím, ale buď jim připadal natolik logický a pochopitelný, že jim nestál za řeč, nebo ho nepochopili a nechtěli to dát najevo.

Dále jsme stejným způsobem iterovali rovnostranný trojúhelník. Během toho, co byla jedna žákyně u tabule a kreslila druhou iteraci, jiná se zeptala.

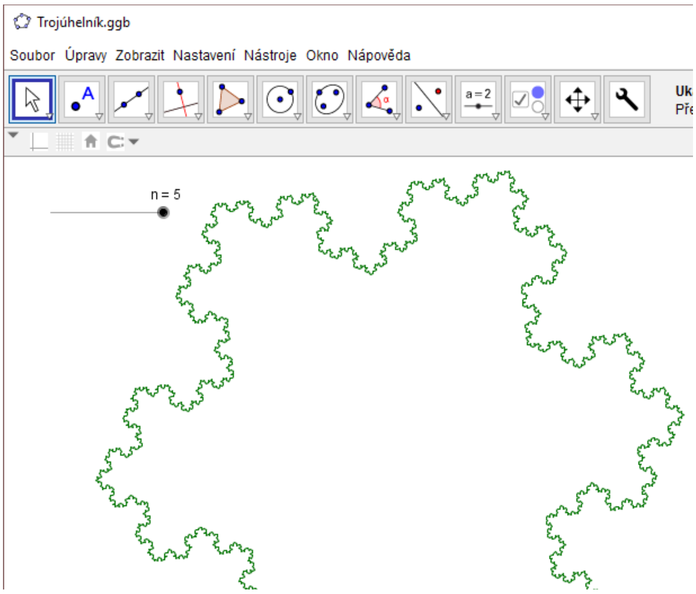
Ž: *„Ale na nich už nebudem dělat malý, ne?“*

U: *„Můžeme, proč bychom nemohli?“*

Ž: *„A jako všude? Já jsem myslela...“*

K: Žákyně nedokázala zobecnit zavedený princip přidávání a s užitím analogie aplikovat i na trojúhelníky. To je možné i proto, že se s trojúhelníkovou sítí setkala poprvé.

Vytvořili jsme také stejným způsobem tabulku (viz kapitola 3.2.1) s vlastnostmi obrazce.



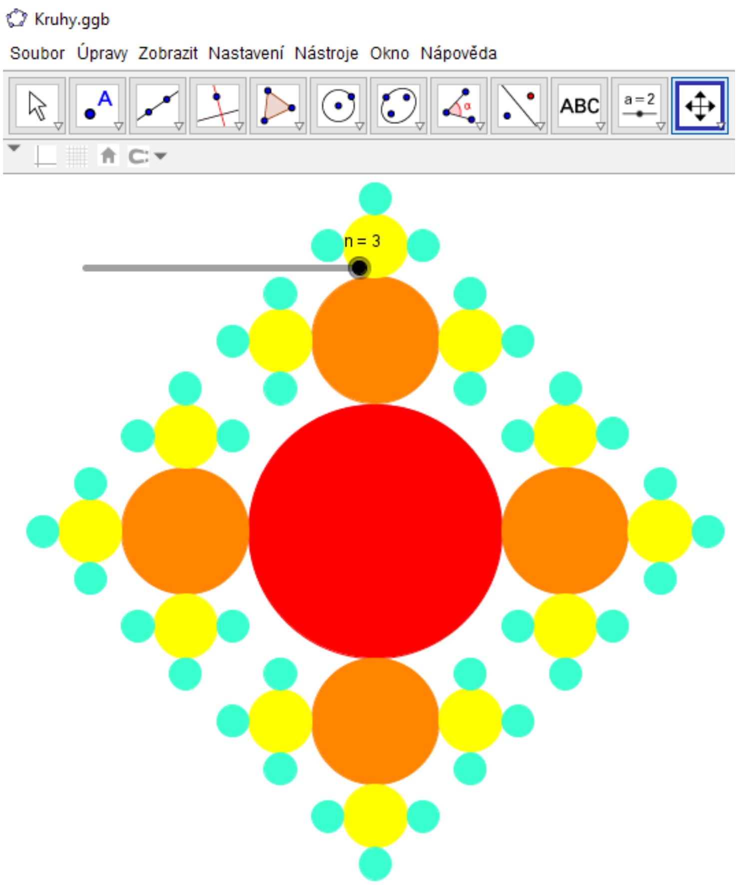
Obrázek 35

U: *„V klidu si to domalujte, já tady mezitím načrtnu tabulku. (...) Kdo už má hotovo, podívejte se tady na obrazovku, já to tady zase promítnu. (...) Na začátku máme jeden trojúhelník. Pak přidáme menší, pak zase menší a menší.“*

T (výkřiky): *„To je hustý. Jé, to je vločka. Ó, jé.“*

K: Vizuální stránka očividně zafungovala mnohem lépe než u čtverců. To proto, že trojúhelník je na orientaci jednodušší než čtverec. Záměrně jsem zvolil těžší úlohu jako první, protože pokud se obtížnost stupňuje, může žák získat pocit frustrace. Pokud naopak obtížnost úloh postupně snižujeme, žák získává pocit, že do problematiky proniká, že se zlepšuje. Z časových důvodů jsme poslední sloupec nevyplnili, bylo by to zbytečné, jelikož bychom trávili čas psaním něčeho, co už bylo žákům dávno jasné. Mohli jsme si totiž dovolit první zobecnění. Takovýto obrazec bude mít stejné vlastnosti jako fraktál složený ze čtverců v předchozí úloze – nekonečný obvod, ale konečný obsah – což pochopili a dovedli i formulovat.

Na konci hodiny jsem zadal domácí úkol, aby zkusili nakreslit do stejné sítě podobný obrazec, ale s tím, že se bude vykreslovat směrem dovnitř (jako Sierpińského trojúhelník), nebo ať zkusí iterovat nějaký vlastní tvar (pro inspiraci jsem v Geogebře promítl fraktál vzniklý spojováním kruhů).



Obrázek 36

3.3.1.2 <u>2. hodina – půlená třída</u>

<u>A) 1. skupina</u>

Na začátku hodiny jsem nechal vybrat domácí úkoly z předešlé hodiny (jejich scany a analýza viz kapitola 3.3.2.1) a po té jsem na tabuli narýsoval kružnici a zeptal se

U: *„Tady máme kružnici a teď si představme, že jsme třeba stavitelé a potřebujeme vědět, jak je ta kružnice dlouhá, kolik měří kolem dokola. Napadá někoho způsob, jak to zjistit?“*

Ž: *„Změřili poloměr a vypočítali* (obvod)*.“*

U: *„No a podle čeho vypočítali?“*

K: Asi by byla lepší formulace *„Jak byste to vypočítali?/Jak jste na to přišli?“*

Ž: *„*(Podle) *vzorečku.“*

U: *„No ale kde se vzal ten vzoreček?“*

Ž: *„No nevím.“*

U: *„Představme si, že jsme třeba v pravěku, že jsme neandrtálci a chceme mít hezké ohniště a neznáme žádné dvě pí er, nevíme, co to je pí. Jak to změříme?“*

Ž: *„Tak by se daly udělat jako takový... že by se to bralo jako že to je...* (gestikuluje směrem k tabuli)*“*

K: Z gestiky usuzuji, že se jednalo o neschopnost vybavit si potřebná slova, jež jsou uložena v pasivní slovní zásobě.

U: *„No pojď k tabuli to ukázat.“*

Ž: *„No já bych to nerýsovala, ale jako že by se ta kružnice...“*

K: Je motivovaná k řešení, ale zároveň se jí nechce vystupovat z kolektivu před tabuli.

U: *„Jen pojď k tabuli a předveď mi, jak bys to udělala.“*

Ž: *„No že by se to takhle 'zahranatilo'* (kreslí na tabuli)*, tady by se to spojilo, pak změřilo a vypočítalo.“*

K: Chybí jí ve slovní zásobě odpovídající termín, proto vymýšlí vlastní.

U: *„Takže bys do toho jakoby vepsala n-úhelník.“*

Ž: *„No...“*

U: *„Tak tady vydrž, uděláme to tak spolu."*

T: (smích)

U: *„Nejdřív si ale uděláme jednu věc a to, že si změříme poloměr… Tak poloměr je třicet centimetrů. A tady máš kružítko a zkus to s ním změřit. Nezapomeň si počítat, kolik dokola uděláš kroků."*

Ž: (měří) *„Devět* (kroků)*."*

U: *„Děkuju. A abychom v tom měli přehled, tak si na to uděláme tabulku* (viz kapitola 3.2.2.1). *V první sloupci bude číslo měření, v druhém sloupci délka kroku, v tomto případě to bylo nějakých dvacet a půl centimetru, ve třetím počet kroků, v tomto případě devět, a na konec obvod kružnice. Ten spočítáme tedy jak?"*

T: *„Devět krát dvacet a půl."*

U: *„Ano, devět krát dvacet a půl, což je?"*

T: *„Sto osmdesát čtyři a půl."*

U: *„Ano a tady na konci udělám ještě jeden sloupec, ve kterém bude záhadné číslo 'x', zatím nevíme, co to je. Víme, že průměr té kružnice je šedesát centimetrů. Spočítejte mi někdo na kalkulačce ten náš vypočítaný obvod děleno průměrem."*

Ž: *„Tři celé nula sedmdesát pět."*

U: *„Děkuju, já to tady napíšu do sloupečku pro číslo 'x'. Kdo se hlásí další na měření?"*

Tímto způsobem jsme provedli celkem čtyři měření s délkou kroku postupně: 20,5 cm, 11 cm, 38 cm a 8 cm. Technicky s tím nebyl problém, pouze v jednom případě se žák přepočítal o jeden krok, na což ho upozornila paní profesorka sedící v poslední lavici a v dalším si žákyně omylem v průběhu měření zvětšila délku kroku o jeden centimetr, proto jsme měření zopakovali.

K: V souvislosti s fyzickými změnami v tomto věku není bezproblémová manipulace s kružítkem žádnou samozřejmostí, většina žáků sice byla schopna při manipulaci s kružítkem nezměnit délku kroku, ale veškerou svou pozornost věnovali manuální stránce věci a nebyli při tom schopni počítat počet kroků. Provádět takovéto měření na počítači, například v GeoGebře, by podle mě nebylo šťastným nápadem, protože i pro uživatele zběhlého v práci s tímto programem by tato úloha byla poměrně pracná. Výhodou by jistě byla přesnost měření, nicméně jsem raději upřednostnil názornost a možnost žáků si měření „osahat“.

U: *„Na začátku jste říkali, že byste délku kružnice nějak vypočítali, kolik by to tedy bylo, když připustíme, že ten vzoreček známe?“*

T: *„Sto osmdesát osm celá, čtyři sta devadesát šest.“* (použili kalkulačku)

U: *„Takže to je podle vzorečku, napíšu to do posledního řádku. Tipne si někdo, jakou bychom museli mít délku kroku, abychom dostali přesně tenhle výsledek? Nikdo? Jak velkou bych musel mít vzdálenost v kružítku, aby ta čára nebyla hranatá, ale kulatá?“*

Ž: *„Co nejmíň.“*

U: *„A kolik je 'co nejmíň'?(...)Je to takhle: (délka kroku) téměř nula, (počet kroků) nekonečno. Musel bych udělat co nejvíce kroků co nejkratší, skoro nulové délky, abych kružnici přesně změřil.“*

Ž: *„Vždyť byste ale nikam nedošel.“*

U: *„To ne, v tom je právě ten paradox. Kružnice je totiž podle definice úplně hladká, ale my ji nemáme jak změřit. My se jí můžeme pokusit nějak přiblížit, ale pouze pokud bychom dokázali dělat kroky téměř nulové délky a měli bychom na to libovolně času, abychom jich stihli udělat nekonečně mnoho, tak až pak bychom kružnici přesně změřili.“*

(…)

K: Žáci nereagovali, nikdo z nich neprojevoval viditelný nesouhlas, ale ani souhlas. Zkusil jsem jim tedy pomoci jinou formulací.

U: *Kolik je číslo pí, které jsme použili v tom vzorci?*“

T: *„Tři celé čtrnáct patnáct...“*

U: *„Já to tady napíšu do posledního políčka tabulky a všimněte si. Co se děje s tím naměřeným obvodem? Jak zkracujeme délku kroku, stále se obvod přibližuje k té vypočítané hodnotě a to samé se děje s tím číslem 'x', to se zase blíží k pí. Ale ať bychom zkracovali sebevíc, nikdy se přes to nedostaneme, je to horní hranice. A tohle je tedy jeden ze způsobů, kde se vezme číslo pí. Někdo musel nejdřív provést takovéto měření, ale velice přesně a získal tím hodnotu, kterou vy už pak máte uloženou v kalkulačkách a můžete s ní počítat pouhým stisknutím tlačítka.“*

K: Jsem si vědom toho, že došlo ke zjednodušení situace, ale nikdo nepřipomínkoval, že neznáme celý neperiodický nekonečný desetinný rozvoj čísla Pí, a že se v kalkulačce pracuje pouze s určitým zaokrouhlením jeho hodnoty, tedy s racionálním číslem. Tento rozpor by stálo za to rozebrat v další diskusi mimo rámec těchto scénářů, já jsem se ale záměrně dopustil nepřesnosti, aby se můj výklad příliš nevětvil a nebyl pro žáky díky tomu nepřehledným. Stále nikdo nevykazoval známky pochopení, pokračoval jsem ale dál a doufal, že se jim vše spojí, až ukážu odlišnost v tomto ohledu u přírodních (a tedy i fraktálních) tvarů.

U: *Teď si zkusíme ukázat, jak tohle všechno souvisí s těmi obrázky, co jsme si malovali včera. Byl jste někdo na dovolené někde u moře na nějakém ostrově?"*

Ž: *„Na Kanárech."*

U: *„A jak se jmenoval ten ostrov?"*

Ž: *„Gran Canaria."*

U: *„Dobře, tak já ti tady zapnu počítač a najdi si na internetu mapu toho ostrova. (...) Máš? Tak nám teď tvar toho ostrova zkus nějak zhruba překreslit na tabuli."*

K: Bohužel se nám nepodařilo zprovoznit promítání obrazovky počítače na velkoplošnou televizi nad tabulí, žákyně si ale poradila a zvládla načrtnout tvar ostrova pouze z obrazovky notebooku. Koncentrace třídy klesla nicméně neopadl zájem o dění na tabuli.

U: *„A teď zkusíme změřit tento ostrov stejně, jako jsme změřili kružnici."*

Provedli jsme tři měření s délkou kroku postupně: 17 cm, 10 cm a 5 cm.

K: Díky členitosti tvaru ostrova bylo měření náročnější na pozornost a bylo potřeba kontrolovat, zda žáci vyznačují kroky ve správných průsečících s pobřežím ostrova.

U: *„Takže jsme si změřili délku (pobřeží) ostrova a vidíte, že nám vycházejí docela různorodé výsledky. Ten změřený obvod se se změnou délky kroku dost drasticky mění. A teď si zkuste vzpomenout na ty obrázky ze včerejška* (rychle jsem načrtl kvadratickou Kochovu vločku). *A včera jsme došli k tomu, že takovýto obrázek má nekonečný obvod. Představte si, že bychom na něj aplikovali stejnou metodu měření. Kdybychom si vzali do kružítka délku strany toho největšího čtverce, tak bychom naměřili délku čtyři. Kdybychom si vzali její třetinu, tak by nám délka rapidně vzrostla. A kdyby ten obrázek byl vymalovaný* *do nejmenších detailů, tak by rostla pořád, nehledě na to, jak malým krokem bychom měřili. Oproti tomu kružnice, u té jsme dnes zjistili, že máme horní hranici, přes kterou nám naměřená délka nepřeleze. A co si myslíte o tom ostrově, je podobnější spíš té kružnici nebo tomuhle obrázku."*

Ž1: *„Tomu obrázku."*

U: *„A proč myslíš?"*

Ž1: *„Protože kružnice je pravidelná, prostě geometrickej útvar, za to tohle je prostě..."*

Ž2: *„Tak záleží na tom, jak se to protne s tím obrázkem, protože tady sice by to mohlo bejt deset takhle, ale když se to protne až tam, tak se to jakoby usekne a tam vlastně taky..."*

U: *„Tím myslíš tedy podobnost mezi ostrovem a tímhle obrázkem?"*

Ž2: *„No jo, protože když se bere třeba těch deset* (jako délku kroku)*, tak se to protne až tady a tohle celý se jakoby usekne a nepočítá se to. To samý tady."*

K: Oba se snaží popisovat vzniklou situaci, kterou dobře chápou, ale nejsou zvyklí na formulaci vlastních teorií a jejich prezentaci.

U: *„Přesně tak, když máme kružnici, tak ta je krásně hladká. A i kdybychom ji třeba v počítači hodně zvětšili, tak je pořád stejně hladká. Za to tady by se nám (při zvětšování) objevovaly stále nové a nové čtverečky. A to samé by se stalo, kdybychom si třeba otevřeli Google Maps a měli bychom strašně přesnou mapu a zvětšovali bychom si ostrov. Jak to tady máme na tabuli, tak moc detailů nevidíme. Kdybychom si to zvětšili tak, aby tenhle poloostrov byl velký jako byl předtím celý ostrov, tak bychom najednou uviděli strašnou spoustu detailů, které jsme v tom předchozím měřítku vůbec neviděli. Pak si představte, že třeba jdete po pláži toho ostrova a chcete jít přesně po pobřeží. Tak když před vámi bude balvan velký půl metru, tak ho musíte obejít, to už je zase délka navíc. Ale to proto, že děláte kroky dlouhé půl metru a ne deset kilometrů, jako jsme dělali při měření. Takže co z toho plyne? Tady jsme měli nekonečný obvod, má ostrov konečný obvod? Nemá, není to trochu divné? Vždyť v mapách se normálně udávají délky pobřeží ostrovů..."*

K: Žáci začali pokyvovat, začínalo jim být už jasné, k čemu jsem celou dobu mířil.

U: *Já vám prozradím, že byl jeden pán, který se jmenoval Benoit Mandelbrot a ten se zabýval těmito obrázky, které nazval fraktály. Když máte frakturu lebky, co s ní máte? Nebo frakturu kosti? Máte ji zlomenou, že jo. Latinsky 'fractus' totiž znamená rozbitý, rozlámaný. No a ten pán vytvořil odvětví, kterému se říká fraktální geometrie, a i když začal u takovýchto jednoduchých obrázků* (čtvercových a trojúhelníkových fraktálů, které jsme kreslili na první hodině)*, tak zjistil, že stejné zákonitosti se vyskytují poměrně často v přírodě. Právě jedním z prvních problémů, na který narazil, byla nekonečná délka, která mu vyházela, když se pokoušel 'změřit ostrov'* (délka pobřeží). *A klíčem k tomu všemu je vlastnost které se říká soběpodobnost. To je vlastnost toho obrázku, že i když ho zvětšujete, tak vypadá pořád stejně, ta stejná struktura se v něm pořád opakuje. Když vezmete tenhle úsek a tenhle úsek, tak to vypadá přece stejně, až na zvětšení.*

K: Podobnost by měli žáci znát z nižších ročníků, z jejich reakcí ale bylo patrné, že si danou situaci s podobností nepropojili.

U: *„On objevil, že existují takovéhle tvary, kterýma se běžná geometrie vůbec nezabývala, vědci jimi opovrhovali a říkali, že jsou to nesmysly. Ale on zjistil, že to daleko víc odpovídá věcem okolo nás. Představte si strom, podívejte se třeba z okna. Kdybychom chtěli změřit délku větví, nedošli bychom k nějakému podobnému problému? No ano, a strom má stejnou vlastnost jako tenhle obrázek, když si vezmete samotnou větev, tak ta přece sama vypadá jako menší strom. Takže k tomu jsme dneska chtěli dojít, že většina objektů v přírodě nelze pojmout našimi metodami měření, a to že v geometrii máme kružnice a čtverce, tak to moc neodpovídá světu okolo nás. A tomu se říká fraktální geometrie a o tom si budeme povídat zítra a pozítří.“*

<u>B) 2. skupina</u>

Na začátku hodiny jsem nechal vybrat domácí úkoly z předešlé hodiny (jejich scany a analýza viz kapitola 3.3.2.1). Během sbírání úkolů se jedna žákyně přihlásila.

Ž: *„Já jsem se chtěla zeptat, proč jsme tohleto jako dělali, co to jako dokazuje nebo… My jsme strávili celou tu hodinu kreslením něčeho, ale nevyšlo pak najevo, co jsme to vlastně dokázali.“*

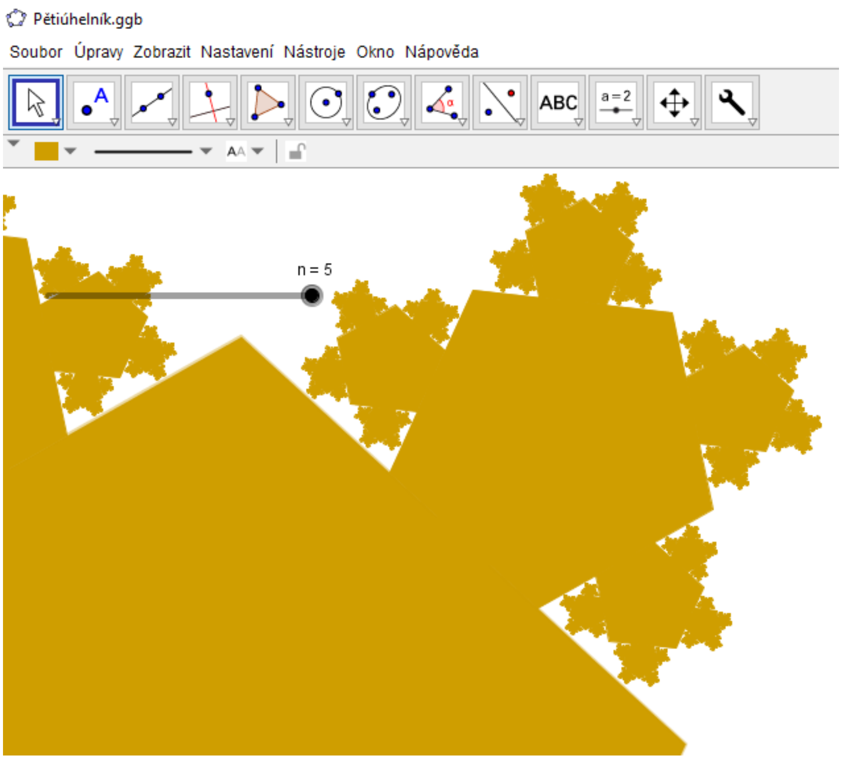
U: *„Včera jsme se s tím jenom seznámili a dneska na to navážeme.“*

Ž: *„Ale co to jako dokazuje?“*

K: Očividně úvodní hodina přitáhla její pozornost, ale nejasnosti ji zneklidnily. Proto se snaží za každou cenu získat vysvětlení celé problematiky tady a teď. Žákyně, která se takto ptala, byla autorkou nejlepšího domácího úkolu, princip soběpodobnosti a iterace tedy pochopila.

U: *„No to se právě dozvíte dneska."*

Pak jsem krátce zopakoval objekty z předchozí hodiny a závěry o jejich vlastnostech a pro inspiraci jsem v GeoGebře promítl fraktál vzniklý iterací pětiúhelníku.



Obrázek 37

Na závěr jsem dodal

U: *„A dnes na to navážeme a ukážeme si, jak takovéhle obrázky souvisí jak s normální geometrií, kterou se učíte ve škole, tak s přírodou a světem okolo nás.(...) Teď si prosím vezměte papír a kružítko a narýsujte si kružnici.(...) A já bych po vás chtěl, abychom zjistili, kolik ta kružnice měří."*

K: Jednotku měření jsem schválně neurčil, abych je nenaváděl na konkrétní metodu měření.

T: (bez odpovědi)

U: *„Nebo abych to řekl přesněji, chceme to změřit, ne vypočítat."*

T: *„Provázkem. Dát okolo provázek."*

K: Od paní profesorky jsem věděl, že to je způsob, kterým s nimi již v tercii (tedy přibližně před rokem) odvozovala π.

U: *„To je sice dobrý nápad, ale na tabuli bychom ten provázek těžko lepili, ještě nějaký jiný nápad? Zkuste třeba využít kružítko."*

Ž: *„No já bych to vzala, a když tam mám těch třicet, tak dám třicet tady, třicet tady a takhle dokola."*

U: *„Ano, to by šlo, ale musí tam být zrovna třicet* (poloměr kružnice byl třicet centimetrů)*, není to jedno, kolik v tom kružítku máš?"*

Ž: *„No to není."*

U: *„Jak to?"*

Ž: *„No musím přece vědět, kolik tam mám."*

U: *„To sice jo, ale musí tam být přesně třicet, nemůže tam být i jiné číslo?"*

K: Nejsou zvyklí na proměnlivou veličinu, dominantní zkušenost s celými čísly vyvolává potřebu mít vše popsáno konkrétním číslem. Práce více na úrovni algebry ještě není usazena. Není ani zřejmé, zda jsou zvyklí experimentovat a používat „přibližovací metodu.

Ž: *„Asi jo."*

U: *„Tak to uděláme v dalším měření. Teď si tam nech těch třicet a změř to prosím. (...) Tak děkuju, ještě nikam nechoď, ještě si to zapíšeme.* A*bychom v tom měli přehled, tak si na to uděláme tabulku* (viz kapitola 3.2.2.1). *V prvním sloupci bude číslo měření, v druhém sloupci délka kroku, ve třetím počet kroků, v dalším obvod kružnice a na konec si dáme takové záhadné číslo, u kterého si nakonec vysvětlíme k čemu je. Spočítáme ho jako obvod děleno průměrem. Průměr je dvojnásobek poloměru, to je doufám všem jasné. Délku kroku jsme měli teda třicet, počet kroků byl šest, obvod bude tím pádem..."*

Ž: *„Sto osmdesát."*

U: *„A to poslední číslo? Obvod dělený průměrem, tedy sto osmdesát děleno šedesáti?"*

Ž: *„Dva… Ne, vlastně tři."*

U: *„Ano, ale teď se podívejte, my jsme vlastně nezměřili obvod té kružnice, my jsme zjistili pouze délku téhle lomené čáry."*

T: *„Je to menší. Má to menší obvod než ta kružnice."*

U: *„To je pravda, tak abychom to zpřesnili, co můžeme udělat?"*

T: *„Tam to jako rozdělit. Zkrátit to."*

U: *„Ano, můžeme zkrátit krok. Tak pojď k tabuli a změř nám to kratším krokem."*

Provedli jsme celkem čtyři měření s délkou kroku postupně: 30 cm, 17 cm, 12 cm a 6 cm.

U: *„A vy jste na začátku říkali, že byste to nějak spočítali, tak jak spočítáme délku kružnice? Máme kružnici o průměru šedesát centimetrů, jak zjistíme její obvod?"*

Ž: *„Dvě pí er, to je sto osmdesát osm celé pět."*

U: *„Přibližně ano. Ale kdybychom chtěli tu kružnici změřit úplně dokonale, kolik bychom museli vzít do kružítka? Ta čára se přece od té kružnice vždycky trochu oddaluje, takže to měření je nepřesné..."*

Ž: *„Jeden milimetr… Teda co nejmenší vlastně!"*

U: *„No a jaké je nejmenší číslo které znáš? No přece nula, ne? Já teď napíšu něco, co vám možná bude připadat trochu zvláštní, ale vzápětí si to vysvětlíme. Abychom kružnici změřili naprosto přesně, museli bychom udělat nekonečno kroků o nulové délce."*

K: Žáci se dívali podezřívavě nebo nechápavě.

U: *Podívejte, i kdybychom měli úplně přesné měřicí přístroje, tak i kdybychom si vzali do kružítka ten jeden milimetr a zvětšili bychom si to pod mikroskopem, stejně by se ta kružnice trochu odchylovala od těch našich čar. Takže veškeré měření kružnic a kulatých objektů nebo křivek je vždy do určité míry nepřesné, vždy tvoříme jen nějakou reprezentaci toho skutečného objektu. A jak jste si mohli všimnout, to záhadné číslo 'x' které jsme počítali, vyšlo vždy nějak okolo hodnoty pí. To je totiž jeden ze způsobů, jak ho odvodit. To že vy máte pí v kalkulačce, to vůbec není samozřejmost. Nejdřív musel někdo provést takovéto podobné měření, velice přesně, a z něj pak vypočítal hodnotu pí. Bohužel, kvůli nepřesnosti tabule, křídy a pravítka, nám tyhle dva výsledky přelezly* (vypočítanou) *hodnotu* (obvodu)*, ale kdybychom měřili přesněji, stalo by se to, že čím bychom měli kratší krok, tím víc by se hodnota toho obvodu blížila té vypočítané hodnotě, ale nikdy by ji* *nepřesáhla, to samé hodnota pí. A když si vzpomeneme na ty obrázky ze včera, tam jsme řekli, že mají obvod nekonečně dlouhý, když bychom u nich zkracovali délku kroku, pořád bychom měřili nové čtverečky. Za to u kružnice ne, tam máme horní hranici, přes kterou se při měření nedostaneme. Je vám jasný ten rozdíl?"*

T: (souhlasné přikyvování)

K: Limitní délku kružnice a hodnotu π na rozdíl od první skupiny chápali lépe.

U: *„Poprosím někoho z vás o smazání tabule a vás ostatních se zeptám: byl někdo z vás na dovolené u moře na nějakém ostrově? Ano? Kde jsi byla?"*

Ž: *„Na Krétě."*

U: *„Výborně, tak pojď sem, já ti tady pustím počítač a nejdi prosím na internetu mapu Kréty.(…) Ano, děkuju. Pojď tady k tabuli a zkus tu Krétu překreslit tady na tabuli. Nějak zhruba, schematicky, ale ať je z toho poznat, že to je Kréta.(…) Děkuju. My teď s tou Krétou uděláme to samé, co jsme dělali s kružnicí. Změříme si její obvod tím, že ho 'obkrokujeme' kružítkem."*

Provedli jsme celkem tři měření s délkou kroku postupně 25 cm, 15 cm a 7 cm.

U: *„Ještě naposledy připomenu obrázky ze včerejška* (rychle jsem nakreslil Kochovu vločku) *a před chvílí jsme tady měřili kružnici."*

K: Nakreslil jsem ji na opačnou stranu tabule, užil jsem metodu kontrastu.

U: *„A z našeho měření Kréty vidíme, že s tím, jak zkracujeme krok, tak se ta délka pobřeží mění dost výrazně. U kružnice jsme si řekli, že pro obvod máme horní hranici, kterou při měření nepřesáhnu, ať si vezmu sebenepatrnější krok. U těch včerejší obrázků jsme si řekli, že máme nekonečný obvod, kdybych si vzal do kružítka délku strany, tak naměřím obvod tři a ty menší trojúhelníčky v měření úplně ignoruji. Kdybych si vzal třetinu délky strany, už změřím tyhle první výstupky, ale těch menších si zase nevšimnu. A takhle se zkracováním kroku k nule by se nám objevovaly stále nové a nové detaily a obvod by tak byl vlastně nekonečný. A co si myslíte ta Kréta* (ukazuji pobřeží)*? Je Kréta spíš jako kružnice nebo spíš jako tenhle obrázek?"*

Ž: *„Já bych řekla, že má nekonečnej obvod."*

U: *„A proč?"*

Ž: *„Protože kdybychom to přibližovali a přibližovali, tak by tam byly pořád nový a nový výběžky nebo tak něco.“*

K: Celkem přesný popis situace, stejný průběh jsme viděli v předchozí hodině v GeoGebře. Naposledy mluvící žákyně tedy zvládla přechod k nekonečnu bez problému.

U: *„Přesně tak. Vezměte si, že jsme měli docela dost hrubou mapu z počítače a ještě jsme ji hodně na hrubo překreslili na tabuli a stejně se nám ten obvod pořád zvětšoval. Kdybychom si tenhle poloostrov zvětšili, tak zjistíme, že je sám složitý dost a dost a spoustu těch detailů jsme při tom předchozím měření zanedbali. A kdybychom se postavili na pláž a chtěli ten ostrov přesně po jeho okraji obejít, tak když máme v cestě půlmetrový balvan, tak ho musíme obejít a ujdeme tak větší vzdálenost. Za to když měříme takovouhle mapu, tak nás nějaký balvan vůbec nezajímá. Takže jsme zjistili, že ostrov, který je docela běžný objekt na zemském povrchu, nemá žádnou měřitelnou délku, není to trochu divné?“*

K: O tomto způsobu měření mluví Mandelbrot ve své knize *Fraktály: tvar, náhoda, dimenze*. Ve druhé kapitole nazvané *„Kolik vlastně měří pobřeží Bretaně“* píše: *„Tak si třeba můžeme představit člověka kráčejícího podél pobřeží takovým způsobem, aby se od něj nevzdálil o více, než předepisuje nějaká vzdálenost η, a přitom se pohyboval po co nejkratší dráze. Pak začneme tuto maximální vzdálenost člověka od pobřežní linie stále více zkracovat. Člověka pak nahradíme myší, mouchou, atd.“* Tato interpretace ale vyžaduje chápat ostrov jako statický model a neuvažovat příliv a odliv či vliv eroze. Zvídavý žák by toto mohl poznamenat, je tedy potřeba s takovýmto „šťouráním“ předem počítat a vysvětlit mu, proč tento fakt zanedbáváme, jaké by z něj plynuly komplikace, případně toto téma rozvést v další výuce (např. geometrické transformace – *„Má ostrov za odlivu stejný tvar jako za přílivu, pouze zvětšený?“*). Nebo můžeme smazat pochybnosti například upřesněním, že náš ostrov má na pobřeží strmá skaliska a příliv a odliv na jeho tvar (v krátkodobé perspektivě) nemá vliv.

T: *„Jo, to je.“*

U: *„A tím se právě dostáváme k tomu, jak takovéhle obrázky souvisí s přírodou. Tyhle obrázky se začaly objevovat těsně před rokem 1900 jako matematické hříčky. Matematici si prostě nadefinovali obrázek tak, že se bude zmenšovat do nekonečna a zjistili, že ty vlastnosti jsou tak nějak mimo. Představte si, že jste na konci devatenáctého století a někdo vám řekne, že máte na papíře nakreslenou křivku, která je nekonečně* *dlouhá. Ještě o sto let dříve by ho za to upálili. Takže od toho začali dávat ruce pryč, říkalo se o tom že jsou to nějaká...“*

Ž: *„Ďábel.“*

U: *„...monstra nebo ďábelské obrázky. Až okolo roku 1960 přišel pán jménem Benoit Mandelbrot a začal tyto obrázky zkoumat znovu a bez předsudků a objevil, že mají spoustu společných vlastností právě třeba s ostrovy nebo se stromy. Podívejte se na strom. Kdybyste chtěli změřit dohromady délku jeho kmene a všech větví, tak byste také mohli měřit stále přesněji, až byste měřili každou jehličku zvlášť a stejně by se vám délka stále zvětšovala.“*

K: Uvědomuji si, že se jedná opět o určité zjednodušení...

U: *On to pojmenoval fraktály. Když máte frakturu kosti, tak co s ní máte?“*

T: *„Zlomenou.“*

U: *„Ano, 'fractus' je latinsky rozbitý nebo rozlámaný a on tím chtěl vystihnout fakt, že ty tvary nemají takové rozumné vlastnosti jako délka nebo povrch. Tím pak způsobil vlastně v geometrii velkou revoluci. To, že máme v geometrii kružnice, ty najdeme třeba v architektuře, ale neřeknou nám nic o přírodě, která tu byla dávno před námi a funguje mnohem lépe. Přišel taky na to, jak s takovými tvary počítat, jak je měřit a jak je modelovat a o tom si budeme povídat zítra.“*

K (srovnání): Skupiny byly rozdělené podle výuky jazyků. První skupina byli ruštináři, druhá němčináři. Podle popisu paní profesorky je v hodinách matematiky „šikovnější“ skupina ruštiny, moje hodina ale ukázala spíše opačný výsledek. Možná proto, že látka v této hodině byla hlavně o pochopení a představivosti, ale také, protože po první hodině jsem lépe věděl, jak se žáky pracovat a druhou hodinu jsem tedy vedl lépe.

3.3.1.3 3. hodina

Podle scénáře z kapitoly 3.2.3 byla tato hodina z většiny pouze teoretická a obsahovala výklad o jednotlivých druzích fraktálů a pojmů s nimi souvisejícími (soběpodobnost, soběpříbuznost, iterace atd.). Prostor pro reakce žáků tedy v hodině příliš nebyl, a proto nemá význam přepisovat moje monology, protože jejich obsah byl nastíněn už v kapitole 3.2.3.

Při vysvětlování pojmu 'iterace' jsem pro ilustrace vedle sebe kreslil jednotlivé iterace Kochovy vločky. Při druhé iteraci jsem mírně znejistěl a poodstoupil jsem od tabule, abych viděl, jestli kreslím správně. V tom se nahlas, přes celou třídu ozvala jedna žákyně

Ž: *„To nevadí, my to chápeme.“*

K: Principu vzniku obrázku rozuměla do té míry, že dokázala dopředu tvořit představy a byla si natolik jistá, že promluvila za celou třídu.

(...)

K: Velký úspěch pak mělo video se zvětšováním Mandelbrotovy množiny až do $2{,}1x10^{275}$ násobného zvětšení. Celá třída upřeně pozorovala barevné vlny na obrazovce a očividně byli překvapeni tím, že po pěti minutovém zvětšování se objevil znovu stejný tvar, jako na začátku.

U: *„Do příště vám dávám další domácí úkol, zadání je stejné, jako bylo na minule, to znamená nakreslit nebo namalovat libovolný fraktál. Teď když už znáte všechny možné varianty a možnosti, můžete zkusit přijít na něco originálního. Jako fraktál se může použít jakýkoli tvar, nemusí to být jen čtverce nebo trojúhelníky, můžete zkusit použít cokoli.“*

3.3.1.4 4. hodina

Začal jsem vybráním domácího úkolu z minulé hodiny, pak jsem zopakoval dosavadní látku.

U: *„V minulých hodinách jsme si povídali o geometrických objektech, o kterých už víme, že se nazývají fraktály. Jejich hlavní vlastností je takzvaná soběpodobnost, což znamená, že se v nich opakuje stále stejný tvar, pouze v jiném měřítku. To má pak za důsledek to, že u nich objevuje velice nezvyklé chování, například to, že některé z nich mají nekonečný obvod. A říkali jsme si také, že je popsal pán jménem Benoit Mandelbrot, teď si pustíme video, kde mluví o svém životě a o tom, co ho k jeho objevům vedlo.“*

Pustil jsem ukázku z filmu „Fraktály – hon na skrytou dimenzi“, kde Mandelbrot mluví o svých objevech.

U: *„Takže v této ukázce jsme viděli některé věci, které jsme dělali spolu, hlavně to měření pobřeží, viděli jsme, že měli stejný problém při měření délky pobřeží a že ho nakonec Mandelbrot dokázal modelovat pomocí fraktálů. Dál si pustíme tři ukázky, ve* *kterých uvidíme, kde se dají fraktály využít, kromě toho, že je najdeme v přírodě.(...) Jeden z těch příkladů má asi většina z nás v kapse...“*

T (překvapení): *„Jo fakt?“*

U: *„...a je to mobilní telefon. Na kolika různých frekvencích dokáže mobil komunikovat? Na spoustě, že ano. Máme tam volání, Wi-Fi, Bluetooth, LTE, 4G, 3G a tak dále. A každá tato technologie funguje na jiné frekvenci. A co potřebujeme, abychom mohli přijímat vlnění na nějaké frekvenci? Anténu. A aby ten mobil mohl přijímat takové množství frekvencí, potřeboval by na každou jinou anténu. Na každou frekvenci ta anténa totiž musí mít jinou velikost nebo jiný tvar. Až jednoho pána, který se jmenoval Cohen, napadlo udělat anténu ve tvaru fraktálu. A to si pustíme právě teď.“*

Z kraje ukázky jsem video pozastavil a zdůraznil jednu větu, kterou Cohen na videu právě řekl

U: *„Tohle si zapamatujte: 'Fraktály nejsou jen hezké, jsou i užitečné!'.“*

K: Srovnání mobilního telefonu obaleného anténami s dikobrazem žáky pobavilo, zjevně chápou praktičnost toho využití fraktálů.

(…)

U: *„Další využití, které si ukážeme, je v počítačové grafice a animaci. Pro počítač je velice jednoduché vykreslit fraktál, protože mu zadáme jen to vstupní pravidlo, podle kterého se mění a zmenšuje ten tvar, a dáme mu příkaz, ať ho stále opakuje. Kdybychom chtěli ten tvar vykreslit normálním způsobem, museli bychom každou čáru definovat zvlášť a to by zabralo hrozně velký objem dat, to fraktál, ten obsahuje pouze dvě informace. A jeden pán, který pracoval u Boeingu, chtěl na počítači nakreslit pozadí pro letadla, která animoval, a zjistil, že to pomocí fraktálů jde velice snadno.“*

(…)

U: *„Samozřejmě z dnešního pohledu to vypadá primitivně a nerealisticky, ale uvědomte si, že to bylo v době před pětapadesáti lety a byli to schopni vykreslit na jejich tehdejších primitivních počítačích. To byla tenkrát velká bomba! (...) Poslední ukázka, kterou si z tohoto filmu ukážeme, je také z počítačových animací. Viděl jste někdo Hvězdné války? V jejich třetím díle tam dva bojovníci spolu bojují na planetě, kde okolo nich stříká* *žhavá láva. Takže si ukážeme, jak se takový proud lávy animuje. Na začátku vezme jenom takový nezajímavý, úzký proužek a na něj aplikuje fraktál a výsledek uvidíte.“*

(…)

K: Po skončení ukázky se ve třídě rozběhne vzrušený šepot.

U: *„Takže to je pro dnešek z dokumentu všechno, kdybyste se na něj chtěli podívat doma, je snadno k najití na Youtube, jmenuje se 'Fraktály – hon na skrytou dimenzi'. Má skoro hodinu a je tam toho ještě mnohem více, ale to už dnes nestihneme. Místo toho si ještě ukážeme, jak se z nás díky fraktálům stanou hudební skladatelé.“*

T: *„Jé. Pane jo.“*

U: *„Já si tady pustím speciální program na psaní not, který nám dokáže pak i zahrát to, co si napíšeme. Máte všichni hudební výchovu, tak aspoň nějaké základy víte. Co k tomu budeme potřebovat? My jsme měli nějaký tvar, třeba čtverec a ten jsme zmenšovali. Tak to samé teď potřebujeme udělat s tóny. Jaké noty znáte?“*

T: *„Celá.“*

U: *„Ano, nejdelší nota* (ve smyslu notová hodnota) *je celá, pak je?“*

T: *„Půlová, čtvrťová, osminová, šestnáctinová...“*

Ž: *„Třiceti dvoutinová, šedesáti čtvrtinová a dál už to nedávám.“*

U: *„No, správně se říká čtyřiašedesátinová, ale nám bude stačit nejkratší šestnáctinová. A teď jako máme u čtverce čtyři strany, tak potřebujeme vybrat čtyři tóny, tak jaké znáte?“*

T: *„Cé. Há. Á. Fis.“*

U: *„Dobře, takže jsme vybrali čtyři tóny a teď začneme psát. Nejdřív vezmeme kontrabasy a napíšeme jim tyhle čtyři tóny v celých notách. Tak a teď to několikrát zkopíruji za sebe. A teď o čtyři takty dál vezmeme violoncella a ty samé tóny jim napíšeme v půlových hodnotách. A zase kopírujeme. Dál uděláme co?“*

T: *„Čtvrťové.“*

U: *„Ano, dáme ty tóny ve čtvrťových notách do viol. Pak v osminových do druhých houslí a nakonec jako šestnáctiny v prvních houslích.“*

K: Podle reakcí usuzuji, že kódování fraktálů do tónů bez problémů pochopili.

U: *„Na konec napíšu nějaký akord, doufám, že se tam bude hodit, neptejte se mě, jak jsem na něj přišel, to by bylo na dlouho. A co s tím uděláme teď?"*

T: *„Pustíme si to. Pusťte to!"*

(hraje hudba)

T: (chvilku hrobové ticho, pak potlesk)

U: *„A uvědomte si, že k tomu jsme nepotřebovali žádné hudební vzdělání, jen jsme mechanicky přes sebe dali ty samé tóny a ono to fungovalo. Chcete to zkusit ještě jednou?"*

T: *„Jó, jó."*

U: *„Tak vybereme nějaké nové čtyři tóny."*

T: *„É. Bé. G. Dis."*

U: *„Dobře, tak já to tam zase napíšu a pak pustíme si to."*

K: Těsně po dokončení zazvonilo. Při všech předešlých hodinách se ihned po zvonění začali žáci zvedat a musel jsem je opakovaně uklidňovat, pokud jsem chtěl ještě něco říct. Teď ale ne, po zvonění zůstalo hrobové ticho.

U: *„No tak už můžeme jít domů, nemusíme si to pouštět."*

T: *„To ne, pusťte to."*

U: *„Ale vždyť už zvonilo."*

T: *„To nevadí, pusťte to prosím."*

K: Tato aplikace fraktálů je ve finále zaujala natolik, že byli ochotni zkrátit si přestávku, aby slyšeli výsledek. Při každé nově ukázané aplikaci fraktálů byl ve třídě znatelný pocit překvapení a zaujetí. Závěrečná praktická ukázka, kdy jsme si dohromady zkusili práci s fraktály takřka vlastníma rukama, navíc pro většinu žáků na tak exotickém poli, jako je hudební skladba, zaznamenala největší úspěch, v což jsem při tvorbě scénářů doufal a k tomuto momentu jsem vlastně celý týdenní „didaktický oblouk" gradoval.

3.3.2 Vyhodnocení domácích úkolů

3.3.2.1 První domácí úkol

Vysvětlivky: Ch – chlapec, D – dívka

Struktura charakteristiky a hodnocení:

Iniciátor – s jakým výchozím tvarem žák pracujeme

„2D/3D“ – v kolika rozměrech fraktál je (někdy je hodnocení nejasné, buď lze fraktál chápat oběma způsoby, nebo by bylo potřeba záměr doplnit o diskusi s žákem)

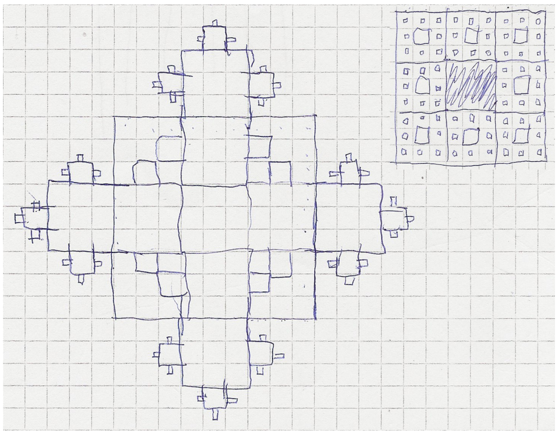
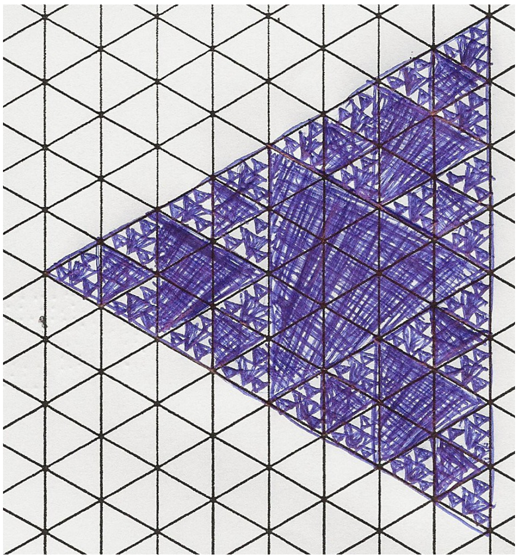
„Matematický/Přírodní“ – co fraktál zobrazuje, někdy je „přírodní“ chápáno i ve smyslu „nespadající mezi objekty školní geometrie“

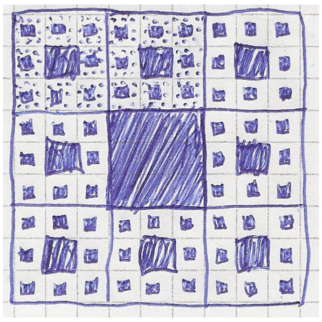
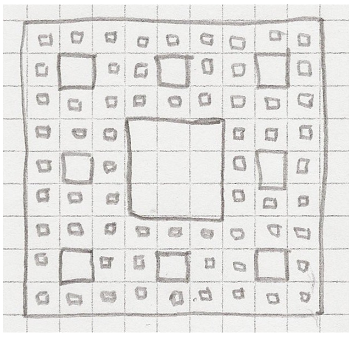
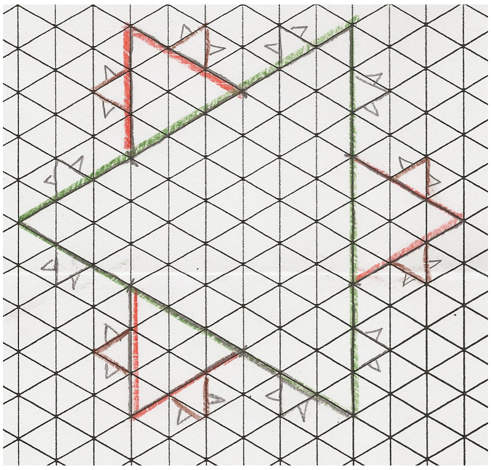
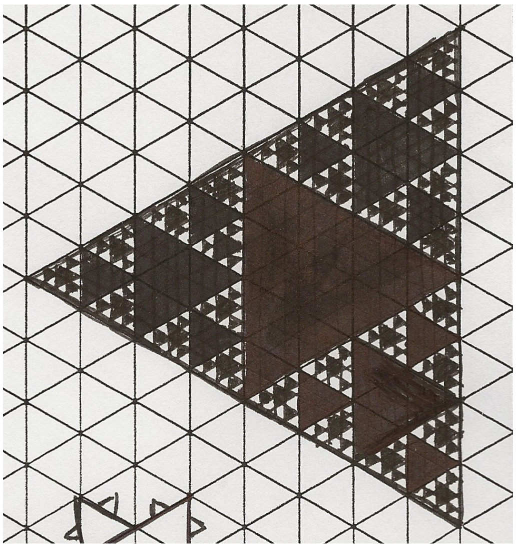
Počet iterací

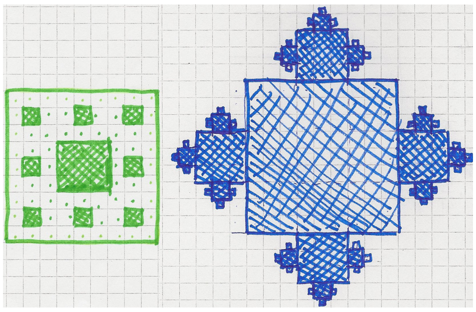
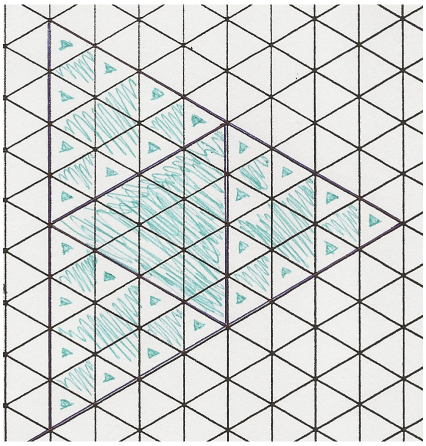
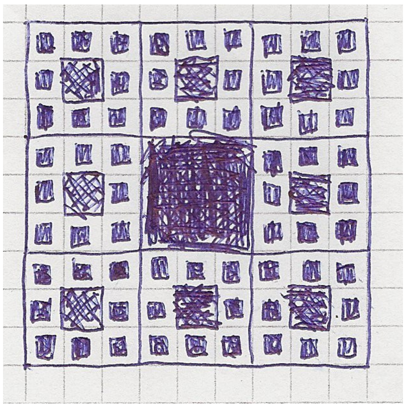
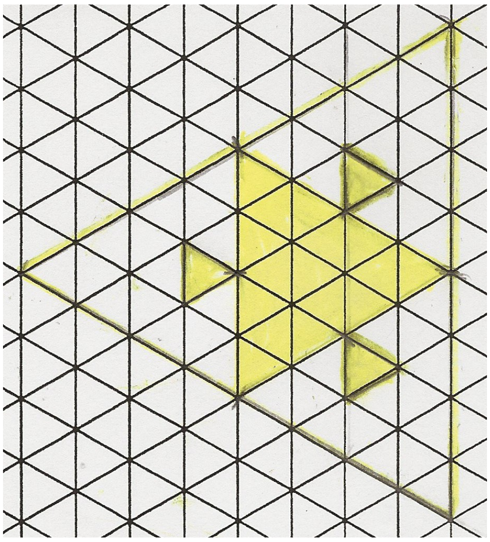
„Kompoziční/Dekompoziční“

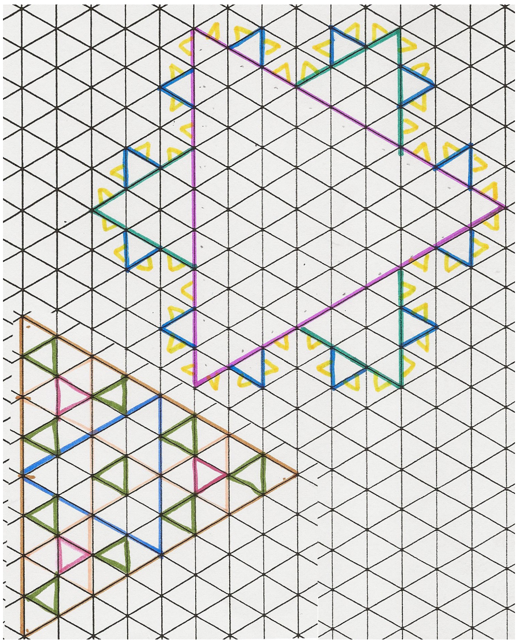
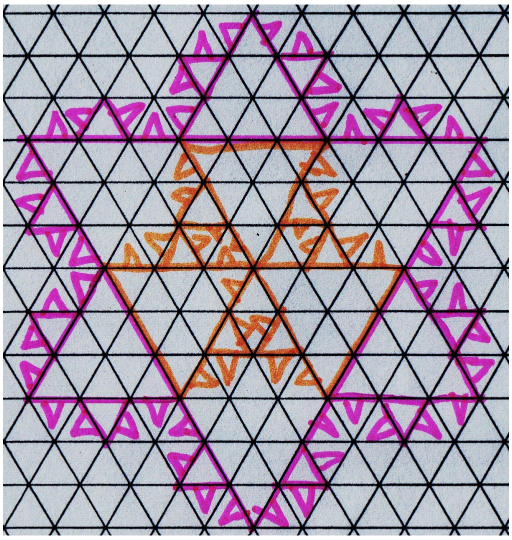
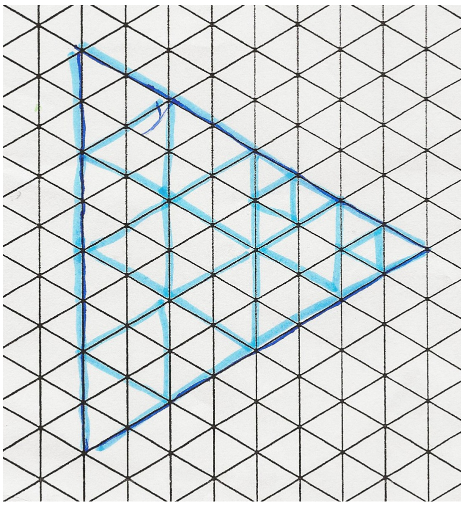
Hodnocení – klasifikace na principu známkování, dělení do tří kategorií: 1 – práce splňuje fraktální principy a je kreativní nebo pečlivě vypracovaná, 2 – práce splňuje fraktální principy, 3 – práce nesplňuje fraktální principy

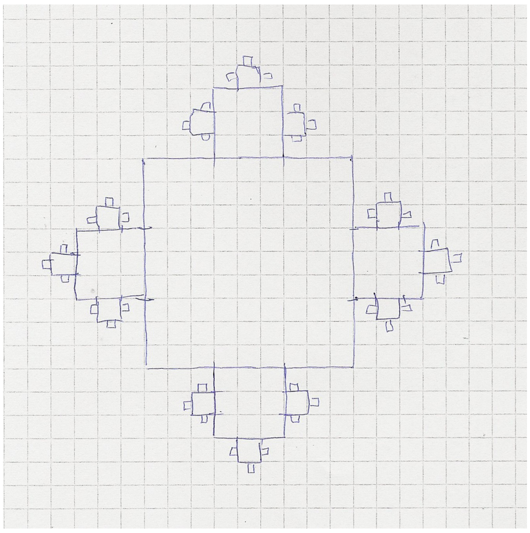
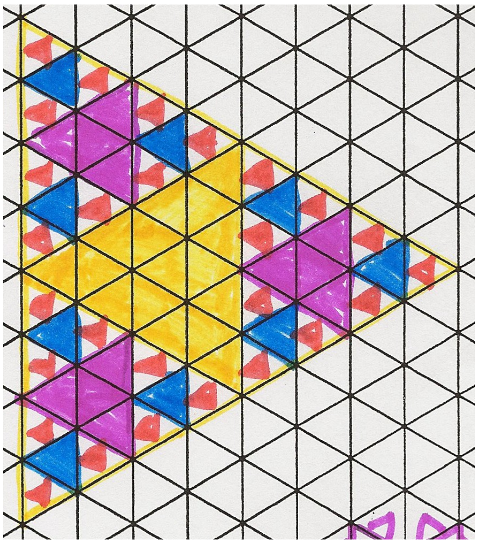
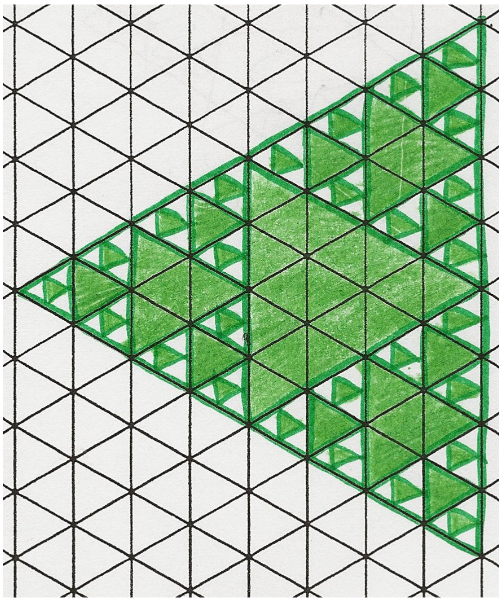
Tabulka 3:

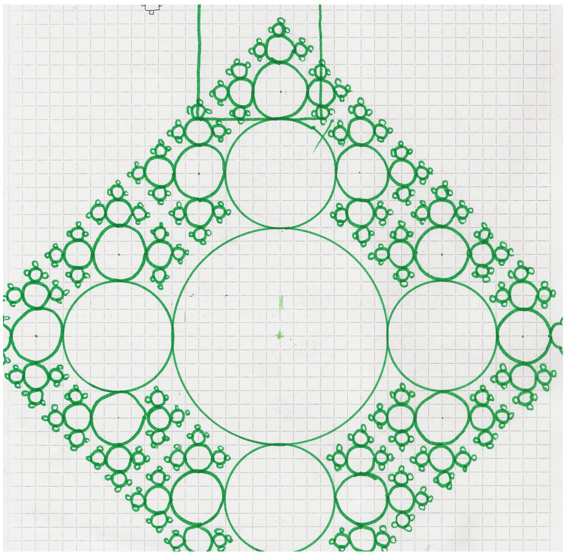
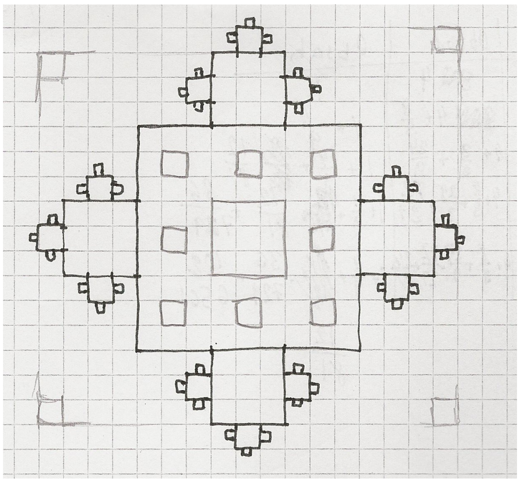
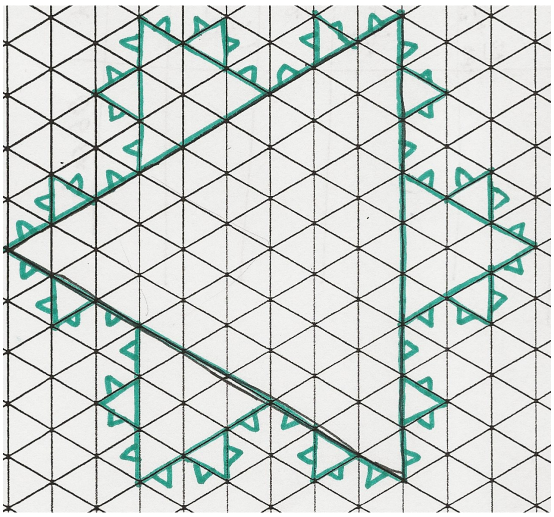
Kód	Charakteristika a hodnocení	Scan	Komentář
1Ch1	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		V levém obrázku si neví rady s vnitřkem čtverce (vnějšek jsme dělali v hodině), obrázek napravo je správně provedená třetí iterace Sierpińského koberce.
1Ch2	trojúhelník 2D matematický 5 dekompoziční **1**		Pátá iterace Sierpińského trojúhelníka.

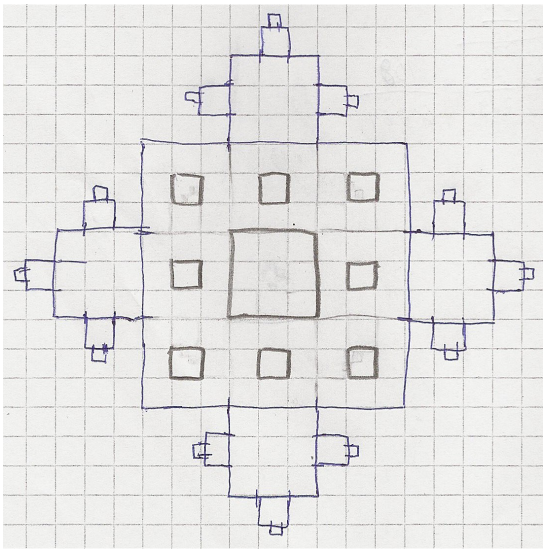
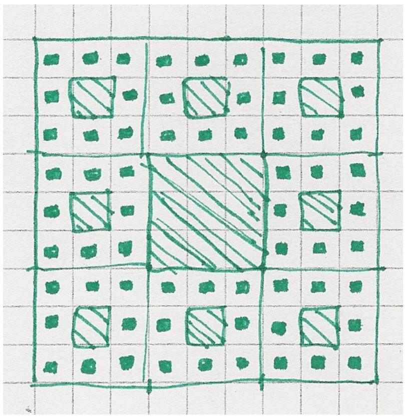
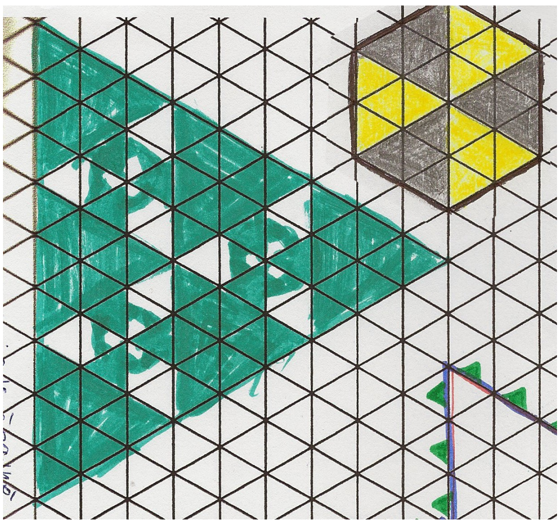
1Ch3	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Sierpińského koberec, čtvrtou iteraci pouze začal, ale nedokončil.
1Ch4	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Třetí iterace Sierpińského koberce.
1Ch5	trojúhelník 2D matematický 3 kompoziční **2**		Kochova vločka, při třetí iteraci už neumísťuje menší trojúhelníky všude, kam by měl.
1Ch6	trojúhelník 2D matematický 5 dekompoziční **1**		Pátá iterace Sierpińského trojúhelníka.

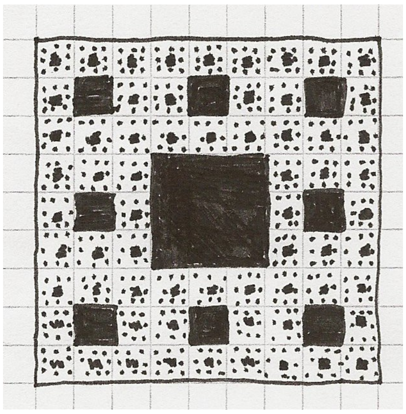
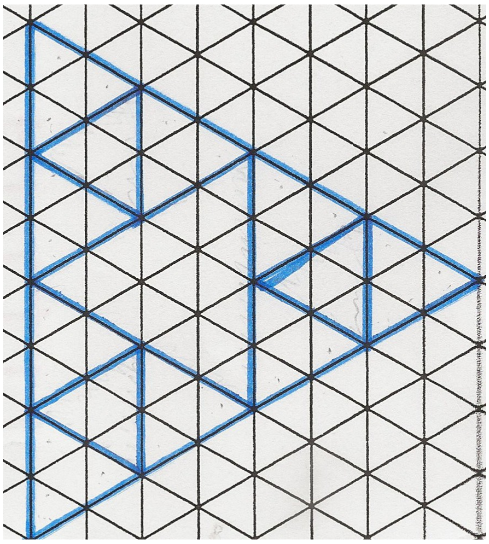
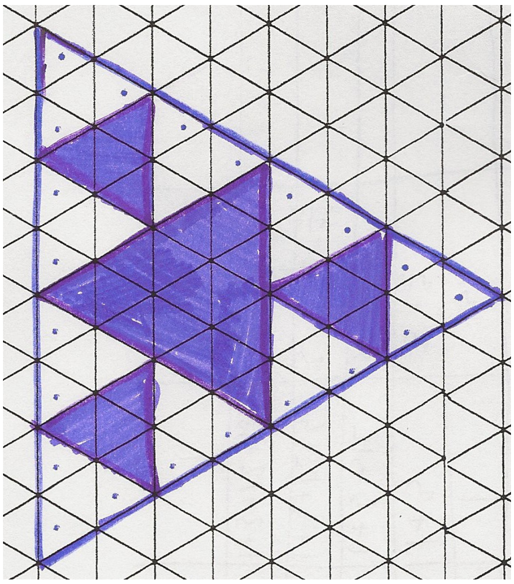
1Ch7	čtverec 2D matematický 3 a 4 dekompoziční i kompoziční **2**		Nalevo je třetí iterace Sierpińského koberce, čtvercovou Kochovu vločku napravo jsme dělali v hodině, hezky ji pak ale doma vyšrafoval.
1Ch8	trojúhelník 2D matematický 4 dekompoziční **3**		Sierpińského trojúhelník, při čtvrté iteraci ale vybarvuje špatné části malých trojúhelníků, možná proto, že už neopisují předtištěnou síť a musí jít mimo linky.
1Ch9	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Třetí iterace Sierpińského koberce, poněkud nedbale a nepřesně vypracovaná.
1Ch10	trojúhelník 2D matematický 2 dekompoziční **3**		Nejspíš se pokoušel o Sierpińského trojúhelník, při druhé iteraci už ale vybarvil špatné části a vzdal to. Trojúhelníková síť ho možná zavedla jinam než chtěl a když zjistil, že to nefunguje, už se mu nechtělo dělat nic dalšího.

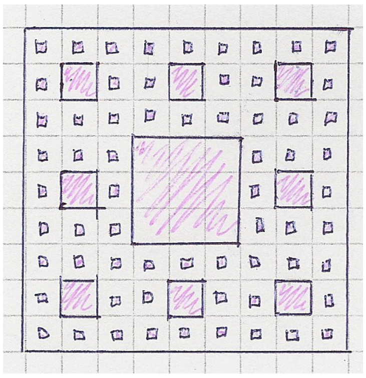
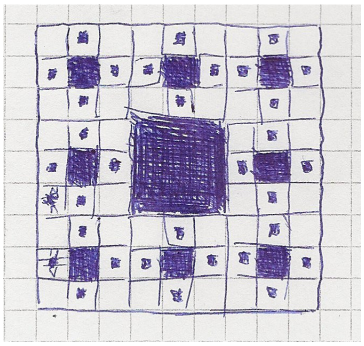
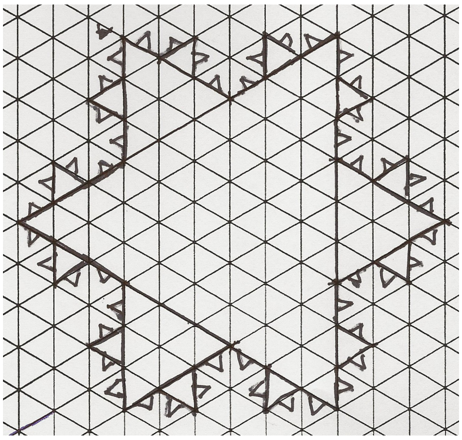
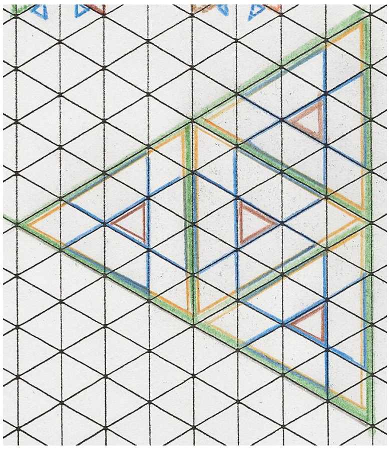
1Ch11	trojúhelník 2D matematický ? dekompoziční i kompoziční **3**		Zajímavé barvy, ale neví co s vnitřkem levého obrazce, Kochova vločka napravo je z hodiny.
1Ch12	trojúhelník 2D matematický 3 dekompoziční i kompoziční **1**		Sám přišel na princip tzv. Kochovy antivločky, tj. když trojúhelníky konstruujeme dovnitř obrazce
1D1	trojúhelník 2D matematický ? dekompoziční **3**		Pokus o Sierpińského trojúhelník, nechápe ale princip vzniku. Možná zkoušel nalézt vlastní způsob a zastavil se ve chvíli, kdy zjistil, že neví jak dál.

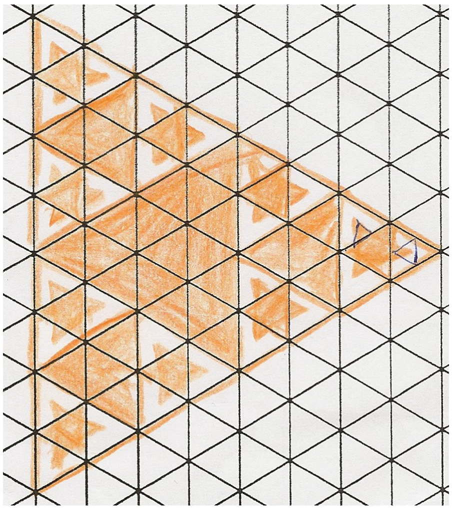
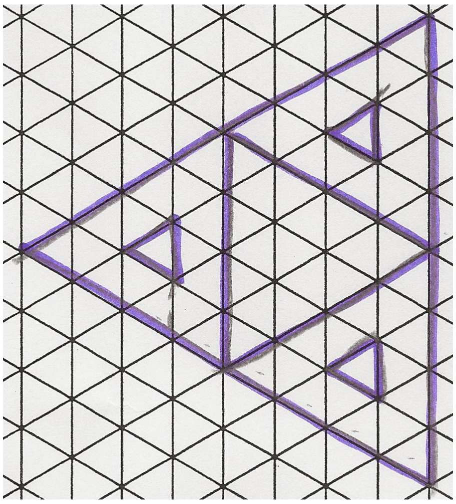
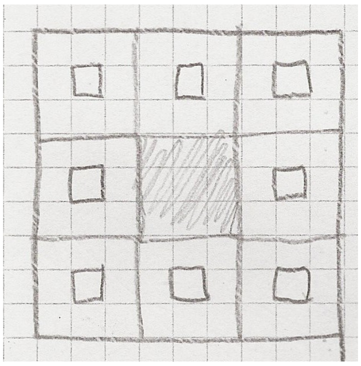
1D2	čtverec 2D matematický 3 kompoziční **2**		Kvadratická Kochova vločka, identická s tím, co jsme dělali v hodině.
1D3	trojúhelník 2D matematický 4 dekompoziční **1**		Čtvrtá iterace Sierpińského trojúhelníka, hezké barvy.
1D4	trojúhelník 2D matematický 4 dekompoziční **1**		Čtvrtá iterace Sierpińského trojúhelníka.

1D5	kružnice 2D matematický 5 kompoziční **1**		Nejlepší práce, fraktál na principu Kochovy vločky, který ale používá kružnice, vykreslené až do 5. iterace. Autorkou je zvídavá žákyně z úvodu druhé hodiny ve druhé skupině.
1D6	čtverec 2D matematický 3 a 2 dekompoziční i kompoziční **2**		Naznačuje jakousi vnější limitní hranici fraktálu, bohužel nepřesně. Uvnitř je druhá iterace Sierpińského koberce.
1D7	trojúhelník 2D matematický 3 kompoziční **2**		Třetí iterace Kochovy vločky.

1D8	čtverec 2D matematický 3 a 2 dekompoziční i kompoziční **2**		Kvadratická Kochova vločka, nejmenší čtverce ale neumísťuje všude, kam by měla. Uvnitř je druhá iterace Sierpińského koberce.
1D9	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Třetí iterace Sierpińského koberce. Zatímco první a druhou iteraci šrafuje, třetí vybarvuje, nejspíše z lenosti a s předpokladem „učitel to přece chápe“.
1D10	trojúhelník 2D matematický ? dekompoziční **3**		Poznámka na okraji („*Začala jsem blbě a pak už jsem nevěděla.*“) svědčí o sebereflexi. Nejspíše se snažila přijít na nový princip, ale byla zaskočena množstvím vybarvené plochy u čehož se zastavila.

1D11	čtverec 2D matematický 4 dekompoziční **1**		4. iterace Sierpińského koberce
1D12	trojúhelník 2D matematický 2 dekompoziční **2**		Druhá iterace Sierpińského trojúhelníka, není však jasné, co odebírá a která část obrázku zůstává.
1D13	trojúhelník 2D matematický 2 dekompoziční **2**		Druhá iterace Sierpińského trojúhelníka. Vzhledem k pečlivosti zbytku obrázku tečky po po obvodu nenaznačují potenciální třetí iteraci, spíše se jedná o kreslení mimoděk.

1D14	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Třetí iterace Sierpińského koberce.
1D15	čtverec 2D matematický 3 dekompoziční **2**		Třetí iterace Sierpińského koberce, při které si modifikuje princip. To samozřejmě je možné, ale měl by ho pak použít důsledně ve všech iteracích.
1D16	trojúhelník 2D matematický 3 kompoziční **2**		Třetí iterace Kochovy vločky.
1D17	trojúhelník 2D matematický ? dekompoziční **3**		Pokus o Sierpinského trojúhelník, nechápe ale princip. Možná se snaží přijít na nový princip, nechává se ale strhnout výtvarnou stránkou.

1D18	trojúhelník 2D matematický 4 dekompoziční **3**		Pokus o Sierpinského trojúhelník, při čtvrté iteraci aplikuje špatné rozdělení. Není jediná, komu dělá problém přenést stejnou strukturu do menšího měřítka.
1D19	trojúhelník 2D matematický 2 dekompoziční **3**		Pokus o Sierpinského trojúhelník, ale už při druhé iteraci aplikuje špatné rozdělení.
1D20	čtverec 2D matematický 2 dekompoziční **2**		Druhá iterace Sierpińského koberce. Druhou iteraci už však nevybarvuje, pravděpodobně z lenosti.
Počet prací: 32 Průměr: 2,03 Průměr chlapci: 2 Průměr dívky: 2,05		Kompoziční: 9 Dekompoziční: 26 Všechny jsou 2D a pouze matematické/geometrické tvary	
Pozn. Některé práce lze zařadit do obou kategorií příslušné typologie, proto např. součet „Kompoziční“ + „Dekompoziční“ není roven „Počet prací“.			

3.3.2.2 Druhý domácí úkol

Vysvětlivky: Ch – chlapec, D – dívka

Struktura charakteristiky a hodnocení:

Iniciátor – s jakým výchozím tvarem žák pracujeme

„2D/3D“ – v kolika rozměrech fraktál je (někdy je hodnocení nejasné, buď lze fraktál chápat oběma způsoby, nebo by bylo potřeba záměr doplnit o diskusi s žákem)

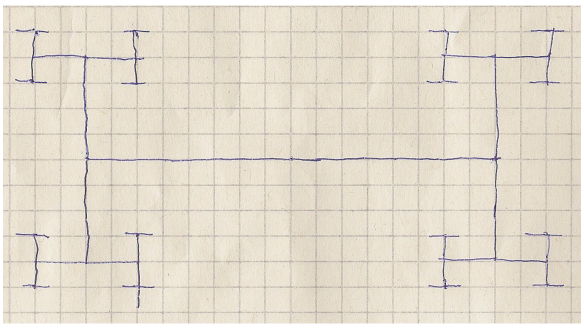
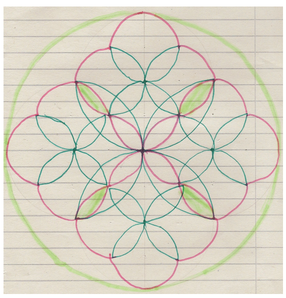
„Matematický/Přírodní“ – co fraktál zobrazuje, někdy je „přírodní“ chápáno i ve smyslu „nespadající mezi objekty školní geometrie“

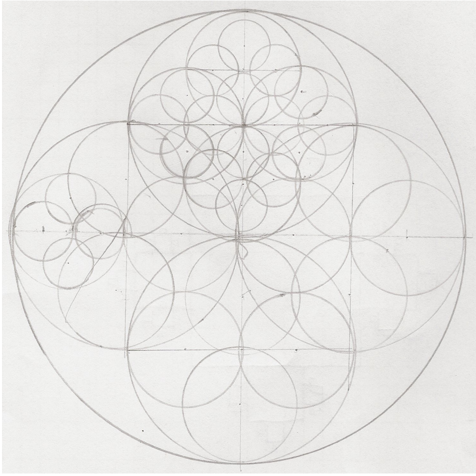
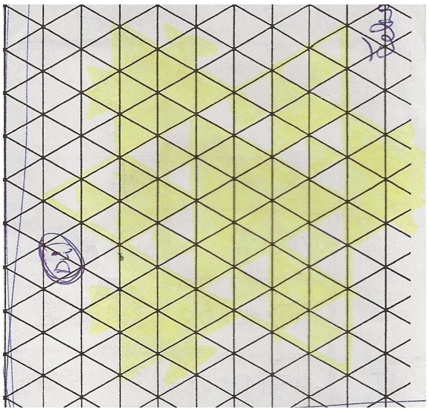
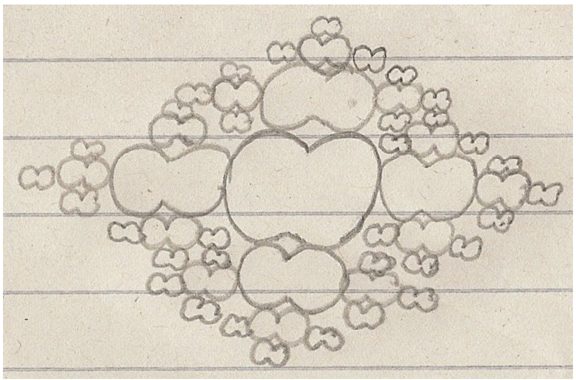
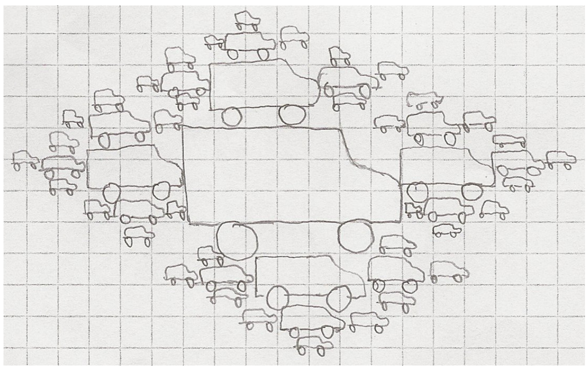
Počet iterací

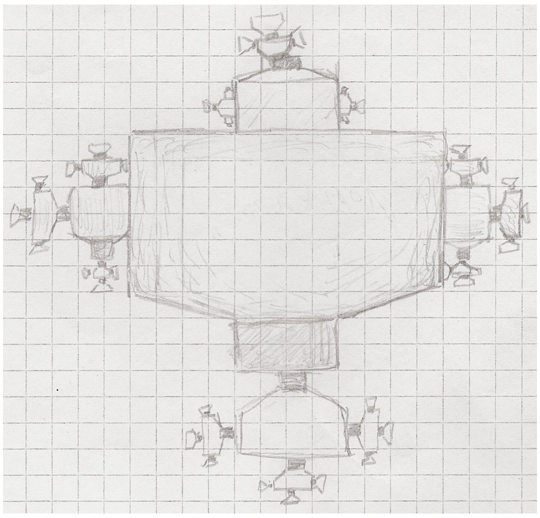
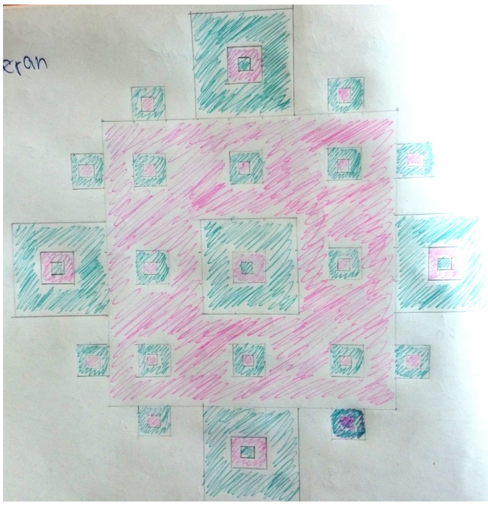
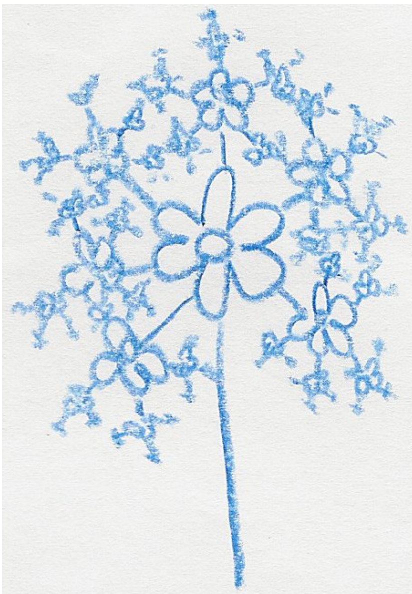
„Kompoziční/Dekompoziční“

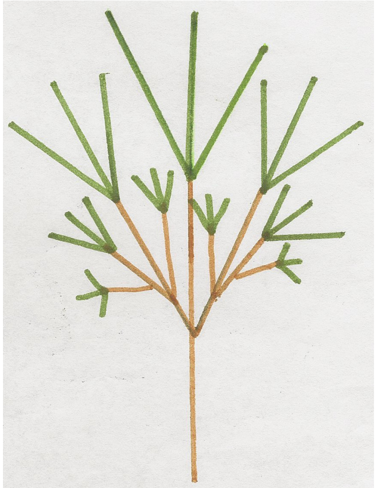
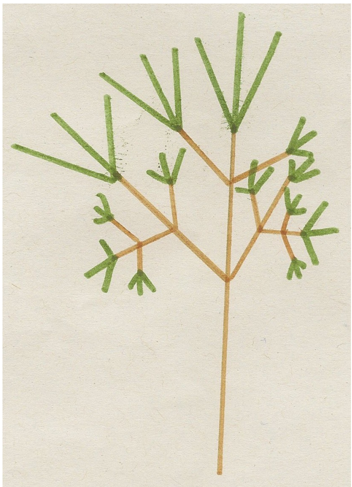
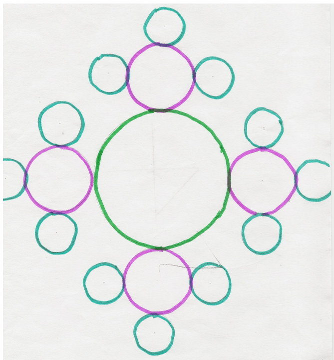
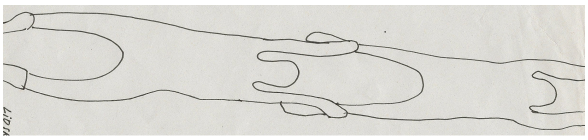
Hodnocení – klasifikace na principu známkování, dělení do tří kategorií: 1 – práce splňuje fraktální principy a je kreativní nebo pečlivě vypracovaná, 2 – práce splňuje fraktální principy, 3 – práce nesplňuje fraktální principy

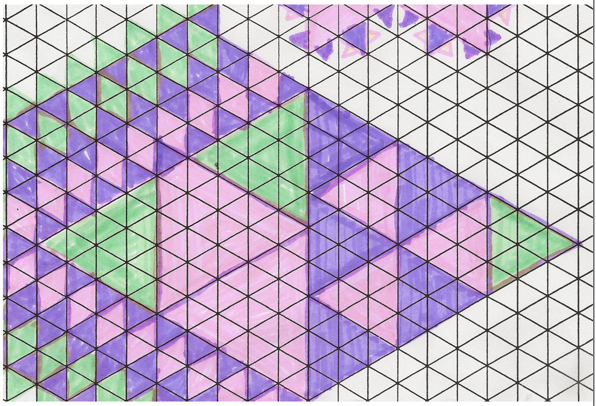
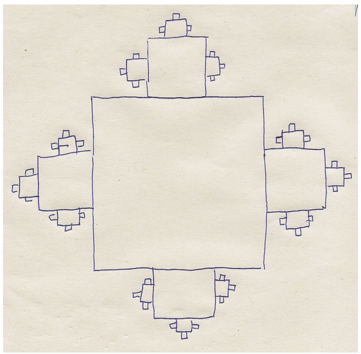
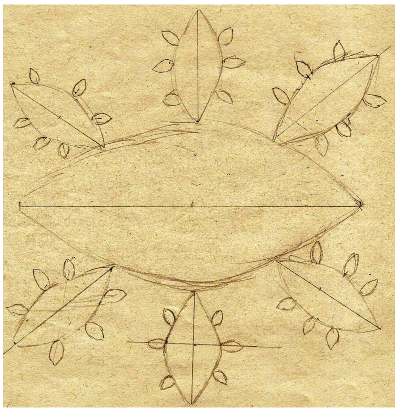
Tabulka 4:

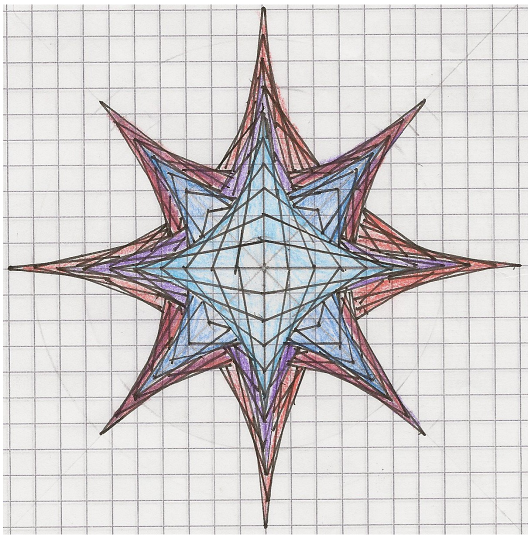
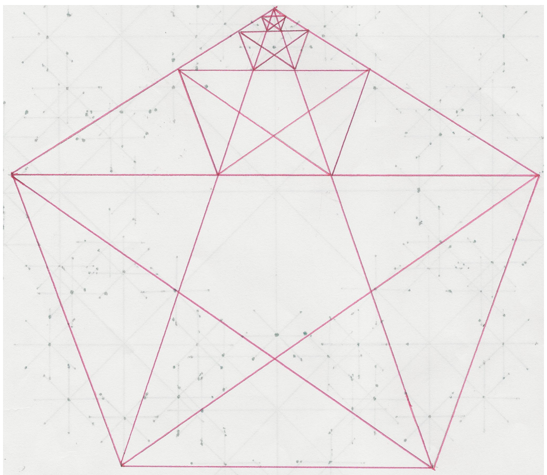
Kód	Charakteristika a hodnocení	Scan	Komentář
2Ch1	písmeno H 2D matematický 3 kompoziční **1**		Zajímavé použití tvaru písmene H, jedná se dokonce o fraktál zvaný H-strom, který bývá uváděn jako příklad L-systémů a spadá do kategorie SFC. Je možné, že na něj narazil, když si doma sám fraktály hledal v jiných zdrojích.
2Ch2	kružnice 2D matematický ? dekompoziční **3**		S fraktály má společné zmenšování dovnitř sebe sama, chybí ale nějaká zákonitost. Musel by svůj nápad ještě dále rozvinout.

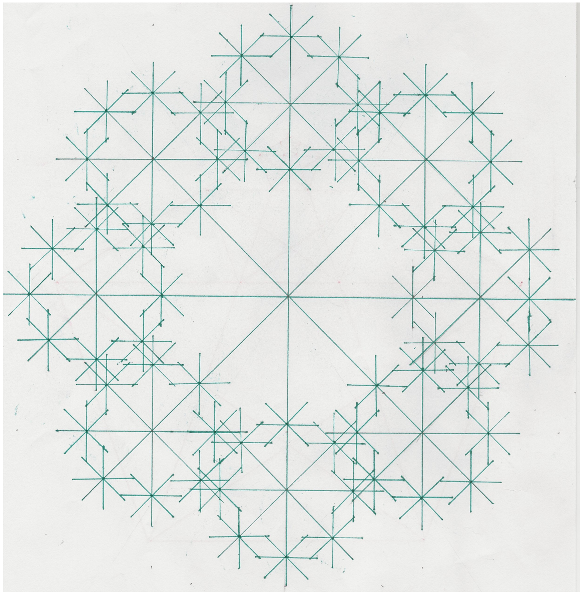
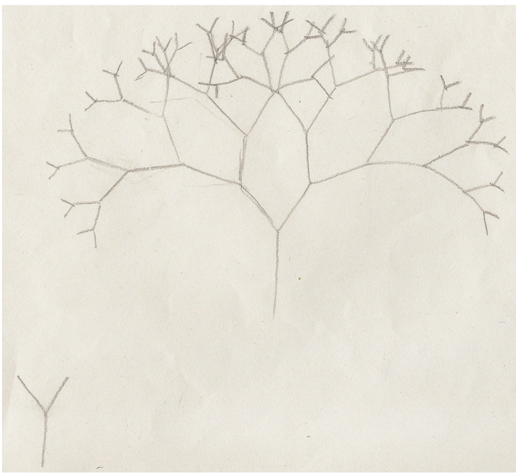
2Ch3	kružnice 2D matematický ? dekompoziční **2**		Nejspíše spolupracoval se spolužákem 2Ch2, zde je ale princip iterace trochu zřejmější.
2Ch4	trojúhelník 2D matematický ? dekompoziční i kompoziční **3**		Nejspíše chtěl zkombinovat Kochovu vločku a Sierpińského trojúhelník, ale provedení je poněkud zmatené.
2Ch5	neznámý tvar 2D přírodní 3 kompoziční **1**		Hezké použití zajímavého tvaru (může to být jablko, motýl, houba, rty, …). Není vždy důsledný a přesný, spolu s provedením obyčejnou tužkou to napovídá, že si spíš testoval, co bude fungovat.
2Ch6	auto 2D přírodní 3 kompoziční **1**		Pro mě osobně nejoriginálnější práce – fraktální auto. Nepracuje již se souměrným objektem, ale na bázi posunutí a podobnosti.

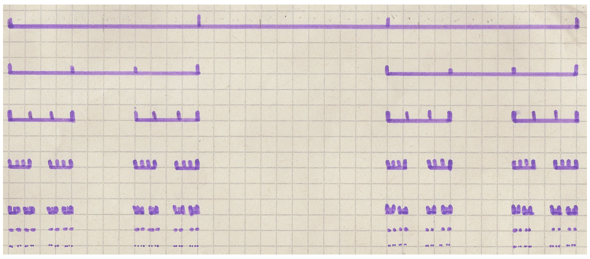
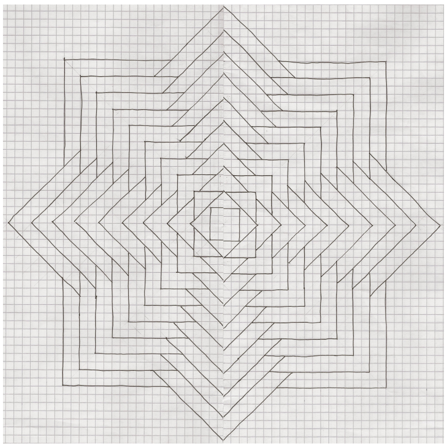
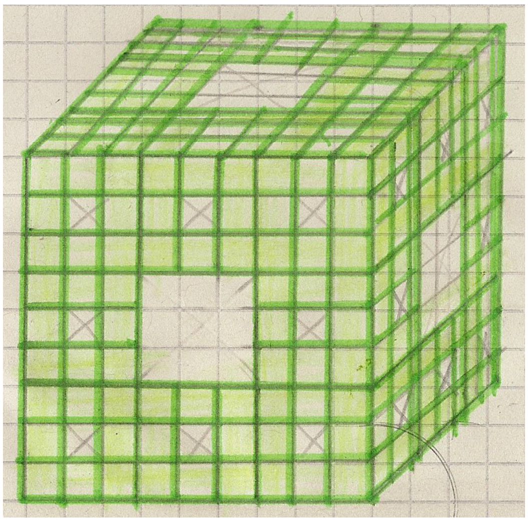
2Ch7	neznámý tvar 3D (kvůli stínování) přírodní 3 kompoziční **1**		Zvláštní tvar (napadá mě, že by to mohl být pohled shora na starý televizor, či nějaká nádoba), ale správně iterovaný. Dává si dokonce i pozor na to, jestli k sobě objekty přiléhají správnou stranou. Trochu mu dělá problém přesnost a souměrnost.
2Ch8	čtverec 2D matematický ? dekompoziční i kompoziční **1**		Iteruje fraktál dovnitř i ven zároveň, originální pojetí látky z první hodiny.
2D1	květ 2D přírodní 3 kompoziční **1**		Fraktální soukvětí.

2D2	větvení 2D přírodní 3 kompoziční **2**		Podobné větvení jsem v hodině promítal jako příklad. Chápe princip, ale provedení není v některých fázích dotažené. Možná by jí pomohlo odlišovat jednotlivé iterace jiným odstínem zelené.
2D3	větvení 2D přírodní 4 kompoziční **2**		Nejspíše ve spolupráci se spolužačkou 2D4. V posledním kroku obě nakreslily více větviček směrem od stonku, než do prostoru k němu. Nejspíš nechápou, že díky fraktálnímu zmenšování se nejmenší větvení vejde do všech míst.
2D4	kružnice 2D matematický 3 kompoziční **2**		Třetí iterace Kochova fraktálu používající kružnice, nejspíš inspirováno autorkou úkolu 1D5, kterou jsem před třídou pochválil.
2D5	postava 2D přírodní ? ? **3**		Autorkou pojmenováno „lidský žebřík“. Na větší ploše by možná vyšel najevo dobrý záměr, zde ho ale nevidím. Přinejmenším chybí prvek zmenšování.

2D6	trojúhelník 2D matematický ? ? **3**		Není úplně zřetelný záměr, možná kdyby mohla na větší ploše pokračovat dál, vyšla by najevo nějaká zákonitost. V této formě tam ale fraktál nenacházím. Vypadá to jako střed dvou idejí, které chápala jako jednu a zde to odkryla.
2D7	čtverec 2D matematický 3 kompoziční **2**		Reprodukce fraktálů z první hodiny, není žádným způsobem originální.
2D8	neznámý tvar 2D přírodní 2 kompoziční **1**		Zajímavý tvar, možná škeble nebo mušle nebo také nerozvinutý květ.
2D9	medvěd 3D přírodní ? ? **1**		Hezké výtvarně, možná kdyby měla více prostoru, vyšlo by najevo jestli myslela zmenšování medvědů až do nekonečna, kdy už by z dálky tvořili jen čáru. Byla by nejspíše potřeba další diskuse.

2D10	kapradina 3D přírodní 2 dekompoziční **1**		Krásná fraktální kapradina, ocas chameleona by se také dal považovat za fraktál. Zjevně inspirováno internetem (viz obr. 7, str. 22). Tyto obrázky jsem v hodinách nepromítal, musela si je tedy vyhledat z vlastní iniciativy.
2D11	hvězdice 3D matematický ? ? **2**		Hezké výtvarně, evokuje 3D, ale fraktál tam nevidím. Musela by proběhnout diskuse k obrázku, k čemuž bohužel nedošlo.
2D12	pěticípá hvězda a jí opsaný pravidelný pětiúhelník 2D i 3D matematický 3 dekompoziční **1**		Fraktální pentagram, chytré objevení příkladu, jak se tvar může opakovat uvnitř sebe sama. Ve výuce to dává příležitost pohovořit o Zlatém řezu – další téměř až záhadné spojce mezi přírodou a matematikou.

2D13	hvězdička 2D i 3D přírodní 3 kompoziční **1**		Iterace tvaru šestiramenné hvězdičky (může to být květenství, sněhová vločka,...). Přesně dodržuje pravidlo větvení, i když se jí ramena pak navzájem kříží. Nebo také ke křížení nedochází, protože se může jednat o obraz 3D modelu Má tedy dobrou představivost a kontrolu nad tím, co na papíře provádí.
2D14	kapradina 3D přírodní 2 dekompoziční **1**		Hezká fraktální kapradina. Inspirace a vlastní iniciativa při hledání zdrojů viz 2D10
2D15	větvení 2D přírodní 5 kompoziční **1**		Fraktální větvení. Zajímavé je, že si stranou nejdříve nakreslila generátor větvení.

2D16	jednotková úsečka 2D matematický 5 dekompoziční **1**		Pátá iterace Cantorovy množiny
2D17	čtverec 3D matematický 19 dekompoziční i kompoziční **1**		Zajímavá by byla diskuze, zda přemýšlela trojrozměrně a jakým směrem, jestli bylo jejím záměrem aby objekt vystupoval ven nebo jestli se má naopak propadat do papíru.
2D18	krychle 3D matematický 2 dekompoziční **2**		Pokusil se o Mengerovu houbu, začal správně, ale nevěděl co s vnitřkem objektu. Tři vnější strany však vykreslil dobře. Měl odvahu pustit se do takto náročného objektu, ale k jeho úspěšnému vytvoření nemá aparát, protože rýsování těles ve volném rovnoběžném promítání a řezy jsou v osnovách až v sextě.

Počet prací: 26 Průměrné hodnocení: 1,58 Průměr chlapci: 1,63 Průměr dívky: 1,56	Kompoziční: 15 Dekompoziční: 9	Matematické: 13 Přírodní: 13	2D: 20 3D: 8

Pozn.: Některé práce lze zařadit do obou kategorií příslušné typologie, proto např. součet „Kompoziční“ + „Dekompoziční“ není roven „Počet prací“.

3.3.2.3 Srovnání

Oba domácí úkoly měly stejné zadání (*„Vytvořte něco, o čem si myslíte, že je fraktál.“*), lišily se pouze tím, že poprvé byl tento úkol zadán na konci první hodiny, kdy žaci poznali jen letmo nejzákladnější fraktály (nevěděli dokonce, že se jim tak říká) a jejich základní vlastnosti. Podruhé již měli za sebou další dvě hodiny, které obsahovaly teoretický výklad o fraktální geometrii doplněný o diskusi a detailnější zkoumání jejich vlastností.

Celkem jsem obdržel 48 prací (z prvního úkolu 32, z druhého 26), z nichž bylo 25 barevných (není překvapením, že barevné práce častěji tvořily dívky), 22 prací splnilo zadání, 14 prací buď splňovalo zadání s výhradami nebo by je bylo potřeba okomentovat v diskusi nebo byly kopií látky z hodiny, 12 prací zadání nesplnilo.

Z obou předchozích kapitol je myslím očividné, že seznámení s fraktály podnítilo většinu žáků k tvořivé činnosti, přičemž ale dokázali zůstat v mantinelech vymezených vlastnostmi fraktálů. O tom vypovídá i fakt, že průměrné hodnocení domácích prací na principu známkování stouplo z 2,03 na 1,58, což odráží nárůst míry pochopení problematiky a schopnosti reprodukce zkoumaných objektů na papír či dokonce tvorby vlastních. Poměr dekompozičních ku kompozičním se obrátil z 26 : 9 na 9 : 15. Soudím, že je to tím, že při vlastním vytváření (zvláště na papíře) je snazší přidávat (přikreslovat) než ubírat (gumovat, mazat). Část třídy byla dokonce schopna vytvořit trojrozměrné objekty, polovina žáků si ve druhém úkolu vybrala přírodní tvary (nebo takové, které nejsou elementárními tvary běžné geometrie).

Počty odevzdaných prací se v obou úkolech liší. Je to samozřejmě jednak proto, že někteří žáci na jedné z hodin chyběli, navíc v prvním úkolu také někteří žáci odevzdali dva úkoly (trojúhelníková a čtvercová síť).

3.3.2.4 Reflexe žáků

Následující týden po mém působení v kvartě na Gymnáziu v Jaroměři zadala paní profesorka Boháčová této třídě úkol vyjádřit se k tématu fraktálů. Rozdala žákům malé kousky papíru a na tabuli předepsala schéma (viz níže) a instruovala žáky, aby do něj vepsali své myšlenky.

Tato šablona vypadala následovně (tématem byly samozřejmě fraktály):

téma

jaké je téma

co dělá téma

Věta o čtyřech slovech.

synonymum nebo asociace

Lístky vyplněné podle tohoto vzoru jsem od paní profesorky dostal a jejich obsah jsem přepsal do webového generátoru Wordle (www.wordle.net), který analyzuje vložený text a každé slovo vypíše velikostí fontu úměrnou četnosti jeho výskytu.

Je zde vidět, že žáci kromě samotného výrazu *„fraktály“* nejčastěji používali slova, která se rozhodně k fraktálům úzce vážou, vypíchnu a okomentuji ta nejčastěji používaná nebo ta, jejichž výskyt je nějakým způsobem zajímavý:

„Nekončí“, *„nekonečné“*, *„opakují“* – to bezpochyby jsou slova, vystihující charakter fraktálů, setkání s nekonečnem v jeho potenciální formě (konstruujeme kroky jejichž opakováním do nekonečna dojdeme) na ně zapůsobilo více, než tzv. aktuální

nekonečno („hotové“ nekonečno, žákům se ve škole řekne, že přímka nekončí, není potřeba jí nějak do nekonečna pomáhat). [7]

„Soběpodobné“, *„soběpříbuzné“, „iterace“* – to jsou přímo matematické výrazy pojmenovávající vlastnosti fraktálů, případně jejich konstrukci. Dostávají se žáku do tzv. pasivní slovní zásoby, kdy sami tato slova v běžné řeči neužijí, ale pokud je použije učitel, tak je chápou a dokáži je ve správném kontextu použít, pokud je to psanou formou a/nebo mají dost času na přípravu.

„Zmenšují“, „zvětšují“, „pokračují“, „rozdělují“, „nemění“ – uvědomují si, že u fraktálů jde především o jejich tvary, různými slovy popisují, co se s tvarem během vzniku frakálu děje. Zajímavé je, že uvažují oběma směry (zmenšují/zvětšují, rozdělují/nemění).

„Pravidelné“, „podobné“ – změny probíhající v pubertě vedou k potřebě bezpečí, byť někdy jen podvědomé. Tu fraktály svou symetrií a pevným řádem zakotveným ve své struktuře naplňují. Časté opakování školních úloh v prvním domácím úkolu také svědčí o ztotožněním se a zájmu se vracet k těmto tvarům.

„Benoit“, Mandelbrot“ – těší mě, že aspoň několika z nich uvízlo v paměti jméno této klíčové osobnosti. V jeho osobě se jim propojuje matematika s dějepisem a navíc se tím pro ně matematika „zlidšťuje“. Běžně se totiž ve výuce matematiky nehovoří o životopisech matematiků, pouze o jejich objevech a jména znají jen ve spojení se vzorci (každý zná Pythagorovu větu, ale málokterý žák na základní škole ví, kdy se Pythagoras narodil, kde žil, čím se kromě geometrie zabýval apod.).

Pouze jedna reakce byla vyloženě negativní, kdy žákyně napsala větu *„Fraktály mě bohužel nezajímaly.“*. Slovem *„bohužel“* však zároveň vyjádřila lítost nad svým nezájmem, rozpor, který tím vyjadřuje má ale mnoho interpretací.

4 Závěr

Cílem této práce bylo ověřit, zda mohou fraktály sloužit jako motivační prvek u žáků na druhém stupni základní školy. Po přípravě scénářů v kapitole 3.2 a analýze průběhu jejich praktické realizace v kapitole 3.3 si troufám tvrdit, že jsem za daných podmínek tohoto cíle dosáhl.

Jedním z dílčích cílů bylo ověřit vhodnost tohoto tématu pro žáky dané věkové skupiny. Zejména z průběhu hodin 3.3.1.2 a 3.3.1.3 a analýzy domácích prací 3.3.2.2 soudím, že žáci devátého ročníku jsou s to principy fraktální geometrie pochopit a tento fakt demonstrovat schopností samostatně použít fraktální principy, v mnoha případech velice kreativním způsobem.

Dále se potvrdilo, že studium praktické části dokáže vzbudit zájem nezasvěceného čtenáře o fraktály, a že tato část je svým obsahem postačující pro teoretickou přípravu pedagoga k zařazení fraktálů do výuky.

Abych mohl považovat závěry své práce za obecně platné, bylo by třeba provést výzkum v mnohem širším měřítku (testovat všechny ročníky, na více školách různých typů v různých lokalitách), přesto si myslím, že se motivační potenciál fraktálů pro žáky tohoto věku podařilo potvrdit.

Fraktály a jejich uplatněním se zabývá mnoho autorů, drtivá většina z nich se ale zabývá pouze jejich teoretickou stránkou, případně jejich aplikací v technických oborech, jako je programování nebo architektura. Přínos této práce proto vidím v tom, že k problematice fraktálů přistupuje odlišným způsobem a uvažuje jejich vizuální stránku jako rovnocennou stránce matematické.

Přínos u žáků samotných vidím v tom, že se díky mé výuce setkali s několika novými způsoby práce a že byli nuceni více diskutovat, než byli dosud zvyklí. Navíc dostali možnost si uvědomit hned několik mezipředmětových vztahů – jak s výtvarnou výchovou (domácí úkoly – kreslení vlastních fraktálů), tak se zeměpisem (měření pobřeží ostrovů), s výpočetní technikou (ukázky fraktálů v mobilních telefonech a v počítačové grafice), s hudební výchovou (skládání fraktální hudby), s biologií (fraktální pojetí stromů, mraků, živých organismů) i dějepisem (životní osud B. Mandelbrota).

Obtíže při realizaci mi činil především omezený časový prostor ve výuce, během kterého jsem musel zvládnout svou učitelskou premiéru, získat si důvěru třídy, která mě neznala, a stihnout probrat vše, co jsem si ve scénářích připravil. Lze namítat, že nebylo nutné trvat na proběhnutí všech scénářů a spíše se soustředit na samostatnou práci žáků, scénáře jsem však záměrně připravil tak, aby k propojení všech souvislostí (a k jakémusi Aha efektu) došlo až v poslední hodině. Tuto námitku tedy uznávám jako opodstatněnou, k jejímu zohlednění bych však spíše potřeboval odlišné podmínky (delší čas a menší kolektiv, který bych si mohl předem připravit), za stávajících podmínek bych na svém postupu nic neměnil.

Pro mě osobně bylo psaní této práce rozhodně přínosem a určitě mohu prohlásit, že takto blízké setkání s fraktály změnilo způsob, kterým se dívám na svět. Navíc jsem si poprvé v životě vyzkoušel roli učitele před plnou třídou, protože až dosud jsem měl zkušenosti pouze s individuální výukou.

5 Seznam literatury a zdrojů

5.1 Tištěné zdroje

[1] MANDELBROT, Benoît B. Fraktály: tvar, náhoda a dimenze. Praha: Mladá fronta, 2003. Kolumbus. ISBN 80-204-1009-0.

[2] MANDELBROT, Benoît B. Fraktalista: rebelem ve vědě. Překlad Petr Holčák. Praha: Dokořán, 2010. Zip (Argo), sv. 45. ISBN 978-80-257-1337-2.

[3] MANDELBROT, Benoît B. The fractal geometry of nature. Update and augmented. New York: W.H. Freeman, 1983. ISBN 07-167-1186-9.

[4] HEINZ-OTTO PEITGEN, Hartmut Jürgens. Chaos and fractals new frontiers of science. 2nd ed. New York: Springer, 2004. ISBN 0387218238.

[5] ČÁP, Jan. Psychologie pro učitele. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-717-8463-X.

[6] HRUŠA, Karel a Josef KITTLER. Základy moderní matematiky pro učitele 1.-5. ročníku ZDŠ. 4. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. Odborná literatura pro učitele.

[7] HEJNÝ, Milan a kol. Teória vyučovania matematiky. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.

[8] JANA COUFALOVÁ .. [ET AL.]. Matematika pro 9. ročník základní školy. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 80-716-8995-5.

5.2 Online zdroje

[9] Benoit Mandelbrot. NNDB: tracking the entire world [online]. [cit. 2016-02-29]. Dostupné z: http://www.nndb.com/people/752/000022686/

[10] Fractal Geometry. In: IBM100 [online]. [cit. 2016-02-29]. Dostupné z: http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/

[11] Benoit Mandelbrot. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-29]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot

[12] Definice fraktálů [online]. [cit. 2016-06-22]. Dostupné z: http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/definice.html

[13] HINNER, Martin. Historie. [online]. [cit. 2016-06-22]. Dostupné z: http://martin.hinner.info/math/Fraktaly/historie.php

[14] SCHAAF, William L. Number game. In: Encyclopædia Britannica [online]. 2016 [cit. 2016-06-22]. Dostupné z: http://www.britannica.com/topic/number-game

[15] WEISSTEIN, Eric W. Simplex. In: Wolfram MathWorld [online]. [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/Simplex.html

[16] Fractal. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal

[17] YIRKA, Bob. Researchers find evidence of fractal behavior in pulsating stars. In: Phys.org [online]. 2015 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://phys.org/news/2015-02-evidence-fractal-behavior-pulsating-stars.html

[18] YIRKA, Bob. Team uses fractal geometry to build lighter structures. In: Phys.org [online]. 2012 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://phys.org/news/2012-12-team-fractal-geometry-lighter.html

[19] SCHIRBER, Michael. Focus: Fractal Structures Do More with Less. In: Physics [online]. 2012 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://physics.aps.org/articles/v5/128

[20] SCHEWE, Phillip F. Searching for fractals may help cancer cell testing. In: Phys.org [online]. 2011 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://phys.org/news/2011-07-fractals-cancer-cell.html

[21] Fraktální dimenze. In: Mendelova Univerzita v Brně [online]. [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=5825

[22] SIXTA, Tomáš. Mandelbrotova a Juliova množina. In: ITnetwork.cz [online]. [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://www.itnetwork.cz/algoritmy/matematicke/fraktaly-a-chaos-mandelbrotova-a-juliova-mnozina

[23] KOHOUTEK, Rudolf. Psychologie vývoje a výchovy v pubertě. In: Psychologie v teorii a praxi [online]. 2014 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://rudolfkohoutek.blog.cz/1404/psychologie-vyvoje-a-vychovy-v-puberte

[24] Hokusai. In: Yale University, Department of Mathematics [online]. [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/Panorama/Art/Hokusai/Hokusai.html

[25] PROKEŠ, Josef. Vývojová psychologie – učební text: Obecná charakteristika vývojových změn v dospívání. In: Fakulta informatiky Masarykovy Univerzity [online]. [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://www.fi.muni.cz/~qprokes/socka/socka3.html#VyvDosp

[26] L-Systém. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/L-syst%C3%A9m

[27] Fraktální geometrie. HomeL [online]. [cit. 2016-07-06]. Dostupné z: http://homel.vsb.cz/~nav79/fraktgeo/

[28] HORÁK, Petr. ŠKOLNÍ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM ČÁST PRO NIŽŠÍ GYMNÁZIUM: Škola v digitálním světě aneb Uchop svoji šanci [online]. In: . Jaroměř, 2015, s. 49-61 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: http://www.goajaro.cz/wp-content/uploads/2016/05/%C5%A0VP_2015_NG_osnovy.pdf

5.3 Jiné zdroje

[29] JERSEY, Bill a Michael SCHWARTZ. FRACTALS: Hunting the hidden dimension. In: YouTube [online]. USA: Nova, 2008 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=AfMQt1AJdRU

[30] PAUŠ, Petr. POČÍTAČOVÉ METODY ANALÝZY FRAKTÁLNÍCH MNOŽIN [online]. Praha, 2006 [cit. 2016-06-22]. Dostupné z: http://geraldine.fjfi.cvut.cz/~pausp/files/DIPLOMKA.pdf. Diplomová. České Vysoké Učení Technické v Praze, Fakulta Jaderná a Fyzikálně Inženýrská. Vedoucí práce Dr. Ing. Michal Beneš.

[31] WIESNER, Robert. Užití a zneužití fraktálů [online]. Brno, 2006 [cit. 2016-06-23]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/3506/fi_m/diplomka.txt. Diplomová. Masarykova Univerzita, Fakulta Přírodovědecká. Vedoucí práce RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.