UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

HEURISTICKÉ STRATEGIE ŘEŠENÍ ÚLOH

HEURISTIC STRATEGIES OF PROBLEM SOLVING

Autor: Bc. Markéta Mátlová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2016

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *„Heuristické strategie řešení úloh"* vypracovala samostatně a vyznačila všechny citace z pramenů. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 13. 7. 2016 …………………

podpis studentky

Poděkování:

Ráda bych na tomto místě poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady a připomínky, za její velmi vstřícný, laskavý a bleskurychlý přístup a v neposlední řadě za tu obrovskou spoustu času a mravenčí práce, které mé práci věnovala.

Abstrakt

Název práce: Heuristické strategie řešení úloh

Autor: Bc. Markéta Mátlová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s nejčastějšími heuristickými strategiemi používanými při řešení úloh na druhém stupni základní školy a na střední škole a dále na konkrétních úlohách předvést řešení jednoho příkladu pomocí více heuristických strategií. Práce se skládá ze dvou částí, které lze dále rozdělit do celkem čtyř kapitol. První dvě kapitoly tvoří teoretický rámec dané problematiky. Další dvě kapitoly jsou praktičtěji orientované, neboť se v nich nacházejí konkrétní příklady heuristických strategií spolu s řešením ukázkových úloh.

Teoretická část práce objasňuje chápání heuristiky jako vědy o tvůrčím myšlení a její aplikaci do konstruktivistické výuky. Dále se věnuje heuristice ve vyučování a výuce heuristickými metodami. Zvláště detailně se zaměřuje na metodu řešení problémů a problémovou výuku.

Další část práce je svým zaměřením teoreticko-praktická, protože kromě vymezení pojmů heuristická strategie a algoritmus obsahuje jak teoretické, tak praktické příklady jednotlivých heuristických strategií. Poslední ryze praktická část práce představuje různá řešení jedné z vybraných úloh pomocí více heuristických strategií. Navíc je paleta řešení obohacena i o algoritmické a středoškolské řešení.

Klíčová slova: heuristika, heuristické strategie, řešení problémů

Abstract

Title: Heuristic strategies of problem solving

Author: Bc. Markéta Mátlová

Supervisor: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

The aim of this work is to familiarize the reader with the most common heuristic strategies used in problem solving at the secondary school and high school as well as on specific tasks to demonstrate solutions to one example of using multiple heuristic strategies. The work consists of two parts, which can be divided into a total of four chapters. The first two chapters form the theoretical framework of the issue. The next two chapters are practically oriented, because in them we can find concrete examples of heuristic strategies and solutions of sample problems.

The theoretical part explains the understanding of heuristics as the science of creative thinking and its application to the constructivist teaching. It also discusses the heuristics in teaching and teaching heuristic methods, especially in detail the method focuses on problem solving and problem teaching.

Another part of the thesis is focused theoretical and practical, because in addition to the definitions heuristic strategy and algorithm it includes both theoretical and practical examples of various heuristic strategies. The last purely practical part presents various solutions to one of the selected tasks using multiple heuristic strategies. Moreover, solution portfolio is enriched of algorithmic and high school solutions

Keywords: heuristics, heuristic strategies, problem solving

Obsah

Úvod

Již na základní škole jsem propadla krásám a tajům matematického poznávání a snažila jsem se vždy vymyslet „chytřejší“ způsob řešení, než ten, který byl na tabuli. Vzorce a nazpaměť naučená algoritmická řešení pro mě neměla význam. Proč se je učit, když je ihned zapomenu a když si je mohu navíc většinou vymyslet, či si je odvodit?

Právě tato radost z poznávání matematických zákonitostí, neutuchající nadšení z řešení zapeklitých úloh a problémů, vymýšlení jiných řešení a odhodlanost předat tuto radost a um dalším generacím mě dovedla až na Katedru matematiky a didaktiky matematiky PedF UK k paní profesorce Novotné. Byla to právě ona, kdo mi navrhl zaměřit tuto bakalářskou práci na téma heuristické strategie a zformalizovat tak ony „chytré a jiné“ způsoby řešení úloh, objevování a poznávání v matematice.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s nejčastějšími heuristickými strategiemi používanými při řešení úloh na druhém stupni základní školy a na střední škole a dále na konkrétních úlohách předvést řešení jednoho příkladu pomocí více heuristických strategií. Tyto řešené příklady, nacházející se ve čtvrté kapitole, jsou doplněny i o algoritmická řešení známá ze „školní tabule“. Kromě řešených příkladů jsou na konci práce uvedeny další neřešené příklady, které mohou být rovněž řešeny pomocí více heuristických strategií.

Tato práce je určena především učitelům matematiky, kteří se chtějí seznámit s ukázkami heuristických strategií, studentům učitelství matematiky a dalším čtenářům z řad odborné i laické veřejnosti. Pojem heuristické strategie není běžně v povědomí laiků a často ani odborníků, proto první kapitola práce zasazuje téma do širšího pojetí heuristiky jako vědy o tvůrčím myšlení a řešení problémů. Dále je v této kapitole charakterizováno konstruktivistické vyučování, jsou zde vymezeny jeho rozdíly oproti transmisivnímu vyučování a objasněna problematika konstruktivismu přímo ve výuce matematiky. V závěru této kapitoly se přesuneme k užšímu pojetí heuristiky a heuristických přístupů v podobě příkladů heuristických postupů a schémat i mimo oblast výuky matematiky.

Druhá kapitola je již plně zaměřena na heuristiku ve vyučování jak v podobě výuky heuristickými metodami, tak v podobě problémové výuky nejen v hodinách matematiky. Na tento teoretický rámec navazují dvě více prakticky orientované kapitoly s ukázkami příkladů. Ve třetí kapitole je obsažen přehled nejčastěji používaných heuristických strategií v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy a na střední škole. Tento přehled je doplněn o ukázkové příklady použití jednotlivých heuristických strategií.

Jak již bylo zmíněno výše, poslední čtvrtá kapitola ukazuje na konkrétních příkladech různé způsoby řešení pomocí více heuristických strategií. Na závěr je kapitola obohacena o další neřešené ukázkové příklady s nástinem možného výběru heuristické strategie při jejich řešení.

1 Heuristika

1.1 Širší pojetí heuristiky

„Heuristika (z řec. heuréka = objevil jsem, nalezl jsem) je věda zkoumající tvůrčí myšlení, také heuristická činnost, tj. způsob řešení problémů." (Maňák, Švec, 2003, s. 113) Pojmenování této vědy (někdy též nazývané heurologie), staré jako lidstvo samo, odkazuje na jeden z nejslavnějších výroků významného starořeckého matematika, fyzika a technika Archiméda ze Syrákús.

Slavný výkřik „Heuréka!" je spojován s Archimédovým zákonem[1] a s historkou „o koruně krále Hieróna". Protože je tento příběh úzce spjat s radostí z objevování a mohl by být použit i k motivaci žáků v hodině matematiky, rozhodla jsem se ho na tomto místě uvézt celý v původní podobě, tak jak ho ve svém díle Deset knih o architektuře zvěčnil římský stavitel a architekt Marcus Vitruvius Pollio (cit. z Halas, 2012, s. 11).

„Ačkoliv Archimédových objevů bylo mnoho a podivuhodných, zdá se, že největším důmyslem a bystrostí ze všech se vyznačuje ten, který uvedu. Když se totiž Hierón v Syrákúsách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.

Když přišlo později ovšem udání, že zlata bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hierón, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden, a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti. Archimédés, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále řecky heuréka, heuréka (našel jsem to, našel jsem to).

Vycházeje potom z tohoto objevu, dal prý udělat dva kusy stejné váhy, jako měl věnec, a to jeden ze zlata, druhý ze stříbra. (…)

[1] Znění Archimédova zákona: Těleso ponořené do vody je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze vody o stejném objemu, jako je objem ponořené části tělesa. (Jandora, 2004)

Vyzkoumav to, vnořil podobně do nádoby kus zlatý a po jeho vynětí dolil týmž způsobem míru a zjistil z menšího počtu sextariů, oč má kus zlata při téže váze menší objem než kus stříbra. Načež znovu naplnil nádobu a vnořil do téže vody samotný věnec a shledal, že při věnci vyteklo více vody než při kusu zlata téže váhy. Výpočtem z toho, oč bylo při věnci více vody než při kusu zlata, prokázal ve zlatě příměs stříbra a očividnou výrobcovu zpronevěru. ([Vi], str. 293–295)"

Tvůrčí myšlení a objevování jde už od nepaměti ruku v ruce s radostí a zápalem pro věc. Nejen těchto vlastností a charakteristik si všimlo již nespočet myslitelů, filozofů, pedagogů a dalších vědců, kteří přišli s termíny jako aktivizující výuková metoda, konstruktivistické pojetí výuky či motivace žáků. Jestliže chceme proniknout do podstaty věci, je z mého pohledu nezbytné objasnit uvedené termíny, se kterými budeme v rámci této práce pracovat.

Základní náplní času stráveného ve školních lavicích je bezesporu výuka, která je chápána jako *„systém, který zahrnuje proces vyučování, cíle výuky, obsah výuky, podmínky, determinanty a prostředky výuky, typy výuky, výsledky výuky."* (Zormanová, 2012, s. 8) Ačkoliv je školství nejen v České republice spojováno s přívlastky jako konzervativní, zastaralé, zkostnatělé, jsou to právě výukové metody, které reflektují vývoj společnosti, učitelovo přesvědčení a filozofii. Právě na osobnosti učitele závisí, zda bude využívat osvědčené a zaběhnuté postupy práce ve třídě, nebo se odváží do svých hodin vnést závan změn a reforem.

V odborné literatuře se zdůrazňují především dvě následující protichůdná pojetí výuky – transmisivní a konstruktivistické. Transmisivní neboli předávající pojetí výuky patří k procesu vyučování již od počátku lidstva. Jeho hlavní rys je zprostředkovávání již ucelených vědomostí a dovedností, díky kterým si žák v roli pasivního příjemce osvojí hotový poznatek. Toto předávání poznatků může mít několik podob, od středověkého předávání dogmat, přes slovně-názornou koncepci Komenského po memorování bez předchozího porozumění obhajované především Herbartem. (Zormanová, 2012, s. 8)

Na druhé straně existuje konstruktivistické pojetí výuky, které zdůrazňuje žákův proces konstruování poznatků. Poznávání a učení se je nepřetržitý proces, který přirozeně probíhá i mimo oblast formálního vzdělávání. Žák či student každodenně přichází do školy s určitou představou, jaký svět je. Právě tato představa pak částečně ovlivňuje jeho vnímání, porozumění a další učení. V rámci konstruktivismu se také objevilo několik koncepcí, a to problémová výuka propojující školní učení s učením životním, jejímž propagátorem byl Dewey. Dále se objevila Vygotského koncepce učení o zóně nejbližšího vývoje, kdy má učení předbíhat vývoj. (Zormanová, 2012, s. 11, 8)

Pokud se z teoretických výšin výukových pojetí a jejich koncepcí přesuneme do reality vyučovacích hodin, můžeme si na používaných výukových metodách objasnit rozdíly mezi transmisivním a konstruktivistickým vyučováním.

V rámci transmisivního (nebo též klasického, tradičního) vyučování hraje hlavní roli učitel, který klade v první řadě důraz na učební osnovy a obsah vyučování. Vyučování je pak často vedeno formou výkladu, kdy učitel nastaví jednotné tempo, které je odvozeno od průměrných či slabších žáků. Chvilková i delší nepozornost žáků je v takto vedených hodinách velmi běžná. (Okoń, 1966, s. 10 – 13)

Maňák a Švec (2003, s. 49) uvádějí následující soupis klasických výukových metod, které jsou často využívané v tradičním vyučování:

- metody slovní – vyprávění, vysvětlování, přednáška, práce s textem, rozhovor;
- metody názorně-demonstrační – předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž;
- metody dovednostně-praktické – vytváření dovedností, napodobování, manipulování, laborování, experimentování, produkční metody.

Vzhledem k předchozímu vymezení pojmu transmisivní vyučování nelze všechny výše uvedené klasické metody použít v tomto pojetí výuky. U každé jmenované metody je nutné zamyslet se nad kontextem jejího použití. Uvažujeme-li například dovednostně-praktickou metodu experimentování, může tato metoda nabývat ve vyučovacích hodinách minimálně dvou podob – žákův experiment, učitelův experiment. Jestliže je žákům představen jistý experiment učitelem, jedná se o transmisní vyučování, pokud je ale výuka postavena na samostatné práci žáků, kteří buď sami, nebo pod vedením zkoumají jistý jev, jedná se již o výukovou metodu konstruktivistického pojetí výuky. Nelze tedy klasifikaci klasických výukových metod Maňáka a Švece brát jednoznačně jako klasifikaci výukových metod transmisivního vyučování.

Konstruktivistické (někdy též alternativní, inovativní či moderní) vyučování je zacíleno především na osobu žáka a jeho současné schopnosti a znalosti. Samotné vyučování je charakterizováno jako aktivní, problémově orientované, během kterého jsou řešeny problémy, které žáka připravují na řešení životních problémů. Žákovi je tak umožněno přijít na vlastní hypotézy, rozvíjí se jeho představivost a je připraven na obtížnější intelektuální činnost. (Zormanová, 2012, s. 10)

V hodinách vedených konstruktivistickým učitelem se můžeme nejčastěji setkat s následujícími metodami, které Maňák a Švec (2003, s. 49) nazvali jako aktivizující výukové metody, a některými komplexně výukovými metodami:

- aktivizující výukové metody – metody diskusní, metody heuristické, řešení problémů, metody situační, metody inscenační, didaktické hry;
- komplexní výukové metody – skupinová a kooperativní výuka, kritické myšlení, brainstorming, projektová výuka, otevřené učení, učení v životních situacích a další.

Ačkoliv se z dnešního pohledu může zdát, že tradiční metody výuky jsou špatné a překonané, mohou nastat situace, kdy se bez nich přeci jenom v běžné pedagogické praxi neobejdeme. Svoje místo mají například v hodinách, kdy je vykládaná látka složitá a pro žáky či studenty lehce neuchopitelná. Dále pak je tato metoda vhodná ke zprostředkování pouček, norem a pravidel a k orientaci v abstraktním učivu. (Pecina, Zormanová, 2009)

Na druhou stranu zaznívá i kritika v dnešní době stále populárnějšího konstruktivismu. Hlavním argumentem kritiků je poukazování na domnělou malou efektivitu při získávání sumy vědomostí. Někteří autoři jako Pecina a Zormanová (2009) se domnívají, že nejvhodnější je kombinace obou pojetí výuky.

Vzhledem k zaměření této práce a osobnímu přesvědčení se budu dále věnovat pouze konstruktivismu a jeho pojetí v rámci výuky, dále aplikovanému na výuku matematiky.

1.2 Konstruktivismus ve výuce (matematiky)

Konstruktivismus je v Pedagogickém slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2013, s. 132) definován jako *„široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující aktivní úlohu subjektu v poznávání světa, význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických procesech, důležitost jeho interakce s prostředím a společností.“*

Velice podobně je termín konstruktivismus vysvětlen i v Psychologickém slovníku (Hartl, Hartlová, 2000, s. 271). Konstruktivismus je zde *„v psychologických a sociálních vědách směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.“*

Již z definic je patrné, že se jedná o proud, který se dotýká nejedné vědy, a vzhledem k jeho obecné charakteristice nabývá několika podob, které se stále vyvíjejí. V odborné literatuře tak lze narazit na konstruktivismus s následujícími přívlastky: kognitivní konstruktivismus, radikální konstruktivismus, sociální konstruktivismus, sociologický konstruktivismus, realistický konstruktivismus, didaktický konstruktivismus a další.

Protože cílem této části není charakterizovat jednotlivé odnože konstruktivismu, přiblížím pouze teorii zaměřenou na konstruktivismus v didaktice, který je pro účely této práce nejvhodnější.

Podle Pedagogického slovníku je konstruktivismus v didaktice jedno z dominantních soudobých paradigmat, které se dělí do následujících proudů: kognitivní konstruktivismus, sociální konstruktivismus, pedagogický konstruktivismus a didaktický konstruktivismus. Jestliže kognitivní konstruktivismus zdůrazňuje, že si poznávající subjekt individuálně konstruuje poznatky z fragmentů informací z vnějšího světa, které skládá do smysluplných celků, rekonstruuje stávající celky a provádí s nimi intelektuální operace na úrovni jeho kognitivního vývoje, pak sociální konstruktivismus vyzdvihuje nenahraditelnou funkci sociální interakce a kultury v procesu tvorby poznatků. Během vyučovacích hodin však často dochází k mísení obou přístupů. Na tento jev následně reaguje pedagogický konstruktivismus, který prosazuje ve výuce řešení problémů, tvořivé myšlení, kooperativní učení ve skupinách a například i manipulaci s předměty jako hlavolamy, stavebnice atd. (Průcha, Walterová, Mareš, 2013, s. 132)

Pedagogický konstruktivismus je podle Kalhouse a Obsta vymezován jako *„snaha o překonání* transmisivního vyučování*, jež je chápáno jako předávání definitivních vzdělávacích obsahů žákům, kteří jsou při tom odsouzeni do pasivní role jejich příjemců.“* (Kalhous, Obst, 2002, s. 49)

Posledním konstruktivistickým proudem v didaktice je podle Pedagogického slovníku didaktický konstruktivismus, který je některými autory jako například Kalhousem a Obstem pojmenován jako konstruktivistická didaktika. Toto pojetí konstruktivismu se hlásí ke zjednodušené interpretaci vývojově-psychologických a kognitivně-psychologických teorií. Důraz je zde kladen na propojení poznávacích procesů s identitou jedince. Didaktičtí konstruktivisté si uvědomují, že člověk se učí jen tomu, co pokládá za osobně smysluplné a co je v souladu s jeho vlastní identitou. S tímto proudem konstruktivismu je například spjata práce didaktiků jako Hejný, Kuřina[2], Stehlíková[3] a další. (Průcha, Walterová, Mareš, 2013, s. 132; Kalhous, Obst, 2002, s. 73)

Stopy konstruktivismu ve výuce můžeme odhalit dokonce již u Sokrata, který před více než dvěma tisíci lety pomáhal svým diskusním partnerům k poznání skrze promyšleně kladené otázky. Pomáhal na svět myšlence stejně tak, jako porodní bába pomáhala na svět

[2] Hejný, Kuřina, 2001

[3] Stehlíková, 2004

dítěti. A tak se uchytilo pojmenování Sokratovo „babické umění“ jako synonymum pro osvojení si nové myšlenky, nikoliv pouze pro předání informace. (Stehlíková, 2004, s. 12; Petrželka, 2000)

Didaktickým konstruktivismem se zabývalo během vývoje lidstva nespočet myslitelů, vědců a akademiků, z nichž můžeme jmenovat například klasiky Piageta a Deweyho, dále Davise, Maherovou, Noddingse, Jaworski, Ernesta a další. Na českém území se konstruktivismus objevil především v dílech Kuřiny a Hejného.

Pro účely této práce se nyní podíváme konkrétně na pojetí konstruktivismu ve výuce matematiky. Podle Kuřiny se konstruktivismus ve výuce matematiky projevuje skrze *„aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé.“* (Kuřina, 2002, s. 1–8) Dále autor zdůrazňuje roli motivace žáka v procesu poznávání. Jestliže totiž student či žák není motivován k poznávání, nejen že si nevybuduje určitou poznatkovou strukturu, ale on s budováním ani nezačne. Proto je třeba předkládat studentům a žákům motivační úlohy, problémy a otázky. (Kuřina, 2002, s. 1–8; Stehlíková, 2004, s. 13)

Na základě těchto východisek vytvořili Hejný a Kuřina tzv. **Desatero konstruktivismu**, které zní následovně:

„***I. Aktivita***

Matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, tedy nikoliv jen jako její výsledek, který se obvykle formuluje do souboru definic, vět a důkazů.

II. Řešení úloh

Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice samé nebo v libovolné jiné oblasti lidského poznání. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí.

III. Konstrukce poznatků

Poznatky, a to nejen poznatky matematické, jsou nepřenosné. Přenosné (z knih, časopisů, přednášek a různých médií) jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty.

IV. Zkušenosti

Vytváření poznatků (např. v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění ...) se opírá o informace, je však podmíněné zkušenostmi poznávajícího.

Zkušenost si přináší žák zčásti z kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole (experimentování, řešení úloh …).

V. Podnětné prostředí

Základem matematického vzdělání konstruktivistického typu je vytvářet prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpokladem toho je tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy …) na straně jedné a sociální klima třídy příznivé tvořivosti na straně druhé.

VI. Interakce

Ačkoli je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů …).

VII. Reprezentace a strukturování

Pro konstruktivistický přístup k vyučování je charakteristické pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.

VIII. Komunikace

Pro konstruktivistické vyučování v matematice má značný význam komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika. Dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je třeba systematicky pěstovat.

IX. Vzdělávací proces

Vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První je ***porozumění matematice****, druhé je* ***zvládnutí matematického řemesla****, třetí jsou* ***aplikace matematiky****. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí. Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink a případně i paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic. Aplikace matematiky nemusí být jen vyvrcholením vzdělávacího procesu; mohou hrát i roli motivační. Matematiku se učíme jejím provozováním.*

X. Formální poznání

Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. u zkoušky), obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním.“ (Hejný, Kuřina, 2001, s. 160–161)

Kromě výše uvedených zásad zdůrazňuje Kuřina ještě aplikaci tzv. realistického konstruktivismu, zvláště pak možnost transmise určitých částí matematiky, odkazování se na poznatky v encyklopediích, učebnicích atd., či dokonce poskytnutí nápovědy při řešení typických úloh. Všechny činnosti však musí být *„ve službách rodící se matematiky v duševním světě žáka.*[4]*“* (Kuřina, 2002, s. 6) Nelze předpokládat, že na vše přijdou žáci sami. Do procesu poznávání jistě patří i práce s informacemi. Například, jak vypadá úhel o velikosti 90° a že se velikost úhlů značí zrovna následujícím symbolem °, jistě nemohou žáci vymyslet, jedná se o matematické konvence. (Kuřina, 2002, s. 6; Stehlíková, Cachová, 2006, s. 4)

Ve spojitosti s heuristikou v širším pojetí konstruktivismu lze na tomto místě zmínit příklady pojetí výuky, které vycházejí z těchto koncepcí.

1.3 Užší pojetí heuristiky

Na začátku této kapitoly byla uvedena Maňákova a Švecova definice heuristiky, která naznačuje její mezioborovost a široký obsah zájmu. Co se týče jejího dalšího vymezení a klasifikace, je odborná literatura nejednotná jak v názvosloví, tak v charakteristice.

Mezioborovost heuristiky lze demonstrovat například na její charakteristice v akademickém slovníku cizích slov, kde nalezneme pod heslem heuristika tři definice: *„**1.** umění vynalézat (ars inveniendi), metodický návod, jakými optimálními prostředky a postupy objevovat nové (myšlenky, fakta ap.) **2.** metoda získávání, shromažďování a třídění historických pramenů a informací **3.** způsob zápisu programu pro samočinné počítače, heuristické programování.“* (Kraus, 2005, s. 306)

Za heuristiku, či heuristický přístup budeme v rámci tohoto textu považovat heuristiku v pojetí první definice, tedy tvůrčí způsob myšlení a řešení problémů, přístupy založené na zkoumání, bádání, objevování, poznávání, pátrání, práci s hypotézami, dokazování,

[4] Zde je též patrný odkaz na Sokratovo babické umění.

vytváření nových algoritmů apod. Ve shodě s tímto vymezením heuristiky je i Zelinovo pojetí, který chápe heuristiku také jako *„metodu tvůrčího řešení problémů"* nebo jako *„charakteristickou specifikaci typových činností, které se uplatňují při objevování, vynalézání, tvoření a specifikování norem a postupů."* (Zelina, 1990, s. 66)

Heuristickou metodu budeme dále chápat jako jednu z aktivizujících výukových metod, která zahrnuje učení cestou samostatného objevování, metodu řízeného objevování, metodu řízené diskuse, techniku odrazového můstku a zvláště metodu řešení problémů (problémovou výuku). Heuristická metoda je tak součástí nadřazených konceptů jako badatelsky orientovaná výuka, podnětná výuka, tvořivá výuka. Podrobnější charakteristice těchto metod bude věnována druhá kapitola této práce. (Maňák, Švec, 2003, s. 113–115)

Počátky heuristického přístupu lze nalézt již ve starověku, kdy antičtí myslitelé jako Sokrates, Cicero, Aristoteles a další vedli nejen se svými žáky působivé dialogy a nechávali tak vzniknout novým myšlenkám. Přívlastek otec heuristiky si však vysloužil maďarský matematik Pólya, který ve svém díle How to solve it[5] vypracoval heuristický postup pro řešení problémů. Jeho závěry vycházející původně z heuristické metody aplikované na výuku matematiky se dají přenést i do jiných předmětů. (Fleková, 2013, s. 41)

Spojením heuristických metod a matematiky se zabývali i čeští akademici, z nichž pro naše účely nejvýznamnějšími jsou Kopka a Zelina. Kopka obohatil teorii o svůj výzkumný přístup a Zelina rozšířil matematické úlohy o metodologické zpracování. Mezi další české heuristiky lze řadit i Lokšu a Lokšovou, kteří se věnovali především oblasti tvořivosti. (Fleková, 2013, s. 41-42)

Tak jak se vyvíjelo myšlení lidstva, přibývalo i nových heuristických postupů a schémat, které byly sice vytvořeny na stejném základě, ale lze u nich vysledovat rozvrstvení podle jistých specifik. Například *„heuristika manželů Fustioerových /nazvali ji invetika/ zdůrazňuje funkcionální analýzu, heuristika Nadlera systémovou analýzu, heuristika Altšullera – TRIZ – zdůrazňuje specifika objevování v technice atd."* (Zelina, 1990, s. 67)

Góralski (cit. ze Zelina, 1990, s. 67) klasifikoval všechny heuristicky laděné postupy do tří skupin:

- reflexivní heuristiky – například metody Sokratovy, Bolzanovy, kartézská heuristika atd.;

[5] Pólya, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (Expanded Princeton Science Library ed.).* 1945, Princeton: Princeton University Press. ISBN 0-691-08097-6.

- pragmatické heuristiky – například Pólyovy metody, postupy Deweyho, brainstorming, synektika, morfologická analýza, CPS (creative problém solving) – metoda z Buffalské univerzity atd.;
- informatické heuristiky – například modelování a simulování za pomoci počítače, metoda MULTICOMP atd.

Pro účely této práce není nutné charakterizovat jmenované metody a objasnit jejich využití. Nechám tuto poznávací aktivitu na samotném čtenáři, zda si rozšíří své znalosti z heuristické metodologie. Pro naše účely bude nejdůležitější zaměřit se zvláště na ty heuristické postupy a schémata, nazveme je heuristické strategie, které nejčastěji využijeme v hodinách matematiky s žáky druhého stupně základní školy a střední školy. Právě tato oblast bude náplní samostatné třetí kapitoly.

2 Heuristika ve vyučování

2.1 Výuka heuristickými metodami

Jak již bylo vysvětleno v první kapitole, heuristické metody výuky[6] patří podle Maňáka a Švece do kategorie aktivizujících výukových metod, které vznikaly postupně s potřebami a vývojem společnosti. Tyto metody jsou v současné době rozšířeny nejvíce v osvícených a alternativních školách, které již zareagovaly na potřebu společnosti vychovávat tvořivě, samostatně, aktivně myslící žáky. (Maňák, Švec, 2003, s. 49)

Aktivizující metody jsou odbornou literaturou definovány jako *„postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně-vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž důraz se klade na myšlení a řešení problémů“.* (Jankovcová, Průcha, Koudela, 1988, cit. z Maňák, Švec, 2003, s. 105) Jejich výhodami jsou především rozvoj osobnosti žáka s důrazem na samostatnost, zodpovědnost a tvořivost, dále pak zvýšení zájmu žáků o učivo, pozitivní vliv na školní klima, otevřenost školy a její propojenost s reálným životem a další. (Maňák, Švec, 2003, s. 105–106)

Na druhé straně se však objevují i autoři, kteří poukazují na jisté limity výše jmenovaných metod. Nejvýraznější kritiku sklízejí tyto metody v oblasti výsledků a úspěšnosti vzdělávacích programů. Oproti tradičním školám mají alternativní školy absolventy s nižším rozsahem vědomostí. Na místo toho svým žákům poskytují větší prostor pro rozvoj osobnosti, na který není v klasické škole čas. (Maňák, Švec, 2003, s. 105–106)

Jak již bylo uvedeno v první kapitole, mezi aktivizující výukové metody patří mimo jiné právě heuristické metody řešení problémů, kterým bude vzhledem k cíli práce věnována výrazná pozornost. Ostatními aktivizujícími metodami se nebudu v souladu se zaměřením práce dále zabývat.

Heuristické metody pomáhají cíleně rozvíjet žáky v aktivní a tvořivé osoby. Právě tím, že učitel v rámci použití těchto metod nepředává poznatky žákům přímo, jsou oni sami donuceni k jejich samostatnému osvojování. Učitelova funkce je v tomto procesu zvláště na začátku spíše poradní či usměrňovací a řídicí. Je však nezbytné si uvědomit, že tyto metody nemohou z vyučovacích hodin zcela vytěsnit ostatní metody, na vše si žáci nemohou přijít sami. (Maňák, Švec, 2003, s. 113)

[6] Různí autoři chápou termíny z oblasti heuristiky odlišně. V rámci této práce bude pojmem heuristika označovat vědu (nejširší vymezení), která zahrnuje heuristické postupy (což jsou veškeré techniky a strategie k řešení problémů) a heuristické výukové metody (též jen heuristické metody), skrze které vede učitel heuristicky žáky k poznání, vědomostem a dovednostem.

Do kategorie heuristické metody výuky jsou zahrnuty techniky od úplně samostatného objevování žáka po metodu problémové výuky. V procesu poznávání nelze opomenout významnou techniku „učení formou samostatného objevování“, kdy je žák postaven před nelehký úkol přijít si na objev zcela bez pomoci učitele. Základní podmínkou využití této metody je, aby byli žáci vybaveni potřebnými znalostmi a informacemi. Dále je nezbytné počítat s větší časovou náročností a nebazírovat na přesném verbalizování objeveného jevu, důležitější je, aby si žáci prožili proces objevování, než aby vše vyslovili jazykově správně. (Maňák, Švec, 2003, s. 114)

Vzhledem k uvedeným omezením se v praxi vyvinula další heuristická metoda, a to řízené objevování, kdy je s pomocí učitele již prvoplánově počítáno. Učitelovy zásahy do procesu jsou častější a obsáhlejší. I v dnešní době se ve školách můžeme setkat s jednou z nejstarších heuristických metod – sokratickou, neboli řízenou diskusí. Jedná se o metodu s nejrozsáhlejší rolí učitele v procesu poznávání, kdy prostřednictvím svých logicky promyšlených otázek směřuje systematicky žáky k záměrnému objevu. V neposlední řadě je též využívána technika odrazového můstku, kdy jsou žáci namotivováni k poznávání skrze nejrůznější impulsy jako překvapující informace či zajímavé zadání. (Maňák, Švec, 2003, s. 114)

Za nejpropracovanější a nejpoužívanější heuristickou metodu výuky je považována metoda řešení problémů neboli problémová výuka.

2.2 Metoda řešení problémů, problémová výuka

Hlavní složkou této metody je „problém“, pro který existuje několik vymezení, z nichž jsem pro účely této práce vybrala následující tři od Kozieleckiho, Okoně a Kilpatricka. První vymezení problému je obecné, a tudíž aplikovatelné i mimo obor matematiky a didaktiky. Druhá definice již popisuje problém přímo v didaktickém prostředí. Třetí a čtvrtá vybraná definice představují problém v kontextu matematiky. Vybrané definice se navzájem doplňují a utvářejí co nejpřesnější představu o chápání pojmu problém v této práci. Kozielecki (cit. z Maňák, Švec, 2003, s. 115) udává, že problém nastává za průniku tří situací – situace obtížné, nové a nejasné.

Okoň (cit. z Maňák, Švec, 2003, s. 115) vidí problém jako *„teoretickou nebo praktickou obtíž, kterou žák musí řešit aktivním zkoumáním, myšlením. Problém je rozpor, překážka, paradox, protiklad, nesnáz, svízel, těžkost, konflikt, neshoda, nesouhlas, který vybočuje z navyklého pro nás rámce existování jevů, porušuje stereotyp vnímání, registrování* *a reagování a který je podnětem k myšlenkové aktivitě, pokud ovšem přesáhne práh vnímání subjektu a vzbudí zájem o řešení.“*

Do třetice uvedu pojetí problému amerického didaktika matematiky Kilpatricka (cit. z Kopka, 2013, s. 15), jež vnímá problém jako *„situaci, v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována.“* Dále dodává: *„Aby byl problém matematický, pak bychom při hledání odpovědi měli užívat matematické pojmy a principy.“*

V neposlední řadě lze problém chápat jako jev složený z výchozí situace, cíle a cesty od výchozí situace k cíli. Poté můžeme stejně jako Kopka (2013) rozlišit tři druhy problémů užitých nejen v hodinách matematiky. Do první skupiny patří problémy rutinní (cvičení), u kterých jsou všechny tři komponenty známé. Vycházíme z přesně zadané situace po známé cestě k přesně vymezenému cíli. Je to například situace, kdy žákům zadáme procvičovací úlohy, u kterých si jen zažijí dříve objevený postup řešení. Druhou skupinu tvoří problémy nerutinní (úlohy), u kterých známe výchozí situaci a cíl, ale nevíme, jak k nim dojít. Cesta k cíli je neznámá. Příkladem tohoto problému může být například žákovo přímé dokazování matematické věty. Do poslední třetí skupiny patří nejsložitější problémy, nazvané zkoumání. Jde o jev, kdy je známá pouze výchozí situace. Cíl je otevřený nebo zcela neznámý, takže k němu neexistuje ani známá cesta. Jedná se například o zkoumání vlastností lichých čísel, čtvercových čísel, prvočísel atd. (Kopka, 2013. s. 15–16)

Stejně jako existuje velké množství definic problému, existují i různé teorie řešení problému. Pro účely této práce jsem vybrala čtyři nejvhodnější definice od českých i zahraničních autorů, od matematiků i mimooborových akademiků. Jako první uvedu obecné fáze **řešení problému podle Maňáka a Švece** z pohledu problémově orientované výuky (2003, s. 116):

1. *„Identifikace problému, tj. jeho postižení, nalezení a vymezení.*
2. *Analýza problémové situace, proniknutí do struktury problému, odlišení známých a potřebných, dosud neznámých informací.*
3. *Vytváření hypotéz, domněnek, návrhy řešení.*
4. *Verifikace hypotéz, vlastní řešení problému.*
5. *Návrat k dřívějším fázím při neúspěchu řešení.“*

Zadruhé představím **základní kroky heuristické metody podle Pólyi** (cit. z Zelina, 1990, s. 70):

1. *„pochopení úlohy;*
2. *vytvoření plánu řešení;*
3. *realizace plánu řešení;*

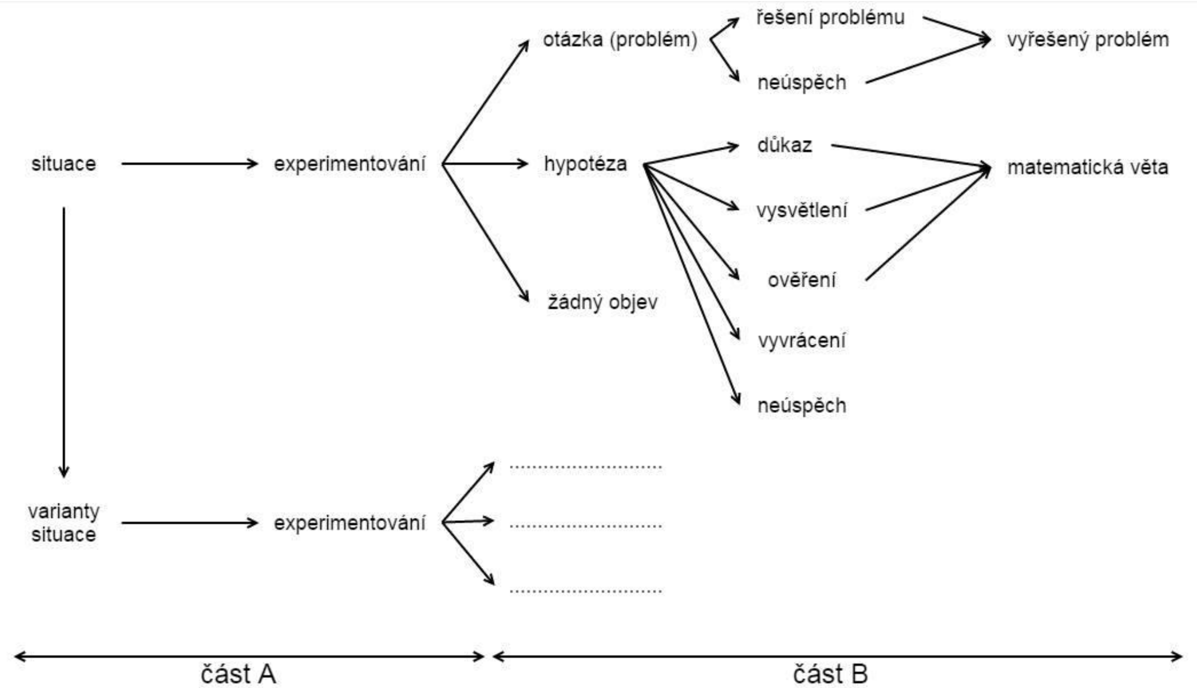
4. *získání výsledku;*
5. *úvahy nad způsobem řešení i nad řešením.“*

Třetí ukázkou řešení problému je lehce zapamatovatelné **schéma podle Zeliny** (1990, s. 73), které je známé pod akronymem **DITOR**:

1. *„D – definuj problém;*
2. *I – informuj se o problému, analyzuj ho;*
3. *T – tvoř řešení;*
4. *O – ohodnoť vytvořené řešení a vyber nejvhodnější;*
5. *R – realizuj řešení /v praxi, zápisem, fixováním/.“*

Dále představím specifický a ryze matematický **Kopkův výzkumný přístup**, který rozvíjí jeho pojetí problému v práci matematika specialisty a je znázorněn na obr. 1. Horní část schématu popisuje strategii, která je využita, pokud vycházíme z přesně popsané situace a řešíme ji, tak jak je zadaná. Spodní část obr. 1 nastiňuje možné kroky, pokud danou situaci přeformulujeme, ptáme se, jak se řešení změní, když změníme podmínky řešení, přihlédneme k extrémním situacím apod. Tímto přeformulováním jsme schopni generovat tzv. „hrozen problémů“ a obohatit svá řešení o nová. Vytečkovaná část odkazuje na shodnost dalších kroků s kroky v horní části. (Kopka, 2013, s. 18)

Obr. 1: Kopkův výzkumný přístup při výuce matematiky



Zdroj: Kopka, 2013, s. 18 (vlastní zpracování)

Stejně jako v předchozích modelech (podle Zeliny, Pólyi, Maňáka a Švece) má i Kopkův výzkumný přístup pět fází, ale obsah jednotlivých kroků se liší. Tak jako tomu bylo i u jiných autorů, vychází Kopka z popisu nějaké situace, kterou následně řešitel zkoumá. Tato výzkumná aktivita může podle Kopky vyústit ve tři stavy: buď z ní vyplyne popis problému doplněný otázkami k dalšímu zkoumání, nebo konkrétní hypotéza, která předpokládá existenci nějakého jevu, vlastnosti, pravidla v experimentu, anebo ze zkoumání nevyplyne žádný objev. Jestliže řešitele dovedlo zkoumání až k problému, může daný problém buď řešit, nebo se řešení vzdát bez úspěchu (například pokud mu chybí znalosti, motivace atd.). Jestliže se řešiteli na základě zkoumání podařilo formulovat hypotézu, je jak ve vědeckých kruzích, tak v hodinách matematiky žádoucí tuto hypotézu dokázat, vysvětlit nebo ověřit. Jedině tak se řešitel může dostat k obecně platné větě (v matematice se označuje jako „matematická věta“). Na konec nelze opomenout zkoumání, která končí vyvrácením hypotézy nebo jejím nepotvrzením a neúspěchem. (Kopka, 2013, s. 18)

Zařazení problémově orientované výuky je vhodné nejen pro učitele a organizaci náplně jejich hodiny, ale i pro samotné žáky, kteří si tak postupně osvojují jednu z klíčových kompetencí řešit problémy jako základ kritického myšlení. Schémata řešení problémů podle Zeliny a dalších uvedených autorů pak mohou sloužit jako „kuchařka“ nejen pro učitele, ale i samotné žáky při řešení úloh v hodinách i mimo ně. Výskyt těchto metod během vyučování na českých školách je již častější, ale i nadále existují školy a učitelé, kteří problémově orientované vyučování odmítají. Důvodů je zřejmě několik – dlouhodobá absence problémově orientovaných aktivit kvůli časové náročnosti, která jde ruku v ruce malou zkušeností studentů a žáků pracovat tímto jiným způsobem, který klade důraz na jejich aktivitu v hodinách a schopnost kriticky myslet.

Úspěšnost problémové výuky v praxi školního vyučování úzce souvisí s nároky na připravenost učitele, vytvářením vhodných problémů, a s postojem žáků k řešení problémů. Již Pólya (1945) vymezil některé zásady tvořivého vyučování (aplikované na výuku matematiky, ale použitelné i v jiných předmětech), které klasifikoval do tří oblastí – aktivita žáka, vnitřní motivace a pokračování po krocích heuristiky. Zásadní je, aby si žák mohl vybrat náročnost úlohy tak, aby pracoval na hranicích svých možností po celou dobu vyučování. Dále je nutné pohlídat, aby žák řešil problémy se zájmem, nikoliv z donucení. A v neposlední řadě je dobré, aby se žák orientoval v jednotlivých krocích řešení problému, viděl před sebou plán postupu a měl zpětnou vazbu při překonání jednotlivých kroků. (Zelina, 1990, s. 71)

Pólya (cit. z Zelina, 1990, s. 71–72) dále vytvořil zásady efektivní výuky matematiky s důrazem na osobu učitele, tzv. **desatero pro učitele**, které je aplikovatelné i v jiných předmětech a použitelné dodnes:

1. *„samotný učitel musí být fascinovaný, mít zájem o to, co učí – to je první předpoklad úspěchu;*
2. *učitel musí dobře ovládat svůj předmět – nemůže dobře a zajímavě vykládat a vysvětlovat něco, čemu sám nerozumí;*
3. *pamatuj, že nejlepším způsobem, jak se naučit cokoliv, je objevování této věci v průběhu vyučování;*
4. *použij empatii – uč se číst z tváře žáků jejich přání, jejich pocity těžkosti a problémy, vžij se do jejich postavení a změň hned metodu, taktiku, když zpozoruješ, že ti žáci nerozumějí nebo tě nesledují;*
5. *poskytuj žákům nejen poznatky, ale také postoje, lásku, dovednosti, návyky metodické práce – dobrý učitel je ten, kdo vede žáky tak, aby byli sami dobrými učiteli;*
6. *uč je odhadovat řešení – veď je tím k odvaze myšlení, veď je k užívání intuice pro odhady rozumné, založené na indukci a analogii;*
7. *naučit žáky umění odůvodňování, argumentace, dokazování pravdy;*
8. *uč je takovým metodám řešení, které mohou použít i při řešení jiných úloh;*
9. *neodhal hned, nýbrž postupně, celé tajemství úlohy, jejího řešení, aby úloha svou dramatičností motivovala žáky;*
10. *neříkej vždycky dopředu svůj názor, úsudek, postoje a hodnocení; přenech to víc žákům, tím dosáhneš jejich zainteresování na řešení i vyšší stupeň tvořivosti ve všech krocích heuristické metody."*

Důležitou součástí problémového vyučování je přítomnost problémové úlohy. Aby bylo takové vyučování efektivní, musí učitel žákům vhodně zformulovat výchozí situaci neboli zadat úlohu. V další části pokládám vzhledem k cíli práce, kterým je vytvoření ukázkových úloh, za nezbytné objasnit čtenáři pojem učební úloha a její tvorba v oblasti výuky a následně vymezit hlavní požadavky na úlohy problémové.

Pro účely této práce budeme pojmy problém a problémová úloha chápat velice podobně. Na tyto pojmy budeme nahlížet v kontextu výchozí situace (resp. zadání), která musí obsahovat jev nový, obtížný a žáci na první pohled nevidí, jak by ji mohli řešit. Pojem problémová úloha v této práci neztotožňujeme s úlohami, jejichž řešení činí žákům největší problémy, naopak se budeme zabývat úlohami, které přinášejí pro žáky nová, netradiční, neotřelá řešení a jsou doprovázeny tvořivým myšlením. Obecnější pojem učební úloha bude v této práci zastřešovat všechny typy úloh, jak ty s rutinním, algoritmickým řešením, tak problémové úlohy. V tomto pojetí jsou například Kopkovy (2013) rutinní problémy řazeny nikoliv mezi problémy a problémové úlohy, ale pouze jako učební úlohy.

Učební úlohy lze obecně popsat jako *„širokou škálu všech učebních zadání, a to od nejjednodušších úkolů, vyžadujících pouhou pamětní reprodukci poznatků, až po složité úkoly, vyžadující tvořivé myšlení.“* (Kalhous, Obst, 2002, s. 329) Učební úlohy by se měly ve vyučování vyskytovat v promyšleném systému od nejjednodušších po složité a od algoritmických po tvořivé (resp. heuristické). Měly by sloužit jak k procvičení dané látky, tak k získání nových dovedností a vědomostí. Díky učebním úlohám dostávají nejen učitel ale i žáci zpětnou vazbu o splnění výukového cíle. (Kalhous, Obst, 2002, s. 328– 329)

Důležitost učebních úloh je vidět v jejich funkci. Právě pomocí učebních úloh lze *„rozvíjet schopnost týmové spolupráce, dovednost pracovat s literaturou, volit vhodné metody práce, osvojovat si myšlenkové operace potřebné k řešení problémů a získávat osobní vlastnosti, zvláště cílevědomost, systematičnost, soustředěnost na práci, svědomitost, pomoc jednoho druhému atd.“* (Kalhous, Obst, 2002, s. 328)

Aby úlohy plnily dobře a efektivně svoji funkci, je třeba splnit některé základní požadavky (Kalhous a Obst, 2002, s. 330):

- Učební úlohy by neměly být prezentovány izolovaně, ale v logických systémech s gradovanou obtížností.
- Učební úlohy by neměly být monotónní, tzn., že by měly vybízet k využití široké škály různých poznávacích aktivit, a měly by jakoby vyplynout z okamžité situace během vyučování.
- Učitel by si měl připravit dostatečně velký soubor úloh, aby mohl pohotově reagovat na těžko předvídatelné situace v hodině. Improvizace během hodiny je možná, ale ne bez předchozí přípravy.
- Při tvorbě úloh je nejdůležitější stanovení výukového cíle, jež vede k tvorbě úloh „na míru“.
- Tvorba úloh je signálem profesionálního mistrovství učitele, který by se v této činnosti měl neustále zdokonalovat a rozvíjet.

Problémové úlohy by měly navíc splňovat následující zásady, které shrnula Zormanová (2012, s. 78) z pojetí problémové úlohy od různých autorů. Problémová úloha podle ní musí splňovat tyto požadavky:

- *„měla by být stanovena v logické návaznosti s dosavadními poznatky žáků (Pecina, 2008);*
- *měla by být přiměřená věku, vědomostem žáků (Pecina, 2008; Čížková, 2002);*
- *musí mít problémový obsah (tj. obtíž), který má povahu nového poznatku (Pecina, 2008);*
- *měla by žáky upoutat a vzbudit v nich zájem a chuť poznávat (Pecina, 2008; Čížková, 2002);*
- *důležité je také, aby učitel řídil činnost žáků při jejich řešení (Čížková, 2002).“*

3 Heuristické strategie v hodinách matematiky

Užitečnost a důležitost heuristických strategií na úvod ilustruji motivační větou z knihy How to solve it maďarského matematika Pólyi (1945) (cit. z Kopka, 2013, s. 26): *„Je těžké mít dobrý nápad, když z dané oblasti známe málo, a je nemožné ho mít, pokud neznáme nic. Dobré nápady jsou založeny na minulých zkušenostech a dříve získaných znalostech.“*

Heuristika aplikovaná v matematice stála již u zrodu této vědy, která je během staletí spojována s matematickými velikány jako Pappus, Descartes, Leibnitz, Bolzano. Byl to však Pólya, který jejich úvahy do té doby známé pouze vědeckým kruhům rozšířil i mezi širokou veřejnost učitelů matematiky až do samotné výuky. Do hodin matematiky tak začaly postupně pronikat i jiné než algoritmické postupy (strategie) řešení úloh (resp. problémů), a to heuristické. (Kopka, 2013, s. 26)

Slovem algoritmus budeme označovat sled úkonů, činností, kroků, které za přítomnosti mechanických výpočtů povedou k řešení všech úloh určitého typu bez ohledu na schopnosti řešitele a jeho pochopení podstaty úlohy. To znamená, že algoritmus musí být jasně, jednoznačně a srozumitelně popsaný proces, musí být snadno přenositelný z řešitele na řešitele, dále musí mít konečný počet kroků, které může provádět i stroj. Vhodným příkladem v matematickém prostředí je například výpočet kořenů kvadratické rovnice, Euklidův algoritmus k určení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel, Hornerovo schéma a další. Za algoritmický postup řešení úloh budeme v této práci předpokládat přímé řešení klasickou (naučenou) cestou například algebraicky rovnicí, geometricky atd. (Zelina, 1990, s. 68)

Heuristický postup (strategie) bude reprezentovat neobvyklé (alternativní) řešení, které se neshoduje s klasickým řešením. Při tomto postupu řešitel střídá konvergentní (myšlenky se sbíhají k cíli – k jedinému správnému řešení) a divergentní (řešení ve více rovinách, směrech) myšlení. Jak bylo nastíněno v úvodu této kapitoly, vymýšlení a používání heuristických strategií není možné bez předchozí znalosti některých základních algoritmů.

S popularizací heuristiky přibývalo i heuristických schémat a strategií, či návodů řešení problémů. Některé z nich jsem již uvedla ve druhé kapitole v části věnované řešení problémů. V této kapitole se zaměřuji pouze na příklady konkrétních strategií, které lze využít v hodinách matematiky na druhém stupni základních škol a na středních školách. Vzhledem k jejich různorodosti a počtu však uvedu jen některé heuristické strategie, se kterými se ve školské praxi můžeme setkat nejčastěji. v této části budu vycházet z Kopkovy (2013, s. 26–76) taxonomie heuristických strategií, kterou doplním o strategie vytvořené kolektivem autorů Novotná, Eisenmann, Přibyl (2015, 13–22).

Kopka (2013, s. 26–76) dělí nejčastěji se vyskytující heuristické strategie ve školské matematice na:

- výchozí (základní) strategie,
- další obecné strategie,
- specifičtější matematické strategie.

Toto dělení je využito i v této práci.

3.1 Výchozí (základní) strategie

Mezi základní strategie, které jsou schopni žáci bez větších problémů, často i intuitivně, použít, lze zařadit například strategie systematické experimentování a strategie odhad, ověření a oprava. Kopka do této kategorie dále řadí strategii pokus – omyl, algebraickou cestu (sestavení rovnice nebo soustavy rovnic) a geometrickou cestu (grafické znázornění). Vzhledem k teoretickému vymezení pojmu algoritmus a heuristická strategie nebudeme dvě poslední vyjmenované strategie uvádět jako základní heuristické strategie, protože svojí podstatou patří spíše mezi algoritmy. Mohou se však objevit příklady, kdy budou tyto strategie využity jako heuristické. Co se týče strategie pokus – omyl, názor na její zařazení mezi heuristické strategie není mezi autory jednotný. Někteří ji mezi heuristické strategie zařazují jako například Kopka, někteří ji vyčleňují jak ze skupiny algoritmů, tak ze skupiny heuristických strategií například Zelina, Novotná, Eisenmann, Přibyl. (Kopka, 2013, s. 26; Zelina, 1990, s. 67; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 14)

3.1.1 Strategie pokus – omyl

Podle Kopky je tato strategie nejjednodušší možnou metodou, jak dojít k cíli. Úskalí této metody však spočívá v poměrně velkém počtu experimentů a v přítomnosti možného neúspěchu. Jedná se ve své podstatě o nesystematické experimentování. Ukázkovým příkladem této metody může být situace v hodině matematiky na prvním stupni, kdy se žák snaží doplnit neznámé číslo do následující rovnosti: $3 + \square = 8$. Pokud žák zkouší doplňovat různá čísla bez jakéhokoliv pravidla a doufá, že některé z nich bude hledaným řešením, pak využívá plně této strategie. Pokud si ale začne uvědomovat nějaký vztah mezi svými předchozími pokusy a důvody neúspěchu, je na cestě k další heuristické strategii odhad, ověření, oprava. (Kopka, 2013, s. 26)

Dalším příkladem může být situace ze střední školy, kdy se během výuky exponenciálních funkcí objeví rovnice $2^x + 3^x = 13$ a studenti začnou hádat výsledek. Ti bystřejší a motivovanější k řešení úloh najdou poměrně rychle výsledek $x = 2$ a jsou často spokojeni s řešením. Problém této strategie v tomto příkladu je ten, že studenti náhodným experimentováním sice mohou najít jedno řešení, ale již neověřují, zda má tato úloha jen to jediné řešení, zda vyřešili úlohu korektně.

Právě na základě výše uvedeného příkladu je někdy tato strategie řazena mimo okruh heuristických strategií v hodinách matematiky. Podle Novotné, Eisenmanna, Přibyla je řešení touto cestou většinou doprovázeno pouze vnější motivací řešitele. *„Řešitel si neklade otázku, zda úlohu správně vyřešil, a plní pouze cíl „vyřešit problém", a to většinou pouze jednou, bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení."* (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 14)

Strategii pokus – omyl neřadí k heuristickým strategiím ani Zelina (1990, s. 67), který dělí metody učení a výuky na tři skupiny: učení se pomocí pokusu a omylu, učení se pomocí algoritmů, učení se pomocí heuristiky. I když se tato strategie z pohledu matematiky nezdá být heuristická, v jiných oborech, například v přírodovědeckých nebo technických, stojí tato strategie za četnými objevy, proto má své místo v Kopkově taxonomii heuristických strategií a zároveň i v tomto výčtu.

3.1.2 Strategie systematické experimentování

Systematické experimentování je často přítomno při řešení úloh, které vedou ke hledání nějakého vzorce, či zákonitosti. Pokud je to možné, je vhodné jednotlivé kroky pro přehlednost zapisovat do tabulky, ve které je po dostatečně velkém počtu experimentů často patrná nějaká pravidelnost. (Kopka, 2013, s. 26)

Za využití systematického experimentování lze k výsledku dojít pomocí určitého systému v opakování pokusů. Na začátku si často řešitel zvolí tzv. „odrazový pokus", od jehož výsledku se pomocí dalších pokusů snaží přiblížit hledanému řešení. Velmi výhodné je spojení této strategie s použitím počítače, který může dobu řešení zkrátit a řešení tak zefektivnit. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 13)

Ukažme tuto strategii rovnou na konkrétním příkladu.

Příklad č. 1: *„Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?"* (Kopka, 2013, s. 33)

Řešení: Nejdříve si stejně jako většina řešitelů zkusíme vypsat několik čtyřciferných palindromů a vydělíme je číslem 11.

$$1221/11 = 111$$

$$2552/11 = 232$$

$$5665/11 = 515$$

$$4994/11 = 454$$

Z prvních pokusů je vidět nejen, že se v těchto případech potvrdila zadaná vlastnost, a navíc se i ve výsledcích objevují palindromy. Jak je to možné? K objasnění pozorovaných vlastností můžeme přistoupit například tak, že se pokusíme najít protipříklad, nebo budeme nadále ověřovat různé čtyřciferné palindromy. Použijeme-li systematické experimentování, vypíšeme do tabulky všechny čtyřciferné palindromy (tab. 1).

Tab. 1: Ukázka systematického experimentování při řešení příkladu č. 1

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{abba/11} =$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{abba/11} =$
1	0	0	1	**91**	5	0	0	5	**455**
1	1	1	1	**101**	…	…	…	…	**…**
1	2	2	1	**111**	6	0	0	6	**546**
…	…	…	…	**…**	…	…	…	…	**…**
1	9	9	1	**181**	6	9	9	6	**636**
2	0	0	2	**182**	7	0	0	7	**637**
2	1	1	2	**192**	…	…	…	…	**…**
2	2	2	2	**202**	7	9	9	7	**727**
…	…	…	…	**…**	8	0	0	8	**728**
2	9	9	2	**272**	…	…	…	…	**…**
3	0	0	3	**273**	8	9	9	8	**818**
3	1	1	3	**283**	9	0	0	9	**819**
3	2	2	3	**293**	…	…	…	…	**…**
…	…	…	…	**…**	9	9	9	9	**909**

Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 15 (vlastní zpracování)

Po vyzkoušení zadané vlastnosti u všech devadesáti palindromů jsme dospěli k závěru, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Odpověď na zadanou otázku zní: Ano, je tomu tak. Můj přítel měl pravdu. Zároveň se nám podařilo vyvrátit naši domněnku, že výsledkem po dělení budou opět palindromy, protože jsme našli protipříklad například 1001, 2002, 3003.

3.1.3 Strategie odhad, ověření a oprava

Tato strategie je ve skutečnosti pouze modifikací strategie pokus – omyl (viz 3.1.1). Na rozdíl od strategie pokus – omyl je strategie odhad, ověření a oprava zahrnována mezi heuristické strategie a její průběh vypadá následovně. Nejprve uděláme odhad řešení a zkontrolujeme jeho správnost. Pokud nebyl odhad správný, v dalším kroku odhadneme, jak moc jsme se zmýlili. Na základě předchozí práce s chybou vytvoříme nový odhad, který by měl být blíže výsledku, a postup opakujeme, dokud nedojdeme ke správnému závěru. Stejně jako v případě systematického zkoumání je, pokud to typ úlohy umožňuje, výhodné zaznamenávat si kroky do tabulky, kterou je vhodné doplnit o poslední sloupec s poznámkami k mylnému odhadu. Tento způsob záznamu může pomoci odhalit hledanou zákonitost rychleji, než by tomu bylo u jiného typu záznamu. Ukázkovým příkladem této strategie je písemné dělení víceciferného čísla číslem minimálně dvouciferným, kdy žák nejdříve odhadne, kolikrát je dělenec větší než dělitel, pak svůj odhad ověří výpočtem a pokud byl jeho odhad špatný, snaží se o korekci odhadu nejbližší správnému výsledku. (Kopka, 2013, s. 27; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 15)

Pro názornost si tuto strategii ukážeme na konkrétním příkladu, který vymyslel žák 9. ročníku během Kopkova experimentu. Protože však zadaná čísla nevedou k řešení, upravila jsem je tak, aby bylo možné danou situaci vyřešit.

Příklad č. 2:

Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Drak má 7 hlav a 5 nohou a drakouš má 3 hlavy a 6 nohou. Astronauti na planině napočítali 136 hlav a 155 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli? (Kopka, 2013, s. 32, upraveno[7])

Řešení: K nalezení výsledku této úlohy lze užít více metod a strategií, od klasické algebraické cesty s využitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých přes heuristické systematické experimentování po strategii odhad – ověření – oprava. Pro účely této práce však uvedu řešení této úlohy výhradně přes strategii odhad – ověření – oprava.

Za první „odrazový" odhad zvolíme například, že na planetě je 10 draků a 10 drakoušů. Jednotlivé výpočty si budeme zaznamenávat do následující tabulky (viz tab. 2). Kromě počtu

[7] Upraveno autorkou bakalářské práce

draků, drakoušů a celkového počtu hlav a nohou byly do tabulky přidány ještě dva sloupce, které ukazují, jak se odhad liší od zadaného počtu hlav a nohou. Pomocí těchto rozdílů se pak snažíme zpřesňovat další odhad a přibližovat se zadaným číslům. Počet kroků tak závisí na schopnostech řešitele. Všichni řešitelé by se však po konečném počtu kroků měli dostat do situace, kdy jim v obou sloupcích s rozdíly vyjde 0. Řešením jsou následně počty draků a drakoušů uvedené na začátku tohoto řádku.

Tab. 2: Ukázka strategie odhad, ověření a oprava při řešení příkladu č. 2

Odhad	Počet draků	Počet drakoušů	Počet všech hlav	Rozdíly	Počet všech nohou	Rozdíly
1.	10	10	100	36	110	45
2.	13	16	139	-3	161	-6
3.	12	17	135	1	162	-7
4.	13	15	136	0	155	0

Zdroj: vlastní zpracování

Odpověď na zadanou otázku zní: Astronauti viděli 13 draků a 15 drakoušů.

3.1.4 Grafické znázornění

Předchozí úloha je ve skutečnosti variací častěji zadávaného typu úloh týkajících se prasat a slepic, kdy je žákům zadán pouze celkový počet hlav a nohou, který pozorovatel napočítal na dvorku. Protože mají vybrané druhy zvířat pouze jednu hlavu, je úloha o poznání snazší a dá se u ní ukázkově využít strategie grafického znázornění. Pro prezentaci této strategie jsem však vybrala zjednodušenou verzi příkladu č. 2. Uvažujme tedy případ, kdy mají draci i drakouši všichni 4 nohy a liší se pouze počtem hlav, draci mají 5 hlav a drakouši 3 hlavy. Astronauti pak napočítali celkem 110 hlav a 112 nohou.

<u>Příklad č. 3:</u>

Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Oba druhy mají 4 nohy a liší se pouze počtem hlav, draci mají 5 hlav a drakouši 3 hlavy. Astronauti napočítali celkem 110 hlav a 112 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli? (Kopka, 2013, s. 32, upraveno[8])

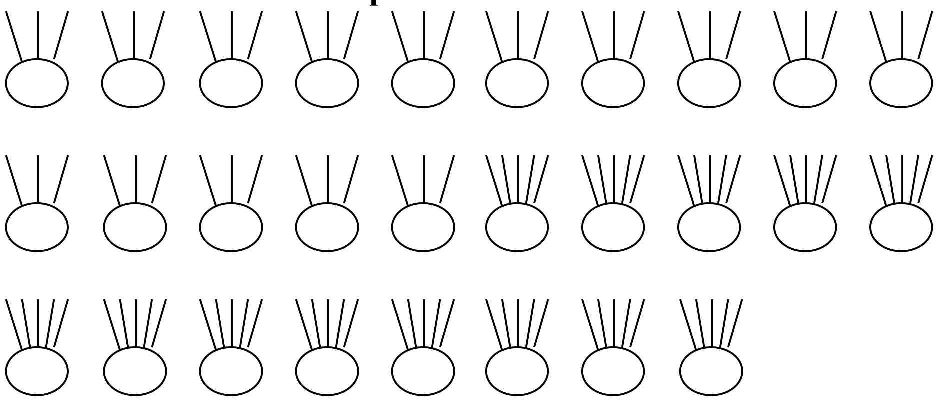
---

[8] Upraveno autorkou bakalářské práce

Při grafickém řešení modifikované úlohy je vhodným prvním krokem určit, kolik oblud celkem vlastně astronauti viděli. Výpočet je poměrně snadný, protože mají všechny obludy čtyři nohy, stačí celkový počet zpozorovaných nohou vydělit tímto počtem: $112/4 = 28$.

Dále je možné postupovat tak, že si načrtneme 28 oválků znázorňujících těla oblud. Každá obluda má minimálně tři hlavy, tak ke každému tělu (oválu) přikreslíme 3 čáry znázorňující krky. Z celkového počtu 110 hlav jsme již zakreslili $3 \cdot 28 = 84$ hlav. Zbývá tedy rozmístit 26 hlav, které rozdělujeme po dvou, protože draci mají místo 3 hlav 5. Z obrázku č. 1 je na první pohled vidět, že tímto postupem jsme vytvořili 13 pětihlavých draků a 15 tříhlavých drakoušů.

Obr. 2: Grafické znázornění řešení příkladu č. 3



Zdroj: vlastní zpracování

Protože se nejedná o algoritmické řešení úlohy, lze v tomto případě požadovat grafické znázornění za heuristickou strategii a zařadit ji do kategorie základních heuristických strategií.

3.2 Další obecné strategie

Základní strategie nám umožnily podívat se na řešení problému z jiného úhlu pohledu, než připouští algoritmická cesta. Užité postupy mohou žákům zjednodušit nalézání řešení a ukázat matematiku ve zcela novém světle jako tvůrčí, zábavnou a překvapující. Vybrané problémy představené v předchozí části této práce lze řadit k motivačním úlohám, které přitáhnou své řešitele a už je nepustí, dokud nepřijdou na způsob řešení.

V této části se přesuneme ke strategiím, které tvoří základní pilíře matematiky a práce matematika. Kopka je nazval obecné strategie a zařadil do této skupiny následující strategie: konkretizace a zobecnění, analogie, přeformulování problému, cesta zpět, zavedení pomocného prvku, vypuštění podmínky, opakování určitého postupu. Využití těchto metod řešení již předpokládá řešitelovu orientaci v dané problematice, zkušenosti a vhled do matematických situací. To je také hlavním důvodem, proč jsou tyto strategie využívány žáky a studenty méně než základní strategie. (Kopka, 2013, s. 32–59)

3.2.1 Konkretizace a zobecnění

Konkretizace a zobecnění patří mezi strategie, které se v matematice často používají. Lze říci, že se navzájem doplňují. Pokud řešíme obecný problém, který bývá často zadán například vzorcem, parametrem, obecnou situací, budeme pravděpodobně nejdříve využívat konkretizaci problému. Naopak pokud chceme z konkrétních experimentů a výsledků vyvodit platnost obecného tvrzení, budeme se snažit daný jev zobecnit. (Kopka, 2013, s. 32–35)

V matematické praxi je časté, že vyjdeme z obecného problému, který si nejdříve přiblížíme prostřednictvím specifické situace. Pokud máme již představu o problému a problém nám dává smysl, začneme s dalšími systematickými konkretizacemi, popřípadě s rafinovanými konkretizacemi (konkretizace využívající vhledu do situace), které nám mohou výrazně pomoci v řešení problému. Na závěr jsme pak opět schopni přejít od konkrétních případů k obecnému problému a vyřešit ho. Pro názornost opět ukáži konkretizaci a i zobecnění na příkladech. Nejdříve začneme s konkretizací.

Příklad č. 4

„Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?“ (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 18)

Řešení: Aby bylo možné představit si obchodníkovu situaci, určíme si nejdříve konkrétně původní cenu, například 112 Kč. Obchodník tedy koupil knihu za 16 Kč a prodal ji 42 Kč. Zisk v tomto případě byl 26 Kč, což je 162,5 % $\left(\frac{26}{16} \cdot 100\right)$. Na základě této konkretizace jsme schopni vytvořit i další situace. Protože výsledek vychází ve všech případech stejný[9], tedy 162,5 %, dojdeme k závěru, že výsledný zisk nezávisí na původní ceně knihy, takže

[9] Pro korektní řešení by bylo třeba vyzkoušet všechny konkretizace původní ceny, kterých je však nekonečně mnoho, což není možné. Součástí řešení by tedy měl být důkaz, že výše zisku nezávisí na výši původní ceny. Důkaz bychom získali přes algoritmické řešení úlohy jako podíl rozdílu prodejní a pořizovací ceny ku pořizovací ceně, to celé vyjádřeno v procentech. Tak bychom zjistili, že v čitateli i jmenovateli se nachází neznámá původní cena, kterou lze ze zlomku vykrátit. Ze zbylých hodnot lze pak také vyjádřit přesnou hodnotu zisku.

můžeme bez újmy na obecnosti přejít k závěru a odpovědět na otázku. Obchodníkův zisk je 162,5 %.

Další příklad bude ilustrovat použití strategie zobecnění.

Příklad č. 5:

„*Víme, že trojice [3, 4, 5] je pythagorejská, což znamená, že platí:* $3^2 + 4^2 = 5^2$. *Nalezněte více pythagorejských trojic.*“ (Kopka, 2013, s. 35)

Řešení: Zajisté lze tento problém řešit pouze strategií pokus – omyl, pokud není řečeno, kolik dalších trojic máme nalézt. Časově výhodnější je však převést problém do obecné roviny a hledat všechna nebo alespoň nekonečně mnoho řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ kde } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Při hledání řešení obecné rovnice je vhodné ihned na začátku využít známou rovnost $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$ kde $a \in \mathbb{N}$. Problém bude vyřešen, pokud se nám podaří nalézt taková čísla a, pro která bude platit, že čísla $2a + 1$ budou čtvercová, tedy

$$2a + 1 = b^2, \text{kde } b \in \mathbb{N}.$$

Pokud z této podmínky vyjádříme, čemu se rovná a, a dosadíme tento výraz do obecné rovnice, dostaneme následující rovnost:

$$(b^2 + 1)^2 = (b^2 - 1)^2 + (2b)^2.$$

Nyní již stačí jen hodnotám v závorkách přiřadit neznámé *x, y, z* a lze generovat nekonečně mnoho pythagorejských trojic, pokud budeme za *b* dosazovat všechna přirozená čísla. Dalšími pythagorejskými trojicemi jsou například [6, 8, 10], [17, 15, 8], [26, 24, 10], [37, 35, 12].

3.2.2 Analogie

Nejen v matematice, ale i v běžném životě a jiných vědách předpokládáme, že podobné jevy, vztahy, závislosti, charakteristiky se přenášejí i do jiných struktur, například ze světa zvířat do světa lidí a podobně. Heuristická strategie založená na analogii pak vypadá takto: nejdříve najdeme analogickou úlohu k zadanému problému, která se většinou týká analogického objektu, vztahu, vlastnosti atd. Poté tuto úlohu vyřešíme a nalezené řešení aplikujeme na původní problém. Aby byla strategie analogie dobře pochopena, vysvětlím ji na následujícím příkladu. (Kopka, 2013, s. 39–40; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 11)

Příklad č. 6:

„*Marie ujela 423 km a spotřebovala při tom 29,5 l benzinu. Jakou mělo její auto průměrnou spotřebu na 100 km?*“ (Kopka, 2013, s. 40)

Řešení: Pro některé žáky je řešení této úlohy automatické, protože znají algoritmus (například využití trojčlenky). Jednoduše si tedy do trojčlenky dosadí zadaná čísla a mají výsledek. Pro některé žáky je však počítání s desetinnými čísly noční můrou, a pokud ještě k tomu neznají vhodný algoritmus řešení této úlohy, je pro ně obtížně řešitelná. Právě v tomto případě je velmi vhodné řešit analogickou úlohu, kterou sestavíme pomocí „vlídnějších“ čísel. Marie v našem případě ujede pouze 200 km a spotřebuje při tom 16 l benzínu. Nyní je už řešení průhlednější, stačí 16 vydělit dvěma, protože $200 = 2 \cdot 100$. Nalezení odpovědi k původní úloze již není tak složité. Stačí vypočítat následující výraz: $29{,}5 : (423/100) = \frac{29{,}5}{\frac{423}{100}} = \frac{29{,}5 \cdot 100}{423} \doteq 6{,}97399527 \doteq 7.$[10]

Odpověď na zadanou otázku: Mariino auto mělo spotřebu přibližně 7 l na 100 km.

3.2.3 Strategie přeformulování problému

Při použití této strategie, jak její název napovídá, přeformulujeme zadaný problém na nový, který se od původního problému může výrazně lišit. Důvodem pro přeformulování problému je většinou existence snadnějšího řešení přeformulovaného problému, na jehož základě můžeme zadaný problém vyřešit ihned, nebo nám alespoň výrazně napomůže k řešení zadaného problému. Ukažme si tuto strategii na následujícím příkladu.

Příklad č. 7:

„Nechť p je prvočíslo větší než 3. Ukažme, že číslo $p^2 - 1$ *je vždy dělitelné číslem 24.“* (Kopka, 2013, s. 43)

Řešení: Jako první krok se nabízí rozložit zadaný výraz na následující součin:

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Nyní se můžeme ptát, jakými čísly jsou dělitelné výrazy $(p-1), p, (p+1)$ tzn., že jsme přeformulovali zadaný problém. Protože *p* je prvočíslo, budou oba zbylé výrazy sudé, tedy dělitelné dvěma. Protože navíc víme, že p je prvočíslo větší než 3, bude jeden ze zbylých výrazů dělitelný čtyřmi. A nakonec si můžeme všimnout, že uvažované výrazy reprezentují tři po sobě jdoucí čísla, tedy že jedno z nich je dělitelné třemi. Uvažované prvočíslo p to být nemůže, protože je to prvočíslo větší než tři, z čehož vyplývá, že jeden ze zbylých výrazů musí být dělitelný třemi. Po vynásobení nalezených dělitelů výrazu $(p-1)(p+1)$ dostaneme $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Z toho vyplývá, že i číslo $p^2 - 1$ je dělitelné číslem 24. Tím se nám podařilo dokázat, že zadaný předpoklad vždy platí.

[10] Spotřeba je podle zvyklostí zaokrouhlena na jedno desetinné místo.

Přeformulování problému nám v tomto případě výrazně zjednodušilo práci a vedlo rovnou k řešení zadaného problému. Zároveň jsme využili i strategii zavedení pomocného prvku, která bude vysvětlena v podkapitole 3.2.5, když jsme zkoumali též vlastnosti čísla *p*, jež nebylo součástí přeformulovaného výrazu.

3.2.4 Cesta zpět

Cesta zpět je jednou z nejčastěji užívaných strategií v matematice. V rámci školské matematiky ji můžeme najít například při rozboru konstrukčních úloh v geometrii, kdy předpokládáme, že úloha má řešení a že náčrtek, který jsme vytvořili, reprezentuje jedno z řešení. Dalším příkladem užití této strategie je konstruování důkazu, ve kterém předpokládáme, že to, co máme dokázat, platí. Následně postupujeme od konce k něčemu, co už víme, je obecně známo, či zadáno. Ve stručnosti postupujeme od toho, co chceme dokázat, k tomu, co už víme. Dalším krokem ale musí zkouška, že nás cesta zpět dovedla ke správnému závěru. Demonstrujme tuto strategii a následujícím příkladu.

Příklad č. 8:

„Myslím si číslo. Když přičtu 300 a odečtu 165, dostanu číslo, které je pětkrát větší než číslo 79. Jaké číslo si myslím?“ (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 19, vlastní překlad)

Řešení: Jednoduchou cestou k nalezení výsledku je jít od poslední informace k první. K nalezení čísla využijeme následující sled výpočtů.

$$5 \cdot 79 = 395, 395 + 165 = 560, 560 - 300 = 260$$

Odpověď: Myšlené číslo je 260.

3.2.5 Zavedení pomocného prvku

Pomocný prvek se při řešení příkladů ze školské praxe zavádí často v případech, kdy si myslíme, že se tímto krokem přesuneme do jednodušší situace, nebo do situace známé, dříve řešené. Pomocný prvek definujeme stejně jako Novotná, Eisenmann, Přibyl podle Pólyi (1945). Pomocný prvek je objekt, který není součástí zadání, ale který využíváme v řešení s nadějí, že nám pomůže dojít k výsledku jednodušeji. Jako pomocný prvek bývá často označována přímka, bod, kružnice a další geometrické objekty při řešení geometrických problémů. V algebraických postupech se s pomocným prvek setkáme často v podobě substitucí, zavedení nové neznámé, nebo při přičtení stejné hodnoty k oběma stranám rovnice. S využitím pomocného prvku jsme se v tomto textu již setkali například v příkladu č. 6, kde pomocným prvkem je prvočíslo *p*. Nyní uveďme dva příklady užití pomocného prvku nejdříve v jednoduchém algebraickém příkladu, poté v geometrii. (Kopka, 2013, s. 52; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 19)

Příklad č. 9:

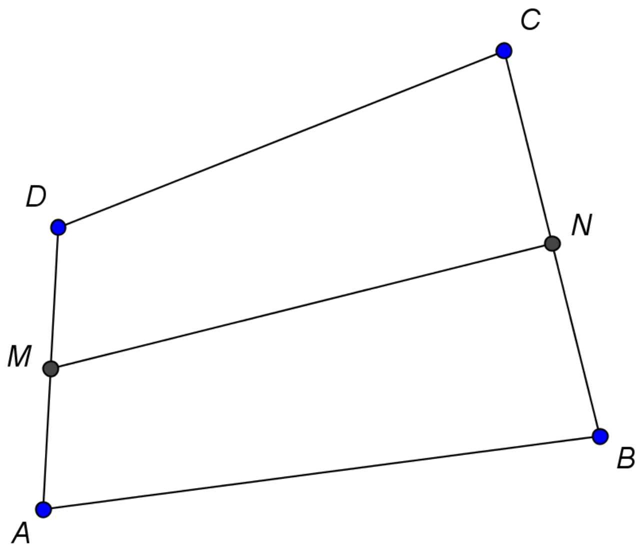
„V oboru reálných čísel R řešte rovnici: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$*“* (Kopka, 2013, s. 52)

Řešení: Výhodným řešením této rovnice je použití substituce $y = x^2$, kdy je nová neznámá *y* tzv. pomocným prvkem. Nyní již lze řešit jednodušší situaci, namísto řešení rovnice čtvrtého řádu řešíme pouze rovnici druhého řádu. Dořešení příkladu již nechám na čtenáři.

Příklad č. 10:

„Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník ABCD (viz obr. 3). Body M, N reprezentují středy příslušných stran AD, BC. Spojte středy stran M a N a zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ *a* $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$*.“* (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16)

Obr. 3: Čtyřúhelník *ABCD*



Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16 (vlastní zpracování v GeoGebra)

Řešení: Jako pomocný prvek si v tomto případě zvolíme úsečku *AC*, která čtyřúhelník rozdělí na dva trojúhelníky (viz obr. 4). Nyní označíme *S* střed *AC*. Spojením bodů *S, M, N* dostaneme trojúhelník *SMN*, jehož dvě strany *MS* a *NS* jsou v tomto pořadí středními příčkami trojúhelníků *ACD* a *ABC* (viz obr. 4). Pro úsečky *MS* a *NS* platí:

$$|MS| = \frac{1}{2}|CD| \text{ a } |NS| = \frac{1}{2}|AB|.$$

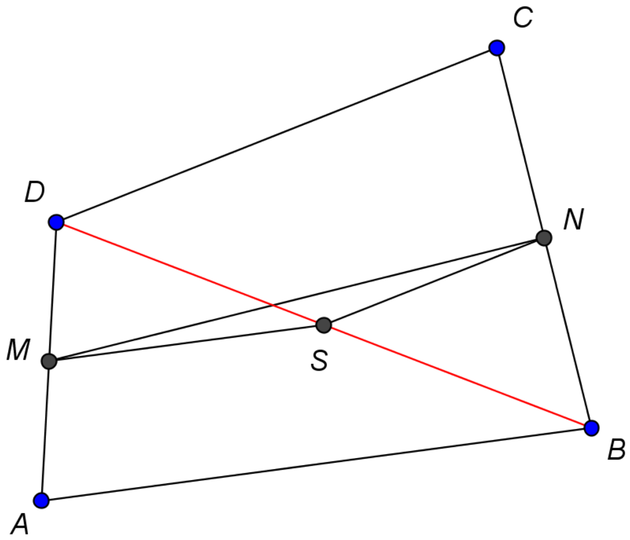
Z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku SMN vyplývá vztah:

$$|MN| > |NS| + |MS| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

V případě, že by čtyřúhelník ABCD byl lichoběžník, bod S by ležel přímo na úsečce MN, takže by žádný trojúhelník SMN nevznikl a platilo by, že $|MN| = |MS| + |NS|$.
Nakonec jsme získali vztah mezi zadanými objekty a můžeme odpovědět na zadanou otázku:

$$|MN| \geq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Obr. 4: Pomocný prvek



Zdroj: Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015, s. 16 (vlastní zpracování v GeoGebra)

3.2.6 Vypuštění podmínek

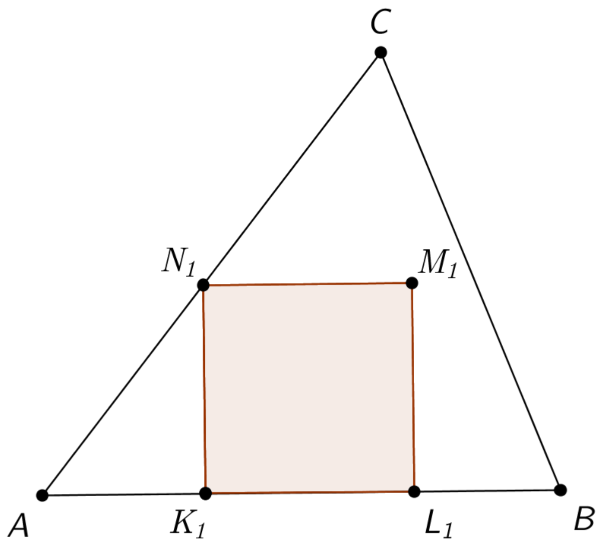
Nejen matematické problémy většinou obsahují řadu podmínek, které není vždy jednoduché ihned splnit, popřípadě zohlednit při řešení již od počátku. Proto se při jejich řešení nabízí postupně dané podmínky vynechat. Tím se zadaná úloha zjednoduší a my ji budeme schopni vyřešit. Nakonec nesmíme zapomenout opět začlenit všechny vynechané podmínky. Rozhodující je u této strategie rozhodnutí, kterou z podmínek vynechat jako první. Tuto strategii si ukážeme na typickém příkladu jejího využití v planimetrii. (Kopka, 2013, s. 55; Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2014, s. 20)

Příklad č. 11:

„Je dán trojúhelník ABC. Vepište do tohoto trojúhelníku čtverec KLMN tak, aby strana KL ležela na straně AB, vrchol M na straně BC a vrchol N na straně AC.“ (Kopka, 2013, s. 55)

Řešení: Je velmi pravděpodobné, že se nám, ani žákům ihned nepodaří takový čtverec sestrojit. Proto se pro začátek pokusíme vynechat jednu z podmínek, například aby vrchol *M* ležel na straně *BC*. Nyní již takový čtverec sestrojit není problém. Označme ho $K_1L_1M_1N_1$ (viz obr. 5).

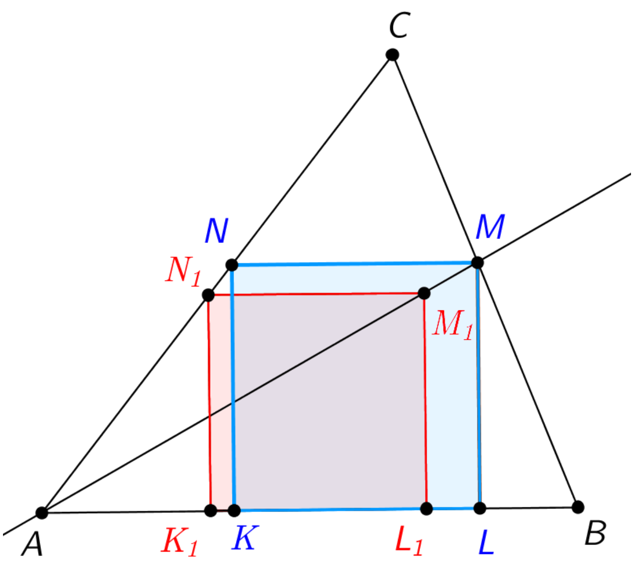
Obr. 5: Čtverec $K_1L_1M_1N_1$



Zdroj: Kopka, 2013, s. 55 (vlastní zpracování v GeoGebra)

Hledaný čtverec *KLMN* je vlastně stejnolehlý se středem stejnolehlosti *A* a koeficientem $k = \frac{|AM|}{|AM_1|}$ se čtvercem $K_1L_1M_1N_1$, proto vynechanou podmínku snadno splníme, když čtverec $K_1L_1M_1N_1$ zobrazíme ve stejnolehlosti s bodem *A*. Tam, kde polopřímka AM_1 protne stranu *BC*, bude ležet bod *M*. Zkonstruovat čtverec *KLMN* již nebude problém (viz obr. 6). Jestliže tuto úlohu řešíme s žáky, kteří ještě neznají stejnolehlost, můžeme příklad dořešit pomocí systematického experimentování (viz 3.1.2).

Obr. 6: Hledaný čtverec *KLMN*



Zdroj: Kopka, 2013, s. 55 (vlastní zpracování v GeoGebra)

3.3 Specifické matematické strategie

Poslední skupinu naší klasifikace heuristických strategií v hodinách matematiky tvoří strategie, které jsou žáky a studenty používané jen ojediněle. Do této skupiny patří ryze matematické strategie, které využívají čistě matematický aparát a které používají výhradně zkušení řešitelé. Z tohoto důvodu vybereme jen ty zajímavější strategie využitelné ve školské praxi, které reprezentujeme na příkladech. Seznámení se zbylými strategiemi a jejich použitím, které je přehledně shrnuto například Kopkou, necháme na čtenáři. (Kopka, 2013, s. 59–77)

Kopka řadí do skupiny specifických heuristických strategií tyto strategie: využití invariantu vzhledem k zobrazení, rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku, metoda nekonečné regrese, parita (sudý, lichý), Dirichletův princip, hledání výjimek a speciálních případů. Podrobně představím pouze rozklad na jednodušší případy, užití extrémního prvku a Dirichletův princip. Tyto vybrané strategie jsou podle mé zkušenosti snadnější na vysvětlení i na pochopení žáky, proto by se jejich principy daly jednodušeji aplikovat ve školské praxi i průměrnými žáky.

3.3.1 Rozklad na jednodušší případy

Hlavní ideou této strategie je rozložit obtížně řešitelný problém jako celek na několik jednodušších případů podle výhodného kritéria či podmínky. Jestliže vyřešíme jednotlivé případy, pak celkových řešením je spojení těchto částečných výsledků. V hodinách matematiky na střední škole se s touto strategií studenti běžně setkávají například při řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou. Řešení v celém oboru reálných čísel je vhodné rozdělit na řešení na jednotlivých disjunktních intervalech vymezených nulovými body uvažované rovnice či nerovnice. V rámci řešení na daném intervalu je již možné řešit pouze jednodušší rovnice či nerovnice bez absolutní hodnoty. Závěrečným krokem je pak sjednocení dílčích řešení z jednotlivých intervalů a vznik celkového řešení. (Kopka, 2013, s. 67)

3.3.2 Užití extrémního prvku

Využití tohoto principu je nevhodnější v případech, kdy v rámci zadaného problému zkoumáme uspořádanou množinu. Právě uspořádání vede často k situacím, kdy je velmi výhodné zabývat se v první řadě jedním z extrémních případů, buď nejmenším prvkem, nebo naopak největším prvkem. Ovšem za předpokladu, že takové prvky v množině existují.

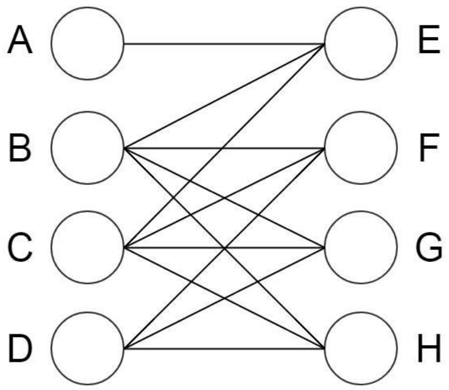
Zohlednění těchto prvků při řešení nám může problematickou situaci výrazně usnadnit. Ukažme nyní tuto strategii na následujícím příkladu. (Kopka, 2013, s. 69)

Příklad č. 12:

„Na večírku žádný chlapec netancoval se všemi dívkami a každá dívka tancovala aspoň s jedním chlapcem. Dokažte, že existují dvě dvojice CD a C′D′, které spolu tancovaly, a přitom chlapec C netancoval s dívkou D′ a chlapec C′ netancoval s dívkou D.“ (Kopka, 2013, s. 70)

Řešení: K řešení tohoto problému bude zapotřebí použít několik heuristických strategií. V první řadě provedeme konkretizaci problému, abychom získali do problému lepší vhled. Zvolme například 4 páry (4 děvčata a 4 chlapce), které popíšeme pomocí písmen A, B, C, D pro dívky a E, F, G, H pro chlapce. Pro ilustraci situace použijeme následně grafické znázornění (viz obr. 7). Uvažujme například situaci, kdy každý z chlapců tančil právě se třemi dívkami a každá dívka tančila alespoň s jedním chlapcem.

Obr. 7: Grafické znázornění příkladu č. 12



Zdroj: Kopka, 2013, s. 70 (vlastní zpracování)

Nyní lze konkrétní řešení popsat maticí, ve které číslem 1 znázorníme situaci, kdy spolu dvojice tančila, a číslem 0, když spolu příslušná dvojice netančila. Výsledná matice má tento tvar:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ F \\ G \\ H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud uvažujeme například situaci, že každý chlapec tančil právě se třemi dívkami, vidíme, že v každém řádku je právě jedna 0. Podmínka, že každá dívka tančila s alespoň jedním chlapcem, zajišťuje, že v každém sloupci bude alespoň jedna 1.
Dvojice, které splňují předepsanou vlastnost, jsou v našem konkrétním případě dvojice EA a DF, EA a DG, EA a HD.

Na závěr je nutné opět zobecnit tuto konkrétní maximální situaci. Zápis pomocí matic umožní zobecnění situace pro libovolný počet chlapců (počet řádků) a dívek (počet sloupců) bez újmy na obecnosti. Jestliže víme, že žádný chlapec netancoval se všemi dívkami, bude v každém řádku matice vždy alespoň jedna 0. Podmínka, že každá dívka tančila aspoň s jedním chlapcem, se v matici projeví tak, že v každém sloupci bude alespoň jedna 1. Spojením obou podmínek vznikne matice s prvky 0 nebo 1, ve které budou některé její prvky tvořit „obdélník (resp. čtverec)“, v jehož jedné dvojici protilehlých vrcholů budou pouze prvky stejné hodnoty 1 nebo 0 a druhá dvojice protilehlých vrcholů bude nabývat opačných hodnot oproti té první (viz následující matice a dvě dvojice zvýrazněných prvků).

$$\begin{array}{cc} & (A' \quad C \quad E \quad A \quad C') \\ \begin{pmatrix}B\\D\\F\\B'\\B''\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{0}} & 0 & \cdots & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{\mathbf{1}} & \color{blue}{\mathbf{1}} & \ldots & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{blue}{\mathbf{0}} \\ 0 & \color{blue}{\mathbf{0}} & \cdots & 1 & \color{blue}{\mathbf{1}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Takovýto „obdélník nebo čtverec“ se bude v matici vyskytovat vždy alespoň jeden, což vede k závěru, že na taneční zábavě bude vždy existovat minimálně jedna kombinace dvojic CD a C´D´, které spolu tančili, ale chlapec C netančil s dívkou D´, a chlapec C´ netančil s dívkou D.

3.3.3 Dirichletův princip

Dirichletův princip (někdy též nazývaný princip holubníku, nebo zásuvkový či hromádkový princip) v sobě skrývá jednoduchou úvahu. Pokud máme *n* zásuvek a *n* + 1 objektů, které rozmisťujeme, je jisté, že v alespoň jedné zásuvce budou minimálně 2 předměty. Matematicky lze tento princip formulovat takto:
„Jestliže je $kn + 1$, kde $k \geq 1$, rozděleno do *n* přihrádek, pak alespoň jedna přihrádka obsahuje alespoň $k + 1$ objektů.“ (Kopka, 2013, s. 75) Ukažme si nyní tento princip na jednoduchém příkladu.

Příklad č. 13:

Ve třídě 9. B je 25 žáků. Dokažte, že jsou v této třídě alespoň 3 žáci, kteří se narodili ve stejném znamení zvěrokruhu.

Řešení: Celkem 25 žáků máme rozdělit podle znamení zvěrokruhu, kterých je celkem 12. Mohou nastat různé varianty tohoto rozdělení od situace, kdy se všichni žáci narodili ve stejném znamení po situaci, kdy se v každém znamení narodili alespoň dva žáci. Uvažujme nejméně vhodnou situaci ze zadaných podmínek, a to že se v každém znamení narodili alespoň dva žáci.

Pokud vydělíme 25 žáků dvanácti znameními, dostaneme 2 zbytek 1. Poslední zbylý žák bude jistě patřit do jedné skupiny, která bude mít nakonec tři členy. Tak jsme dokázali, že alespoň jedno znamení zvěrokruhu bude zastoupeno minimálně třemi žáky z 9. B.

4 Ukázky úloh řešitelných pomocí více heuristických strategií

Cílem této části práce je vytvořit příklady slovních úloh, které lze řešit pomocí více heuristických strategií. Jsou zde zařazeny čtyři úlohy, které lze řešit více heuristickými strategiemi. U každé úlohy se pokusím vytvořit různá řešení pomocí heuristických strategií, která by mohli žáci nejčastěji využít. Řešení obsahují pouze ty heuristické strategie, se kterými byl čtenář detailně seznámen ve třetí kapitole. Tyto úlohy obsahují poznatky z různých matematických oborů – z aritmetiky, algebry, geometrie i analýzy. Úroveň obtížnosti všech zařazených úloh je koncipována tak, aby úlohy byli schopni řešit žáci druhého stupně základních škol a čtyřletých gymnázií.

Zadání slovních úloh je buď převzato z učebnic matematiky doporučených pro druhý stupeň základních škol, víceletá gymnázia nebo střední školy, nebo jsou vybraná zadání upravena po numerické nebo obsahové stránce. Zdrojem úloh byla dále zadání různých matematických soutěží jako Matematická olympiáda, Matematický klokan, Pangea a další texty zaměřené na zajímavé úlohy z oblasti matematiky. V textu budou jednotlivé případy odlišeny pomocí doslovné citace s uvedením zdroje u převzatých zadání, nebo pomocí poznámky pod čarou, která bude upřesňovat stupeň modifikace zadání a odkazovat na zdrojový dokument. Pokud se bude jednat o nově vytvořené zadání, nebude v textu uveden žádný odkaz.

Stejně jako vznikala jednotlivá zadání slovních úloh, vznikala i jejich řešení. Některá řešení již byla popsána u úloh stejného nebo podobného typu, proto se u nich budu odkazovat například na řešení úloh se zcela odlišným zadáním, ale podobným řešením. U některých příkladů jsem již popsaná řešení rozšířila o další možná řešení, tak aby vznikl přehled možných heuristických způsobů, jak by danou problémovou úlohu mohli žáci nejčastěji řešit. I v této části se budu poznámkami pod čarou odkazovat na jednotlivé zdroje. Aparát poznámek pod čarou bude v této části práce využit, aby poznámky nepřerušovaly proud textu s řešením.

Každý příklad bude dále doplněn o typické algoritmické řešení, které se běžně ve školské praxi používá k řešení určitého typu úloh, a o středoškolské řešení, kde to povaha příkladu dovolí.

4.1 Míchání směsí

Skupina slovních úloh týkajících se míchání směsí různých druhů látek od různě procentního lihu, přes rozdílně teplou vodu po směsi odlišných druhů bonbonů je ve školské praxi zařazována do učiva 9. ročníku základní školy. Ukázkovým řešením je sestavení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. My ale na následujícím příkladu ukážeme další vhodné řešitelské strategie.

Příklad č. 14: Míchání vody

V římských lázních jsou nádoby na vodu o teplotě 30 °C a 80 °C. Kolik které vody mám do kádě namíchat, aby mi vzniklo 150 litrů vody o teplotě 50 °C?

a) Algoritmické sestavení soustavy rovnic

Úlohy zaměřené na míchání směsí se „ve škole“ řeší většinou pomocí dvou rovnic o dvou neznámých. V soustavě rovnic budou v tomto příkladu figurovat dvě neznámé, označme je x a y. Počet litrů vody o teplotě 30 °C bude zastupovat x a y nahradí počet litrů vody o teplotě 80 °C. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých vypadá takto:

$$30x + 80y = 150 \cdot 50,$$
$$x + y = 150.$$

První rovnice vyjadřuje zachování objemu a teploty. Druhá rovnice představuje vztah mezi objemy (resp. počty litrů) jednotlivých typů vod.

Řešit soustavu rovnic lze několika metodami, z nichž na základní škole nejrozšířenější je metoda dosazovací nebo sčítací. Obě metody vedou k výsledku, že je třeba smíchat 90 litrů vody o teplotě 30 °C a 60 litrů vody o teplotě 80 °C. Pro žáky je ale často obtížné sestavit potřebné rovnice. Pokud se jim to nepodaří, mají možnost využít heuristické strategie řešení.

b) Systematické experimentování

Pro využití této strategie budeme předpokládat, že zadaná úloha povede k řešení v oboru celých čísel, tedy že výsledek vyjde v celých litrech. Jedině tak můžeme sestavit 151 možností, jak dva druhy vody namíchat. Následně si sestavíme tabulku (viz tab. 3), do které zaznamenáváme výsledky jednotlivých pokusů. Pokud by se nám ve třetím sloupci znázorňujícím teplotu namíchané vody vyjádřenou ve °C neobjevilo celé číslo 50, bylo by nutné dále experimentovat s necelými počty litrů.

Z tabulky (viz tab. 3) je patrné, že odpovědí na zadanou otázku je, že je potřeba smíchat 90 litrů vody o teplotě 30 °C a 60 litrů vody o teplotě 80 °C.

Tab. 3: Systematické experimentování v příkladu č. 14

Počet litrů vody o teplotě 30 °C	**Počet litrů vody o teplotě 80 °C**	**Teplota namíchané vody ve °C**
150	0	30
149	1	30,3333
148	2	30,6666
147	3	31
…	…	…
90	**60**	**50**
…	…	…
0	150	80

Zdroj: vlastní zpracování

Pokud by nastal případ, kdy by se ve třetím sloupci neobjevilo celé číslo 50, mohli bychom díky rostoucí teplotě vody ve třetím sloupci omezit další experimentování na menší interval, než bylo původní rozpětí. Stačilo by uvažovat počty litrů, které vedou k teplotě směsi o něco menší než 50 °C a hodnoty, které vedou k teplotě o něco větší než 50 °C. Takto vymezený interval, bychom pak mohli dělit na menší a menší jednotky, dokud by se ve třetím sloupci neobjevilo číslo 50.

c) Odhad, ověření a oprava

Další heuristická strategie, která je využitelná při řešení této úlohy, je odhad, ověření a oprava. K řešení využiji jako v předešlém případě tabulkový zápis (viz tab. 4), který zaznamenává možný průběh řešení. Na rozdíl od předchozí strategie systematické experimentování, není nutné omezovat hodnoty ve druhém a třetím sloupci na celá čísla.

Tab. 4: Odhad, ověření a oprava v příkladu č. 14

Pořadí odhadu	**Počet litrů vody o teplotě 30 °C**	**Počet litrů vody o teplotě 80 °C**	**Teplota namíchané vody ve °C**	**Korekce**
1.	100	50	46,6666	+ 3,3334
2.	99	51	47	+3
3.	98	52	47,3333	+ 2,6667
4.	97	53	47,6666	+ 2,3334
5.	96	54	48	+ 2
6.	95	55	48,3333	+ 1,6667

7.	94	56	48,6666	+ 1,3334
8.	93	57	49	+ 1
9.	**90**	**60**	**50**	**0**

Zdroj: vlastní zpracování

Odpověď: Je potřeba 90 litrů vody o teplotě 30 °C a 60 litrů vody o teplotě 80 °C.[11]

d) Vypuštění podmínky[12]

Základ této strategie je ve vypuštění jedné z podmínek, v příkladu č. 14 to bude informace o celkovém počtu litrů. Jestliže označíme počty litrů jednotlivých vod neznámými x pro vodu o teplotě 30 °C a y pro vodu o teplotě 80 °C, získáme tuto rovnici:

$$30 \cdot x + 80 \cdot y = (x + y) \cdot 50,$$

kterou lze upravit na následující diofantovskou rovnici: $30 \cdot y = 20 \cdot x$. Tuto rovnici lze řešit například pomocí tabulkového procesoru (viz tab. 5), kdy vyjádříme hodnoty y jako funkci x: $y = \frac{2}{3}x$. Opět předpokládáme, že počty litrů jsou v celých číslech, takže $x, y \in \mathbb{Z}$. Potom x musí být dělitelné třemi.

Tab. 5: Řešení diofantovské rovnice v příkladu č. 14

x	y	$x + y$
3	2	5
6	4	10
9	6	15
…	…	…
30	20	50
…	…	…
60	40	100
…	…	…
90	**60**	**150**
…	…	…

Zdroj: vlastní zpracování

Za pomoci přidání vynechané podmínky v rámci posledního sloupce s celkovým počtem namíchaných litrů vody je možné úlohu poměrně rychle dořešit.

[11] Z tab. 4 je možné zaznamenat, že celočíselné hodnoty teploty namíchané vody nastávají pouze tehdy, když zvolím počet litrů vody o teplotě 30 i 80 °C, který je dělitelný třemi. Jestliže si řešitel uvědomí tuto vlastnost, může mít úlohu vyřešenu s menším počtem pokusů.

[12] Řešení inspirováno článkem (viz Eisenmann, Břehovský, 2013, s. 186–187)

f) Středoškolské řešení

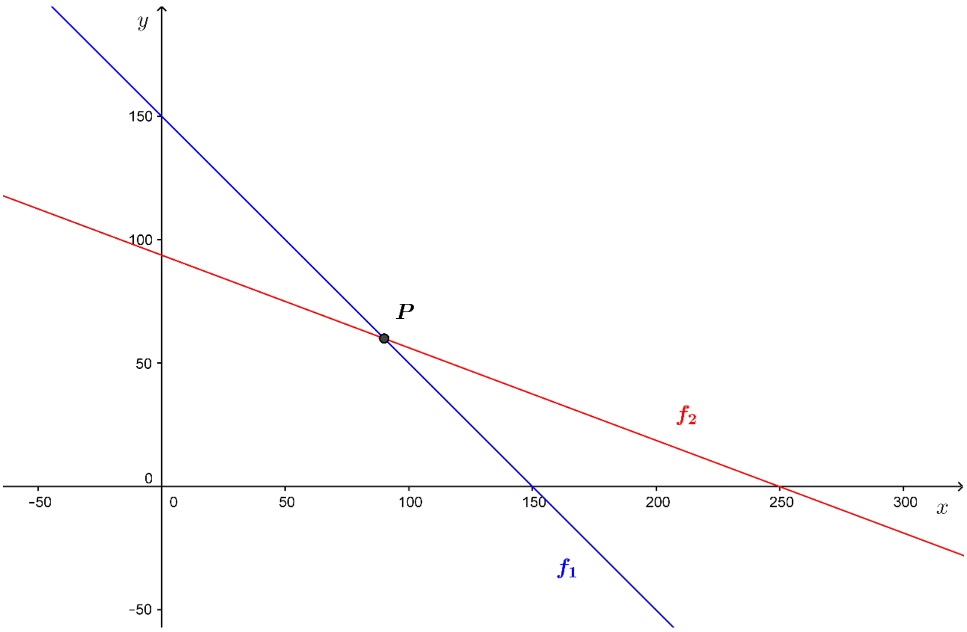
Na střední škole by bylo možné zadat tento příklad také a sledovat, jaké strategie řešení si žáci vyberou. V ideálním případě by se mohl ve třídě objevit žák, který by tuto úlohu řešil přes grafy funkcí, které vznikly vyjádřením jedné neznámé ze dvou rovnic uvedených výše v algoritmickém řešení. Ze zadaných rovnic lze vyjádřit například, jakých hodnot nabývá neznámá *y* v závislosti na neznámé *x*. Jedná se o tyto předpisy lineárních[13] funkcí:

$$f_1 : y = \frac{150 \cdot 50 - 30x}{80};$$

$$f_2 : y = 150 - x.$$

Grafy lineárních funkcí jsou přímky. Poloha dvou přímek pak určuje počet společných bodů a naopak počet společných bodů určuje polohu dvou přímek. V tomto případě se jedná o dvě různoběžné přímky, které mají jeden společný bod. Řešením příkladu jsou pak souřadnice jejich průsečíku. Polohy dvou přímek lze určit za pomoci poznatků z analytické geometrie, nebo přímo nakreslit grafy obou funkcí. V tomto řešení bude reprezentován druhý způsob – nakreslení grafů funkcí (viz obr. 8). Ve výsledném obrázku reprezentují hodnoty na ose *x* počet litrů vody o teplotě 30 °C a hodnoty na ose *y* udávají počet litrů vody o teplotě 80 °C.

Obr. 8: Grafy funkcí *f₁*, *f₂*



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

[13] Lineární funkce má předpis $y = ax + b$, pro $a, b \in \mathbb{R}$.

Z grafu funkcí (viz obr. 8) vyšlo jediné řešení daného příkladu, protože se funkce f_1, a f_2 protnuly v jediném bodě P. Přesné řešení příkladu č. 14 bohužel nevyčteme přímo z grafu funkcí na obr. 8, protože jsme zvolili nedostatečně jemné měřítko. K výsledku se lze dostat zjemňováním měřítka, nebo dopočtem souřadnic bodu P. Zvolíme-li druhý způsob, získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou jsme již řešili v rámci algoritmického řešení (viz řešení a). Pomocí zjemňování měřítka je možné přesný výsledek vyčíst přímo z grafu.

4.2 Zlomky

Zlomky a práce s nimi je nedílnou součástí náplně hodin matematiky na druhém stupni základní školy. Tato látka je doprovázena zajímavými oblastmi jako krácení a rozšiřování zlomků, hledání nejmenších společných násobků jmenovatelů zlomků a dalšími, které je vhodné přiblížit žákům pomocí bádání, objevování a hraní si s čísly.

Z této oblasti jsem vybrala příklad inspirovaný příkladem z matematické olympiády pro 8. ročník základní školy z roku 2005/2006. Kromě toho, že obsahuje práci se zlomky, využívá i práce se studijním průměrem, který si především žáci posledních ročníků ZŠ ostražitě hlídají, protože jim může pomoci k přijetí na vysněné střední školy. Příklad by měl přinášet pro žáky zajímavé téma i obsah.

Příklad č. 15: Studijní průměr

Karel by chtěl mít ve druhém pololetí studijní průměr ze všech předmětů 1,14. Z pozorování z minulých let ví, že má vždy co nejvíce jedniček, právě jednu osminu dvojek a jednu pětku. Kolik známek musí Karel za pololetí nasbírat, aby dosáhl vysněného průměru? Myslíte, že se mu to povede?[14]

a) Přeformulování problému a odhad, ověření a oprava

Výchozím poznatkem je výpočet aritmetického průměru, který dostaneme, když sečteme hodnoty všech známek a následně je vydělíme celkovým počtem známek. Tento zlomek má v našem případě nabývat například hodnoty $\frac{114}{100}$, což je zadaných 1,14.

Dalším důležitým poznatkem je práce se zlomky, které lze krátit a rozšiřovat, a právě tyto operace nabízejí širokou škálu možných řešení. Proto lze zadaný problém přeformulovat

[14] Inspirováno příkladem z Matematické olympiády, autor L. Šimůnek, 2005/2006

na nový problém: který z možných zlomků splňuje zadané podmínky. Jakmile nalezneme vyhovující zlomek, nalezneme i řešení původní úlohy. Hledaný počet známek je jmenovatelem jediného vyhovujícího zlomku.

Po přeformulování problému lze využít další z heuristických strategií, a to systematické experimentování nebo odhad, ověření a oprava. Nejprve ukážeme řešení pomocí strategie odhad, ověření a oprava, kdy začneme ověřovat, zda zlomek $\frac{114}{100}$ splňuje zadané podmínky a požadavky na počty jednotlivých známek. Výpočty budeme zaznamenávat do tabulky (viz tab. 6).

V prvním a druhém odhadu byl problematický výsledek u počtu dvojek, který vyšel jako desetinné číslo, což v zadané situaci vyjít nemůže. Je tedy nutné brát takový počet známek, který je dělitelný osmi. Protože hledáme nejmenší možný počet známek, který dostaneme z rozšíření nebo zkrácení zadaného aritmetického poměru, tak dalším vyhovujícím číslem znázorňujícím počet známek je 200 (viz 3. a 4. odhad).

Tab. 6: Odhad, ověření a oprava při řešení příkladu č. 15

Odhad	Známky	1	2	3	4	5	Má vyjít
1.	Počet známek		12,5			1	100
	Hodnota známek					5	114
	Korekce	Počet dvojek není celé číslo					
2.	Počet známek		6,25			1	50
	Hodnota známek					5	57
	Korekce	Počet dvojek není celé číslo					
3.	Počet známek	174	25			1	200
	Hodnota známek	174	50			5	228
	Korekce	Celková hodnota známek: 229 ≠ 228					
4.	Počet známek	173	25	1		1	200
	Hodnota známek	173	50	3		5	228
	Korekce	Celková hodnota známek: 231 ≠ 228					
5.	Počet známek	349	50			1	400
	Hodnota známek	349	100			5	456
	Korekce	Celková hodnota známek: 454 ≠ 456					
6.	Počet známek	348	50	1		1	400
	Hodnota známek	348	100	3		5	456
	Korekce	Celková hodnota známek: 456 = 456					

Zdroj: vlastní zpracování

Ve 3. a 4. odhadu je však problematický rozpor mezi hodnotou a počtem známek v závislosti na co největším počtu jedniček. Pokud vezmeme největší možný počet jedniček, dostaneme o 1 větší hodnotu známek, než jsme předpokládali. Pokud jednu jedničku nahradíme trojkou či jinou známkou, dostaneme vždy vyšší součet hodnot, než jsme předpokládali. Nikdy v tomto případě nemůže nastat rovnost.

Dalším nejmenším vyhovujícím počtem známek je 400. V tomto případě máme zaručen celočíselný počet dvojek. Jestliže vezmeme co největší počet jedniček, tedy 349, vyjde nám celková hodnota známek o 2 menší než předpokládaná. Tento problém jsme již schopni doladit snížením počtu jedniček o 1 a navýšením počtu trojek o 1 (dvojky navyšovat nelze, protože by jich pak nebyla osmina). Právě tento případ je řešením zadané úlohy, protože vyhovuje podmínkám přeformulovaného i původního problému (viz rovnost zlomků $\frac{114}{100} =$ $= \frac{57}{50} = \frac{228}{200} = \frac{456}{400}$).

Odpověď: Karel musí za pololetí nasbírat nejméně 400 známek. Vzhledem k tomu, že se jedná o počet známek ze všech předmětů, tak by se mu to mohlo podařit.

b) *přeformulování problému a systematické experimentování*

Začátek tohoto postupu je stejný jako v předchozím případě, protože opět vyjdeme z přeformulovaného problému, kdy sledujeme vlastnosti zlomků. V případě systematického experimentování nejdříve vyjádříme aritmetický průměr jako zlomek s nesoudělným čitatelem a jmenovatelem, tím je $\frac{57}{50}$. Následně můžeme testovat zadané podmínky pro všechna rozšíření zlomku z oboru přirozených čísel (*n*). Takových možností je sice nekonečně mnoho, ale protože hledáme to nejmenší řešení, budeme dělat konečný počet experimentů. Výsledky systematického experimentování jsou zaneseny v tab. 7.

Tab. 7: Systematické experimentování při řešení příkladu č. 15

n	Známky	1	2	3	4	5	celkem	Je řešením?
1	Počet známek	42,75	6,25			1	50	
	Hodnota známek	42,75	12,5			5	57	NE
2	Počet známek	86,5	12,5			1	100	
	Hodnota známek	86,5	25			5	114	NE
3	Počet známek	130,25	18,75			1	150	
	Hodnota známek	130,25	37,5			5	171	NE
4	Počet známek	174	25			1	200	

	Hodnota známek	174	50			5	228	NE
5	Počet známek	217,75	31,25			1	250	
	Hodnota známek	217,25	62,5			5	285	NE
6	Počet známek	261,5	37,5			1	300	
	Hodnota známek	261,5	75			5	342	NE
7	Počet známek	305,25	43,75			1	350	
	Hodnota známek	305,25	87,5			5	399	NE
8	Počet známek	348	50	1		1	**400**	
	Hodnota známek	348	100	3		5	456	ANO

Zdroj: vlastní zpracování

Během systematického experimentování mohl řešitel narazit na dva rozpory se vstupními podmínkami. Buď nevyšel počet dvojek jako celé číslo, nebo nabývala celková hodnota vždy větších hodnot než ta předpokládaná, nebo oboje naráz. Prvním a zároveň jediným řešením je případ, kdy byl počet známek 400.

4.3 Obsahy obrazců

Poznatky z geometrie vyučované na základní škole by měly být pro názornost a lepší představivost podle mého názoru vyučované formou experimentů, projektové výuky, badatelsky orientované výuky, problémové výuky apod. Při použití těchto metod si žáci osvojí například systém vytváření vzorců pro obvod a obsah známých geometrických útvarů a budou následně schopni vymýšlet výpočty pro obsah dalších obrazců.

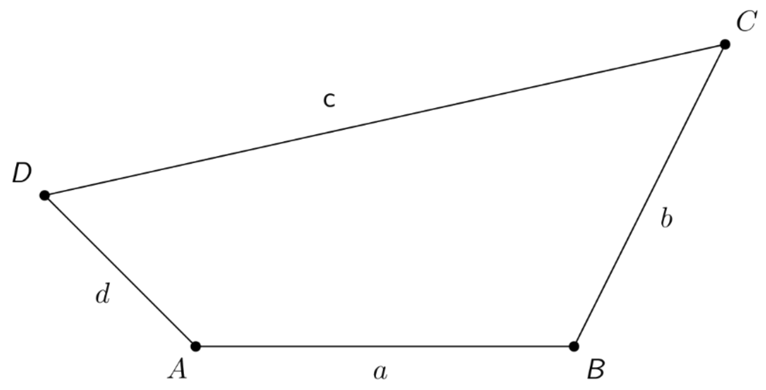
Z této oblasti jsem vybrala dva příklady výpočtu obsahu obrazců, jedním z nich je čtyřúhelník podobný lichoběžníku, který ale nemá žádnou dvojici rovnoběžných stran, druhý obrazec je pravoúhlý lichoběžník. Při jejich řešení lze použít různé heuristické strategie, jak dojít k výsledku. Většinu z nich představím v rozboru řešení, ale věřím, že žáci v hodinách matematiky vymyslí i další řešení.

<u>Příklad č. 16: Obsah obrazce 1</u>

Vypočtěte obsah zadaného obrazce *ABCD* (viz obr. 8), jestliže znáte rozměry všech jeho stran:

$$\boldsymbol{a = 500}\ \text{cm}, \boldsymbol{b = \sqrt{200^2 + 400^2}}\ \text{cm}, \boldsymbol{c = \sqrt{200^2 + 900^2}}\ \text{cm}, \boldsymbol{d = \sqrt{200^2 + 200^2}}\ \text{cm}.$$

Obr. 8: Obrazec *ABCD*

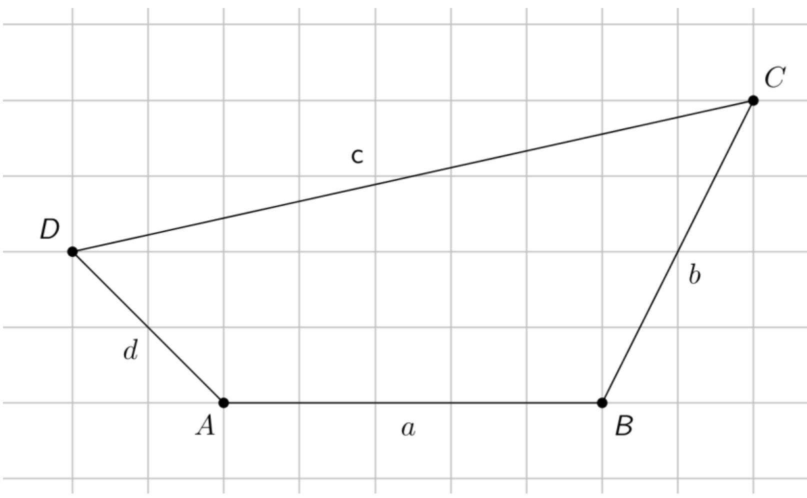


Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

a) Zavedení pomocného prvku a rozklad na jednodušší případy

Zadaný obrazec není žádným ze známých geometrických útvarů, proto k výpočtu jeho obsahu nelze použít obecný vzorec. V tomto případě bude nutné vymyslet výpočet speciálně pro zadaný obrazec. Jestliže obrazec rozdělíme na menší obrazce, nejlépe známé geometrické útvary, k výpočtu jejichž obsahů lze jednoduše použít vzorce, a tyto dílčí, na výpočet jednodušší, obsahy sečteme, dostaneme obsah zadaného obrazce. Na první pohled lze využít dělení na dva trojúhelníky, nebo lichoběžník a trojúhelník. Vhodných dělení existuje více, záleží na řešiteli, který si vybere.

Obr. 9: Obrazec *ABCD* ve čtvercové síti

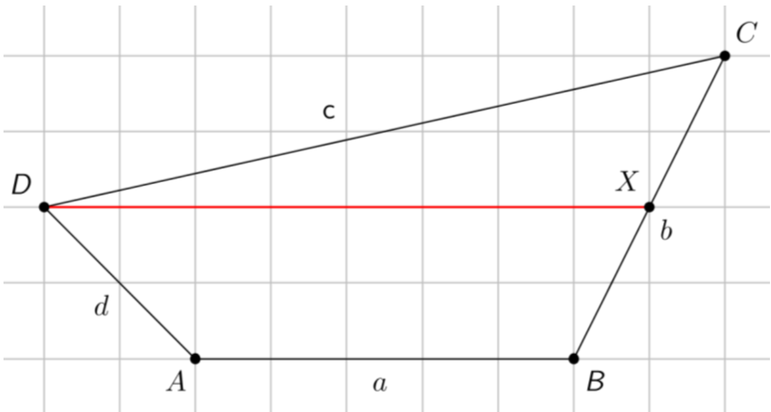


Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

I když zavedeme pomocné prvky, nadále je řešení úlohy značně komplikované a množství „nehezkých“ výpočtů s desetinnými čísly může řešitele odradit od řešení. Zvolme proto další pomocný prvek, který celou úlohu výrazně zjednoduší. Tímto prvkem je zakreslení útvaru do čtvercové (pravoúhlé) sítě se čtverci o rozměrech $100\text{ cm} \times 100\text{ cm}$ (viz obr. 9). K tomuto kroku by mělo řešitele navést zadání hodnot délek stran pomocí součtu druhých mocnin pod odmocninou, což by mohlo dále navést řešitele k využití Pythagorovy věty pro výpočet délek těchto stran jako délek odvěsen v pravoúhlých trojúhelnících.

Dále budeme příklad řešit pouze pro situaci, kdy jsme obrazec *ABCD* rozdělili na lichoběžník a trojúhelník. Pomocným prvkem v tomto případě bude úsečka *DX*, která je rovnoběžná s úsečkou *AB* a bod *X* je průsečíkem této rovnoběžky a strany *BC* (viz obr. 10).

Obr. 10: Pomocné prvky v obrazci *ABCD*



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

Obsah lichoběžníku označíme S_1 a vypočteme ho pomocí vzorce: $S_1 = \frac{a+c}{2} \cdot v$, kde v čitateli je součet délek dvou rovnoběžných stran a *v* je jejich vzdálenost. Dopočteme: $S_1 = \frac{a+|DX|}{2} \cdot v = \frac{500+800}{2} \cdot 200\text{ cm}^2 = 130\,000\text{ cm}^2 = \mathbf{13\ m^2}$.

Obsah trojúhelníka *DXC* označíme S_2 a vypočteme ho pomocí vzorce: $S_2 = \frac{|DX|}{2} \cdot v$, kde *v* je výška na stranu *DX*. Dopočteme: $S_2 = \frac{800}{2} \cdot 200\text{ cm}^2 = 80\,000\text{ cm}^2 = \mathbf{8\ m^2}$.

Odpověď: Obsah obrazce *ABCD* je **21 m²**.

b) Grafické řešení pomocí čtvercové sítě

Obsah obrazce *ABCD* lze určit také „pouze“ za pomoci čtvercové sítě z předešlého řešení. Jestliže obrazec zakreslíme do čtvercové sítě (viz obr. 9), stačí spočítat počet čtverců, které jsou útvarem pokryty celé, a těch které jsou sice pokryty částečně, ale lze z nich celé čtverce sestavit. Jeden čtverec má obsah: $100 \cdot 100\text{ cm}^2 = 10\,000\text{ cm}^2 = 1\text{ m}^2$. Obrazec obsahuje 14 celých čtverců, jejichž obsah je **14 m²**. Dále strana *AD* dělí dva čtverce na polovinu, proto necelé čtverce přiléhající na tuto stranu mají dohromady obsah **1 m²**. Podobně dělí i úsečka *BX* obdélník složený ze dvou čtverců na polovinu, proto obsah částí čtverců, jejichž jedna strana je část úsečky *BX* je **1 m²**. Lehce obtížnější to bude u obsahu částí čtverců, jejichž jedna strana je část úseček *XC* a *CD*. Podíváme-li se na obr. 9 podrobně, vidíme, že všechny tyto části čtverců v trojúhelníku *CXD* dají dohromady 5 celých čtverců, tj. **5 m²**. Toto tvrzení je důsledkem úvah, že úsečky *XC* i *CD* jsou úhlopříčkami jednotlivých mřížových obdélníků, které těmito body prochází, a dělí je na dvě stejně velké části.

Tímto způsobem řešení lze dojít až k tzv. Pickově formuli, která zní: *„Obsah jednoduchého[15] mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech (říkejme mu třeba mřížový mnohoúhelník) můžeme spočítat takto: Označme V počet mřížových bodů, které jsou uvnitř mnohoúhelníku, a H buď počet mřížových bodů, které jsou na jeho hranici. Hledaný obsah je pak roven* $V + \frac{H}{2} - 1$*.“* (Hančl, 2012, s. 9)

c) Přeformulování problému

Pro výpočet obsahu obrazců je možné použít též řešení, které využívá doplnění obrazce na obdélník, resp. čtverec či jiný základní geometrický útvar a následné odčítání nadbytečných částí. Často tyto části tvoří také jednoduché základní geometrické útvary, jejichž obsah lze vyjádřit pomocí známých vzorců. Místo obsahu útvarů, ze kterých lze složit zadaný útvar, vlastně počítáme obsah útvarů, které tvoří spolu se zadaným obrazcem pravoúhelník.

V příkladu č. 16 označme tento pravoúhelník *MNOP* (viz obr. 11). Obsah obdélníku *MNOP* je $S = 9 \cdot 4\ \mathrm{m}^2 = 36\ \mathrm{m}^2$. Od tohoto obsahu budeme odečítat obsahy tří trojúhelníků *MAD*, *BNC* a *CPD*, které po řadě označíme S_1, S_2, S_3. Protože se jedná o pravoúhlé trojúhelníky, jejich obsah lze vypočítat jako poloviční součin délek obou odvěsen. Dopočteme rovnou v délkách stran převedených na metry:

$$S_1 = \frac{2 \cdot 2}{2}\ \mathrm{m}^2 = 2\ \mathrm{m}^2,$$

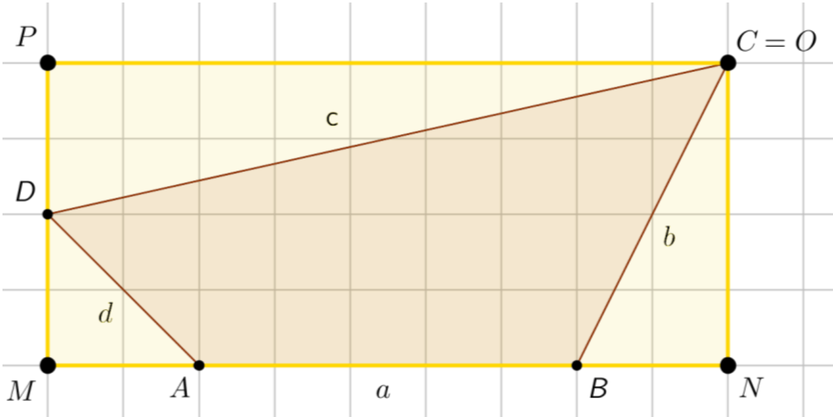
$$S_2 = \frac{2 \cdot 4}{2}\ \mathrm{m}^2 = 4\ \mathrm{m}^2,$$

$$S_3 = \frac{2 \cdot 9}{2}\ \mathrm{m}^2 = 9\ \mathrm{m}^2.$$

Obsah obrazce *ABCD* je: $36 - 2 - 4 - 9\ \mathrm{m}^2 = 36 - 15\ \mathrm{m}^2 = 21\ \mathrm{m}^2$.

[15] Jednoduchý obrazec poznáme podle toho, že jeho obvod neprotíná sebe sama. (součást citovaného textu)

Obr. 11: Obrazec *ABCD* doplněný na obdélník *MNOP*



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

d) Řešení s použitím určitých integrálů

Dalším řešením příkladu č. 16 by mohlo být řešení s využitím integrálního počtu, který je na některých středních školách probírán. Určitý integrál bývá zde často zaváděn jako „obsah pod grafem funkce“. Zvolme si ve čtvercové síti z předchozích řešení kartézskou soustavu souřadnic, která má počátek v bodě *M* (viz obr. 11). Dále označme čtyři funkce f_1, f_2, f_3, f_4, jejichž grafy jsou přímky, na kterých leží strany obrazec *ABCD*.

$$\text{úsečka } AB\colon f_1\colon y = 0;\ \text{úsečka } BC\colon f_2\colon y = 2x - 14;$$

$$\text{úsečka } CD\colon f_3\colon y = \frac{2}{9}x + 2;\ \text{úsečka } AD\colon f_4\colon y = -x + 2$$

Pro výpočet obsahu obrazce pomocí integrálu použijeme strategii rozklad na jednodušší případy. Interval $I = \langle 0, 9\rangle$ rozdělíme na tři menší intervaly I_1, I_2, I_3, ve kterých jsme schopni určit obsahy útvarů ohraničených dvěma funkcemi. Obsahy těchto útvarů označíme S_1, S_2, S_3. Krajními body těchto intervalů budou body *M*, *A*, *B*, *N* (viz obr. 12), kde *N* je kolmý průmět bodu *C* na přímku *AB*.

$$I_1 = \langle M; A\rangle = \langle 0; 2\rangle;\ I_2 = \langle A; B\rangle = \langle 2; 7\rangle;\ I_3 = \langle B; N\rangle = \langle 7; 9\rangle$$

Obsahy jednotlivých částí vypočteme jako rozdíl integrálů funkcí na daném intervalu. Obsah první části S_1 na intervalu $I_1 = \langle 0, 2\rangle$ vypočteme jako:

$$S_1 = \int_0^2 f_3(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f_4(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (\tfrac{2}{9}x + 2)\mathrm{d}x - \int_0^2 (-x + 2)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2\cdot x^2}{9\cdot 2} + 2x + \tfrac{x^2}{2} - \right.$$

$$\left. -2x\right]_0^2 = \left[\tfrac{11x^2}{18}\right]_0^2 = \tfrac{44}{18} = \tfrac{22}{9}\ (\mathrm{m}^2).$$

Obsah druhé části S_2 na intervalu $I_2 = \langle 2, 7\rangle$ dopočítáme stejným způsobem:

$S_2 = \int_2^7 f_3(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^7 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^7 (\frac{2}{9}x + 2)\mathrm{d}x - \int_2^7 (0)\mathrm{d}x = \left[\frac{2 \cdot x^2}{9 \cdot 2} + 2x - 0\right]_2^7 =$

$= \left[\frac{x^2+18x}{9}\right]_2^7 = \frac{175-40}{9} = \frac{135}{9} = 15\ (\mathrm{m}^2).$

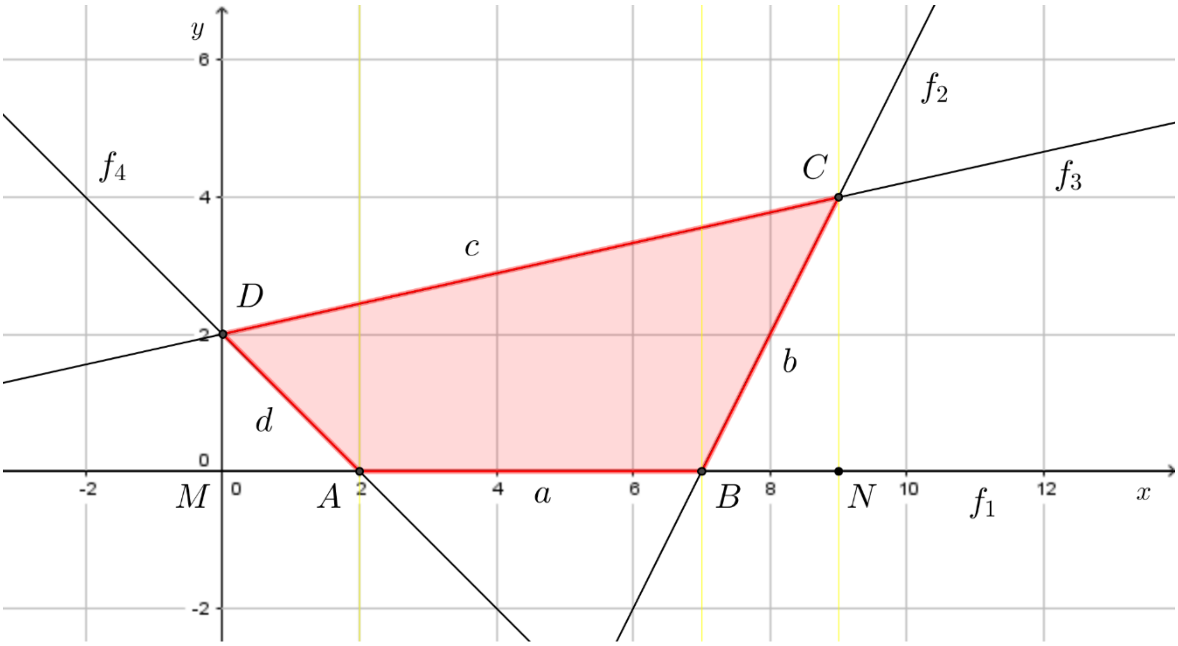
Obsah poslední třetí částí S_3 na intervalu $I_3 = \langle 7, 9\rangle$ vypočteme analogicky:

$S_3 = \int_7^9 f_3(x)\,\mathrm{d}x - \int_7^9 f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_7^9 (\frac{2}{9}x + 2)\mathrm{d}x - \int_7^9 (2x - 14)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{9} + 2x - x^2 + \right.$

$\left. +14x\right]_7^9 = \left[\frac{-8x^2+16 \cdot 9x}{9}\right]_7^9 = \frac{648-616}{9} = \frac{32}{9}\,(\mathrm{m}^2).$

Celkový obsah obrazce ABCD je $S = \frac{22}{9} + 15 + \frac{32}{9}\ \mathrm{m}^2 = 21\ \mathrm{m}^2$.

Obr. 12: Obrazec *ABCD* v kartézské soustavě souřadnic



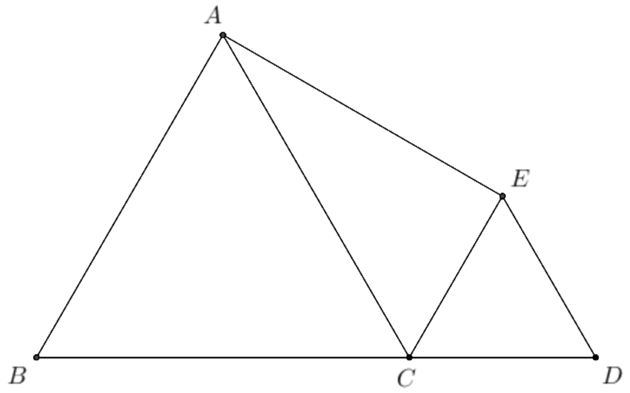
Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

<u>Příklad č. 17: Obsah obrazce 2</u>

„Dva rovnostranné trojúhelníky ABC a ECD na obrázku (viz obr. 13) mají po řadě strany délek 2 a 1. Určete obsah čtyřúhelníku ABCE.“[16] **(Calábek, Švrček, 2004, s. 41)**

[16] Úloha převzata ze zadání matematické soutěže Matematický klokan, kategorie Student, která je určená pro 3. a 4. ročníky středních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií

Obr. 13: Trojúhelníky *ABC* a *ECD*



Zdroj: Calábek, Švrček, 2004, s. 41 (vlastní zpracování v GeoGebra)

a) Algoritmické řešení

V případě, že si řešitel uvědomí, že jsou strany *AB* a *CE* rovnoběžné, může zadaný čtyřúhelník *ABCE* nazvat lichoběžníkem a počítat jeho obsah podle vzorce: $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$, kde součet $a + c$ označuje součet délek rovnoběžných stran a *v* je vzdálenost těchto stran.

Obě délky stran *AB* i *CE* jsou známé ze zadání ($|AB| = 2, |CE| = 1$). Vzdálenost *AB* a *CE* je v tomto případě shodná s velikostí výšky v rovnostranném trojúhelníku *ABC*, kterou lze dopočítat například z Pythagorovy věty: $v^2 = 2^2 - 1^2; v = \sqrt{3}$.

Dosazením do vzorce získáme výsledek: $S = \frac{(2+1)\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$.

b) Zavedení pomocného prvku a rozklad na jednodušší případy

Pokud řešitel nezjistil, že zadaný čtyřúhelník *ABCE* je lichoběžník, může ho považovat za obecný obrazec, u kterého nelze využít k výpočtu jeho obsahu obecně platného vzorce. V tomto případě se nabízí řešení přes zavedení pomocného prvku v podobě úseček, které obrazec rozdělí například na dva trojúhelníky nebo lichoběžník a trojúhelník. Výpočet obsahu jednotlivých částí je pak následně možné provést jednodušeji pomocí vzorců.

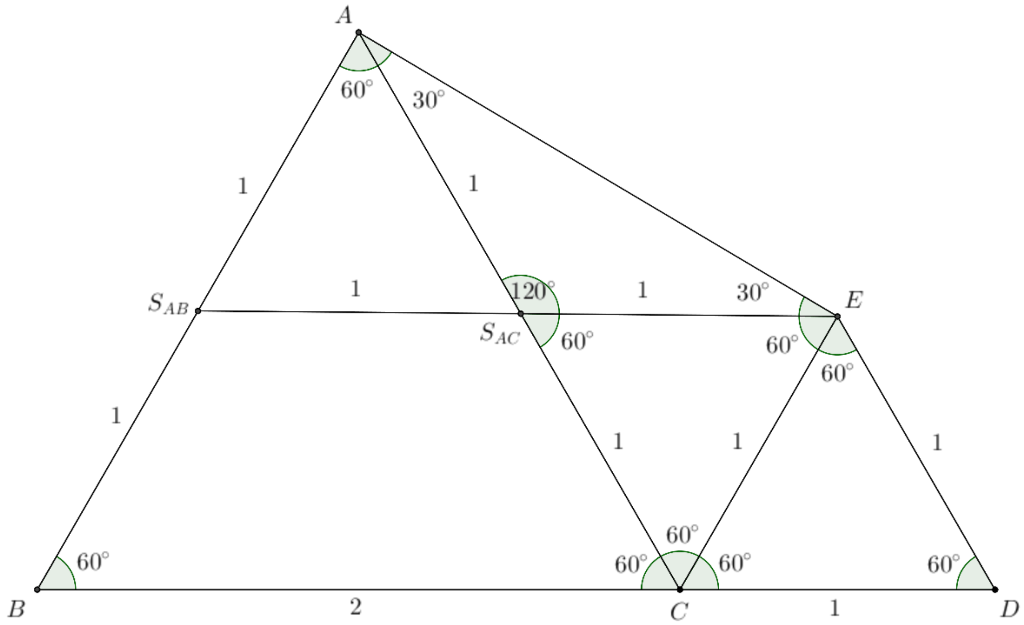
Nejdříve využijme zadání, kde je jeden z možných pomocných prvků již zakreslen, je jím strana *CA*, která dělí čtyřúhelník *ABCE* na rovnostranný trojúhelník *ABC* a trojúhelník *CEA* (viz obr. 13). Obsah rovnostranného trojúhelníka (S_1) se zadanou délkou strany lze dopočítat z obecného vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka: $S_1 = \frac{|BC|\cdot v}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Označení v odpovídá velikosti výšky v trojúhelníku *ABC*, jejíž hodnota byla vypočtena v předešlém řešení (viz a).

Obsah trojúhelníka *CEA* (S_2) lze určit přes vzorec pro obsah obecného trojúhelníku, nebo si lze všimnout, že se jedná o trojúhelník pravoúhlý. Důkaz, že v trojúhelníku *CEA* je úhel při vrcholu *E* pravý, lze provézt přes dopočty úhlů v jednotlivých trojúhelnících (viz obr. 14)[17]. K dopočtu úhlů lze použít další pomocný prvek, kterým je střední příčka trojúhelníku *ABC* ohraničená body S_{AB} a S_{AC}. Díky této příčce vzniknou v zadaném obrazci dva rovnostranné trojúhelníky $S_{AB}S_{AC}A$ a CES_{AC}, které jsou shodné s trojúhelníkem *CDE*. Vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku mají všechny shodnou velikost, a to 60°. Velikost úhlu $ES_{AC}A$ lze vyjádřit jako: $180° - 60° = 120°$. Protože je trojúhelník $ES_{AC}A$ rovnoramenný, bude mít dva shodné úhly, kterými jsou EAS_{AC} a AES_{AC}. Jejich velikost je $\frac{180°-120°}{2} = 30°$. Úhel *AEC* je po sečtení dílčích úhlů úhel pravý, jehož velikost je 90°, proto o trojúhelníku *AEC* lze říci, že je pravoúhlý. Jeho obsah lze určit takto:

$$S_2 = \frac{|CE| \cdot |AE|}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Výška *v* je v tomto případě strana *AE*, jejíž velikost lze určit pomocí Pythagorovy věty nebo goniometrických funkcí. Obsah čtyřúhelníku *ABCE* je: $S = S_1 + S_2 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Obr. 14: Zakreslení velikostí úhlů v obrazci *ABCE*



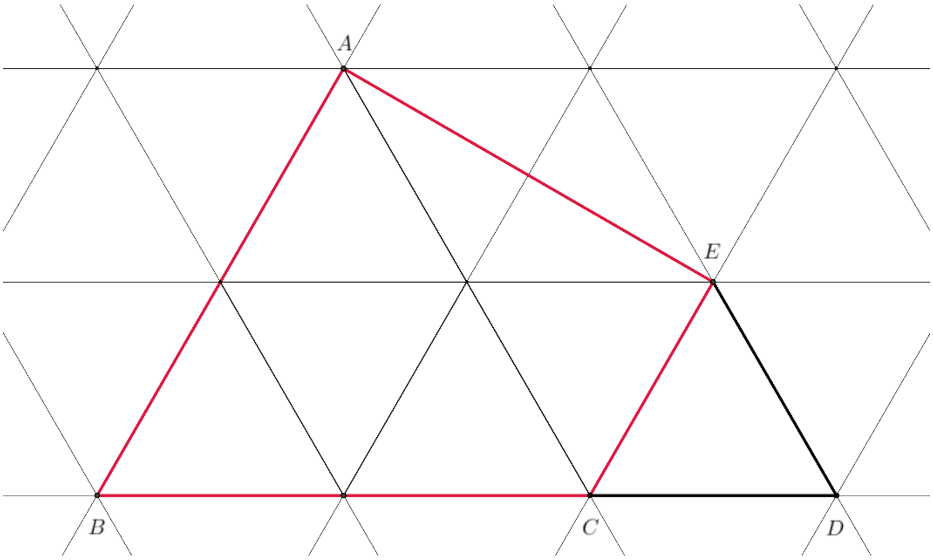
Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

[17] Protože je příklad určen žákům 3. a 4. ročníku středních škol, předpokládám jejich znalost v oblasti práce s úhly v trojúhelnících, součet vnitřních úhlů atd. Důkaz tedy nebude detailně popisovat a zdůvodňovat každý krok.

c) Grafické řešení pomocí trojúhelníkové sítě

Dalším vhodným pomocným prvkem, který může řešiteli přinést názornější vhled do situace, je zakreslení zadaných trojúhelníků *ABC* a *ECD* do trojúhelníkové sítě tvořené rovnostrannými trojúhelníky s délkou strany 1 (viz obr. 15).

Obr. 15: Obrazec *ABCE* v trojúhelníkové síti 1x1x1



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

Z obrázku (obr. 15) je patrné, že se zvýrazněný čtyřúhelník *ABCE* skládá z pěti celých trojúhelníku a dvou necelých, které dohromady tvoří jeden celý trojúhelník. Výsledný obsah je pak možné nalézt jako šestinásobek obsahu jednoho trojúhelníka tvořícího síť (S_T).

$S = 6 \cdot S_T = 6 \cdot \frac{1 \cdot v}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$. Obsah čtyřúhelníku *ABCE* je $S = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

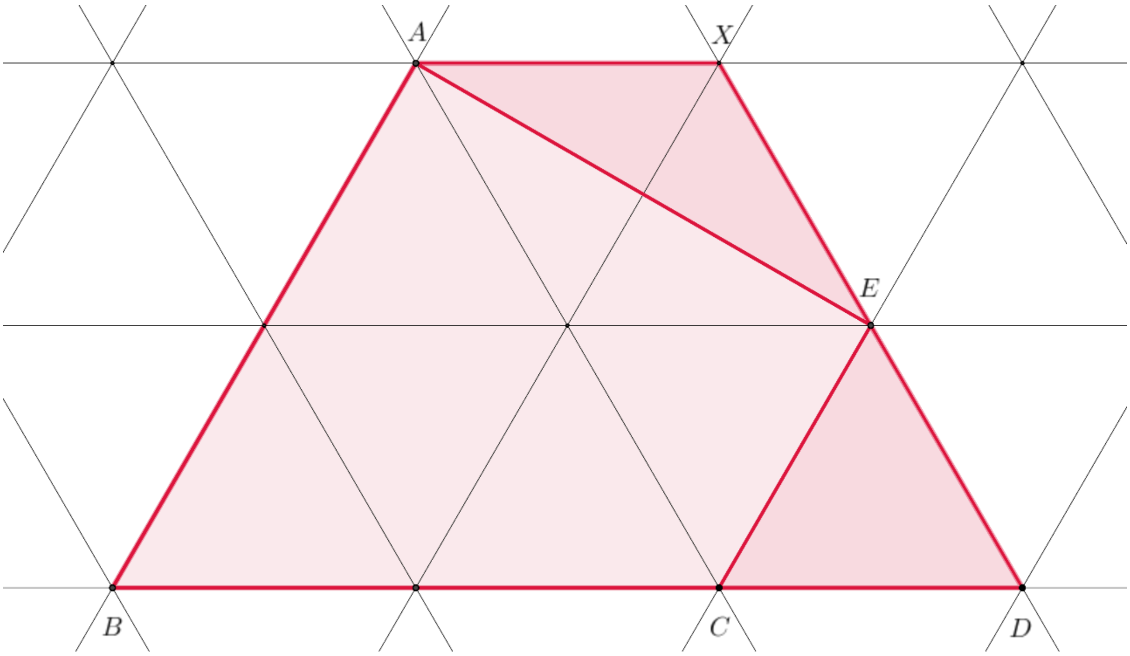
d) Přeformulování problému

Stejně jako v předešlém příkladu (viz příklad č. 16) i zde lze využít řešitelské strategie přeformulování problému pomocí doplnění zadaného obrazce na lichoběžník nebo rovnostranný trojúhelník nebo další obrazce. Důvodem pro doplnění bylo následné odečítání obsahu nadbytečných částí od obsahu doplněného obrazce.

Doplňme čtyřúhelník *ABCE* například na lichoběžník *ABDX* (viz obr. 16). Obsah tohoto lichoběžníku je podle vzorce: $S = \frac{(|BD| + |AX|) \cdot |XC|}{2} = \frac{(3+1) \cdot \sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Obsah trojúhelníku *AXE* označíme S_1 a dopočteme podle vzorce: $S_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Obsah trojúhelníku *CDE* jsme počítali již výše (viz d): $S_2 = \frac{\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Obsah čtyřúhelníku *ABCE* dopočteme takto: $S_{ABCE} = S - S_1 - S_2 = 2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Obr. 16: Čtyřúhelník *ABCE* doplněný na lichoběžník *ABDX*



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

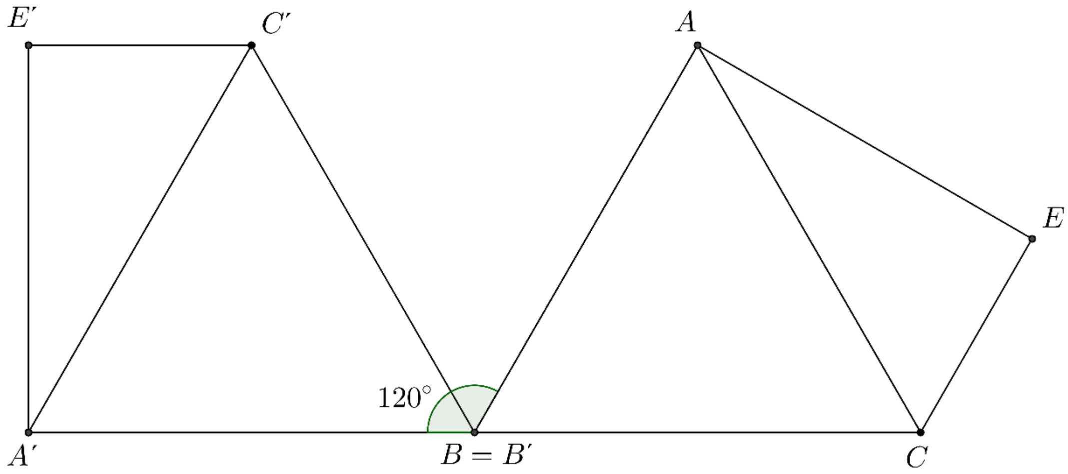
e) Přeformulování problému 2 a středoškolské řešení

Další možná řešení příkladu č. 17 se objeví, pokud zadaný obrazec zobrazíme v některém shodném zobrazení. Protože cílem je určit obsah, musíme vybrat právě shodná zobrazení, která zachovávají velikosti délek stran, úhlů i obsahy. Pokud bychom využili podobná zobrazení, museli bychom řešení založená na poznatcích z oblasti podobností nazvat analogiemi, nikoliv přeformulování problému.

Při řešení příkladu č. 17 využijeme rotaci (otočení) lichoběžníku *ABCE* o 120° se středem rotace v bodě *B* (rotace proti směru hodinových ručiček). Výsledkem tohoto zobrazení bude shodný lichoběžník $A'B'C'E'$ ležící v poloze, která zdůrazňuje především jednu z jeho vlastností, že je pravoúhlý (viz obr. 17). Využití rotace při řešení geometrických úloh přináší žákům další možnosti řešení zadaného problému.

Vzhledem k vlastnostem zadaného čtyřúhelníku *ABCE* budeme nyní dále řešit příklad pomocí integrálního počtu, stejně jako tomu bylo v předešlém příkladu č. 16 (viz 16 d). Nabízejí se jistě i další způsoby výpočtu obsahu obrazce jako například rozdělení lichoběžníku na obdélník a pravoúhlý trojúhelník a následné vypočtení jejich obsahů, nebo zakreslení tohoto shodného lichoběžníku ve známé čtvercové síti s dopočtem čtverců, které lichoběžník zaujímá, a další.

Obr. 17: Rotace čtyřúhelníku *ABCE* (R$_{B,\ 120°}$)



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

Pro určení popisu jednotlivých lineárních funkcí, které ohraničují lichoběžník $A'B'C'E'$, využijeme zakreslení tohoto obrazce v kartézské soustavě souřadnic, která má počátek v bodě A' (viz obr. 18). Jednotlivé funkce označíme po řadě f_1, f_2, f_3, f_4. Jejich předpisy jsou:

$$\text{úsečka } C'E'\colon f_1\colon y = \sqrt{3}x;\ \text{úsečka } B'C'\colon f_2\colon y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3};$$

$$\text{úsečka } A'B'\colon f_3\colon y = 0;\ \text{úsečka } A'E'\colon f_4\colon x = 0$$

Interval, na kterém budeme určovat obsah pod grafem funkcí, je interval $\langle 0; 2\rangle$. Tento interval rozdělíme dále na dva intervaly, na kterých budeme určovat obsah jednotlivých částí obrazce:

$$I_1\colon x \in \langle 0,1\rangle, I_2 \in \langle 1,2\rangle.$$

Obsah lichoběžníku A´B´C´E´ vypočteme jako součet určitých integrálů:

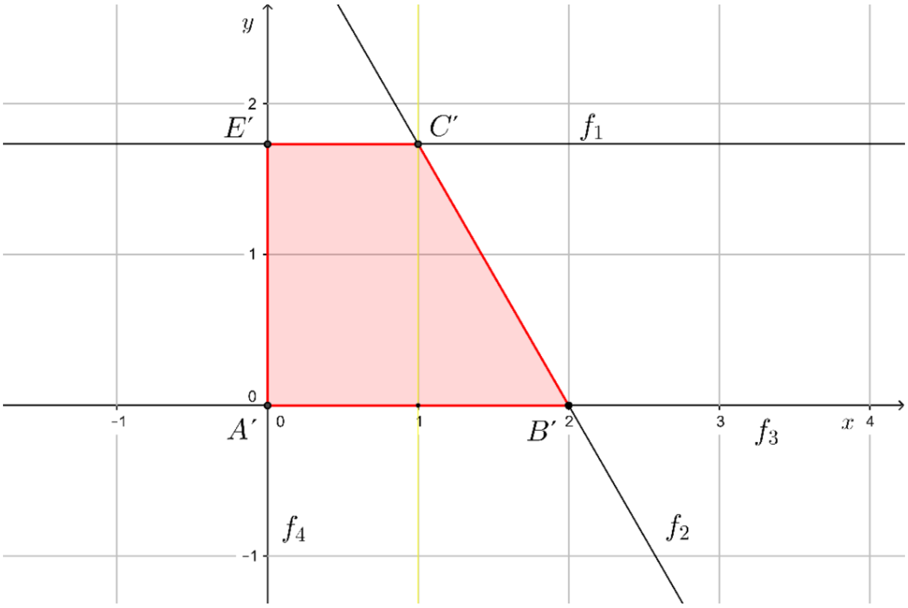
$$S_{A'B'C'E'} = \int_0^1 f_1\,(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f_2\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{3}\,dx + \int_1^2 (-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\,)\,dx =$$

$$= \left[\sqrt{3}x\right]_0^1 + \left[-\frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 2\sqrt{3}x\right]_1^2 = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Předpokládáme, že si žáci střední školy, na kterých je integrální počet vyučován, již dostatečně osvojili práci s funkcemi, vyjádření jejich předpisu a umějí pracovat s integrálním počtem, proto řešení neobsahuje detailní přehled jednotlivých kroků řešení. Zadání tohoto příkladu by mohlo být užito jako motivační úloha při práci s určitými integrály a k demonstraci jejich aplikace na obsahy rovinných útvarů.

Obr. 18: Lichoběžník *A´B´C´E´* v kartézské soustavě souřadnic



Zdroj: vlastní zpracování v GeoGebra

4.4 Několik neřešených úloh na závěr

<u>Příklad č. 18:</u> Pan Kopka je vášnivý zahrádkář a matematik. Svoje záhonky na zahradě si udržuje vždy ve čtvercovém tvaru a jednotlivé plodiny na ně sází do pravidelných útvarů, které vznikají takto: v každém dalším řádku je o sazenici méně (resp. více) než v řádku předešlém a v posledním (resp. prvním) řádku je vždy pouze jedna sazenice dané plodiny. Navíc se pan Kopka snaží každý rok zvětšit svůj záhon o jeden řádek a jeden sloupec. Jak velké dva záhony potřebuje pan Kopka letos na jaře vytvořit, když se rozhodl vysázet o 4 sazenice zelí, 5 jahodníků, 8 sazenic dýní a o 9 sazenic rajčat více než vloni? Uvažujme, že jsou sazenice sázeny ve stejně širokých řádcích i sloupcích.[18]

Pomocná berlička při výběru řešitelské strategie:

Tuto úlohu lze řešit například graficky, pomocí systematického experimentování, cestou pokus-ověření-oprava, pomocí rozdělení na jednodušší případy (jednotlivé záhony), přes přeformulování problému, zavedení pomocného prvku nebo lze uplatnit i vypuštění podmínky. Cílem úlohy je přijít na vztah mezi trojúhelníkovými a čtvercovými čísly, že součet dvou po sobě jdoucí trojúhelníkových čísel tvoří číslo čtvercové. K tomuto závěru lze jistě využít i strategii konkretizace a zobecnění.

<u>Příklad č. 19:</u> Anička má velmi ráda plátkový sýr, takže si ho dává každý den ke snídani. Jednoho dne si vymyslela hru, že každý den rozdělí čtvercový plátek sýru na tolik čtverců (ne nutně stejně velkých), kolikátý je zrovna den v roce. S hrou začala až 4. ledna, protože zjistila, že z jednoho plátku jí nikdy 2 nebo 3 čtverce nevzniknou.

a. Najdi alespoň 3 způsoby, jak mohla Anička čtvercový plátek sýra rozdělit 14. a 17. ledna.
b. Opakovala se některý další den stejná situace jako 2. a 3. ledna, kdy dané rozdělení neexistovalo?
c. Zobecni svá zkoumání do návodu, jak tvořit jednotlivá dělení pro nekonečně mnoho dnů.[19]

[18] Inspirováno problémem 3 (Kopka, 2013, s. 160)

[19] Inspirováno úlohou rozdělení čtverce na čtverce (Kopka, 2013, s. 177–179)

Pomocná berlička při výběru řešitelské strategie:

Vzhledem k poslednímu úkolu bude jistě použita strategie konkretizace a zobecnění, dále by mohla být při řešení využita strategie systematické experimentování nebo grafické znázornění.

<u>Příklad č. 20:</u> *„Ze čtverce byl vytvořen obdélník tak, že dvě jeho strany byly o 2 m prodlouženy a druhé dvě byly o 2 m zkráceny. Obsah nově vzniklého obdélníku se rovná 99 % obsahu původního čtverce. Urči délku strany tohoto čtverce."* (Pangea, 2016, s. 12)

Pomocná berlička při výběru řešitelské strategie:

Výběr systematického experimentování je při řešení tohoto příkladu možný, ale poněkud zdlouhavý. Rychlejší cesta je přes strategii odhad, ověření a oprava. Nejrychlejší způsob řešení však zaručuje sestavení rovnice nebo přeformulování problému.

<u>Příklad č. 21:</u> *„Babička má na dvoře jen králíky a slepice. Zapomněla, kolik má kterých. Ví jen, že má celkem 35 zvířat, která mají celkem 110 nohou. Kolik má králíků a kolik má slepic?"* (Pangea, 2015, s. 4)

Pomocná berlička při výběru řešitelské strategie:

K řešení této úlohy lze využít jak hravé grafické řešení, tak sofistikovanější strategie využívající grafů funkcí, strategii odhad, ověření a oprava či jen zkusit štěstí za využití strategie pokus-omyl.

Závěr

Cílem této práce je seznámit čtenáře s nejčastějšími heuristickými strategiemi používanými při řešení úloh na druhém stupni základní školy a na střední škole a dále na konkrétních úlohách předvést řešení jednoho příkladu pomocí více heuristických strategií. Vzhledem k různorodosti a příliš obecnému vymezení heuristických strategií, nebylo v mých silách sestavit kompletní soubor všech existujících heuristických strategií. Zaměřila jsem se pouze na ty strategie, které se mohou nejčastěji objevit při řešení matematických úloh na druhém stupni základní školy a na střední škole.

Základními prameny pro tvorbu přehledu heuristických strategií byly dva zdroje: Kopkovo Umění řešit matematické problémy a články a publikace kolektivu autorů Novotná, Eisenmann, Přibyl vzniklé v rámci řešení projektu GAČR P407/12/1939. Syntézou poznatků z obou zdrojů vznikl soubor heuristických strategií, který kromě teoretického vymezení a charakteristiky použití jednotlivých strategií obsahuje i ukázkové příklady řešené danou strategií.

Pokladem pro tvorbu úloh, které lze řešit pomocí více heuristických strategií, byla především zadání různých matematických soutěží jako Matematická olympiáda, Matematický klokan, Pangea a další. Některá zadání vybraných úloh byla inspirována učebnicemi matematiky nebo jinými učebními texty. Výsledkem této části práce je soubor čtyř úloh tematicky orientovaných na oblast míchání směsí, práce se zlomky a určení obsahu zadaného obrazce. Tyto příklady jsou dále doplněny o některá možná řešení od ukázky algoritmického řešení (tzv. ze „školní tabule“), přes řešení heuristickými strategiemi, po středoškolské řešení, dovoluje-li to povaha příkladu.

Zkoumaná problematika je z mého pohledu velmi zajímavá a tematicky nevyčerpaná. Bylo by možné vytvořit obsáhlejší soubor heuristických strategií využitelných i pro řešení úloh na vysoké škole. Dále by bylo zajímavé zkoumat, jaké strategie žáci při řešení úloh použijí nejčastěji, či intuitivně. Nebo jak žáky při řešení úloh k heuristickým strategiím navézt tak, aby se z jejich heuristických řešení nestaly algoritmy. Obecně se nabízejí i nadále otázky, jak u žáků pracovat s rozvojem tvůrčího myšlení nejen v hodinách matematiky a jak udržet žákovu radost z poznávání. Neméně zajímavé by také bylo zjistit, jak častý je výskyt konstruktivistické výuky ve vyučování a kolik procent učitelů vede své žáky k využití heuristických strategií při řešení úloh.

Přehled zdrojů

Tištěné zdroje

HARTL, Pavel a Helena HARTLOVÁ. *Psychologický slovník*. Vydání první. Praha: Portál, 2000. ISBN 807178303X.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. ISBN 8071785814.

KADLEČEK, Jiří a Oldřich ODVÁRKO. *Matematika pro 9. ročník základní školy. 1, Lomené výrazy; Rovnice; Soustavy rovnic*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro základní školy. ISBN 8071961949.

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2002. ISBN 807178253X.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. 1. vyd. Praha: HAV, 2013. ISBN 9788090362550.

KRAUS, Jiří. Nový akademický slovník cizích slov [A-Ž]: [studentské vydání]. Vyd. 1. Praha: Academia, 2005. ISBN 8020014152.

KUŘINA, F.: O matematice a jejím vyučování. Obzory matematiky, fyziky a informatiky. 2002, roč. 31, č. 1, s. 1–8.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. 1. Brno: Paido, 2003. ISBN 8073150395.

OKOŃ, Wincenty. K základům problémového učení. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 9788021048348.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. Pedagogický slovník. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 9788026204039.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In: HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ (eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky* *matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, s. 11-22. ISBN 8072901893 (1. sv.).

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice: Metod.materiál pro učit.matem.* Ostrava: Krajský pedagogický ústav, 1990. ISBN 8090015891.

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice: Metod.materiál pro učit.matem.* Ostrava: Krajský pedagogický ústav, 1990. ISBN 8090015891.

ZORMANOVÁ, Lucie. Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod. Vyd. 1. Praha: Grada, 2012. ISBN 9788024741000.

Tištěné zdroje dostupné online

EISENMANN, Petr a Jiří BŘEHOVSKÝ. Vypuštění podmínky - užitečná heuristická strategie. *Matematika - fyzika - informatika* [online]. 2013, **22**(3), 183-191 [cit. 2016-06-07]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/42

FLEKOVÁ, Alena. *Heuristika ve vyučování* [online]. Olomouc, 2013 [cit. 2016-03-09]. Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta. Dostupné z: http://theses.cz/id/2ed0yl/.

HALAS, Zdeněk. *Archimédés: několik pohledů do jeho života a díla*. [online] Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2012 [cit. 2016-03-04]. ISBN 9788073782283. Dostupné také z: http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371

HANČL, Jaroslav. Pickova formule. *Matematický korespondenční seminář* [online]. 2012. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/PickovaFormuleJH/PickovaFormuleJH.pdf

NOVOTNÁ, Jarmila; EISENMANN, Petr; PŘIBYL, Jiří. Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. *Proceedings of efficiency and responsibility in education* [online]. 2014, 514-520 [cit. 2016-03-24]. Dostupné z: http://www.eriesjournal.com/_papers/article_256.pdf

NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In: VONDROVÁ, Naďa. *Dva dny s didaktikou matematiky*. [online] Praha: PedF UK, 2015, s. 9-22 [cit. 2016-03-13]. ISBN 978-80-7290-843-1. Dostupné z:

http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2015.pdf

Internetové zdroje

CALÁBEK, Pavel a Jaroslav ŠVRČEK. *Matematický klokan 2004: kategorie Student* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004 [cit. 2016-06-16]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2004.pdf

JANDORA, Radek. Hydrostatika: Archimédův zákon. In: *Http://radek.jandora.sweb.cz/index.html* [online]. 2004 [cit. 2016-05-31]. Dostupné z: http://radek.jandora.sweb.cz/f05.htm#vztlak

PANGEA, matematická soutěž. *Soubor otázek, finále, 9. ročník* [online]. 2016 [cit. 2016-06-19]. Dostupné z: http://www.pangeasoutez.cz/wp-content/uploads/2016/05/Grade9.pdf

PANGEA, matematická soutěž. *Soubor otázek, finále, 6. ročník* [online]. 2015 [cit 2016-06-19]. Dostupné z: http://www.pangeasoutez.cz/wp-content/uploads/images/otazPólyky_2015/Grade6_2015.pdf

PETRŽELKA, Josef. *Pedagogické aspekty sókratovského dialogu*. ProFil [online]. 2000, 1(3), 3-8 [cit. 2016-03-08]. ISSN 1212-9097. Dostupné z: http://profil.muni.cz/03_2000/state_petrzelka.html

STEHLÍKOVÁ, Naďa a Jana CACHOVÁ. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe* [online] (Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP), JČMF, Praha, 2006 [cit. 2016-03-08]. Dostupné z: class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=89.

ŠIMŮNEK, Libor. Z8-I-6. *Matematická olympiáda* [online]. 2005/2006, 55. ročník, s. 15-16 [cit. 2016-06-09]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440894/Z55I-8R.pdf