Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Badatelské vyučování matematice v tématu zlomek

Inquiry based mathematics education: case of fractions

Bc. Kristýna Podhajská

Vedoucí práce:	Mgr. Marie Tichá, CSc.
Studijní program:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro ZŠ a SŠ
Studijní obor:	Matematika jednoobor
Forma a druh studia:	Kombinovaná forma, navazující magisterské
Diplomová práce dokončena:	Praha, 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma **Badatelské vyučování matematice v tématu zlomek** vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 9. 12. 2016

....

podpis

Zejména bych chtěla poděkovat vedoucí mé práce Mgr. Marii Tiché, CSc. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a podnětné diskuze. Poděkování patří též žákům, kteří se podíleli na výzkumné části této práce. Také děkuji mé rodině a přátelům za trpělivost a podporu.

ABSTRAKT

Teoretická část se zabývá přístupy k vyučování, konkrétně konstruktivistickým, instruktivním a transmisivním přístupem. Záměrem této části bylo porovnat tyto přístupy a zhodnotit je vzhledem k trvalosti poznání a aktivnímu zapojení žáka. Také je posoudit z hlediska formálních poznatků.

V kapitole o badatelsky orientovaném vyučování se věnuji způsobu vyučování, který souvisí s konstruktivistickým přístupem. V další kapitole jsem charakterizovala úlohy typu concept cartoons, které lze využít jako prostředek k bádání.

Teoretická část se také zaměřuje na téma zlomků, a to na interpretace zlomků a na modely a reprezentace zlomků.

V praktické části popisuji šetření uskutečněné na základní škole. Průzkumem žákovských prací jsem výzkumný problém zúžila na interpretace a modely zlomků. Na základě této šetření jsem postavila další část výzkumu.

Při naplňování cílů a hledání odpovědí na výzkumné otázky jsem zvolila výzkumnou strategii inspirovanou akčním výzkumem, protože hlavním cílem výzkumného šetření bylo zlepšit a obohatit mou dosavadní praxi. Výzkum byl zpracováván kvalitativně.

Zpracování této práce mi pomohlo ujasnit si, proč jsou zlomky pro žáky tak problematické učivo. Jaké miskoncepce se u žáků objevují a jakých chyb se v důsledku toho dopouštějí.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematické vzdělávání, vyučování matematice, objevování a bádání, zlomek, modely a reprezentace, miskoncepce, tvořivost

ABSTRACT

The theoretical part deals with approaches to teaching, especially constructivistic, instructivistic and transmissive approach. The goal of this part is to compare the approaches and evaluate them considering the permanency of knowledge and active engagement of students. Simultaneously it aims at evaluating the approaches from the point of their of the mechanical knowledge.

The charter dealing with inquiry based mathematics education is focused on teaching related to constructivistic approach. The next chapter describes tool called concept cartoons, which can be used as a mean to research.

The theoretical part is focused on the topic of fraction, especially fraction interpretation and models and fraction representation.

The second part of the thesis describes a survey realized at basic school. I narrowed the problem to fraction interpretation and representation according to survey of student‘s work. The next part of research is based on this analysis.

Trying to accomplish the aims and find the answers to questions of the survey I chose strategy inspired by action research, because the main goal of the research was to improve and enhance my teaching knowledge and skills. The survey was processed qualitatively.

The making of the thesis helped me make it clear, why the topic of fractions is so difficult for students, which misconceptions appear during the lessons and which mistakes are made because of them.

KEYWORDS

Mathematics education, teaching of mathematics, discovery and inquiry, fraction, models and representations, misconceptions, creativity

OBSAH

1 ÚVOD

V úvodu diplomové práce chci popsat své předešlé bakalářské studiu, svým učitelské začátky a zmínit důvod, proč jsem se vlastně rozhodla studovat navazující magisterské studium na Pedagogické fakultě. Vše zde uvedené úzce souvisí s výběrem tématu mé diplomové práce.

Bakalářské studium jsem absolvovala na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy se zaměřením na obor Učitelství pro střední školy v kombinaci matematiky a deskriptivní geometrie. Po úspěšném dokončení bakalářského studia, jsem byla nucena z důvodu tíživé finanční situace nastoupit do zaměstnání jako učitelka matematiky na druhém stupni základní školy v Praze. Počátky mé seberealizace jako učitelky nebyly jednoduché. Neměla jsem sebemenší zkušenosti s výukou v praxi, protože mé dosavadní znalosti a zkušenosti získané studiem byly zaměřené pouze na odbornou stránku matematiky.

Po dvou letech mé práce na pozici učitelky matematiky na 2. stupni jsem získala praktické zkušenosti s vyučováním matematiky, stále jsem však přemýšlela, jak žáky při výuce více zaujmout, hodinu matematiky nějak oživit a učivo žákům názorně zpřístupnit.

Byla jsem si vědoma toho, že bakalářské vzdělání nebylo pro mé povolání úplné, a své nedostatky jsem pociťovala hlavně v didaktice matematiky. Proto jsem se přihlásila na navazující magisterské studium na Pedagogické fakultě.

Díky dalšímu studiu jsem si rozšířila znalosti nejen v přehledu výukových metod, ale získala jsem také zajímavá a praktická doporučení a nápady do výuky. Začala jsem nacházet odpovědi na své otázky „Jak zaujmout žáky?“, „Jak vytvořit zajímavou hodinu matematiky?“, „Které učivo je pro žáky problematické a proč?“, „V čem dělají žáci chyby a jak těmto chybám předcházet?“ atd.

Do té doby jsem si neuvědomovala, jak důležitá je pro žáky druhého stupně názornost a prolnutí učiva s praktickým životem, že vlastní pochopení nějaké problematiky je mnohem trvalejší, než umění aplikovat předložený odborný postup.

Ačkoli je matematika velice rozsáhlá věda, vybrala jsem si téma „Badatelské vyučování matematice v tématu zlomek“.

Pro dané téma jsem se rozhodla z několika důvodů.

Prvním důvodem je touha dozvědět se více o přínosných přístupech k vyučování, o badatelsky orientovaném vyučování a vytváření podnětného prostředí. Dané způsoby vyučování následně zařadit do své výuky a tím žáky motivovat k aktivitě a probudit v nich potřebu poznávání. Slibuji si od toho větší zájem žáků o matematiku, hlubší vhled žáků do daného tématu a tím i jejich trvalejší poznání.

Druhým důvodem je samotné téma zlomek. V době, kdy jsem si vybírala téma diplomové práce, jsem kapitolu o zlomcích v sedmém ročníku na základní škole vyučovala. Jelikož jsem neměla zkušenosti s výukou této látky, neboť v 9. a 6. ročníku, ve kterých jsem dosud učila, se zlomky neprobírají, postrádala jsem praktické zkušenosti pro výklad a procvičování této látky. Výuka této látky byla obtížná pro mě i pro žáky. Z důvodu mých nedostatečných odborných znalostí jsem zvolila tradiční přístup, který vedl k tomu, že se žáci naučili pouze počítat se zlomky, chyběly jim názorné představy o zlomcích a tudíž i nedostatečný vhled do tématu. Proto jsem se v této práci zaměřila na budování představ a pochopení zlomků, také na jejich modely a reprezentace.

Práce je rozdělena na dvě hlavní části, na část teoretickou a část praktickou.

V teoretické části popisuji vysvětlení mého chápání pojmů, které následně využívám v praktické části. Zabývala jsem se přístupy k vyučování, konkrétně konstruktivistickým, instruktivním a transmisivním přístupem. Záměrem této části bylo porovnat tyto přístupy a zhodnotit je vzhledem k trvalosti poznání a aktivnímu zapojení žáka. Také je posoudit z hlediska formálních poznatků.

V kapitole o badatelsky orientovaném vyučování se věnuji způsobu vyučování, který souvisí s konstruktivistickým přístupem. Další kapitola se zabývá úlohami typu concept cartoons, které lze využít jako prostředek k bádání.

Mimo jiné jsem se v teoretické části zaměřovala na téma zlomků, a to na interpretaci zlomků (tj. chápání zlomku jako vztahu celku a části, zlomku jako operátoru, zlomku jako veličiny, zlomku jako podílu a poměru) a na modely a reprezentace zlomků.

V praktické části jsem popsala provedené šetření, které jsem uskutečnila se svými žáky na základní škole. Před samotným výzkumem jsem podrobněji zkoumala práce žáků, u kterých jsem sledovala vyskytující se chyby. Na základě této analýzy jsem postavila další část výzkumu.

2 TEORETICKÁ ČÁST

2.1 Vzdělávání žáků pro vstup do moderní společnosti

Moderní doba je plná nových technologií a přesycená informacemi. Nepovažuji to však za negativní, vše má své kladné i záporné stránky. Nové technologie nám všeobecně usnadňují práci a zajišťují informace téměř o čemkoliv. Vývoj poznání v různých oblastech je nyní tak rychlý, že se společnost dle mého názoru ztrácí v nadbytku informací, což není problém jen žáků, nýbrž i celé společnosti.

Výše zmíněné ilustruji na konkrétním příkladu.

Zadala jsem vnímavému a zodpovědnému žákovi, aby zpracoval referát. Po nějaké době žák referát odevzdal. Po přečtení a prostudování jsem zjistila nesrovnalosti. Ptala jsem se ho, jak referát vypracovával. On bez váhání odpověděl, že si na internetu našel nějakou stránku a z té to celé opsal. Dotazovala jsem se ho tedy dál, zdali nahlédl do učebnice či encyklopedie nebo si alespoň přečetl o svém tématu informace i na jiné internetové stránce. Na to odpověděl otázkou „Proč?“…

Je zřejmé, že žáci, a nejen oni, neumí s informacemi zacházet. Nejsou schopni vyhodnotit, zda jsou informace pravdivé, natož si jejich pravdivost ověřit. Postrádají rozvinuté kritické myšlení, které spočívá ve zdravém uvažování. Žáci by si měli umět pokládat otázky a hledat na ně odpovědi.

Proto se dnešní vzdělávání tímto směrem snaží ubírat, ale přesto převládá výuka formou předávání hotových pouček a informací, které učitel žákovi logicky uspořádá a následně sdělí bez větší aktivity žáka. Žáci si učivo zapamatují bez hlubšího porozumění.

Pokud se omezíme na základní školu a předměty zde vyučované, hraje důležitou roli ve většině předmětů mechanické zapamatování potřebných údajů. Stejně tak žáci dle mých zkušeností přistupují i k matematice. Učí se ji zpaměti, nemají představy na potřebné úrovni, nevidí souvislosti a ztrácejí se v množství pouček, pravidel a odborných postupů. Hodnotí ji tedy následně jako těžkou a komplikovanou.

Ve své praxi na základní škole pozoruji, že se mnoho žáků učí matematiku nazpaměť. Snažím se je vést k tomu, aby se matematiku učili s papírem a tužkou v ruce, aby při řešení úloh experimentovali, přemýšleli, mezi sebou komunikovali a také, aby se zamysleli nad řešením, zda je jimi nalezený výsledek vůbec možný. Moje snaha je však zatím spíše neúspěšná. Stále se setkávám s tím, že se žáci učí matematiku čtením pracovního sešitu a řešení příkladů, které se liší (často jen nepatrně) od „šablony“, předem vzdají.

Jak tedy vést výuku matematiky, aby se ji žáci neučili zpaměti, byli aktivní a chtěli ji chápat? Jedna z možností je, změnit přístup k vyučování. Proto je následující část práce zaměřená na poznávací proces žáka, formální poznatky a také na transmisivní, instruktivní a konstruktivistickou výuku.

2.2 Konstruktivistický, transmisivní a instruktivní přístup k vyučování

Cílem této kapitoly není podat kompletní přehled pedagogických přístupů a metod výuky. Chtěla bych spíše vysvětlit, jak rozumím transmisivnímu, instruktivnímu a konstruktivistickému přístupu k vyučování.

Pokusím se na tomto místě ukázat, jak chápu poznávací proces žáka a vytváření schémat, a které poznatky beru za formální. Tyto pojmy budu následně využívat v souvislosti s již vyjmenovanými přístupy k vyučování.

2.2.1 Budování poznatkové struktury žáka a schémata

Mechanismus poznávacího procesu

Mechanismus poznávacího procesu podrobně popsal Milan Hejný a rozdělil ho na pět etap. Dané etapy charakterizuji dle publikace M. Hejného a F. Kuřiny (2009).

- První etapou je motivace. Tato etapa je zásadní pro samotný start poznávacího procesu. Při budování poznatkové struktury je důležité, aby žák chtěl poznávat. Docílíme toho tak, že v žákovi probudíme touhu objevovat. Předložený problém musí být pro žáka zajímavý, aby se vyprovokovala jeho zvídavost.
- Druhá etapa je etapa izolovaných[1] modelů. Žák se seznamuje se zástupci budoucího obecného pojmu nebo poznatku. Jde o jednotlivé příklady, předmětné představy obecného pojmu.

V tématu zlomek jsou izolovanými modely například čtvrtka chleba, půl bazénu, třetina pizzy…

[1] Ve starší literatuře též označované jako separované modely.

- Třetí etapa je etapa generických[2] modelů. V této fázi, v případě dostatečného počtu izolovaných modelů, se začnou izolované modely se společnými vlastnostmi shlukovat do skupin. Obecný zástupce takto vzniklé skupiny je právě generický model.

Opět uvedu příklad z tématu zlomek. Generickým modelem pro žáka může být poznatek, že polovinou je cokoliv rozděleného na dvě stejné části. Například rozdělený dort, rozstřihnutá stuha nebo pytlík bonbónů rozdělený dvěma dětem (pokud bude pytlík obsahovat sudý počet bonbónů). Generickým modelem se stává pojem polovina, která je jednou ze dvou stejných částí. Části mohou být stejné tvarem, ale také obsahem, délkou, počtem apod.

- Čtvrtá etapa je abstrakční zdvih. V této fázi vzniká poznatek na abstraktní úrovni a žákovo poznání se prohlubuje.

V případě zlomku, ale samozřejmě i v jiných tématech, je abstrakčním zdvihem přechod k symbolice, tudíž k poznatku, že jedna polovina je zlomek $\frac{1}{2}$.

- Pátá etapa je krystalizace (strukturalizace). Nový poznatek se propojí s již uloženými poznatky a integruje se do poznatkové struktury. Nastane-li konflikt mezi novým poznatkem a již vzniklou představou, dojde v poznatkové struktuře k reorganizaci vazeb nebo také k restrukturalizaci. Krystalizace poznatku tak ovlivňuje celou poznatkovou strukturu od izolovaných až po generické modely. Poznání je tím posunuto o úroveň výš.

Své zastoupení v poznávacím procesu má také etapa automatizace, která zahrnuje procvičování získaných poznatků a při níž dochází k jejich upevňování. Tuto fázi nebudu stejně jako M. Hejný a N. Stehlíková (1999) nebo M. Hejný a F. Kuřina (2009) chápat jako etapu poznávací. Ale i tak je velmi významná, protože zautomatizované představy a spoje se v případě potřeby rychle vybaví, proto nad nimi žák nemusí přemýšlet a tím šetří svou mozkovou kapacitu na řešení složitějších úkonů. (M. Hejný, Stehlíková, 1999)

Schéma

Pojem schéma lze chápat buď jako jednoduché grafické znázornění např. náčrt, obrázek, nástin, osnovu, nebo v souvislosti s poznáváním jako část poznatkové struktury.

Poznávací schémata si dítě buduje při poznávání světa a také při procesu učení ve své poznatkové struktuře. Tato schémata shromažďují určité zkušenosti, představy a znalosti, se kterými se dítě během svého života setkalo. (Piaget, 1997)

[2] Ve starší literatuře jsou generické modely označovány jako univerzální modely.

Podle pedagogického slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, str. 262) je schéma *„mentální rámec pro organizování poznatků, který vytváří smysluplnou strukturu navzájem souvisejících pojmů. Schéma zahrnuje typická, obecná fakta; může obsahovat jiná dílčí schémata; míra abstrakce se může pružně měnit.“*

Milan Hejný, který se zabývá matematickými schématy, popisuje schéma jako *„dynamickou organizaci různorodých prvků“* (M. Hejný, 2007, str. 86).

Schéma nazývá jako organizaci, protože kromě samotných prvků hrají důležitou roli také vazby mezi těmito prvky. Schéma není tvořeno samostatnými poznatky, ale poznatky, které jsou sloučeny v logické celky.

Prvky, které náleží této dynamické organizaci, jsou generické modely a tudíž také i předchozí izolované modely. Schéma se začíná vytvářet s prvními izolovanými modely. Tyto izolované modely se následně spojují do větších logických celků, až vznikne generický model. Schéma vzniká až po vytvoření generického modelu.

Utvořená schémata nemusí být stálá a vztahy mezi prvky se mohou měnit, proto tuto organizaci prvků označuje M. Hejný jako dynamickou.

Změna vztahů mezi prvky vede ke změně schématu. Tato změna může nastat ve chvíli, kdy žák objeví nový izolovaný model, který „nepasuje“ do již vytvořeného schématu. Přeorganizuje schéma a daný izolovaný model do schématu začlení. V průběhu poznávacího procesu dojde několikrát v důsledku krystalizace ke změnám v poznávací struktuře tzv. reorganizaci či restrukturalizaci. (M. Hejný, 2007)

Poznávací proces žáka a efektivní učení

Např. Y. Bertrand (1998) či M. Hejný (2007) a další zdůrazňují, že v poznávacím procesu žáka se přijímané poznatky formují, porovnávají se s již uloženými poznatky, zkušenostmi a představami tzv. prekoncepty, shlukují se do schémat a začleňují se do poznatkové struktury.

Žáci, kteří se efektivně učí, vycházejí z prekonceptů. Na základě nových poznatků tyto prekoncepty dotváří, případně upravují a budují si tak další základy pro budoucí učení.

Žák se tedy efektivně učí *„tím, že informace přicházející zvnějšku nepropojuje lineárně jednu za druhou, ale tak, že tyto poznatky uvede do vztahu ke specifickým místům své pojmové sítě.“* (Bertrand, 1998, str. 74-75)

Žák v průběhu poznávacího procesu může nejprve další etapu v poznání v podobě restrukturalizace odmítnout. Často se tak stává z důvodu mylné interpretace daného pojmu tzv. miskoncepce. Takový žák reorganizuje svou poznatkovou strukturu až při seznámení s dalšími přesvědčivými izolovanými modely nebo také s dopomocí učitele. Učitel má před sebou těžký úkol nejenom v tom, aby zjistil toto chybné chápání, ale také aby dokázal vhodnými metodami, postupy či příklady přimět žáka k restrukturalizaci pojmů a zařadit nový poznatek do poznatkové struktury tzv. reedukace. Důležité je, aby se tohoto procesu žák aktivně zapojil. To znamená, že žák přemýšlí, třídí, analyzuje a organizuje data. Pokud je žák pasivní, ukládá poznatky do paměti a nespojuje je se svými předešlými představami. (M. Hejný, Kuřina, 2009)

2.2.2 Formální poznatky

V předchozí části jsem popsala poznávací proces žáka. Při poznávání by měl žák projít všemi etapami poznávacího procesu a podílet se na vlastní konstrukci poznatkových schémat, jinak se to může projevit na kvalitě jeho poznání.

Vše zde zmíněné podrobněji popisují M. Hejný, N. Stehlíková (1999) či M. Hejný, F. Kuřina (2009), z jejichž publikací jsem vycházela.

Pokud je poznávací proces při budování poznatkové struktury dodržován, žákova znalost je tzv. neformální. To znamená, že se žák seznamuje s novým poznatkem na abstraktní úrovni až poté, co prošel předchozí etapy izolovaných a generických modelů. Izolované modely poskytly žákovi konkrétní představu o budoucí znalosti. Pokud těchto izolovaných modelů bylo dost, vytvořil se generický model a žák tak funkčně zařadil tuto znalost do své poznatkové struktury. To znamená, že této znalosti rozumí a umí ji kreativně použít i v úlohách, které jsou složitější či nestandardní.

V případě, že žák z nějakého důvodu přeskočí etapy izolovaných a generických modelů, je jeho znalost formální. To vede k tomu, že si žák takový poznatek pouze zapamatuje. Na jednu stranu je žák schopný přetlumočit naučené poznatky či napodobit odborné postupy. Na druhou stranu, pokud žák zapomene část postupu nebo udělá chybu, není schopný postup domyslet nebo si chybu opravit.

Pro příklad uvedu zkušenost ze své výuky. V sedmém ročníku jsme probírali porovnávání zlomků. Žáci měli porovnat zlomky $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{8}$. Při kontrole výsledků úlohy žáci navrhovali různé postupy řešení.

Někteří žáci postupovali tak, že si úlohu znázornili například na kruhovém modelu. Následně zjistili, že zlomek $\frac{2}{5}$ je menší než polovina a zlomek $\frac{5}{8}$ je větší než polovina, a tudíž $\frac{2}{5} < \frac{5}{8}$.

Jiní žáci skutečnost, že je jeden zlomek větší než polovina a druhý menší, viděli bezprostředně.

Poslední skupina žáků se snažila aplikovat nějaký algoritmus. Někteří se pokoušeli použít křížové pravidlo a jiní převod obou zlomků na společného jmenovatele. Tito žáci měli s řešením úlohy největší potíže, protože si například nepamatovali správně daný postup řešení, nebo udělali chybu v násobilce apod.

Skupina žáků, jejichž postup řešení spočíval v modelování situace nebo viděli rovnou správné řešení, má neformální poznatky. Oproti tomu skupina žáků, kteří usilovali o použití algoritmu i přesto, že si ho nepamatovali, má formální znalosti.

2.2.3 Transmisivní a instruktivní vyučování

Mnozí didaktikové, například M. Hejný a N. Stehlíková (1999) a další, píší o transmisivním vyučování, jako o způsobu výuky, který je založený na přenosu informací. Informace či učivo může být prezentováno žákům výkladem učitele, čtením v učebnici, zhlédnutím filmu, vyhledáváním na internetu apod. Žáci jsou v roli příjemců informací, které si v nejlepším případě zapamatují, ale často jim nerozumí. Žáci nejsou nuceni nad přijímanými informacemi příliš přemýšlet, neexperimentují, poslouchají a zapisují si již hotové, předem zpracované části učiva. Mnozí autoři vidí problém v tom, že skutečné poznání je založené na osobní zkušenosti a zkušenost nelze přenášet.

Přenos informací ze strany učitele, tzv. z mysli učitele rovnou do mysli žáka, podrobněji popisují také M. Hejný a F. Kuřina (2009). Učitel má v poznatkové struktuře zabudovanou nějakou informaci, kterou musel zpracovat, vyhodnotit a zařadit. Jeho poznatek je opřený o předchozí zkušenost a plně chápe jeho význam. Pokud učitel žákovi předá takovouto informaci, žák ji uloží do paměti, ale pouze jako šablonu, postup, vzorový příklad či algoritmus. Takové poznatky, podle mnohých autorů, žák nedokáže použít v situaci, která neodpovídá zapamatované „šabloně“, natož aby je mohl dále rozvíjet, popřípadě je uplatnil v běžném životě.

Další související problém je řešení slovních úloh. Žáci se snaží nalézt schéma nebo vzor pro řešení slovních úloh a učitelé jim v tom pomáhají. Tento postup opět nevede k porozumění žáků a neformálním poznatkům. (Tichá, Macháčková, 2006)

Speciálním typem transmisivního vyučování, které je postavené na přenosu informací, je vyučování instruktivní. M. Hejný a N. Stehlíková (1999) tento typ vyučování považují za zvlášť nebezpečný případ transmisivního vyučování, protože učitel při výuce podsouvá žákovi instrukce a návody, čímž je opět zanedbána aktivita a přemýšlení žáka.

Na praxi, kterou jsem absolvovala v rámci magisterského studia, jsem byla přítomna pouze na takto vedených hodinách, jak na druhém stupni základní školy, tak i na čtyřletém gymnáziu. Vyučující uvedl novou látku následovně: nejdříve oznámil žákům, že budou probírat to a to, dále si žáci opsali text v učebnici, následně vyučující na tabuli vypočítal vzorové příklady a žáci poté počítali podle vzoru, tj. mechanickým použitím předložené šablony.

Transmisivní nebo instruktivní způsob výuky je pro neaktivní žáky a pro žáky, kteří se o matematiku nezajímají zřejmě pohodlný, protože nejsou nuceni vyvíjet příliš aktivity a probíranému problému nemusí rozumět, jejich poznání se nijak nerozvíjí a naučí se pouze mechanický postup.

2.2.4 Konstruktivistické vyučování

Konstruktivismus, na rozdíl od vyučování založeném na přenosu hotových poznatků tzv. transmisivní vyučování, podporuje aktivní učení žáka, dává žákům prostor iniciativně se podílet na výuce a umožňuje žákům přebírat zodpovědnost za budování vlastních poznatků v souladu s poznávacím procesem žáka. (M. Hejný, Kuřina, 2009; M. Hejný, Stehlíková, 1999, a další)

Porovnání transmisivní a konstruktivistické výuky viz tab. 2.1 (M. Hejný, Stehlíková, 1999, str. 33):

	Polaritní dipól	**Konstruktivistické vyučování**	**Transmisivní vyučování**
1	hodnota poznání	kvalita	kvantita
2	motivace	vnitřní	vnější
3	trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
4	vztah učitel-žák	partnerský	submisivní
5	klima	důvěry	strachu
6	nositel aktivity	žák	učitel
7	činnost žáka	tvořivá	imitativní
8	poznatek žáka	produktivní	reproduktivní
9	nosná otázka	CO? a PROČ?	JAK?

Tab. 2.1 Porovnání transmisivní a konstruktivistické výuky

Konstruktivistickou výuku dobře vystihuje věta M. Hejného a N. Stehlíkové (1999, str. 33): učitel *„nepředkládá žákovi hotové kusy poznání, ale ukazuje mu cesty, kterými se on sám k takovému poznání může dopracovat.“*

M. Hejný a F. Kuřina (2009, str. 193) shrnují konstruktivistickou výuku následovně:

„Základním úkolem učitele je motivovat žáky k aktivitě. To se může dít mnoha způsoby, za nejdůležitější v matematice považujeme vhodné otázky, problém, paradoxy, výsledky,… Učitel podněcuje žáky, aby formulovali vlastní nápady, názory, námitky,… Podaří-li se mu to, je tím nastartován konstruktivní poznávací proces u žáků, kteří si vytvářejí vlastní představy a budují si vlastní poznatkovou strukturu. V duševním světě žáků se odehrávají procesy porozumění, vznikají představy, krystalizují pojmy. Na dobře volených příkladech, s použitím vhodných modelů a jiných druhů reprezentace učitel shrnuje podstatné rysy učiva. Vzdělávací proces se relativně uzavírá řešením úloh, a to jednak úloh na procvičení učiva, jednak na jeho aplikace.“

Podle desatera konstruktivismu M. Hejného a F. Kuřiny (2009) je pro konstruktivistickou výuku je důležité zvolení základního problému tak, aby byl pro žáky zajímavý, přístupný tj. z reálného života, a proto měli zájem problém řešit. Měl by být přínosný již samotný postup řešení problému, ne jen jeho výsledek. Žák při takové výuce umí najít souvislosti, umí zobecňovat a dokazovat svá tvrzení. Klima ve třídě musí být příznivé, aby mezi sebou žáci diskutovali, vyjadřovali vlastní myšlenky, srovnávali svá řešení a argumentovali. Žáci musí umět svá zjištění strukturovat a třídit, čímž mohou vzniknout obecnější a abstraktnější pojmy. Díky tomu mají žáci vhled do probíraného učiva, učivo chápou, rozumí mu, veškeré své poznatky umí použít i v nestandardní situaci.

Předsudky vůči použití konstruktivistického přístupu k vyučování

M. Hejný a N. Stehlíková (1999) a další autoři uvádějí argumenty nebo spíše předsudky nejenom učitelů, ale i veřejnosti, proč je transmisivní vyučování lepší než konstruktivistická.

První předsudek je založený na přesvědčení, že výuka založená na objevování[3], tj. konstruktivistická, je náročná na čas a kvůli tomu se nestihne probrat vše, co je potřeba.

Navazující problém shledávají autoři v nedůvěře ke konstruktivistické výuce. Takto myslící učitelé si nepřipouštějí, že poznatky, které žáci získali objevováním, mají pro žáky větší přínos a jsou trvalejší. Nejde pouze o získání poznatku samotného, ale spíše o proces, ve kterém žák získává daný poznatek. Žák si tímto procesem tříbí myšlení, učí se argumentovat a experimentovat. To jsou dovednosti, které žák bude v budoucím životě potřebovat. Do tak vzdálené budoucnosti nejspíš tito učitelé nevidí. Orientují se pouze na přijímací zkoušky. To

[3] Objevováním je myšleno žákem konstruované poznání, kterého docílí předem připravenými postupy. Žák nenalézá pro matematiku nic nového, ale pro žáky jsou to nově odhalené poznatky.

je ale opět dle mého názoru problém společnosti a systému, že je důležité uspět u pouze zkoušek. Vyučování se soustředí na výkon a zapamatování, než na porozumění a chtění vědět souvislosti, což má přesah do mimoškolního života.

Kritické myšlení

S konstruktivistickým pojetím výuky úzce souvisí pojem kritické myšlení:

„*Myslet kriticky znamená uchopit myšlenku a důsledně ji prozkoumat, porovnat s opačnými názory a s tím, co už o daném tématu víme. Myslet kriticky znamená být zvídaví, používat různé strategie zjišťování informací, klást otázky a systematicky hledat odpovědi, řídit se zdravou skepsí, nalézat alternativy k obvyklým ustáleným postupům a mít pochybnosti o hotových soudech. Znamená to nejen pochybovat, ale také dospívat k rozhodnutí, zaujímat stanoviska a dokázat svůj názor racionálně obhájit a přitom zároveň pečlivě vážit argumenty druhých a umět zkoumat logiku těchto argumentů.*“ (Grecmanová, 2000, str. 8)

H. Grecmanová (2000) dále zdůrazňuje, že je důležité vnímat a rozvíjet kritické myšlení jako ucelený poznávací proces aktivního myšlení a samostatného učení. Záleží na učiteli, jakou výukovou metodu zvolí, aby naplnil cíle výuky a kritické myšlení rozvíjel.

Pro navození kritického myšlení je nutné, aby učitel zajistil následující podmínky (inspirováno Grecmanová, 2000):

- musí být trpělivý a na žáky nespěchat
- nechává žáky samostatně odpovídat a nesděluje správné řešení. Jejich poznání koriguje vhodnými otázkami
- neměl by zavrhovat jakékoliv, ani chybné návrhy. Spíše by měl nechat žáka vysvětlit, co ho k takovému návrhu vedlo a jak to myslel. V případě chyby by měl v žákovi vhodně vytvořit konflikt, který žáka na chybu upozorní.
- správně zasadit úlohu do vhodného kontextu, který bude pro žáky zajímavý a atraktivní, čím žáky motivuje ke spolupráci
- zajistit bezstarostné klima ve třídě
- podporovat a povzbuzovat

To vše klade na učitele velké požadavky. Učitel musí být empatický, tvořivý, musí mít zkušenosti s vedením žáků, je důležitá také vzájemná důvěra učitele a žáka.

Budou-li splněny následující podmínky, je možné se dočkat následujících změn v procesu učení a myšlení:

- *„bude zlepšena schopnost řešit komplexně obtížné problémy, schopnost kritického hodnocení světa,*
- *žáci a studenti budou schopni utvářet si vlastní nezávislé názory a obhajovat je,*
- *přitom se zvýší míra tolerance k názorům druhých,*
- *zvýší se míra aktivity procesu učení,*
- *nově získané poznatky budou organicky začleněny do struktury dříve získaných poznatků,*
- *proces učení bude uvědomělý, žáky subjektivně chápaný jako smysluplný.“*

(Grecmanová, 2000, str. 9)

Připojuji se k názoru, že *„…naše společnost, ovlivňována nejrůznějšími atraktivními vlivy, není motivována k tomu, ‚jak přijít věci na kloub‘, jak porozumět věci, jak pochopit podstatu. Společnosti jde spíše o možnost rychlého úspěchu, vysoké odměny, o výsledky získané s minimální námahou, ne-li dokonce jakýmikoli prostředky.“* (M. Hejný, Kuřina, 2009, str. 200)

Proto je potřeba začít měnit přístup a myšlení již ve výuce. Aby žák mohl kriticky myslet, musí být zvídavý. Tato touha po poznání, se musí u žáků vyvolat, vzbudit. U menších žáků je to celkem snadné, ty jsou ještě aktivní a přirozeně zvídaví. Horší je to u starších žáků, kteří již tolik zvídavosti neprojevují.

Učím na spádové základní škole na periferii Prahy. Při třiceti žácích ve třídě, kterou mimo jiné navštěvují problémoví žáci a žáci ze sociálně znevýhodněných rodin, cizinci, žáci s individuálním plánem, je náročné žáky motivovat. Nejen já, ale i kolegové a kolegyně potvrzují pravidlo, že čím jsou žáci starší tím těžší je žáky motivovat – jednotlivce i celé třídní kolektivy.

Žáky lze motivovat k přemýšlení badatelsky orientovaným vyučováním, kterému se věnuji v další kapitole. Prostředkem k bádání se mohou stát úlohy typu concept cartoons, které charakterizuji v další části práce.

2.3 Badatelsky orientované vyučování matematice

Východiskem pro tvorbu této kapitoly byly články M. Papáčka (2010); I. Stuchlíkové (2010); T. Janíka, I. Stuchlíkové (2010); L. Samkové, A. Hošpesové, F. Roubíčka, M. Tiché (2015).

T. Janík a I. Stuchlíková (2010) ve svém článku uvádějí výsledky šetření, ze kterých vyplývá, že ubývá žáků, kteří by se zajímali o přírodovědné a matematické vzdělání. Z článku je jasné, že dané obory jsou méně atraktivní pro dívky než pro chlapce. Žáky údajně tento okruh vzdělávání neoslovuje. Důvodem je malá provázanost učiva s každodenním životem a běžnými životními situacemi, s nimiž se žáci setkávají. Dále autoři zmiňují, že dalším zdrojem nezájmu žáků o přírodovědné a matematické obory jsou přístupy k vyučování. Vyučování je podle žáků nudné, proto autoři doporučují změnit výukové metody. V badatelsky orientovaném vyučování vidí řešení krize přírodovědného vzdělávání jak T. Janík, I. Stuchlíková (2010) stejně tak i M. Papáček (2010).

Badatelsky orientované vyučování (dále jen BOV) vychází podle L. Samkové a kol. (2015) z anglického překladu „inquiry-based teaching[4]“. Základním pojmem je právě „inquiry“, což lze přeložit jako bádání, šetření, vyšetřování.

První úvahy o BOV uvedl John Dewey (1938). Pojem „inquiry“ pochází ze zahraničí a termín „inquiry teaching“ byl přeložen v roce 1999 v pedagogickém anglicko-českém slovníku J. Mareše a P. Gavory (1999) jako „vyučování bádáním, objevováním“. Pojem BOV se začal využívat v českém vzdělávání v souvislosti s mezinárodními projekty, které byly zaměřeny právě na přístupy k vyučování využívající bádání žáků. Nejprve bylo BOV aplikováno v přírodovědných předmětech, ale později i v matematice (BOVM). To zmiňují M. Papáček (2010) nebo také L. Samkové a kol. (2015).

Pojem BOV se v Čechách příliš nevyužívá, ale: *„Daný směr či jeho prvky jsou implicitně obsaženy ve vzdělávacích přístupech nazývaných např. problémová výuka[5], projektová výuka[6], aktivizující formy a metody vyučování.“* (Papáček, 2010, str. 41)

M. Papáček (2010) a L. Samková a kol. (2015) uvádějí, že tyto přístupy byly spojené s konstruktivistickým přístupem k vyučování.

[4] Někdy též uvedeno pod názvem „inquiry-based educatin“.

[5] Podle J. Průchy, E. Walterové a J. Mareše (2009, str. 220) je to výuka, *„která začleňuje řešení problémů samotnými žáky jako prostředek jejich intelektového rozvoje.“*

[6] Podle J. Průchy, E. Walterové a J. Mareše (2009, str. 226) je to výuka, *„v nichž jsou žáci vedeni k samostatnému zpracování určitých témat (projektů) a získávají zkušenosti praktickou činností a experimentováním.“*

2.3.1 Bádání a BOV

Jak již bylo zmíněno, pro BOV je zásadní pojem bádání, a to ve smyslu napodobování vědeckého bádání. Bádání zahrnuje tyto činnosti žáků:

- *„pozorování;*
- *kladení otázek;*
- *vyhledávání informací v knihách a dalších zdrojích (aby zjistili, co je již známo);*
- *plánování výzkumu, navrhování postupů zkoumání;*
- *přezkoumávání toho, co je již známo, na základě experimentálních výsledků;*
- *využívání nástrojů pro sběr, analýzu a interpretaci dat;*
- *formulování odpovědí, vysvětlení a předpovědí;*
- *sdělování závěrů.“*

  (Samková a kol., 2015, str. 95)

Výčet činností zahrnuje jak BOV tak i BOVM. Badatelské vyučování v matematice také

- *„začíná otázkou nebo problémem, přičemž*
- *odpovědi hledáme pozorováním a zkoumáním;*
- *realizujeme mentální, skutečné nebo virtuální experimenty;*
- *hledáme další, již dříve řešené a vyřešené zajímavé problémy, které jsou podobné těm našim;*
- *používáme a přizpůsobujeme, je-li to potřeba, známé matematické techniky.*
- *Proces bádání je veden nebo vede k hypotetickým odpovědím – domněnkám, které je potřeba ověřit.“*

  (Samková a kol., 2015, str. 99, podle Artigue, Baptist, 2012, str. 4)

Při bádání žák využívá a rozvíjí logické i kritické myšlení. Zamýšlí se a hledá různé způsoby řešení. Vybavuje si již nabyté zkušenosti a vědomosti a snaží se je uplatňovat. Pro celý proces je proto důležité, aby žák měl oporu ve svých znalostech. Aby navázal na svou poznatkovou strukturu a mohl tak využít již známých faktů a souvislostí. Díky tomu, že má žák na co navázat a z čeho vycházet, je schopný vytvořit nějaké hypotézy a návrhy řešení. Velmi důležitou roli i zde sehrává motivace žáka. Celá situace by měla být pro žáka atraktivní, zajímavá, jedině potom bude žák vyvíjet aktivitu a mít chuť situaci řešit. (Samková a kol., 2015)

Souhrn základních znaků BOVM:

- *„úlohy a otázky, které mohou být různě interpretovány, mají více způsobů řešení, více správných odpovědí;*
- *objevování a znovuobjevování (jako doplněk k deduktivnímu přístupu);*
- *učení se z chyb (hlavně vlastních, ale i cizích; chyba je chápána jako nedílná součást učebního procesu);*
- *zajištění dostatečně husté sítě základních znalostí (na nichž by bylo možné dále stavět);*
- *kumulativní styl učení (propojování nových poznatků s dříve nabytými znalostmi);*
- *propojení matematiky s jinými obory (i nevšedními, např. českým jazykem či dějepisem);*
- *podpora kooperativního i autonomního učení.“*
  (Samková a kol., 2015, str. 100, podle Artigue, Baptist, 2012, str. 13-14)

Při matematickém bádání lze vycházet z následujících témat: přírodní jevy, technické problémy, každodenní problémy, lidské vynálezy, umění, matematické objekty apod. (Samková a kol., 2015, str. 100, zkráceno)

2.3.2 Typy bádání

Bádání lze rozdělit do několika úrovní podle míry zapojení žáků. (inspirováno Stuchlíková, 2010)

Potvrzující bádání

Při tomto druhu bádání učitel žákům otázku nebo problém zadává a také jim prozrazuje, jak mají postupovat při řešení tohoto problému. Dokonce žáci znají i výsledky/řešení toho problému. Žáci tedy vědí, co mají řešit, jak to mají řešit a k jakému řešení musí dospět. Úkolem žáků je, aby řešení problému vlastní praxí ověřili.

Strukturované bádání

I v tomto případě učitel žákům prozrazuje otázku/problém i možný postup. Na rozdíl od potvrzujícího bádání, žáci hledají výsledky/řešení tohoto problému.

Nasměrované bádání

Otázku či problém učitel žákům opět odhaluje. Je na žácích, aby vymysleli postup řešení a tak se dopracovali k výsledkům/řešení daného problému. Výsledky v tomto případě žáci předem neznají.

Otevřené bádání

Tento druh bádání nejvíce zapojuje žáky do procesu bádání. Žáci si sami pokládají otázku nebo si zadávají problém, který chtějí řešit. Žáci sami hledají postup, který je dovede k vyřešení daného problému či zodpovězení otázky. Výsledky jim nejsou opět známy.

Stručně lze výše uvedené úrovně bádání shrnout do tabulky. (tab. 2.2, vlastní tvorba)

Úroveň BOV	**Žáci si pokládají otázku**	**Žáci hledají postup řešení**	**Žáci hledají odpovědi/výsledky**
1. Potvrzující	✗	✗	✗
2. Strukturované	✗	✗	✓
3. Nasměrované	✗	✓	✓
4. Otevřené	✓	✓	✓

Tab. 2.2 Úrovně bádání podle míry zapojení žáků

2.3.3 Role učitele a žáka

Obdobně jako při konstruktivistickém vyučování je učitel při BOV v pozici rádce a aktivita je na žákovi. Vztah mezi učitelem a žákem je partnerský, učitel buduje podnětné prostředí, které podporuje spolupráci a komunikaci mezi žáky. Žáky při činnosti vede správným směrem, neprozrazuje správné řešení, klade vhodné otázky, pomáhá jim při hledání cesty vedoucí ke správnému řešení, kladně hodnotí i dílčí kroky. Chybu žáka využívá k jeho rozvoji, aby se z chyby žák poučil[7]. Zvyšuje úroveň vzdělávání žáků díky jejich vlastním zjištěním.

Úkolem učitele je, aby vytvořil vhodnou situaci a pomocí ní vedl žáky k vlastnímu poznání. To vše za pomoci bádání nad daným problémem, tj. přes návrhy řešení a vyslovení domněnek, navázání na známá fakta, provedení zkoumání, až k formulaci závěrů a výsledků šetření, závěrečné diskuzi a shrnutí zjištěného. To vše klade na učitele a jeho na přípravu vysoké nároky. (Samková a kol., 2015)

2.3.4 Přínosy a obtíže

„V matematickém vzdělání očekáváme, že BOV přispěje nejen k formování badatelských návyků, ale především ke zlepšení porozumění matematickým pojmům a postupům. BOV tedy chápeme jako cestu i jako cíl matematického vzdělávání. Takové porozumění je předpokladem

[7] Chybám ve smyslu vzdělávací strategie se věnuje M. Hejný, D. Jirotková, J. Kratochvílová (2006).

pro získání znalostí ‚použitelných‘ v různých kontextech i mimo běžné školní prostředí.“ (Samková a kol., 2015, str. 98-99)

Možné přínosy a obtíže BOV:

„Přínosy:

- *vytváření obecné schopnosti hledat a objevovat*
- *speciální schopnosti a dovednosti potřebné ke zkoumání*
- *zlepšení porozumění vědeckým pojmům*
- *objevování vědeckých principů*
- *zvýšení citlivosti na nedostatky ve vlastních znalostech a jejich doplňování cestou systematického zkoumání, upřesňování a využívání dosavadních znalostí*

Obtíže:

- *motivace studentů*
- *dovednosti studentů potřebné pro zkoumání*
- *zázemí studentských dosavadních znalostí*
- *omezení možné realizace – čas, zdroje, učební plány atd.“*
  (Stuchlíková, 2010, str. 131, podle Edelson, Gordin a Pea, 1999)

2.4 Úlohy typu Concept cartoons

Hlavním východiskem této kapitoly byly texty S. Naylora a B. Keogh (1999, 2012), kteří ve Velké Británii vytvořili roku 1991 první úlohy typu concept cartoons. Tyto úlohy měly v žácích vzbudit představy, vyvolat jejich zájem, podpořit jejich přemýšlení a tím zlepšit jejich porozumění dané problematice.

Concept cartoons u nás nemají ustálený odborný název. Rozumí se jimi úlohy zadané ve formě obrázků s jednoduchým textem. E. Hejnová (2016) úlohy využívá ve výuce fyziky a nazývá je „úlohy s bublinou“, „bublinové úlohy“, „obrázkové úlohy“ nebo také „úlohy zadané formou diskuze“. E. Trnová a kol. (2016) concept cartoons zařazují mezi „vzdělávací komiksy“ a žádný překlad jim nedávají. Já v dalším textu využívám označení „obrázkové úlohy“.

V přehledu příkladů dobré praxe studie ACSA (2009), vytvořené pro MŠMT, jsou obrázkové úlohy uvedeny. Očekává se od nich zlepšení kvality výuky a tím zvýšení zájmu o technické a přírodovědné obory. Dané úlohy jsou podle autorů stimulujícím učebním nástrojem, který má za úkol žáky motivovat, učí je diskutovat a argumentovat. Velkou výhodou těchto úloh je snadné využití ve výuce.

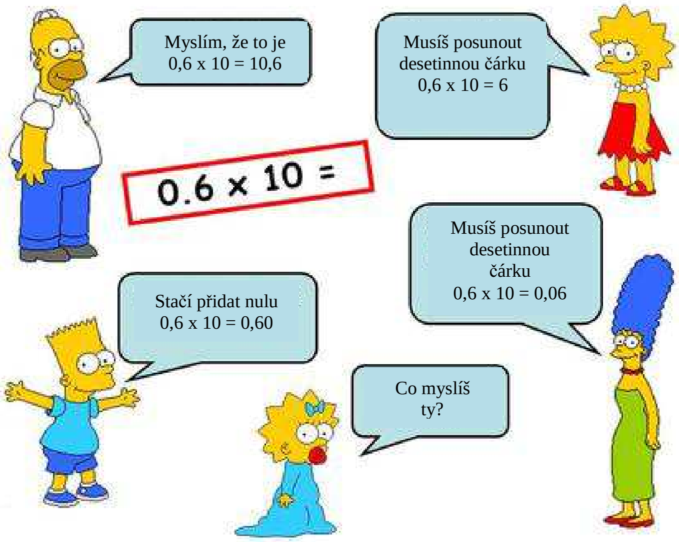
Obrázkové úlohy založené na vizuální podobě, která je doplněna krátkým jednoduchým textem, se stávají pro žáky zajímavé a motivující, což potvrzují výzkumy S. Naylora a B. Keogh (2012). Proč takové úlohy žáky motivují, zdůvodňují také E. Trnová a kol. (2016). Podle nich je to dáno novou generací žáků, kteří se narodili a žijí v době plné informačních technologií a internetu. Žáci v těchto mediích snadno pracují se zvukem, obrázky a textem. Na sociálních sítích se často vyjadřují stručně, pomocí zkratek a obrázků.

„Čtení a porozumění dlouhým textům je pro ně obtížné. Pokud pro ně téma není zajímavé, přeskakují pasáže a snaží se rychle dospět ke konci. ... obtížněji udržují pozornost a poměrně rychle se přestávají zabývat aktivitami nebo informacemi, o které nemají zájem nebo které jim neposkytují rychlou odezvu. Úlohy vyžadující dlouhodobější koncentraci anebo abstraktní myšlení (např. čtení či porozumění složitým pasážím) jim proto mohou činit obtíže.“ (Trnová a kol., 2016, str. 51, podle Grunwalda, 2003)

2.4.1 Charakteristika obrázkových úloh

Obrázková úloha[8] (obr. 2.1) se skládá z několika obrázků, na kterých mohou být postavy lidí, dětí, komiksové postavy, zvířata či jiné „zživotnělé“ věci, které „umí mluvit“. Každý z obrázků vyjadřuje nějaký názor na danou (matematickou) situaci. Obrázky v úloze tak tvoří přehlídku názorů a domněnek k řešení dané situace. Počet obrázků závisí na počtu názorů. Mezi názory by se mělo nacházet správné tvrzení, které nemusí být nutně jen jedno. Další názory představují chybné úvahy, tj. miskoncepce. V úloze může být také zahrnuta možnost, kde žák vyplňuje odpověď dle svého uvážení, pokud má jiný názor na danou situaci, než je uvedeno. Cílem úlohy je, aby žáci našli správná tvrzení k dané situaci. To znamená, že si žáci vyberou obrázek (popř. obrázky), který je nositelem názoru (řešení), s nímž se žáci ztotožnili. (Naylor, Keogh, 1999)

[8] Úloha je převzata z https://secondarymaths.wikispaces.com/misconception+cartoons – volně přeloženo.



Obr. 2.1 Příklad obrázkové úlohy

2.4.2 Přínos obrázkových úloh

Hlavní přínosy obrázkových úloh jsou (inspirováno Naylor, Keogh, 2012):

- motivují, vzbuzují aktivitu a zájem žáků o výuku
- jsou snadno čitelné, hlavně díky jednoduchému textu, který je jen nezbytně dlouhý a vystihuje pouze podstatné poznatky
- celý kontext je doplněn obrázky
- provokují k diskuzi, protože úloha prezentuje různá řešení dané situace
- podněcují k přemýšlení a řešení problému
- navádějí k ověření pravdivosti daných výroků – žák bádá nad daným problémem, přitom využívá své znalosti, kriticky a logicky vyhodnocuje pravdivost výroků
- nutí k argumentaci – žáci v diskuzi musí obhajovat, proč si myslí, že jejich obrázek má pravdu
- zapojují se slabší žáci, ale i žáci, kteří si méně věří – protože se žáci ztotožňují s názorem obrázku, nemusí vymýšlet žádnou odpověď a případnou chybu mohou svést na dané řešení obrázku
- pracují i žáci, kteří neumějí danou řeč – úloha je daná obrázky a jednoduchým textem, který tak může být srozumitelný i pro cizince, kteří ještě neumějí dobře česky
- odhalují miskoncepce žáků – učitel získává ihned zpětnou vazbu o mylných představách žáků, díky tomu lze tyto úlohy považovat za diagnostické

- mění pozici učitele a žáka – v běžné výuce hodnotí navrhovaná řešení žáků učitel, zde jsou posuzovateli návrhů řešení žáci

Přikláním se na stranu S. Naylor a B. Keogh (2012) a stejně jako oni vidím v obrázkových úlohách vysoký potenciál. Díky charakteru těchto úloh lze jejich zaváděním do výuky změnit způsoby vyučování. Lze je využít i v početných třídách a také s žáky, kteří se do běžné výuky z různých důvodů příliš nezapojují. Jsou to například slabší žáci, cizinci, žáci z nepodnětného prostředí sociálně znevýhodněných rodin.

Tyto úlohy lze využít ve smyslu konstruktivistických přístupů k vyučování, protože se žáci podílejí na budování svých znalostí. Lze je aplikovat při BOV, protože při hledání správného řešení jsou žáci nuceni zkoumat daná řešení, diskutovat o nich, argumentovat, kriticky myslet apod.

Úlohy mohou být také velkým přínosem pro učitele, kteří si díky jejich vytváření musí uvědomovat časté chyby a miskoncepce žáků. Následně se na základě zjištěných miskoncepcí žáků mohou připravit na reedukaci těchto chyb. To vše může vést ke zlepšování praxe učitele. Např. L. Samková, A. Hošpesová (2015); L. Samková, M. Tichá (2015) využívají obrázkové úlohy pro zjištění znalostí budoucích učitelů.

2.5 Co vyplývá z výzkumů zaměřených na zlomky

Jak potvrzuje mnoho publikací zaměřených na provádění výzkumů, experimentů a šetření (M. Hejný, 2004; Tichá, Macháčková, 2006; Macháčková, 2012; Vondrová, Žalská, 2013; Vondrová, Rendl, 2015), zlomky jsou pro žáky, ale také pro učitele, velmi náročnou oblastí aritmetiky. Výzkumem vyučování zlomků se zabývají didaktici matematiky nejen u nás (zejména Mgr. Marie Tichá, CSc.), ale i v zahraničí (např. Susan J. Lamon), přesto zůstává mnoho otevřených otázek.

Téma zlomky je zajímavé také pro studenty pedagogických vysokých škol. Jsou toho důkazem diplomové práce např. J. Sedlákové (2006), L. Svobodové (2014), M. Siblíkové (2014), E. Vejmelková (2014) apod.

Centrum zájmu se při výzkumech v souvislosti s tématem zlomek soustřeďuje zejména na následující problematiky:

- na hledání příčin problémů, které při vyučování této oblasti nastávají
- na diagnostiku chyb, kterých se žáci při řešení úloh se zlomky dopouštějí

- a také na reedukaci těchto chyb

Výzkumy ukazují, že učiteli nejvíce označovaným kritickým místem matematiky na základní škole je právě oblast zlomků. Dle šetření učitelé uvádějí, že *„zlomky působí žákům problémy při samotném probírání látky, ale také se stávají překážkou v dalších tématech, konkrétně v rovnicích, při úpravě algebraických nebo aritmetických výrazů a také při použití zlomkových částí jednotek v geometrii, např. 1/3 metru.“* (Vondrová, Žalská, 2013, str. 74-75)

Konkrétně mají žáci potíže nejen s početními operacemi se zlomky, ale také s představou toho, co zlomek znamená, což se také projevuje při řešení slovních úloh. Upozorňují na to výzkumy většiny uvedených autorů.

Přitom první představy o zlomcích získává již dítě v předškolním věku, zejména v situacích z běžného života. Tímto jsou myšleny zlomky ve smyslu: půlka chleba, tři čtvrtě hodiny, ujít polovinu cesty, čtvrt litru mléka, osmina pizzy, třetina hokejového zápasu, polovina fotbalového zápasu a další.

Ne vždy ale děti/žáci[9], chápou takto vyjádřené „zlomky“ správně. Označení polovina je pro děti/žáky to samé jako část, kousek, díl apod. V této souvislosti učitelé uvádějí:

„(a) Na dotaz, zda musí být poloviny stejné, žáci odpovídají, že ne. Že tedy mohou koláč rozdělit na dvě nestejně velké poloviny, mohou dostat větší polovinu,…

(b) Žáci říkají, že ‚jsme koláč rozdělili na čtyři (stejné) poloviny‘.“

(Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003, str. 23)

Představy pojmu zlomek 9-11letých žáků jsou popsány ve výsledcích experimentu M. Tiché a J. Macháčkové (2006, str. 6-7): *„Zlomek je, když se věc, číslo, písmeno a tak zlomí na dvě části.“* nebo *„Dokud jsem nevěděla, co to je, stále jsem si představovala kus koláče… Jak jsem čím dál tím více o tom věděla, tak jsem si představovala úlomek z jakéhokoli celku, třeba když někdo odejde ze třídy.“* nebo *„Zlomek je, když napíšeme dvě čísla a zlomkovou čáru.“*

Z odpovědí žáků autorky experimentu vyvozují, že některé představy žáků jsou již v počátku formální a chybné.

Žáci na druhém stupni, zejména v osmém a devátém ročníku, mají tendence se zlomkům spíše vyhýbat. Ve vlastní praxi se setkávám běžně s tím, že se žáci v úloze snaží zlomky buď nahradit desetinnými čísly, nebo se o řešení úlohy se zlomky ani nepokusí. Následující

[9] Uvádím „dítě“ ve smyslu předškoláka. Žáka chápu jako „dítě“ navštěvující základní školu.

výpověď učitelky celkem vystihuje postoj i mých žáků: *„Oni nenáviděj zlomky, nesnášej zlomky, oni se jim vyhejbaj. Takže na to jsem narazila i já teďka v devítce, když jsme brali pravděpodobnost a brali jsme i kombinatoriku. Tak tam zapisovat některý ty věci do zlomku je pro ně výhodnější, protože se jim to pokrátí, ale oni by to radši prali přes desetinný čísla, aby měli komplikovanější ten výpočet jenom kvůli tomu, aby to měli bez zlomku.“* (Vondrová, Žalská, 2013, str. 75)

2.6 Čemu věnovat pozornost při výuce zlomků

2.6.1 Kmenové zlomky

Podle M. Hejného (2004) a dalších autorů je kmenový zlomek důležitá etapa v mechanizmu poznávacího procesu a ve vytváření představ pojmu zlomek, proto je důležité věnovat se kmenovým zlomkům ve výuce.

Žák se nejdříve seznamuje s kmenovými zlomky, tj. zlomky s jedničkou v čitateli, v souvislosti s dělením celku nejdříve na menší počet částí. Na kolik části celek rozdělíme, udává jmenovatel zlomku. Takto žák poznává izolované modely. Po získání dostatku izolovaných modelů a zkušeností, může žák přejít ke zlomkům s větším číslem ve jmenovateli a dělením celku na více částí. Po vytvoření generického modelu kmenových zlomků, může žák přejít ke zlomkům s čitatelem jiným než jedna.

Přechod od kmenových zlomků ke zlomkům s čitatelem různým od jedné přináší zlom v porozumění. *„Dříve než je vybudován generický model kmenového zlomku, přicházejí do vědomí žáka separované modely zlomku s čitatelem různým od 1 a v představách žáka dochází v důsledku uvedené ‚rozmanitosti‘ dvou pojmů k tápání, které končí metakognitivním*[10] *rozhodnutím ‚budu se držet pravidel, ta jsou jistá‘. Ona ‚rozmanitost‘ je žákem pociťována jako nejistota vzájemného propojení čitatele a jmenovatele.“* (M. Hejný, 2004, str. 350)

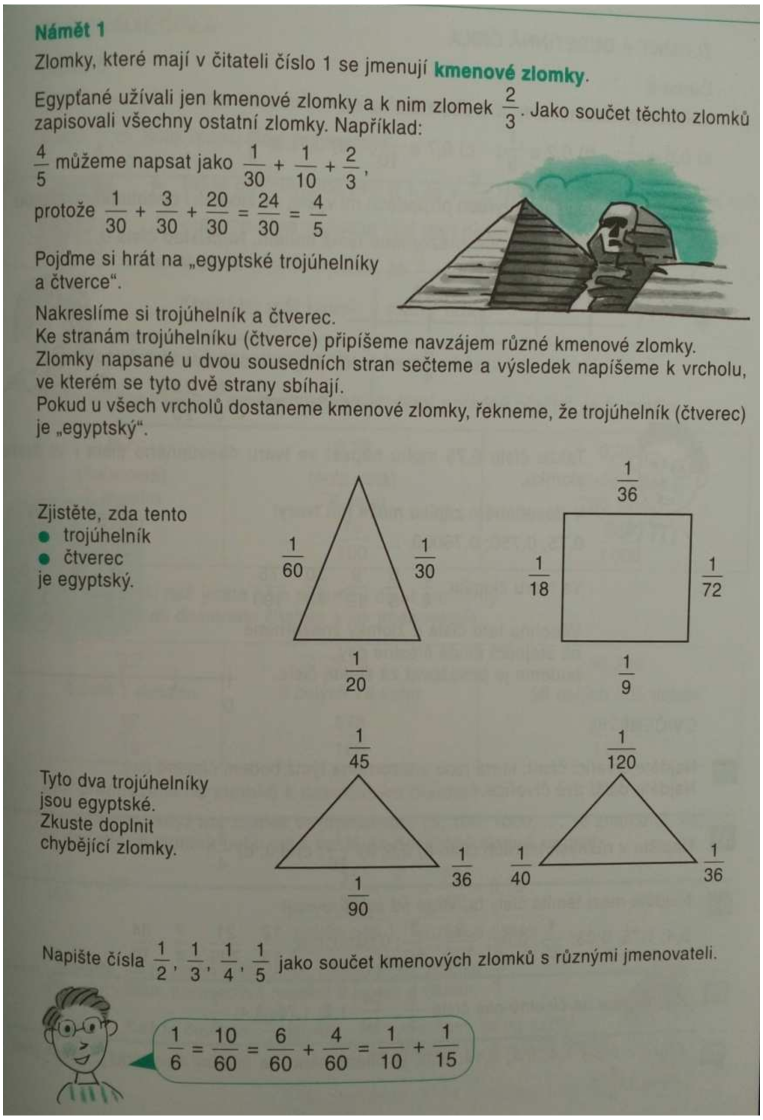
O kmenových zlomcích a úlohách, které s nimi souvisejí, píše více M. Kubínová (2002). Autorka navrhuje projekty do vyučování a mnohé z nich sama vyzkoušela. V projektech žáci řeší zajímavé a motivující úlohy s kmenovými zlomky.

[10] Podle J. Průchy, E. Walterové a J. Mareše (2009, str. 152) je metakognice v nejširším pojetí proces, kdy *„jedinec provádí kognitivní zhodnocení zadaných úloh i svých možností, kontroluje a řídí vlastní poznávací procesy a přemýšlí o tom, nakolik je jeho způsob usuzování adekvátní danému úkolu.“*

Další motivační úlohu zmiňují např. K. Hruša a J. Vyšín (1964), ale píší o ní také M. Hejný (2004) a další. Úloha spočívá v dělení koláčů, chlebů apod. Např. *„Tři koláče se mají ‚rovným dílem‘ rozdělit čtyřem osobám.“* (Hruša, Vyšín, 1964, str. 62)

Autoři úlohu považují nejen za motivační, ale také vhodnou pro vytvoření základních představ pojmu zlomek. Úloha je založená na dělení celku na stejné části, přičemž úloha nemá řešení v oboru přirozených čísel. Proto se zavedou nové jednotky, které vzniknou rozdělením každého bochníku na 4 díly. Nové jednotky se nazývají čtvrtiny (kmenový zlomek) a celek je tak rozdělený na 12 stejných dílů. Protože číslo 12 je již dělitelné čtyřmi, má úloha v těchto „nových jednotkách“, čtvrtinách, řešení. (Hruša, Vyšín, 1964)

Další návrhy úloh uvádějí M. Koman, F. Kuřina, M. Tichá a P. Černek (2000, str. 45) viz obr. 2.2.



Námět 1

Zlomky, které mají v čitateli číslo 1 se jmenují **kmenové zlomky**.

Egypťané užívali jen kmenové zlomky a k nim zlomek $\frac{2}{3}$. Jako součet těchto zlomků zapisovali všechny ostatní zlomky. Například:

$\frac{4}{5}$ můžeme napsat jako $\frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{2}{3}$,

protože $\frac{1}{30} + \frac{3}{30} + \frac{20}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Pojďme si hrát na „egyptské trojúhelníky a čtverce“.

Nakreslíme si trojúhelník a čtverec.
Ke stranám trojúhelníku (čtverce) připíšeme navzájem různé kmenové zlomky.
Zlomky napsané u dvou sousedních stran sečteme a výsledek napíšeme k vrcholu, ve kterém se tyto dvě strany sbíhají.
Pokud u všech vrcholů dostaneme kmenové zlomky, řekneme, že trojúhelník (čtverec) je „egyptský“.

Zjistěte, zda tento
- trojúhelník
- čtverec

je egyptský.

$\frac{1}{60}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{20}$

$\frac{1}{36}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{72}$ $\frac{1}{9}$

Tyto dva trojúhelníky jsou egyptské. Zkuste doplnit chybějící zlomky.

$\frac{1}{45}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{90}$

$\frac{1}{120}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{36}$

Napište čísla $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ jako součet kmenových zlomků s různými jmenovateli.

$\frac{1}{6} = \frac{10}{60} = \frac{6}{60} + \frac{4}{60} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

Obr. 2.2 Náměty na úlohy s kmenovými zlomky
(Koman, Kuřina, Tichá, Černek, 2000, str. 45)

2.6.2 Kvalita děleného celku - diskrétní vs. kontinuální

Při procesu dělení celku lze vycházet z celku spojitého, tj. z celku v kontinuálním prostředí, nebo z celku nespojitého, tj. z celku v diskrétním prostředí, který tvoří množina izolovaných prvků. (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003)

Příkladem celku v kontinuálním prostředí může být geometrický obrazec (čtverec, obdélník, kruh, trojúhelník apod.) nebo libovolné těleso, předmět apod. Tyto objekty nejsou rozděleny.

Při řešení úloh v kontinuálním prostředí je možné řešení úlohy nalézt vždy. A to díky tomu, že je celek spojitý a nijak nerozdělený. Řešení úloh lze docílit pomocí geometrické manipulace například překládáním papíru nebo geometrickou konstrukcí, která celek rozdělí na stejný počet částí apod.

Přestože má úloha v kontinuálním prostředí vždy řešení, může být nalezení tohoto řešení složité. Žáci musí vymyslet a využít různé strategie řešení. Například při znázornění sedmin na listu papíru, žák překládáním dojde k přibližnému řešení. To může být pro žáky motivující. Navíc tato žákovská řešení mohou dát učiteli zpětnou vazbu o vhledu žáků do dané situace a o jejich případných miskoncepcích.

Příkladem celku v diskrétním prostředí může být určitý počet kuliček, bonbónů, míčků apod. Stejně tak je příkladem již rozdělený celek na stejně velké části např. obdélník na čtverečkovaném papíru.

Úloha v diskrétním prostředí nemusí mít vždy řešení, protože je celek již rozdělený na určitý počet částí. Řešení úlohy je možné nalézt početně.

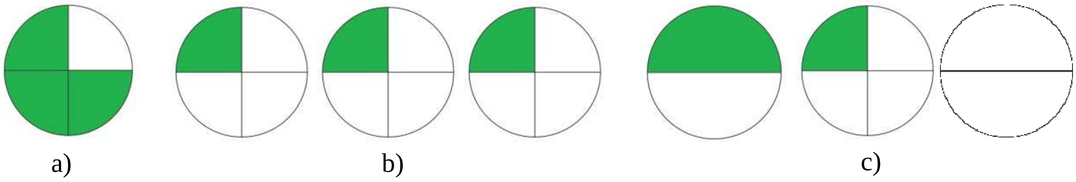
Příkladem úlohy v diskrétním prostředí může být úloha typu „Dej 2/3 bonbonů kamarádovi“. Pokud bude počet bonbonů číslo, které je dělitelné třemi, má úloha řešení. Toto řešení je založené na vydělení počtu bonbónů třemi, čímž se získá 1/3 a následném vynásobení dvěma, protože uvažujeme 2/3. Naproti tomu úloha, kde počet bonbónů není dělitelný třemi, řešení nemá. Po vydělení počtu bonbónů ještě nějaký počet bonbónů zbyde…

2.6.3 Co je celek a co část

Při řešení úloh se zlomky je důležité, neustále dbát na to, aby si žáci uvědomovali, co je celek.

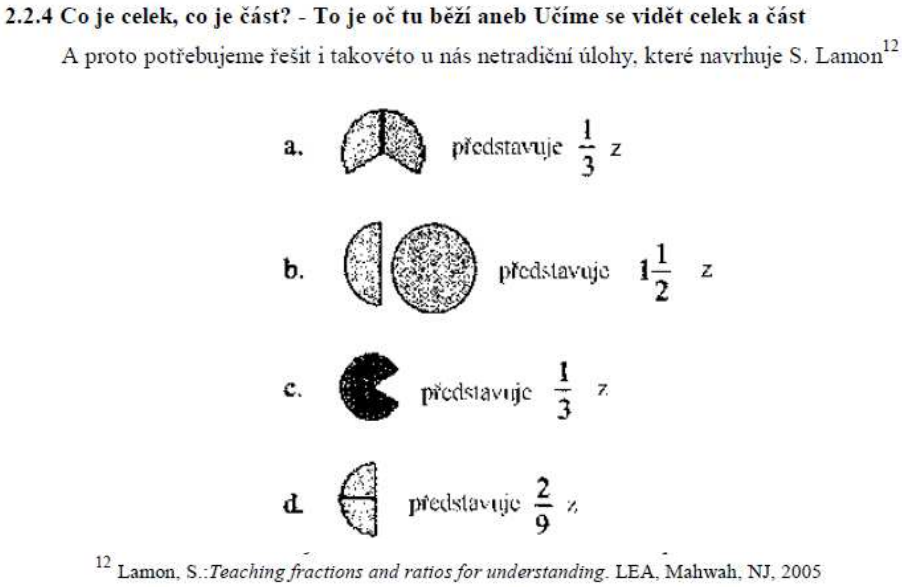
Při řešení úloh v kontinuálním prostředí se neomezujeme pouze na jeden spojitý celek. Řešíme s žáky úlohy i s více celky, protože jak ukazuje následující příklad, žáci vnímají například zlomek ¾ různě.

Žáci si zlomek ¾ často představují jako část z jednoho celku (obr. 2.3 a). Zlomek ¾ může být stejně tak znázorněn i na více celcích (obr. 2.3 b a 2.3 c). Představa vyobrazená na obr. 2.3 b je pro žáky blízká, protože vychází ze znázornění kmenových zlomků. (Fialová, 2008; podrobněji Lamon, 2006)



Obr. 2.3 Představa zlomku 3/4

Pro získání jasné představy zlomku jako vztahu celku a části, mohou být pro žáky podle M. Tiché a J. Macháčkové (2006, str. 16, str. 37) zajímavé tyto úlohy:



2.2.4 Co je celek, co je část? - To je oč tu běží aneb Učíme se vidět celek a část

A proto potřebujeme řešit i takovéto u nás netradiční úlohy, které navrhuje S. Lamon[12]

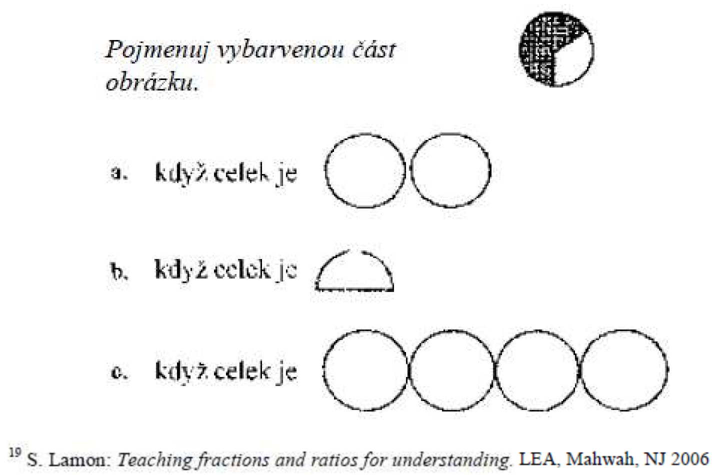
a. představuje $\frac{1}{3}$ z

b. představuje $1\frac{1}{2}$ z

c. představuje $\frac{1}{3}$ z

d. představuje $\frac{2}{9}$ z

[12] Lamon, S.: *Teaching fractions and ratios for understanding*. LEA, Mahwah, NJ, 2005



Pojmenuj vybarvenou část obrázku.

a. když celek je

b. když celek je

c. když celek je

[19] S. Lamon: *Teaching fractions and ratios for understanding*. LEA, Mahwah, NJ 2006

Řešíme s žáky také úlohy v diskrétním prostředí a dbáme na to, že izolované prvky, které tvoří celek, nelze dělit. Žáci totiž nevnímají tento soubor izolovaných prvků jako celek. Spíše jako seskupení více celků, které mohou dále dělit. Pro některé žáky není soubor předmětů akceptovaný jako model zlomku. (Fialová, 2012)

2.6.4 Slovní vyjádření zlomku

Zlomek lze v zadání úloh vyjádřit slovně (např. třetina) nebo symbolicky (např. $\frac{1}{3}$). Pro žáky je typ vyjádření velmi důležitý. Experimenty dokazují, že úlohy se symbolickým zadáním jsou pro žáky obtížnější než úlohy se slovním zadáním. Při zadávání úloh je na toto úskalí třeba myslet a využívat oba typy vyjádření.

Další problémy v porozumění a chápání úlohy vyplývají podle M. Tiché a J. Macháčkové (2006) z formulace zadání úlohy. První způsob zadání úlohy je takový, že se v zadání nachází přímo pojmenování části, např. vybarvi čtvrtinu. Žák si musí při řešení úlohy uvědomit, že má rozdělit celek na čtyři části a vybarvit jednu z nich. Pokud je celek již rozdělený, žák rovnou vybarví danou část. Druhý způsob zadání je ve smyslu např. spravedlivě rozděl čtyřem dětem. Úloha takto zadaná by měla být pro žáky jednodušší, protože vychází ze zkušenosti.

2.6.5 Evidence vs. konstrukce

Učitel by měl žákům zadávat také úlohy, ve kterých žák vybírá, eviduje, nějaký naznačený jev. Například: Vyber ze skupiny obrázků ty, na kterých jsou znázorněny tři pětiny. Takové úlohy by mohli být velmi motivující pro slabší žáky nebo pro žáky se specifickými poruchami učení.

Dle mé zkušenosti se žáci spíše setkávají s úlohami, ve kterých má žák napsat, jaká část celku je vybarvená nebo má vybarvit zadanou část již rozděleného celku. Žák jen výjimečně konstruuje řešení tak, aby daný celek rozdělil na požadovaný počet částí a až poté vybarvil danou část z celku. Ještě méně se pak vyskytují úlohy, ve kterých žák dokresluje celek ze zadané části.

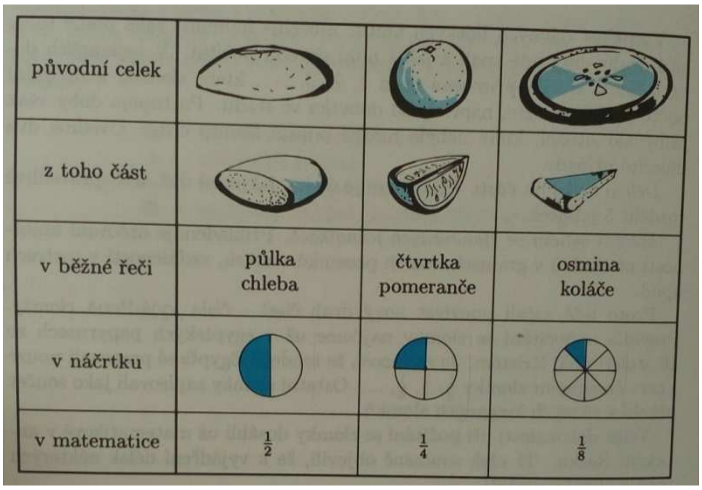
2.7 Reprezentace a modely zlomku

2.7.1 Reprezentace činnostní, ikonické a symbolické

Podle pedagogického slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, str. 246) je reprezentace *„způsob, kterým jedinec zpracovává, chápe a uchovává určitou zkušenost v paměti."*

Aby pro žáky nebylo téma zlomků tak problematické, tematický celek zlomky by se měl budovat v úzké návaznosti na životní zkušenosti žáka. Žák tím získává zkušenosti s pojmem nejdříve tak, že manipuluje s předměty modelující situaci, následně přechází k reprezentaci obrázkem a nakonec pomocí symbolů (čísel apod.). Vždy je velmi důležité dbát na porozumění. (Tichá, Macháčková, 2006)

Obr. 2.4 ilustruje konkrétní celek, dělení tohoto celku, znázornění části z celku pomocí obrázku a následné vyjádření pomocí symbolů.



Obr. 2.4 Vyjádření zlomku v ikonické a symbolické reprezentaci
(Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša 1994, str. 17)

Dle J. S. Brunera (1968), F. Kuřiny (2003) a dalších existují tři hlavní módy reprezentace: činnostní, ikonická a symbolická.

Při zpracování další části textu jsem vycházela z poznatků výše uvedených autorů a též budu dělit reprezentace na činnostní, ikonické a symbolické.

Činnostní (enaktivní) reprezentace

Žák se seznamuje s pojmy prostřednictvím vlastní činnosti, manipuluje s hmotnými, reálnými objekty. Při tomto druhu reprezentace žák zaktivuje několik smyslů, zrak a hmat, myšlení propojuje s jednáním. Žák touto manipulací získává zkušenost s daným pojmem a díky tomu si buduje o pojmu představy, kterým rozumí a chápe je.

Ikonická (obrazová) reprezentace

Po činnostní reprezentaci je možné přistoupit k reprezentaci ikonické. V činnostní reprezentaci žák manipuloval s hmotnými objekty, které jsou v ikonické reprezentaci ztvárněny např. fotkou, obrázkem, či náčrtem. Žák s nimi zachází již myšlenkově, vnímá je pouze zrakem a nemanipuluje s nimi jako v činnostní reprezentaci.

Úlohy využívající činnostní a ikonické reprezentace zlomku jsou uvedeny v kapitole Modely zlomku.

Symbolická reprezentace

Symbolická reprezentace je nejobecnější forma reprezentace. Je založená na vyjádření pojmu slovně či matematickými symboly. Žák s pojmem pracuje již na abstraktní úrovni.

Žáci by se s tímto druhem reprezentace měli seznámit až po vybudování představ daného pojmu pomocí činnostní a ikonické reprezentace. Díky tomu jsou schopni si vytvořit představu o daném pojmu a následně s ním nakládat v podobě symbolů (slovních či matematických) s porozuměním.

S žáky obvykle řeším následující úlohy, kde zlomek vystupuje v podobě symbolické reprezentace:

- symbolický zápis zlomku
    - žáci zapisují zlomky symboly podle slovního diktátu
    - žáci čtou symbolický zápis zlomku
- porovnávání zlomků pomocí pravidel
    - žáci rozšiřují a krátí zlomky násobením
    - žáci využívají křížového pravidla
    - žáci převádí zlomky na společného jmenovatele
- početní operace se zlomky bez názoru
    - žáci sčítají a odčítají zlomky převodem na společného jmenovatele
    - žáci násobí a dělí zlomky
    - žáci upravují složený zlomek

2.7.2 Modely zlomku

Zcela intuitivně lze pojem model chápat jako nějaké těleso, grafické vyjádření v podobě náčrtu, obrázku apod., ale také jako symbolický zápis např. rovnice. Model tak představuje zjednodušenou realitu.

Více o modelech v matematice píše ve svém článku F. Kuřina (1978). *„Proces je již od začátku svázán s potřebou registrace poznávaných faktů a souvislostí, tedy s použitím nebo dokonce s vytvořením vhodného jazyka. Jestliže se podaří popsat část skutečnosti v jistém* *jazyku natolik výstižně, že lze jen z tohoto popisu zjišťovat některé poznatky, které nebyly bezprostředně patrné při zkoumání reality, má takovýto popis význam pro růst našeho poznání a budeme ho nazývat modelem uvažované části skutečnosti. Model je tedy takový popis objektivní reality v jistém jazyku, který umožňuje předpovídání.*" (Kuřina, 1978, str. 643).

Dále F. Kuřina (1978) ale i další autoři zdůrazňují, že modely hrají významnou roli při vyučování matematice. Proto bychom se jako učitelé měli ve vyučování matematice zaměřit na studium modelů objektivní reality, a to zejména tak, aby se žák učil matematickou situaci uchopit s porozuměním a uměl si ji vhodně zjednodušit, tj. rozložit na dílčí úlohy, a následně vyřešit pomocí modelu.

Vhodnost použitého modelu F. Kuřina (1978, str. 733) posuzuje *„podle toho, jak je jazyk tohoto modelu ‚sdělný', jak rychle a pro žáka srozumitelně je s to poskytovat informace, které byly v původní skutečnosti utajeny. Otázka názornosti zde tedy má významnou roli."*

Je také důležité žákům poskytnout dostatek modelů, protože každému žáku může vyhovovat jiný model. Protože *„ke zkvalitnění vhledu všech žáků třídy do oblasti zlomků přispívá, když stejná situace o zlomcích je uchopena, modelována a řešena pomocí pestré palety modelů a řešitelských strategií.*" (M. Hejný, 1999, str. 10)

Podle M. Tiché a J. Macháčkové (2006), M. Hejného (2004) a dalších lze využít pro řešení úloh se zlomky znázornění zlomků na úsečce, kruhu, obdélníku a souboru předmětů.

Výše uvedené modely zlomku budu užívat i ve své práci. U jednotlivých modelů uvedu také jejich činnostní a ikonickou reprezentaci. Při modelování zlomku se z důvodu přehlednosti omezím na zlomky menší než jedna a na zlomky s menším číslem ve jmenovateli. Pojem „modelování zlomku" dále užívám ve smyslu znázornění zlomku jako části z celku.

Úsečka

Zlomek lze znázornit na úsečce, která představuje model zlomku jak v kontinuálním prostředí (například provaz, stuha, tyč, lať apod.), tak i v diskrétním prostředí (například stupnice na odměrném válci, kuchyňské odměrce apod.).

<u>Činnostní reprezentace</u>

❖ Kontinuální prostředí: Zlomek lze na provazu, stuze, proužku papíru apod. znázornit tak, že objekty přehýbáme, stříháme či měříme. V případě tyče, latě, špejle apod. lze zlomek ilustrovat například nabarvením části daného objektu, kde si při dělení na stejné části pomáháme měřením.

- Žáci manipulací s konkrétními předměty mohou řešit úlohy typu:
  - daný provázek zkrať o čtvrtinu
  - rozděl špejli na dvě stejné části
  - 2/3 tyče nabarvi modře apod.

Ve výuce lze využít tzv. zlomkové zdi (obr. 2.5), která je modelem dělení úsečky na stejné části (Kubínová, 2002). Se zlomovou zdí žáci mohou pracovat při vytváření ekvivalentních zlomků, při porovnávání zlomků apod.

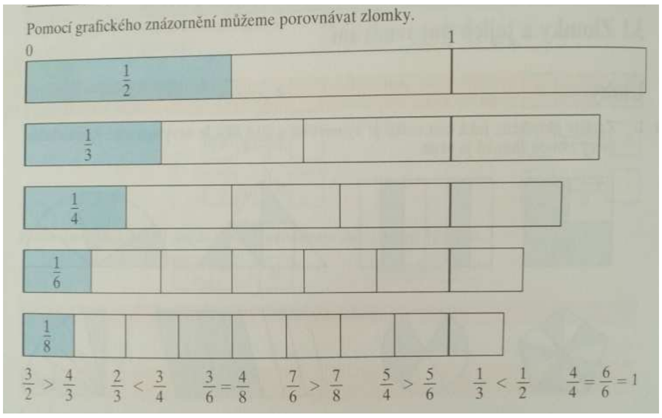
1									
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$							
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$			
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Obr. 2.5 Zlomková zeď

- Příklad zadání úlohy[11], která využívá zlomkové zdi (obr. 2.6):

Žáci mají při řešení úlohy k dispozici vyrobenou zlomkovou zeď a využívají ji k porovnávání zlomků místo grafického znázornění.

[11] U každého modelu zlomku uvádím příklady úloh. Jsem si vědoma toho, že úlohy pocházejí od různých autorů s různými přístupy k vyučování.



Obr. 2.6 Využití zlomkové zdi v úloze
(Cihlář, Zelenka, 1998, str. 44)

❖ Diskrétní prostředí: Modelem zlomku v podobě úsečky rozdělené na stejné části je stupnice. Při manipulativní činnosti mají žáci k dispozici odměrný válec či kuchyňskou odměrku. Protože existují různé velikosti odměrných válců (obr. 2.7), je důležité nejdříve žáky nechat daný odměrný válec prozkoumat, aby si uvědomili, jaký rozsah má stupnice, kolik jednotek vyjadřuje jeden dílek apod.

➢ Žáci plní např. následující pokyny:
- naplň nádobu do poloviny vodou
- odlij z nádoby čtvrtinu vody apod.

Obr. 2.7 Odměrné válce
(http://objem.websnadno.cz/Laborka_024.jpg)

Ikonická reprezentace

❖ Kontinuální prostředí: Žáci pracují již jen s obrázky tyče, latě, stuhy apod., a to ve zjednodušené formě v podobě úsečky. Obrázku využívají například pro znázornění slovní úlohy se zlomky.

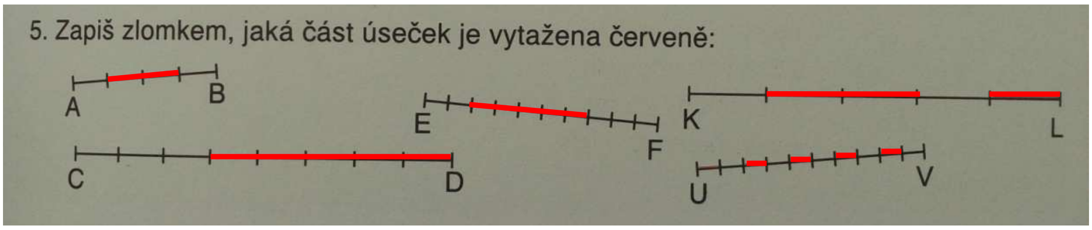
➢ Zadání úlohy: „*Mám dřevěnou tyč. Když ji rozříznu na poloviny, každý díl na třetiny, každou třetinu na čtvrtiny a každou čtvrtinu na pětiny, dostanu kousky o délce 2 centimetry. Jak dlouhá je celá tyč? Napovíme: Nakresli si obrázek.*“ (Odvárko, Kadleček, 2011, str. 45)

Úsečka jako model zlomku je důležitá také pro znázornění zlomku na číselné ose. Každá část osy mezi celými čísly je tvořena úsečkou. Žáci při vyznačování zlomků na číselné ose vycházejí právě z dělení úsečky na stejné části.

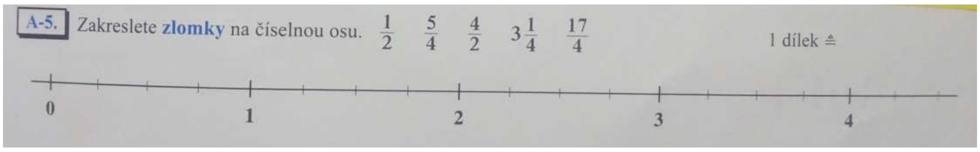
- Příklad zadání úlohy: „*Narýsujte číselnou osu s jednotkovou úsečkou délky 10 cm (což je vzdálenost obrazů čísel 0 a 1). Vyznačte na ní obrazy zlomků* $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{11}{20}, \frac{83}{100}$.“ (Trejbal, Kučinová, Veselý, Vintera, 1999, str. 87)

❖ Diskrétní prostředí: Úlohy v diskrétním prostředí vycházejí například z již rozdělené úsečky nebo číselné osy, kde žáci doplňují zlomky k bodům osy. Nebo mají žáci obrázek odměrného válce se stupnicí a jejich úkolem je znázornit daný zlomek, tj. například vybarvit, kolik vody je ve válci.

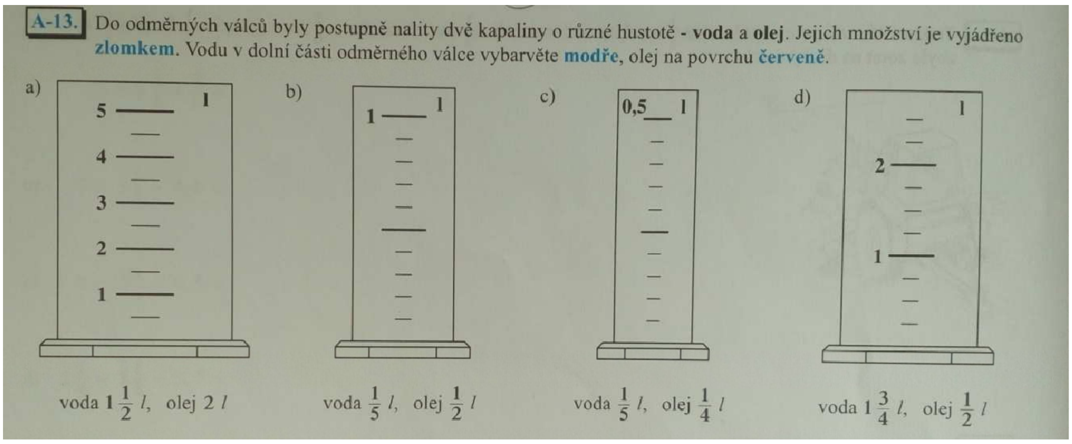
- Příklad zadání úloh (obr. 2.8, 2.9, 2.10):



Obr. 2.8 Zadání – model „úsečka“ 1 (Justová, 1996, str. 49)



Obr. 2.9 Zadání úlohy – model „úsečka“ 2 (S. Kočí, L. Kočí, 2014, str. 67)



Obr. 2.10 Zadání úlohy – model „úsečka“ 3 (S. Kočí, L. Kočí, 2014, str. 70)

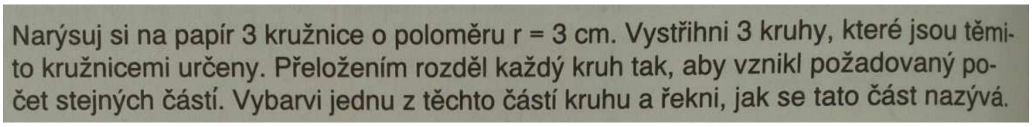
Kruh

Kruh představuje další geometrický model zlomku, který může být opět jak v kontinuálním (například dort, pizza, koláč apod.) tak i v diskrétním prostředí (například ciferník hodin).

Činnostní reprezentace

❖ Kontinuální prostředí: Při konkrétní manipulaci se mi jeví jako problém přesné dělení kruhu na stejně velké části. Snadno je možné rozdělit kruh například na 2, 4, 8, 16 shodných částí, kde vycházíme z opakovaného půlení částí kružnice. Pokud budeme chtít dělit kruh například na 3, 5, 6, 7, 9 shodných částí, bude řešení značně obtížnější.

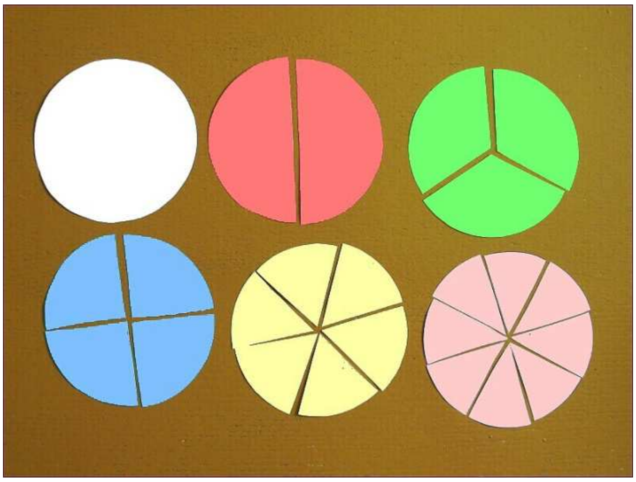
- Možné aktivity: Žáci mají k dispozici opravdovou pizzu, koláč (je možné vytisknout pizzu či koláč a manipulovat tak s obrázkem) a řeší úlohy typu:
  - Rozděl (rozstříhej) pizzu tak, aby vystačila pro osm osob.
  - Tatínkovi dej čtvrtinu koláče a mamince třetinu zbytku. Který z rodičů má větší kousek?
- Příklad zadání úlohy (obr. 2.11):



Narýsuj si na papír 3 kružnice o poloměru r = 3 cm. Vystřihni 3 kruhy, které jsou těmito kružnicemi určeny. Přeložením rozděl každý kruh tak, aby vznikl požadovaný počet stejných částí. Vybarvi jednu z těchto částí kruhu a řekni, jak se tato část nazývá.

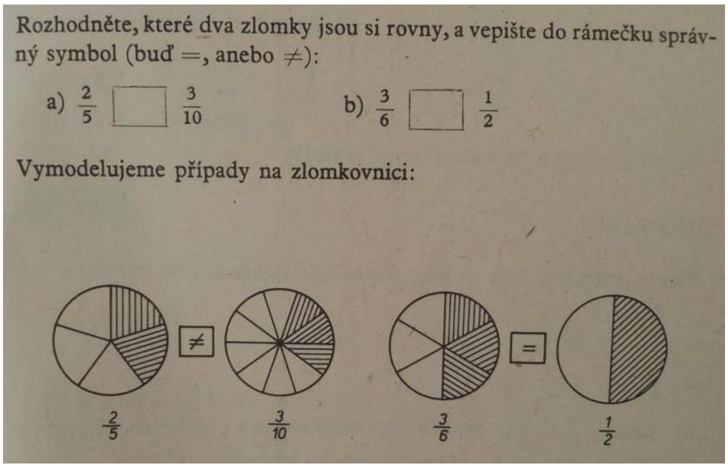
Obr. 2.11 Zadání úlohy využívající kruhového modelu
(Blažková, Matoušková, Vaňurová, 1997, str. 12)

Jako názorná pomůcka může být pro žáky užitečná kruhová „zlomkovnice“ (obr. 2.12), která využívá kruhový model a znázorňuje dělení kruhu na stejně velké části. Takovou „zlomkovnici“ lze s žáky vyrobit při vyučování a následně ji využívat při řešení úloh se zlomky.



Obr. 2.12 Kruhová „zlomkovnice“
(http://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/13661/VYROBA-A-VYUZITI-ZLOMKOVNICE.html/)

➢ Příklad zadání úlohy (obr. 2.13):



Obr. 2.13 Zadání úlohy – využití kruhové „zlomkovnice“
(Zapletal, Bobok, Urbanová, 1981, str. 99)

❖ Diskrétní prostředí: Ciferník (obr. 2.14) je rozdělený na šedesátiny (60 minut), proto ho lze snadno dělit na 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 shodných částí.

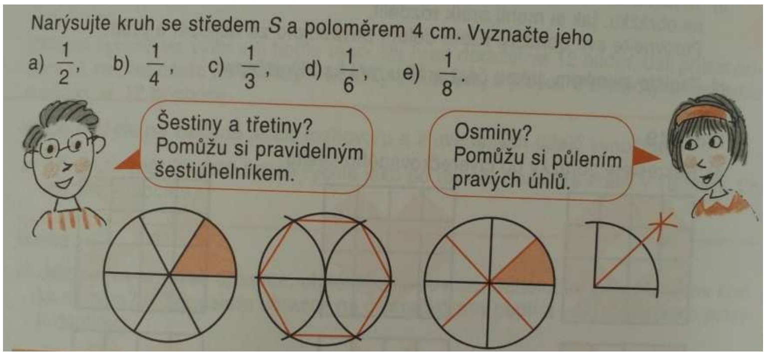
➢ Možné aktivity: Žáci mají k dispozici ciferník hodin i s ručičkami a plní pokyny typu:

- Posuň malou ručičku na dvojku a velkou ručičku na dvanáctku. Jakou část jsi znázornil?
- Na ciferníku pohni ručičkami hodin tak, aby znázorňovaly 5/12 celku. Kolik je to minut? apod.

Obr. 2.14 Ciferník hodin jako model zlomku – kruh v diskrétním prostředí
(http://berkapetr.rajce.idnes.cz/Korpusy_hodin_-_cifernik/#cifernikC1.jpg)

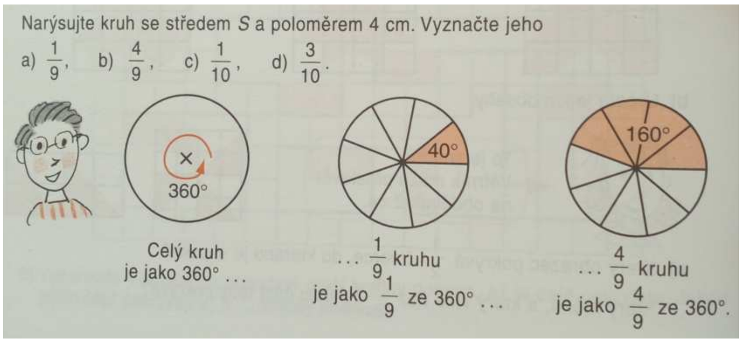
Ikonická reprezentace

❖ Kontinuální prostředí: Při dělení kruhu na 2, 4, 8,… stejných částí opět využíváme půlení částí kružnice (obr. 2.15 vpravo). Při dělení na 3, 5, 6, 9… lze vycházet z konstrukce pravidelných *n*-úhelníků (obr. 2.15 vlevo) nebo dělením plného úhlu (tj. úhlu 360°) na



Obr. 2.15 Dělení kruhu na části pomocí půlení částí a konstrukcí pravidelných *n*-úhelníků (Koman, Kuřina, Tichá, 1999, str. 58)

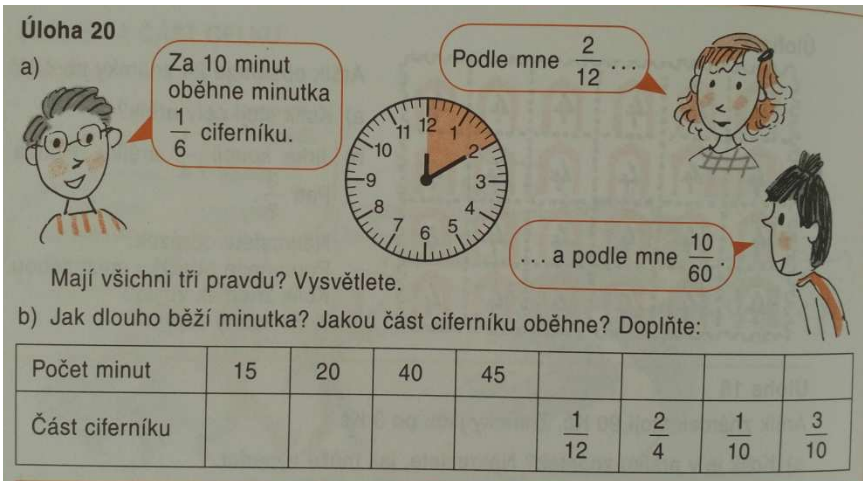
n stejných částí (obr. 2.16).



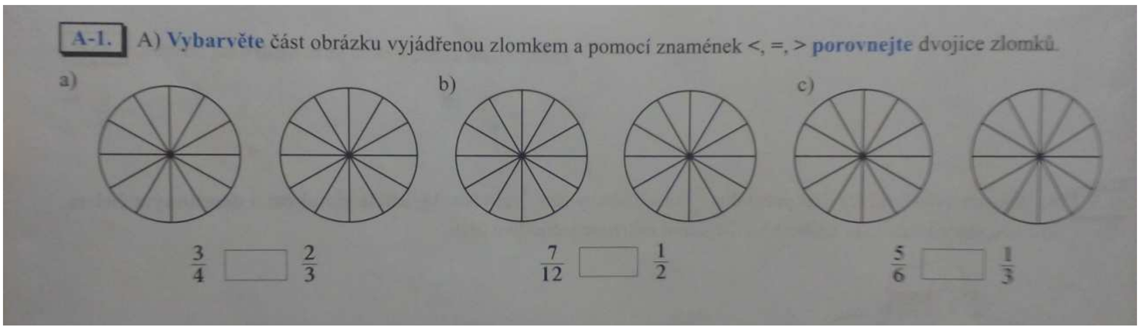
Obr. 2.16 Dělení kruhu na části pomocí dělení plného úhlu
(Koman, Kuřina, Tichá, 1999, str. 58)

❖ Diskrétní prostředí:

➢ Příklad zadání úloh (obr. 2.17, 2.18):



Obr. 2.17 Zadání úlohy – kruhový model 1 (Koman, Kuřina, Tichá, 1999, str. 58)



Obr. 2.18 Zadání úlohy – kruhový model 2 (S. Kočí, L. Kočí, 2014, str. 58)

Obdélník

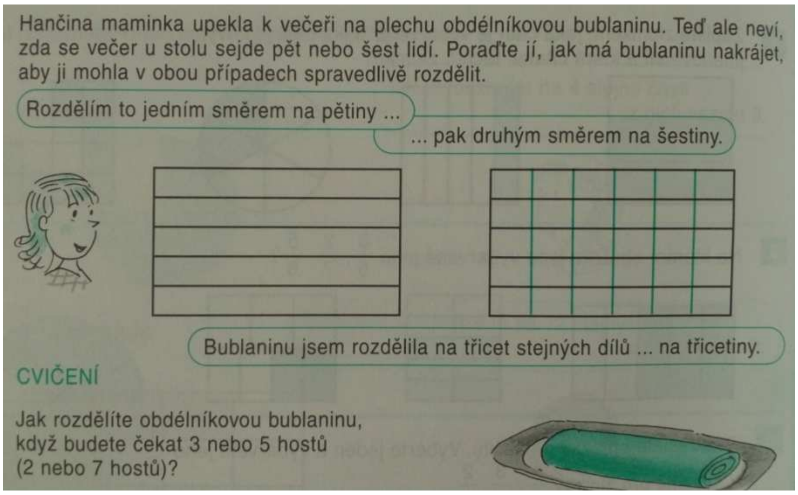
Obdélník je opět geometrickým modelem zlomku. V kontinuálním prostředí může být příkladem deska stolu, list papíru apod. V diskrétním prostředí pak čokoláda nebo obdélník na čtverečkovaném papíru apod. (obr. 2.19).

Obr. 2.19 Obdélníkový model v diskrétním prostředí
(čokoláda vlevo http://www.coko-shop.cz/eshop-starbrook-mlecna-cokolada-500g-334.html)

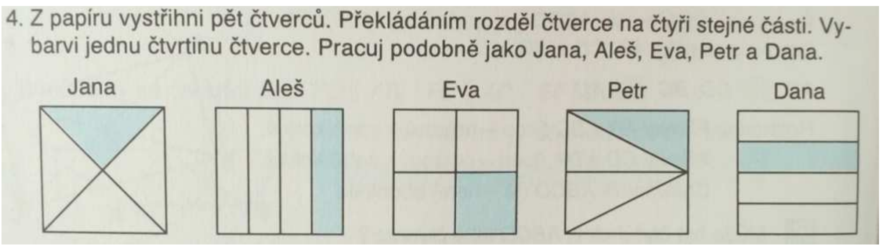
<u>Činnostní reprezentace</u>

❖ Kontinuální prostředí: Dělení obdélníku na stejně velké části lze využít při rozdělování například bublaniny na obdélníkovém plechu. V činnostní reprezentaci lze také opět využít přehýbání papíru a tak modelovat zlomek.

➢ Příklad zadání úloh (obr. 2.20, 2.21):



Obr. 2.20 Zadání úlohy – obdélníkový model 1 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 52)



Obr. 2.21 Zadání úlohy – obdélníkový model 2 (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 1997, str. 12)

❖ Diskrétní prostředí:

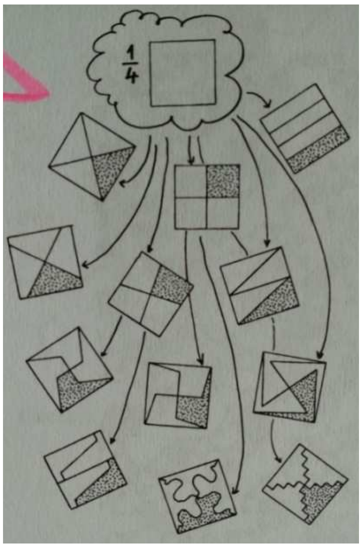
➢ Příklad zadání úlohy (obr. 2.22):

Vystříhněte ze čtverečkového papíru několik stejných obdélníků, postupně je rozstříhněte na dvě (tři, čtyři, pět, šest, …) stejné části a velikosti jednotlivých částí porovnejte. Která bude největší? Která je nejmenší?

Obr. 2.22 Zadání úlohy – obdélníkový model 3 (Novotná, Kubínová, Sýkora, Sinková, 1996, str. 89)

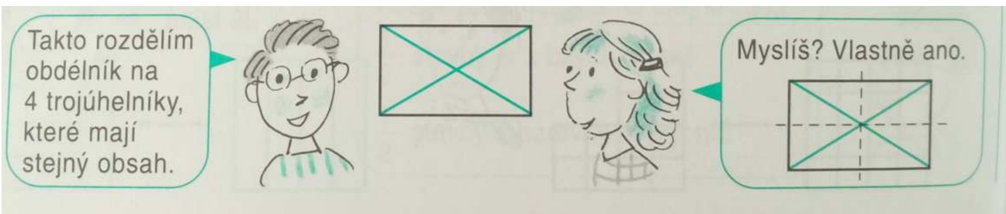
Ikonická reprezentace

❖ Kontinuální prostředí: Konkrétně v případě dělení čtverce na části je vhodné ve výuce zdůraznit, že čtverec nemusíme dělit pouze rovnou čarou například úhlopříčkou. Obr. 2.23 znázorňuje čtverec rozdělený na čtyři shodné díly.



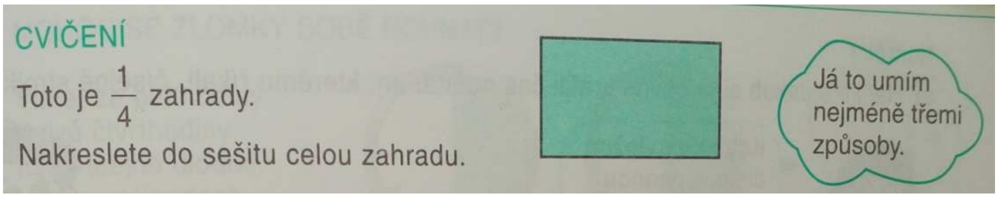
Obr. 2.23 Dělení čtverce na 4 shodné části
(Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003, str. 5)

U dělení obdélníku na čtyři shodné části, které znázorňuje obr. 2.24 vlevo, se může na první pohled zdát, že části nejsou „stejné“ obsahem. Přesto mají trojúhelníky tvořící části obdélníku stejný obsah, což snadno dokážeme, rozdělením tohoto obdélníku na shodné trojúhelníky, jak je naznačeno na obr. 2.24 vpravo.



Obr. 2.24 Dělení obdélníku na čtyři shodné části (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 52)

➢ Příklad zadání úloh (obr. 2.25, 2.26):


CVIČENÍ

Toto je $\frac{1}{4}$ zahrady.

Nakreslete do sešitu celou zahradu.

Já to umím nejméně třemi způsoby.

Obr. 2.25 Zadání úlohy – obdélníkový model 4 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 55)

Otec měl dvě obdélníková pole. Každé dal jednomu ze svých dvou synů. Rozloha pole staršího z nich se rovná

a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{5}$, c) $\frac{7}{10}$, d) $\frac{3}{2}$, e) $\frac{11}{6}$

rozlohy pole mladšího z nich.

- Nakreslete obě pole. Začnete polem mladšího nebo staršího bratra?
- Zapište zlomkem, jak veliké pole má mladší bratr ve srovnání se starším bratrem?

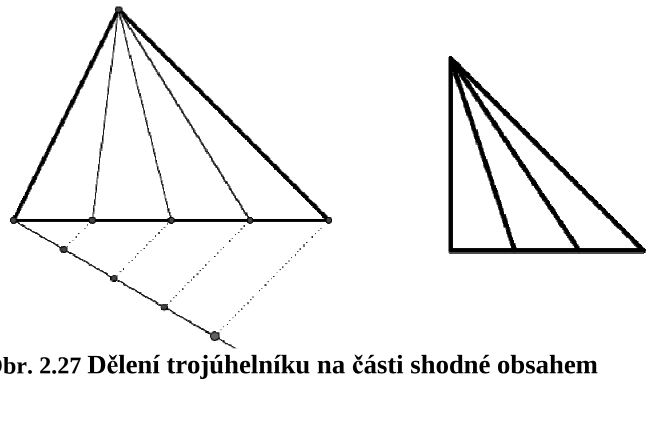
Obr. 2.26 Zadání úlohy – obdélníkový model 5 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 51)

Poznámka k dělení geometrických obrazců na části:

Dělit na stejné části lze nejenom čtverec, obdélník, ale také další *n*-úhelníky. Zlomek můžeme znázornit také na trojúhelníku, pravidelným pětiúhelníku apod.

Na trojúhelníkovém modelu lze také velmi pěkně znázornit, že části nemusejí být stejné pouze tvarem, ale mohou být stejné také z hlediska velikosti obsahu. K takovému modelu se žáci mohou dopracovat v osmém ročníku, po probrání učiva o obsahu trojúhelníků. Žáci zjistí, že dva různé trojúhelníky, které mají stejně dlouhou stranou a stejně dlouhou příslušnou výšku, mají shodný obsah.

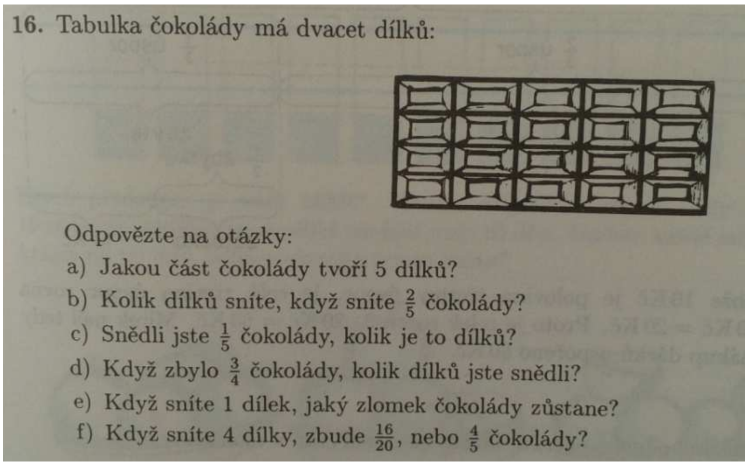
Uvažujeme-li trojúhelník, který chceme rozdělit na *n*-částí se stejným obsahem, využíváme podobnosti, pomocí které dělíme jednu jeho stranu. Rozdělením této strany trojúhelníku na *n*-shodných částí, propojením takto vzniklých bodů s protějším vrcholem získáme *n* trojúhelníků se stejným obsahem (obr. 2.27). Tímto způsobem lze znázornit libovolný zlomek.



Obr. 2.27 Dělení trojúhelníku na části shodné obsahem

❖ Diskrétní prostředí:

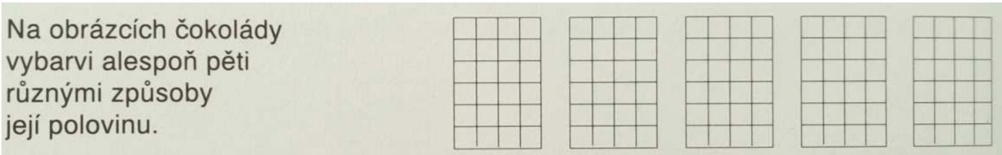
➢ Příklad zadání úloh (obr. 2.28, 2.29):



16. Tabulka čokolády má dvacet dílků:

Odpovězte na otázky:
a) Jakou část čokolády tvoří 5 dílků?
b) Kolik dílků sníte, když sníte $\frac{2}{5}$ čokolády?
c) Snědli jste $\frac{1}{5}$ čokolády, kolik je to dílků?
d) Když zbylo $\frac{3}{4}$ čokolády, kolik dílků jste snědli?
e) Když sníte 1 dílek, jaký zlomek čokolády zůstane?
f) Když sníte 4 dílky, zbude $\frac{16}{20}$, nebo $\frac{4}{5}$ čokolády?

Obr. 2.28 Zadání úlohy – obdélníkový model 6
(Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša, 1994, str. 17)



Na obrázcích čokolády vybarvi alespoň pěti různými způsoby její polovinu.

Obr. 2.29 Zadání úlohy – obdélníkový model 7 (Justová, 1996, str. 50)

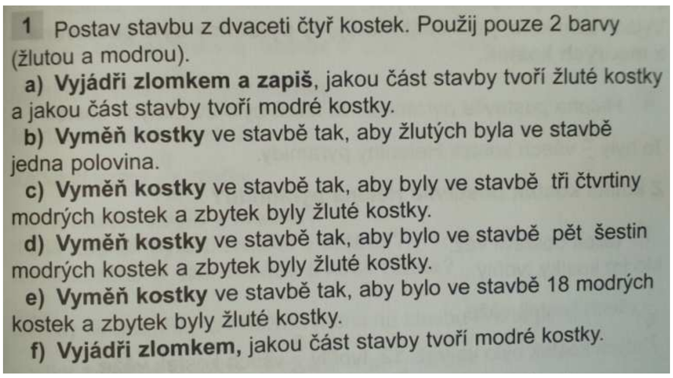
Soubor předmětů

Soubor předmětů reprezentuje množinu izolovaných prvků, které nelze dále dělit. Jedná se o model v diskrétním prostředí.

Činnostní reprezentace

V realitě tento model zlomku mohou charakterizovat bonbóny, kuličky, krychle, víčka od PET láhví, korálky apod.

➢ Příklad zadání úlohy (obr. 2.30):

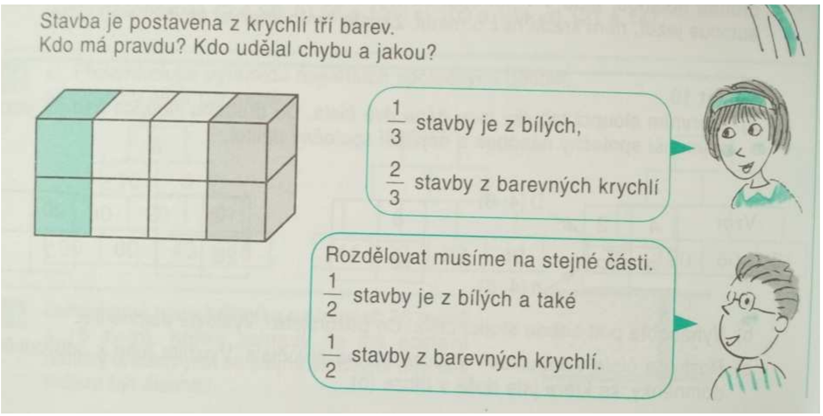


1 Postav stavbu z dvaceti čtyř kostek. Použij pouze 2 barvy (žlutou a modrou).
a) **Vyjádři zlomkem a zapiš**, jakou část stavby tvoří žluté kostky a jakou část stavby tvoří modré kostky.
b) **Vyměň kostky** ve stavbě tak, aby žlutých byla ve stavbě jedna polovina.
c) **Vyměň kostky** ve stavbě tak, aby byly ve stavbě tři čtvrtiny modrých kostek a zbytek byly žluté kostky.
d) **Vyměň kostky** ve stavbě tak, aby bylo ve stavbě pět šestin modrých kostek a zbytek byly žluté kostky.
e) **Vyměň kostky** ve stavbě tak, aby bylo ve stavbě 18 modrých kostek a zbytek byly žluté kostky.
f) **Vyjádři zlomkem,** jakou část stavby tvoří modré kostky.

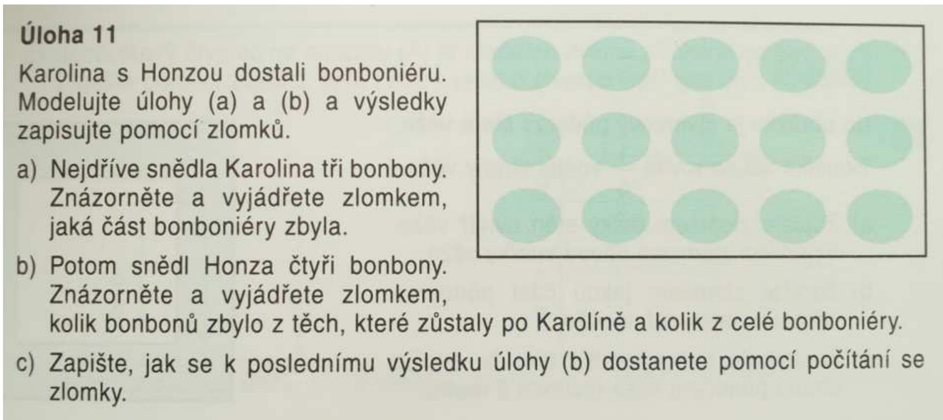
Obr. 2.30 Zadání úlohy – soubor předmětů 1
(Kaslová, Fialová, Čížková, Korda, 2007, str. 49)

Ikonická reprezentace

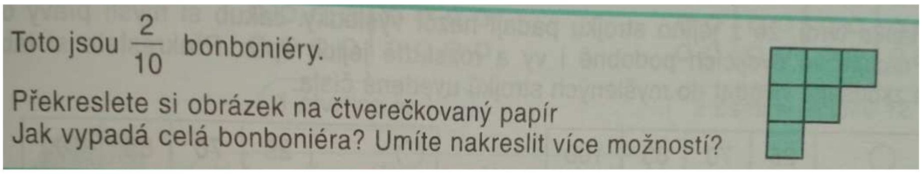
➢ Příklad zadání úloh (obr. 2.31. 2.32, 2.33, 2.34):



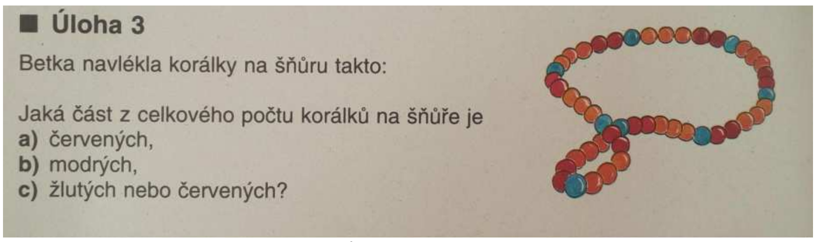
Obr. 2.31 Zadání úlohy – soubor předmětů 2 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 50)



Obr. 2.32 Zadání úlohy – soubor předmětů 3 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 2003, str. 21)



Obr. 2.34 Zadání úlohy – soubor předmětů 4 (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998, str. 55)



Obr. 2.33 Zadání úlohy – soubor předmětů 5 (Novotná, Kubínová, Sýkora, Sinková, 1996, str. 90)

2.7.3 Důsledky nedostatečného vytváření představ

Problémy, které nastávají ve vyučování matematice, jsou zpravidla důsledkem toho, že žáci pracují v matematice příliš brzy na abstraktní úrovni. Učí se počítat bez předešlého vytvoření představ, souvislostí s okolním světem a konkrétní realitou. Vyučování matematice by mělo vycházet ze studia modelů daných matematických situací. O tomto úskalí píše F. Kuřina (1978), ale i jiní např. M. Hejný, N. Stehlíková (1999); N. Vondrová, J. Žalská (2013); M. Tichá, J. Macháčková (2006) a další.

Někteří učitelé si neuvědomují důležitost názornosti modelů u početních operací se zlomky. Dotazované učitelky uvedly, že výpočet části z přirozeného čísla vyučují jako mechanický postup. *„To se učej, ¾ ze 100 i to už se učej. [...] Šikovnej si řekne 100 děleno čtyřmi krát 3. Musí se to naučit automaticky.*“… (Vondrová, Žalská, 2013, str. 77-78)

Na druhou stranu byly i dotazované učitelky, které si uvědomují důležitost modelů a názornosti. *„Pak jim v těch zlomcích dělá problémy ¾ z něčeho. Pro někoho je to tak podivná představa, že budeme tady si malovat a budeme krájet ty jablka a budeme stříhat koláče, jinak to nejde.*“ (Vondrová, Žalská, 2013, str. 78)

Podle M. Tiché a J. Macháčkové (2006, str. 21), zanedbání různých způsobů reprezentace vede k tomu, že *„Poznatky jsou uloženy pouze jako paměťové záznamy bez vztahu k již vytvořené struktuře vědomostí. Projevuje se to zvláště tak, že velká část žáků je neúspěšných při řešení dokonce i jednoduchých úloh vyrůstajících z reality. Aby žáci byli schopni řešit úlohu, musí si vytvořit „zdravou“ představu o situaci, úlohu (situaci) uchopit s porozuměním. To znamená vytvořit si model, určitou reprezentaci, která s úlohou, situací koresponduje.*“

M. Tichá a J. Macháčková (2006) dále uvádějí, že v běžné školní praxi se na činnostní a ikonické reprezentace často zapomíná. Žáci v matematice pracují spíše se symbolickou reprezentací a učí se počítat. Následně pak ve vyšších ročnících základní školy žáci již většinou neřeší úlohy úsudkem a experimentováním, ale snaží se použít nějaký vzoreček, algoritmus, šablonu. Využívání pouze symbolické reprezentace, která nebyla vytvořena na základě představ a zkušeností, vede k tomu, že se žáci učí řešení úloh nazpaměť a postupu řešení nerozumí. Žáci nenavazují na poznatkovou strukturu a své předešlé znalosti, což vede k formálním znalostem.

Bohužel musím přiznat, že i já ve své praxi často opomíjím činnostní reprezentace. Zjišťovala jsem u svých kolegyň učitelek matematiky, zda při hodinách s žáky provádějí nějaké činnosti v podobě stříhání, překládání papíru, zda pracují se „zlomkovnicemi“ apod. Protože vím, že dotazované kolegyně učí matematiku tradičním, transmisivním způsobem, nepřekvapilo mě, že využívají názor pouze pomocí obrázků v učebnici.

Například J. Divíšek a samozřejmě i další autoři píší o opomíjení činnostní reprezentace, a to zejména na druhém stupni základní školy. Následující citace by mohla vést k zamyšlení každého učitele: *„Hlavním nedostatkem vyučování zlomkům je, že se učitel při výkladu omezuje na znázornění uváděná v učebnici a v pracovním sešitu – tedy na znázornění finální. Zcela se opomíjejí nezbytné manipulace s reálnými předměty, které mají toto učivo objasnit. Uvedená znázornění jsou již připravena tak, že napovídají správný postup (to, co by měl žák sám objevit)… Jen při manipulacích si mohou žáci aktivně a spolehlivě osvojit význam zavedených pojmů čitatel a jmenovatel.“* (Divíšek, 1989, str. 68)

2.8 Interpretace zlomku

Tato kapitola shrnuje, v jakých souvislostech se s pojmem zlomku žáci setkávají.

M. Tichá a J. Macháčková upozorňují že *„se ukazuje, že zlomek vyjadřuje vztah část-celek, je ho možné chápat jako veličinu (kvantitativní údaj), jako operátor (pokyn k provedení početních operací; Hruša a Vyšín, 1964; Divíšek, 1989), míru, je jím možné zapsat podíl, poměr,…“* (Tichá, Macháčková, 2006, str. 4)

Autorky zmiňují, že různé interpretace zlomku žáky matou. Z důvodu odlišných významů žáci zlomkům nerozumí, znalosti v tomto tématu uchopují formálně a neumí následně řešit slovní úlohy se zlomky. Žáci nevědí, jestli zlomek vyjadřuje mnohost, nebo zda je v roli operátoru a měl by s ním tedy provést nějakou operaci apod.

Číslo, stejně tak i zlomek, se může vyskytovat ve třech podobách: mnohost, operátor a adresa. Žáci se setkávají nejprve se zlomkem v roli operátoru, například 2/3 z něčeho. Následně přecházejí ke zlomku jako mnohosti, tj. ne 2/3 z něčeho ale 2/3. Tento přechod činí žákům problémy a nějakou dobu trvá, než ho pochopí (viz kapitola Veličina). Mnohostí pak můžeme vyjádřit cokoliv, co je odpovědí na otázku „Kolik?“. Adresa představuje zlomek na číselné ose a díky ní lze zlomky uspořádání. Každé zmíněné podobě zlomku je nutné se ve výuce s náležitou pozorností věnovat. (M. Hejný, 1989)

2.8.1 Celek a část

Při budování pojmu zlomek je z hlediska pojmotvorného procesu a vytvoření prekonceptů významné právě dělení celku na části. Žák se v běžných každodenních situacích potkává s dělením celku na části. *„Nejde tedy v prvé řadě o počítání se zlomky a o aritmetickou operaci dělení. Jde o dobré pochopení procesu dělení celku na části a o porozumění* *kvantitativním vztahům, které se přitom utvářejí. … Problematika celku a části je důležitá pro užití matematiky v praxi a hraje významnou roli i v pojmotvorném procesu.*“ (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003, str. 2)

V souvislosti s přirozenými čísly se žák seznamuje s prvními představami vztahu celku a části. Zpočátku se učí, že část je menší než celek, následně umí určit doplněk, tj. pokud zná část a celek, umí spočítat i zbývající část celku. (M. Hejný, 1999)

Vztah celek a část má významné postavení a vyskytuje se jak při práci s přirozenými čísly, tak i s desetinnými čísly, s poměrem, s procenty, ale také se zlomky. (M. Hejný, 1999)

V této práci je pro mě významný vztah celku a části v tématu zlomek. Následující tabulka (tab. 2.3) proto shrnuje devět interpretací zlomku jako vztahu celku a části.

TŘÍDA	**PODTŘÍDA**		**ILUSTRACE pomocí zlomků**
IDENTIFIKÁTOR	*jméno*		*nevztahuje se ke vztahu celku a části*
	adresa	lineární	čtvrt litru na odměrce
		cyklická	hodiny odbíjí čtvrt
MNOHOST	počet		3/10 aut (z 10 aut)
	veličina		půl metru látky
OPERÁTOR	porovnání	aditivní	o 1/5 m nižší
		multiplikativní	1 a půl násobek příjmu
	změny	aditivní	povyrostl o ½ cm
		multiplikativní	utratil třetinu jmění
	části	multiplikativní	dvě pětiny z celku

Tab. 2.3 Devět interpretací zlomku (M. Hejný, 1999, str. 6)

M. Hejný (1999, str. 7) zdůrazňuje, že *„Při vyučování myšlenky, vztah celek-část‘ nutno žákům prezentovat všech 9 sémantických případů […]. V opačném případě dochází u některých žáků k vytvoření neplnohodnotné představy tohoto kvantitativního jevu.“*

V souladu s M. Hejným (1999) ale i dalšími autory, považuji zlomek ve vztahu celku a části za ústřední pojem. V dalších kapitolách se věnuji zlomku jako operátoru, zlomku jako veličině, zlomku jako podílu a zlomku jako poměru. Ve všech těchto kapitolách se ale zlomek jako vztah celku a části prolíná.

V této kapitole věnované zlomku jako vztahu celku a části bych zmínila dělení celku na stejné části a dělení celku po stejných částech[12]. Oba případy dělení souvisejí se správným chápáním

[12] V obou případech lze dělit jeden celek, ale samozřejmě i více celků. Pro jednodušší výklad se omezím na dělení jednoho celku, případně na dělení jednoho souboru prvků.

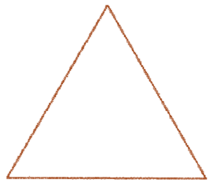
významu jmenovatele a čitatele. Číslo ve jmenovateli udává, na kolik stejných částí je celek rozdělen. Číslo v čitateli vypovídá o tom, o kolika takových částech uvažujeme.

Dělení celku na stejné části

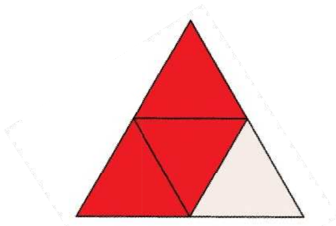
Při dělení celku na stejné části je úkolem, rozdělit tento celek na daný počet částí. Následně pak určit počet prvků v části. Přičemž celek a počet částí je pevně daný. (Tichá, Macháčková, 2006)

➢ Příklad v kontinuálním prostředí (vlastní tvorba):

V rovnostranném trojúhelníku vybarvi jeho $\frac{3}{4}$.

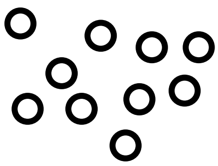


Příklad řešení: Nejdříve je celek rozdělen na čtyři části a následně jsou vybarveny tři tyto části.

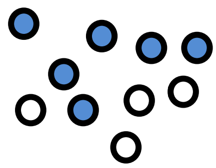


➢ Příklad v diskrétním prostředí (inspirováno Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003):

Tři pětiny kuliček vybarvi modře.



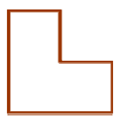
Příklad řešení:



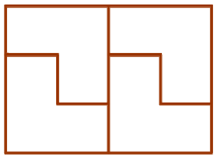
Dělení celku po stejných částech

M. Tichá a J. Macháčková (2006) dále píší o dělení celku po stejných částech. Při tomto procesu dělení celku je znám počet prvků v části a jak velký je celek. Úkolem je určit, kolik částí tvoří celek.

➢ Příklad v kontinuálním prostředí (inspirováno Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003):

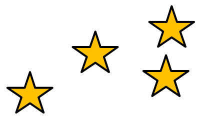
Vyjádři zlomkem, jakou část představuje obrázek  *z daného celku?*

Příklad řešení: Obrázek představuje $\frac{1}{4}$.

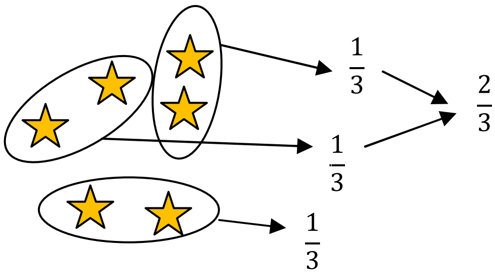


- Příklad v diskrétním prostředí (vlastní tvorba):

Balení obsahuje 6 samolepek. Jakou část z balení tvoří již nalepené samolepky znázorněné na obrázku?



Příklad řešení: Přidání dvou samolepek se vytvoří celek, protože balení obsahuje 6 samolepek. Každá dvojice samolepek pak tvoří 1/3, výsledek jsou tedy 2/3.



2.8.2 Operátor

Na prvním stupni základní školy se žáci seznamují se zlomkem v podobě operátoru. Podle J. Divíška (1989) je zlomek v podobě operátoru vnímán jako operátor konkrétní činnosti, kde je činností dělení celku na části, nebo jako číselný operátor, kde na zlomek nahlížíme jako na *„jakýsi ‚matematický stroj' (soubor instrukcí), který z daného přirozeného čísla vytvoří jiné přirozené číslo.“* (Divíšek, 1989, str. 70)

Číselný operátor se vyskytuje například v úloze typu: *Vypočítej 2/3 ze 6.* Žák prvního stupně postupuje při řešení úlohy tak, že šest vydělí třemi a výsledek vynásobí dvěma. Zlomek jako operátor je v podobě jakési funkce, která nějakým způsobem mění zadaný celek.

Se zlomkem v podobě operátoru souvisí tři typy úloh. U každého typu jsou zadány dva údaje a třetí se musí dopočítat. Podle typu úlohy lze určovat:

- část daného celku, pokud je dán celek a operátor
- celek z dané části, pokud je zadaná část a operátor
- operátor, pokud jsou dané část a celek

  (Podrobněji Divíšek, 1989, str. 71-74; M. Hejný, 1989, str. 69-70)

Např.: Anička čte knížku, která má 124 stránek. Zatím přečetla 52 stránek. Jakou část knihy přečetla?

Celek je 124 stránek a část je 52 stránek. Neznámý údaj je operátor, kterým je $\frac{15}{124}$ (v základním tvaru pak $\frac{13}{31}$).

M. Tichá a J. Macháčková (2006) a další uvádějí v souvislosti s těmito mnohdy pro žáky obtížnými úlohami následující zjištění:

- Pokud není celek v úloze jasně označený, žáci nejsou schopni samostatně rozlišit, co je celek.
- Pokud jsou v textu úlohy daná dvě čísla, žák automaticky považuje větší z čísel za celek.
- Pokud je v zadání úlohy číslo a zlomek, pak žák uchopuje číslo jako celek.

2.8.3 Veličina

M. Hejný (2011, str. 88) nazývá veličinou (mírou) *„to, co měříme pomocí jisté jednotky (metr, litr, gram, hodina, Kč, hektar, 1°, km/hod…). Jednotkou pro počet je ‚jeden kus‘.“*

Zápis veličiny se skládá z kvantitativního údaje, kde toto číslo může být zlomek, a z dané jednotky. Pokud není uvedena jednotka a veličina je vyjádřena pouze číslem, jde o počet. (M. Hejný, Stehlíková, 1999)

Číselné údaje u veličiny ve tvaru zlomku odpovídají *„zkušenostem, které se zlomky mají žáci z mimoškolního života.“* (Tichá, Macháčková, 2006, str. 5) Příkladem mohou být vyjádření typu: půl hodiny, tři čtvrtě kilometru, čtvrt litru mléka apod.

Veličina stejně jako počet představuje podobu zlomku jako mnohosti. Nejdříve se žáci setkávají s mnohostí ve tvaru čísla, které je spojeno s reálnými objekty, např. ½ chleba. Postupem času žák přestává zlomek spojovat s objekty, čímž zůstává jen číslo v podobě zlomku např. ½. Takto dojde k zestručnění daného vyjádření a žák může začít pracovat s tímto číslem již na abstraktní úrovni, např. provádět početní operace. (M. Hejný, 1989)

Podle M. Hejného (1989) je tento přechod pro žáky náročný, proto je důležité, aby se konal pomalu. Žák by měl mít dostatek času na vytvoření představ o zlomku, které souvisejí s konkrétními objekty.

Učitelé prvního stupně tvrdí, že žáci nemají s chápáním zlomků problém a že jim na prvním stupni rozumí. (Vondrová, Žalská, 2013; M. Hejný, 2004)

Naproti tomu již K. Hruša a J. Vyšín (1964, str. 62) zmiňují, že žáci na prvním stupni vnímají zlomky spíše jako *„nové jednotky, které často nejsou vůbec definovány a o nichž mají žáci mnohdy jen matnou a neúplnou představu."*

Toto chápání zlomků popisuje také M. Hejný (2004). Podle něho žák na prvním stupni pracuje nejdříve s kmenovými zlomky. Žák například 1/5 vnímá jako celek rozdělený na pět stejných dílů, kde uvažuje jeden z těchto dílu. To odpovídá chápání zlomku ve smyslu operátoru (viz kapitola Operátor). Nad zlomkem například 3/5 žák následně uvažuje jako nad třemi z pěti částí, tj. jako nad třemi kusy po 1/5. M. Hejný (2004, str. 349) tento postup nazývá jako *„dvoukrokový algoritmus"*. Zlomek např. 1/5 je žáky chápán právě jako „nová jednotka", jak popisují K. Hruša a J. Vyšín (1964).

Žák například při sčítání zlomku se stejným jmenovatelem vlastně stále počítá jako s přirozenými čísly. (M. Tichá, konzultace dne 26. 10. 2016)

Např.: $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ žák počítá jako $3\left(\frac{1}{7}\right)+2\left(\frac{1}{7}\right)=(3+2)\left(\frac{1}{7}\right)=5\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7}$

2.8.4 Podíl

Dle současného RVP se téma zlomky vyučuje až v sedmém ročníku základní školy. Žáci by měli navázat na vybudované představy o zlomcích z prvního stupně. V sedmém ročníku se žáci kromě početních operací se zlomky učí převádět zlomky na desetinná čísla. S tím souvisí i interpretace zlomku jako zápisu podílu. Zlomek v tomto smyslu vyjadřuje naznačené dělení.

Žáci tedy na zlomek, konkrétně na zlomkovou čáru, nahlížejí jako na symbol, který představuje operaci dělení. Při tomto procesu se dělí čitatel jmenovatelem, kde výsledkem je desetinné číslo.

Při převádění zlomku do tvaru desetinného čísla se opět projevuje neporozumění některých žáků a nesprávná představa toho, co zlomek znamená.

Učitelé uvádějí tyto miskoncepce v chápaní zlomku jako vztahu celku a části:

„Když máme 8/100, tak mi potom píšou 8,100. Ale myslím, že to dělali sedmáci, když bylo 7/2, tak psali 7,2. Tady v 6. ročníku jsou jen desetinný, tak to ještě vydělí, ale v sedmičce už to napíší takto."

„A oni neumějí, oni osm děleno třemi ti řeknou, že je dva a zbytek dva, takže dvě celé dva. […] já jsem řekla, dobře, vezměte to tak, že je to osm děleno třemi a že to můžete napsat zlomkem. Problém ale je, že jim to nic neříká." (Vondrová, Žalská, 2013, str. 75)

2.8.5 Poměr

V sedmém ročníku základní školy se žáci učí také o poměru. S poměrem se žáci seznamují v situacích nebo úlohách typu: rozdělování peněz v daném poměru, ingredience na koláč zadané v nějakém poměru, ředění sirupu, apod. Dále v souvislosti s podobností, při které se propojuje aritmetická a geometrická představa - lze zvětšovat/zmenšovat geometrické obrazce v daném poměru.

Poměr lze definovat následovně: *„Poměr dvou čísel je naznačený podíl. Místo ‚děleno' čteme ‚ku'. Číselná hodnota poměru (podíl) je zlomek, desetinné číslo nebo celé číslo."* (Rosecká, Čuhajová, Ružička, 1998, str. 45)

Např.: Žák řeší úlohu „Jaká část obrazce je vybarvená?". Řešení by mělo být například 1/4 obrazce je vybarvená. Žák však může chápat úlohu jako poměr vybarvené ku nevybarvené části. Takový poměr vystihuje zápis 1:3. Takto smýšlející žák jako výsledek napíše, že 1/3 obrazce je vybarvená.

Problém je v tom, že poměr lze sice zapsat zlomkem, ale tento zlomek nevyjadřuje vztah celek-část. Významné pro chápání zlomku je vztah celku a části. Pro poměr je to vztah celku a celku, nebo části a části.

3 PRAKTICKÁ ČÁST

3.1 Charakteristika výzkumného šetření

3.1.1 Cíl výzkumného šetření

V úvodu jsem již uvedla, že hlavním cílem aktivit spojených s vypracováním této diplomové práce bylo zlepšit mou dosavadní pedagogickou praxi. Praktickou část jsem tedy zpracovávala za účelem získání zpětné vazby o své výuce a také o tom, v jakých částech učiva o zlomcích mají žáci mezery. Zajímalo mě, které problémové oblasti v chápání zlomků dělají žákům největší potíže. Vycházela jsem z výzkumů M. Tiché a J. Macháčkové (2006), N. Vondrové a J. Žalské (2013), N. Vondrové a M. Rendla (2015) a dalších, a z hledisek vyplývajících z teoretické části.

Prostřednictvím provedeného šetření jsem chtěla porozumět strategiím, které vedou žáky k některým řešením úloh. Také prozkoumat možné žákovské miskoncepce, abych se na ně v budoucí praxi mohla zaměřit a snažila se jim předcházet.

Dalším záměrem šetření bylo dozvědět se, jak žáci budou zadané úlohy řešit a zda vůbec budou schopni je vyřešit. Zajímalo mě také, jak žáci chápou pojem zlomek a co si pod ním představují, jak rozumí zlomku ve vztahu celku a části. V neposlední řadě jsem pozorovala, jestli se v žákovských řešeních projeví chyby a úskalí, o kterých jsem psala v teoretické části. Nesoustředila jsem na to, jestli umí se zlomky provádět početní operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení.

3.1.2 Formulace výzkumné otázky

Původně zněla má hlavní výzkumná otázka takto:

Které modely a interpretace zlomku dělají žákům potíže a které chápou dobře?

Otázka takto položená, předem předpokládá, že některé interpretace a modely dělají žákům potíže. To je sice obecně známo, ale mým cílem bylo zjistit, jaké problémy budou mít konkrétně žáci, které učím. Proto konečná formulace výzkumné otázky zní:

Jak žáci chápou modely a interpretace zlomku?

Podotázky, na které se budu ve výzkumu soustředit:

- *Jaké mají žáci představy o zlomcích?*
- *Které modely zlomku žáci využívají?*
- *Jak chápou žáci podstatu zlomku jako vztahu celku a části?*
- *Jak budou žáci řešit zadané úlohy?*
- *Jakých chyb se žáci dopustí při řešení zadaných úloh?*

3.1.3 Metody výzkumného šetření

Při naplňování cílů a hledání odpovědí na výzkumné otázky jsem zvolila výzkumnou strategii inspirovanou akčním výzkumem, a to protože hlavním cílem výzkumného šetření bylo zlepšit a obohatit mou dosavadní praxi.

Podle pedagogického slovníku je akční výzkum *„Druh pedagogického výzkumu, jehož účelem je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe, řeší aktuální potřeby vzdělávací instituce.“* (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, str. 15)

„Cílem akčního výzkumu je zvýšit profesionalitu učitele, rozvíjet jeho pedagogické myšlení a dovednosti, zkvalitnit jeho rozhodovací procesy, ovlivnit hodnotovou orientaci i posílit jeho naději a víru v možnosti zlepšit vlastní pedagogické zkušenosti.“ (Nezvalová, 2003, str. 301)

3.1.4 Fáze výzkumu

Výzkumné šetření jsem započala průzkumem žákovských prací, ve kterých jsem sledovala, kde všude žáci při řešení úloh se zlomky narazili na problém a nepochopení. Díky tomu jsem výzkumný problém zúžila na interpretace a modely zlomků. Neříkám, že sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků nedělalo žákům potíže, ale jejich neúspěch přisuzuji hlavně formálním znalostem. Domnívám se, že se algoritmy pro počítání se zlomky učili nazpaměť, bez pochopení a hlubšího vhledu do dané situace. Nedovedli si tak odborný postup odvodit v případě, že ho zapomněli.

Vlastní výzkumné šetření jsem rozdělila na tři fáze. V každé fázi byly žákům zadány úlohy v podobě pracovních listů. Tyto pracovní listy žáci vyplňovali ve třech obdobích. V každé fázi výzkumu jsem reagovala na předešlá zjištění a soustředila se na užší problém. Mezi výzkumy jsem se snažila zjištěným problémům věnovat ve výuce.

Poslední část úloh, které byly žákům předloženy k vyřešení ve třetí fázi výzkumu, jsem zpracovala ve formě concept cartoons. Potenciál jedné z takto zadaných úloh (Úloha Destičky) jsem využila ke dvěma polostrukturovaným rozhovorům. Vybraní dva žáci, jejichž řešení úlohy bylo chybné, v rozhovorech odpovídali na otázky, které jsem si předem připravila a pak na otázky, které vyplynuly z rozhovoru. Při rozhovoru se žáky jsem zjišťovala, co je vedlo k takovému řešení úlohy a jak při řešení uvažovali. Z rozhovorů jsem pořídila audio záznam, abych odpovědi žáků mohla podrobněji prozkoumat.

3.1.5 Metody zpracování dat

Při zpracování dat průzkumného šetření jsem vytvářela skupiny dat, do kterých jsem zařazovala shodné jevy. Tyto jevy jsem se snažila prozkoumat, na základě prostudované literatury pochopit a případně porovnat s již uskutečněnými výzkumy.

Při vlastním šetření jsem vycházela z předešlého průzkumu a vybrala tak úlohy, které se staly prostředkem k naplňování cílů šetření. Než jsem úlohy žákům zadala, stanovila jsem domněnky o možných řešitelských strategiích a miskoncepcích žáků. Následně jsem při zpracování dat sledovala, zda se mé domněnky v řešeních žáků objevily, případně jaké další jevy se ve výsledcích a odpovědích žáků vyskytly.

Celkově jsem se při zpracování dat nesoustředila primárně na četnost jevů, ale na vypovídající hodnotu těchto jevů. Výzkum byl tedy zpracováván kvalitativně.

Kvalitativní výzkum je *„výzkum založený na získávání dat v interakcích výzkumníka se zkoumaným fenoménem v jeho přirozeném prostředí, kladoucí důraz na interpretace a komplexnost popisu zkoumaného jevu.*“ (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, str. 139)

Ve zjištění a analýze dat uvádím kvantitativní údaje úspěšnosti řešení. Jsem si vědoma toho, že žáci, se kterými byl tento výzkum uskutečněný, netvoří reprezentativní vzorek. Tyto číselné údaje jsem zjišťovala hlavně pro vlastní potřebu, abych viděla úspěšnost žáků v jednotlivých úlohách.

3.1.6 Charakteristika žáků

Výzkumné šetření bylo zaměřeno na žáky dvou tříd, které učím matematiku. Šetření bylo uskutečněno v průběhu jejich sedmého (2014/15) a osmého (2015/16) ročníku školní docházky. V tu dobu bylo v jedné třídě 27 a v druhé třídě 28 žáků.

Škola, ze které žáci pocházejí, se nachází na periferii Prahy a navštěvují ji mimo jiné také žáci ze sociálně znevýhodněných rodin, cizinci a také žáci se speciálně vzdělávacími potřebami. Poměrně velká část žáků při přechodu na druhý stupeň odchází na jiné školy nebo gymnázia.

3.1.7 Etické otázky

Žáci byli seznámeni s tím, že pracovní listy, které vyplňovali, budou sloužit jako podklad pro mou diplomovou práci. Také jsem je ubezpečila, že nikde nebudu zveřejňovat jejich osobní údaje. Všichni s tím souhlasili.

3.2 Průzkumné šetření

V průzkumném šetření, které jsem provedla v počátcích svého výzkumu, jsem charakterizovala užší problém, kterým se při samotném výzkumném šetření budu zabývat. V písemných pracích žáků jsem se zaměřila na problémové oblasti v tématu zlomek. Snažila jsem se řešení žáků daných úloh blíže prozkoumat a pochopit příčiny chyb, kterých se žáci dopustili.

3.2.1 Zlomek jako veličina

První úloha, která upoutala mou pozornost, spočívala v tom, že žáci měli určit, kolik je $\frac{3}{4}$ hodiny minut nebo kolik je $\frac{3}{4}$ metru centimetrů.

Úlohy (viz obr. 3.1) se vyskytovaly v písemce, která byla zadaná v době, kdy bylo probráno učivo o rozšiřování a krácení zlomků, převádění desetinného čísla s konečným desetinným rozvojem na zlomek a zlomku na desetinné číslo. Bylo to tedy před zaváděním početních úkonů se zlomky.

Překvapilo mě, že více než polovina žáků neuměla zacházet se zlomky v podobě kvantitativního údaje u veličiny, přestože je to látka prvního stupně.

4. Vypočítej :			**4. Vypočítej :**		
a)	$\frac{3}{20}\,m =$	cm	*a)*	$\frac{3}{4}\,m =$	cm
b)	$\frac{3}{4}\,h =$	min	*b)*	$\frac{5}{6}\,h =$	min
c)	$\frac{7}{20}\,l =$	ml	*c)*	$\frac{7}{25}\,l =$	ml
d)	$\frac{4}{5}\,z\ 180 =$		*d)*	$\frac{2}{3}\,z\ 690 =$	

Obr. 3.1 Úlohy z písemné práce – zlomek jako veličina

Předpokládala bych, že konkrétně u převedení $\frac{3}{4}$ hodiny na minuty nebudou žáci ani počítat a budou umět výsledek určit zpaměti, ze zkušenosti. Opak byl ale pravdou.

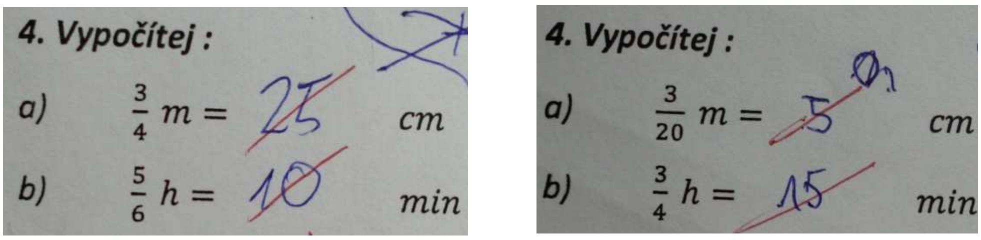
Chybná řešení žáků:

Samotnou úlohu jsem při zkoumání řešení úlohy rozdělila na dvě části. První část tvořily položky a) až c) a druhou část položka d). Dále jsem chybná řešení žáků roztřídila do několika skupin. U každé skupiny jsem uvedla, jak chápu žákův postup řešení a na konci každé skupiny chybných řešení shrnuji, co si myslím, že vedlo žáka k takovému řešení.

1. <u>Vyjádření jedné části</u>

V této skupině chybných řešení žáci vyjádřili výsledek pouze jako jednu část z celku. Řešení zde uvedená jsou sice chybná, ale domnívám se, že žáci alespoň trochu pochopili, v čem spočívá správný postup řešení.

- Žáci v úloze považovali za výsledek číslo, které vyjadřovalo pouze jednu část z celku (obr. 3.2). Vypočítali například, kolik je čtvrtina metru centimetrů, ale neuvědomili si, že v zadání jsou čtvrtiny tři.



Obr. 3.2 Vyjádření jedné části z celku

- Vyhodnocení: Vypočítání pouze jedné části z celku může plynout z nepozornosti žáků. Žáci při počítání spěchali a nevšimli si, že čitatel není roven jedné a tak musí uvažovat tolik částí z celku, kolik je čitatel zlomku. Nebo příčinou může být jen částečné pochopení vyjádření zlomku jako vztahu celku a části. Žáci tak umí pracovat pouze s kmenovými zlomky a nekmenové zlomky jim ještě nejsou zcela jasné.

2. <u>Rozšiřování zlomku</u>

Následující řešení žáků spočívala v rozšiřování zlomků.

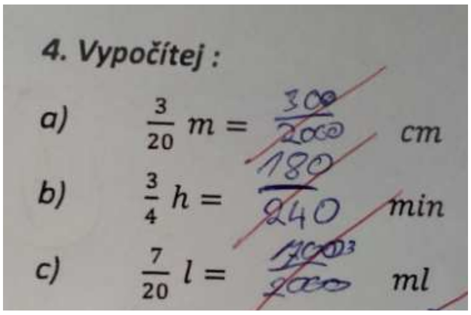
➢ Z ukázky na obr. 3.3 je patrné, že žák celkem ovládá převody jednotek. Výjimkou je položka c), kde žák předpokládal, že 1 litr má 100 mililitrů místo 1000 mililitrů.

Žák při řešení úlohy převedl zlomek na uvedené jednotky tak, že rozšířil daný zlomek číslem, které souviselo s převodem na uvedenou jednotku. Např. když převáděl z metrů na centimetry, tak zadaný zlomek rozšířil číslem 100, tj. např. $\frac{3}{20} \cdot \frac{100}{100} = \frac{300}{2000}$.

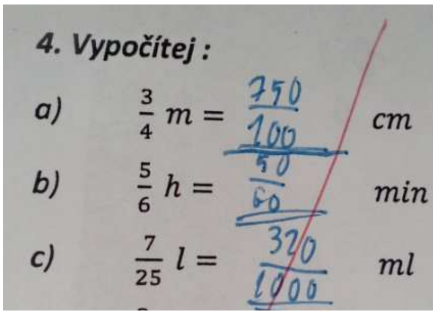
➢ V ukázce řešení na obr. 3.4 žák nejspíš opět zná převody jednotek. Stejně jako v předchozí ukázce řešení se i tento žák se snaží využít pravidlo pro rozšiřování zlomků. Žák při řešení úlohy rozšířil zlomek $\frac{3}{4}$ tak, aby jmenovatel zlomku byl číslo sto, protože jeden metr má sto centimetrů. Následně dopočítal čitatele.

Tj. $\frac{3}{4} = \frac{?}{100} \Longrightarrow 100 : 4 = 25 \Longrightarrow ? = 25 \cdot 3 = 75 \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$

Pozn.: U položky c) předpokládám, že žák udělal numerickou chybu a místo $7 \cdot 40$ násobil $8 \cdot 40$.



Obr. 3.3 Řešení úlohy rozšiřováním 1



Obr. 3.4 Řešení úlohy rozšiřováním 2

➢ Vyhodnocení: Žáci při řešení úlohy nenahlíželi na zlomek jako například na část metru, kterou měli vyjádřit v centimetrech apod. Jejich přístup k úloze byl zřejmě formální. Žáci se naučili postup pro rozšiřování zlomků a snažili se ho v úloze uplatnit. Význam zlomku jako operátoru, pomocí kterého vypočítají část z celku, žákům zcela unikl. V úloze žáci se zlomky zacházeli zcela mechanicky, bez představ a zamyšlení.

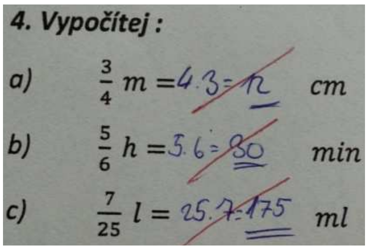
3. <u>Snaha použít početní operace násobení, dělení</u>

Při řešení úlohy se žáci snažili použít operace násobení a dělení, protože si tyto operace v souvislosti s těmito úlohami zapamatovali.

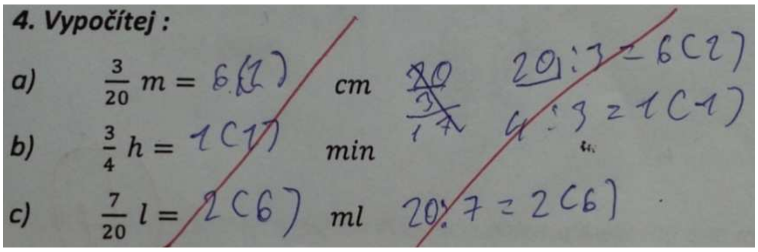
➢ Příklad chybného řešení na obr. 3.5 ilustruje úvahu žáka, který se při řešení snažil uplatnit operaci násobení. Vynásobil mezi sebou číslo v čitateli a číslo ve jmenovateli. Tento součin následně považoval za výsledek.

➢ V druhé ukázce na obr. 3.6 žák naopak použil operaci dělení. Žák se opět snažil využít naučený algoritmus pro převod zlomku na desetinné číslo, který se opírá o dělení čitatele jmenovatelem. Žák ale dělil jmenovatele čitatelem.

Žák dělí se zbytkem, což neodpovídá znalostem druhého stupně ZŠ. Domnívám se, že dělení menšího čísla větším by byl pro žáka příliš obtížný postup. Žák proto dělil větší číslo menším, tudíž číslo ve jmenovateli číslem v čitateli.



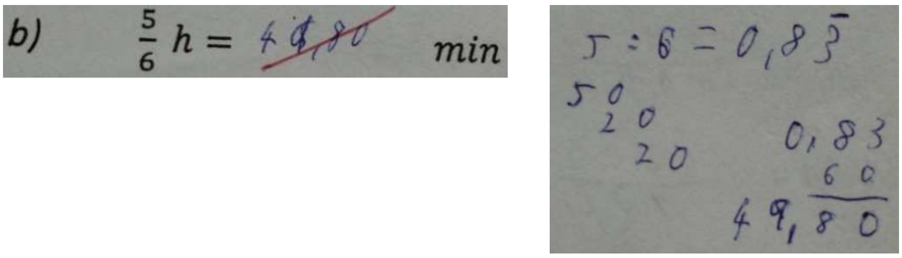
Obr. 3.5 Násobení čitatele a jmenovatele



Obr. 3.6 Dělení většího čísla menším

➢ Třetí ukázka (obr. 3.7) znázorňuje zajímavý postup řešení úlohy. Žák využil algoritmus pro převod zlomku na desetinné číslo, dělil tedy čitatele jmenovatelem. Tento podíl následně převedl na danou jednotku, tj. na minuty. Nedostatkem této strategie bylo počítání bez kalkulačky. Žák desetinné číslo s periodou násobil bez této periody, proto mu vyšel nepřesný výsledek.

V době, kdy jsem tuto úlohu žákovi opravovala, jsem se řešením nezabývala. Neuvědomila jsem si, že by tento přibližný výsledek mohl být alespoň z části akceptovatelný.



Obr. 3.7 Zajímavý postup řešení úlohy – dělení čitatele jmenovatelem

➢ Vyhodnocení: Strategie v této skupině chybných řešení (hlavně tedy první dva postupy) se opírají o využití početních operací násobení nebo dělení. Žáci uměli zlomky pouze rozšiřovat, krátit a převádět na desetinné číslo, proto využívali právě operací násobení a dělení a snažili se úlohu s použitím těchto operací řešit.

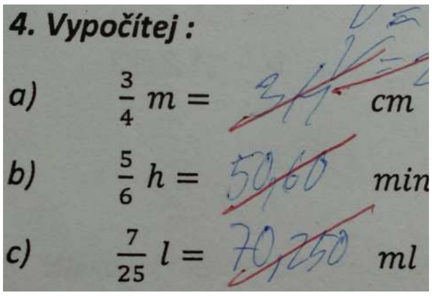
Třetí postup řešení zde uvádím proto, že byl pro mě velmi překvapivý. Žák nad úlohou přemýšlel. Přestože aplikoval postup převodu zlomku na desetinné číslo, dotáhl řešení do konce a toto desetinné číslo převedl alespoň přibližně na uvedené jednotky.

4. <u>Pokus o zápis zlomku v podobě desetinného čísla</u>

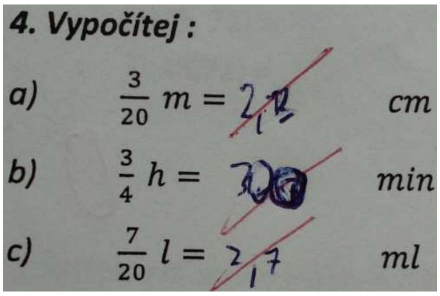
Řešení uvedená v této skupině chybných řešení ukazují pokus o zapsání zlomku desetinným číslem. Žáci tak tvořili desetinné číslo pouze použitím čísel z čitatele a jmenovatele zlomku. Čísla přepsali do podoby desetinného čísla tak, že mezi čísla z čitatele a jmenovatele napsali desetinnou čárku. S čísly neprováděli žádné početní operace.

➢ Na obr. 3.8 tvoří celek desetinného čísla čitatel zlomku a desetinný rozvoj jmenovatel zlomku.

➢ Na obr. 3.9 naopak jmenovatel zlomku představuje celky desetinného čísla a čitatel zlomku desetinný rozvoj.



Obr. 3.8 Zlomek jako desetinné číslo 1

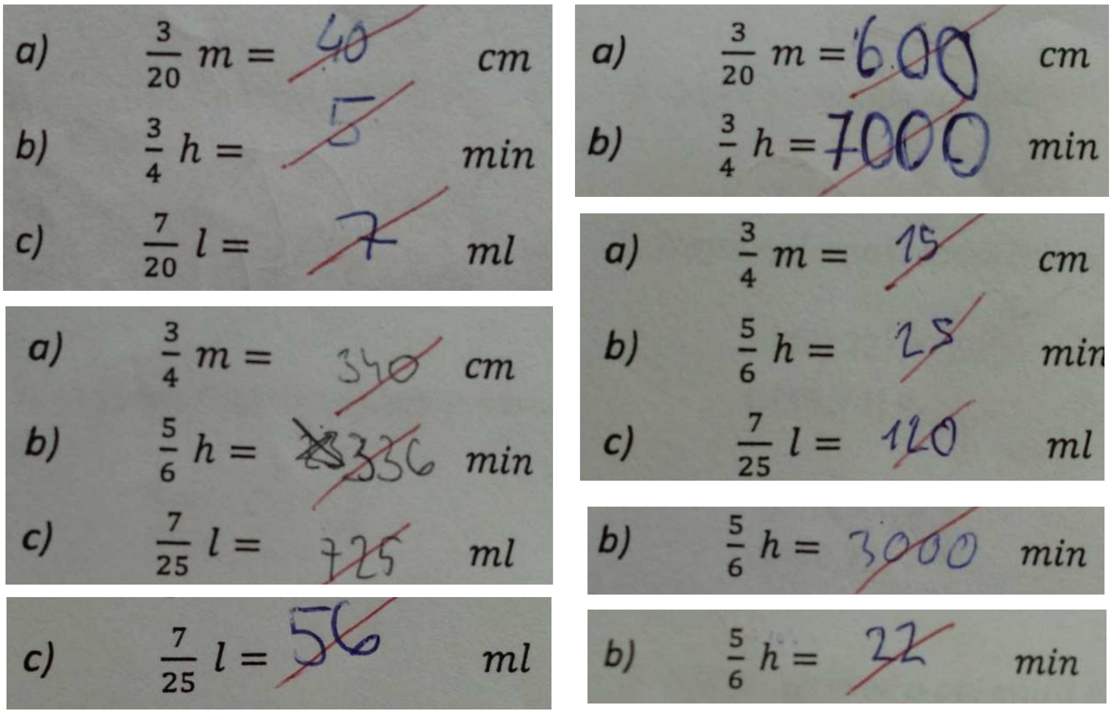


Obr. 3.9 Zlomek jako desetinné číslo 2

Pozn.: Číslo z čitatele či jmenovatele žáci mírně upravovali, a to buď ubráním, nebo přidáním nul.

➢ Vyhodnocení: Domnívám se, že tito žáci nemají žádné představy o zlomku jako vztahu celku a části. Nerespektují a nechápou velikost těchto zlomků, proto byli schopni zapsat zlomky menší než jedna jako desetinné číslo s celky, které jsou větší než dokonce několik desítek. K řešení přistupovali velmi formálně.

5. Náhodné pokusy o řešení

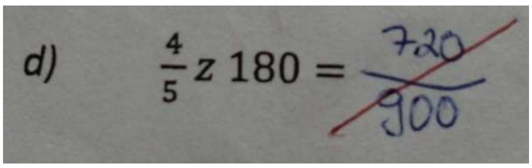


Obr. 3.10 Pokusy o nějaké výpočty

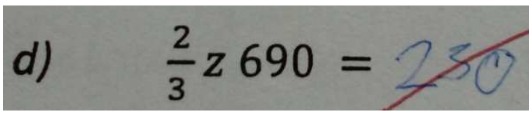
Domnívám se, že to tyto výsledky žáci získali využitím různých početních operací s čísly z čitatele a jmenovatele zlomku (obr. 3.10). V některých řešeních jsou do výpočtu navíc zapleteny převody jednotek, které často nejsou správné.

6. Část z celku

- ➢ Stejně jako v předchozích řešeních úlohy se žáci dopouštěli chyb souvisejících s rozšiřováním zlomků (obr. 3.11) či určení pouze jedné části z daného celku (obr. 3.12). (Viz předchozí skupiny chybných řešení Vyjádření jedné části a Rozšiřování zlomku)



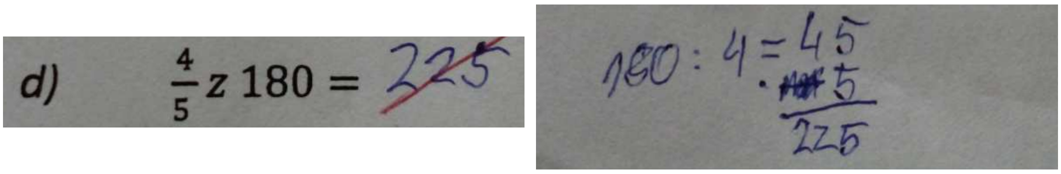
Obr. 3.11 Vyjádření jedné části z celku 2



Obr. 3.12 Řešení úlohy rozšiřováním 3

- ➢ Další způsoby řešení souvisely s chybným zapamatováním postupu. Žáci věděli, že mají zadané přirozené číslo vydělit a pak vynásobit, a to čísly z čitatele a jmenovatele zlomku.

Na obr. 3.13 žák nejdříve zadané číslo dělil čitatelem a tento podíl vynásobil jmenovatelem zlomku.

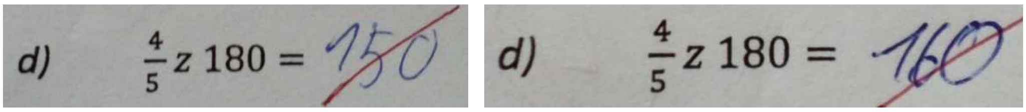


Obr. 3.13 Dělení celku čitatelem a násobení jmenovatelem

V ukázce řešení na obr. 3.13 žákovi vyšel výsledek větší než číslo 180, který škrtl. Nelze posoudit, zda se žák zalekl výsledku většího než 180, nebo jestli si uvědomil, že zlomek $\frac{4}{5}$ je menší než jedna, proto i výsledek musí být menší než 180. Kdyby ale uvažoval nad velikostí zlomku $\frac{4}{5}$, tak by podle mě nenapsal výsledek naopak tak extrémně malý.

Obr. 3.14 Pokus o výpočet části z celku

➢ Poslední dvě ukázky řešení na obr. 3.15 představují sice chybná řešení, ale myslím, že žáci tato řešení tipovali. Při písemce, kde byla tato úloha zadaná, žáci nepoužívali kalkulačku a tak všechny početní úkony počítali zpaměti nebo písemně.



Obr. 3.15 Odhad řešení

➢ Vyhodnocení: Chyby v řešení uvedené v této skupině chybných řešení byly způsobeny nejspíš formálním přístupem k dané úloze. Žáci měli naučený mechanický postup a ten se snažili aplikovat (rozšiřování zlomku, výpočet části z celku apod.).

Žáci neuvažovali nad velikostí zlomku a tudíž ani nad velikostí vypočítané části z daného celku. Např.: Zlomek byl na první pohled větší než polovina a o něco menší než celek, a tomu by měl také odpovídat výsledek. Z řešení žáků usuzuji, že nechápou princip dělení celku na části a nejspíš ani nemají vybudované představy o velikosti daného zlomku (obr. 3.13, 3.14, 3.15).

V druhé části této skupiny chybných řešení jsem sice uvedla chybná řešení, ale domnívám se, že tato řešení jsou opřena alespoň o nějakou představu žáka o zlomku jako vztahu celku a části. Chyba nejspíš tedy tkví v lenosti žáka a počítání bez kalkulačky (obr. 3.15).

Závěr

Uvedená úloha interpretovala zlomek jako kvantitativní údaj veličiny. Ukázalo se, že necelých dvacet procent žáků nevyplnilo žádné řešení a téměř polovina žáků řešila zadanou úlohu s chybami, které vyplývaly z formálního přístupu. Žáci se snažili při řešení úloh použít některý z naučených algoritmů (rozšiřování, krácení zlomku, převod zlomku na desetinné číslo, mechanický postup pro vypočítání části z celku apod.).

3.2.2 Zlomek jako podíl

V druhé úloze (obr. 3.16), kterou jsem zkoumala v písemných pracích žáků, se projevuje nesprávné chápání zlomku jako zápisu naznačeného podílu. Žáci neumí přecházet od zlomku k desetinnému číslu a obráceně. Myslím tím i základní přechody jako $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$ apod.

Úloha byla zařazena ve stejné písemce jako v předešlé kapitole Zlomek jako veličina. Jak jsem již zmiňovala, úlohy v písemce byly zaměřeny na rozšiřování a krácení zlomků, převádění zlomku na desetinné číslo a převádění desetinného čísla s ukončeným periodickým rozvojem na zlomek. Žáci v úloze měli převést zlomek, který nebyl desetinný, na desetinné číslo.

*8. Zapište jako **desetinné číslo** s přesností na **desetiny**, případně **označte periodu**.*

a) $\frac{33}{24} =$	*a)* $\frac{20}{17} =$
b) $\frac{2}{9} =$	*b)* $\frac{2}{3} =$
c) $\frac{4}{20} =$	*c)* $\frac{3}{25} =$
d) $\frac{21}{30} =$	*d)* $\frac{15}{50} =$

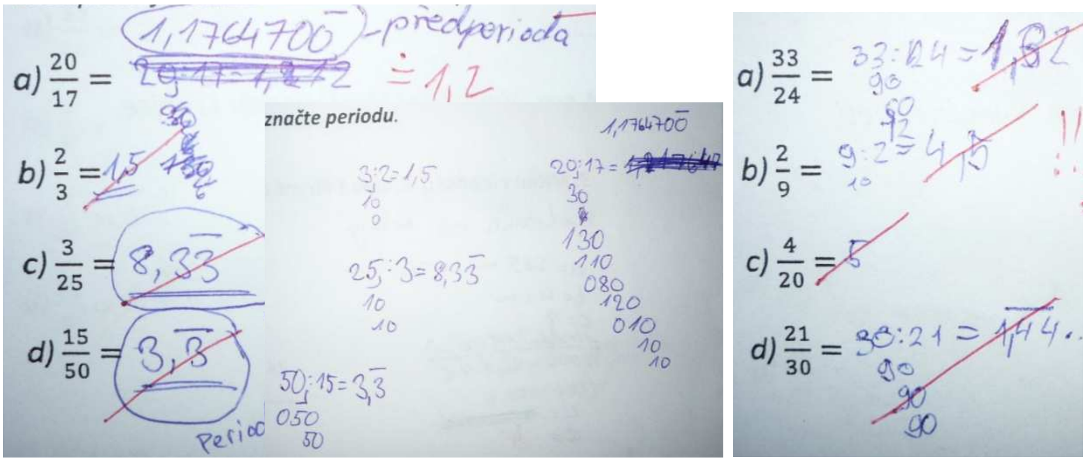
Obr. 3.16 Zadání úlohy - zlomek jako podíl

Chybná řešení žáků:

Řešení úlohy jsem rozdělila do tří skupin, a to podle vyskytující se strategie řešení.

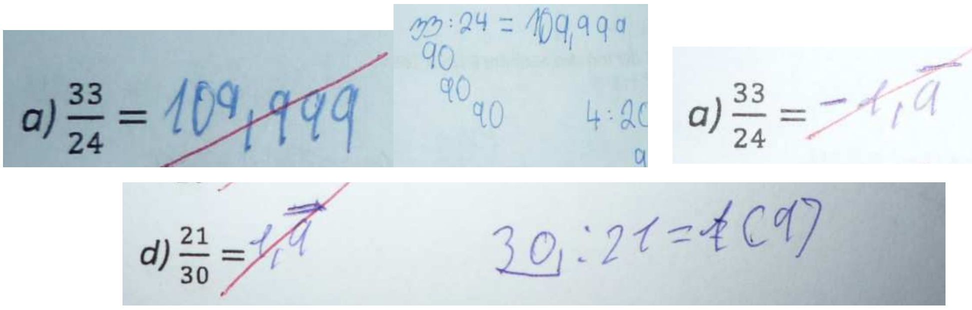
1. <u>Dělení většího čísla menším</u>

➢ Při řešení úlohy si žáci pamatovali, že mají vydělit čísla vyskytující se ve zlomku. Žáci dělili větší číslo menším, přestože správný postup spočíval v dělení čitatele jmenovatelem (obr. 3.17).



Obr. 3.17 Dělení většího čísla menším

➢ V ukázce na obr. 3.18 je řešení opět postaveno na dělení většího čísla menším. Žáci navíc dělí se zbytkem. Desetinné číslo žáci následně poskládali tak, že celky desetinného čísla tvořil celočíselný podíl a zbytek po dělení žáci zapsali jako desetinný rozvoj takto vzniklého desetinného čísla.



Obr. 3.18 Dělení se zbytkem většího čísla menším

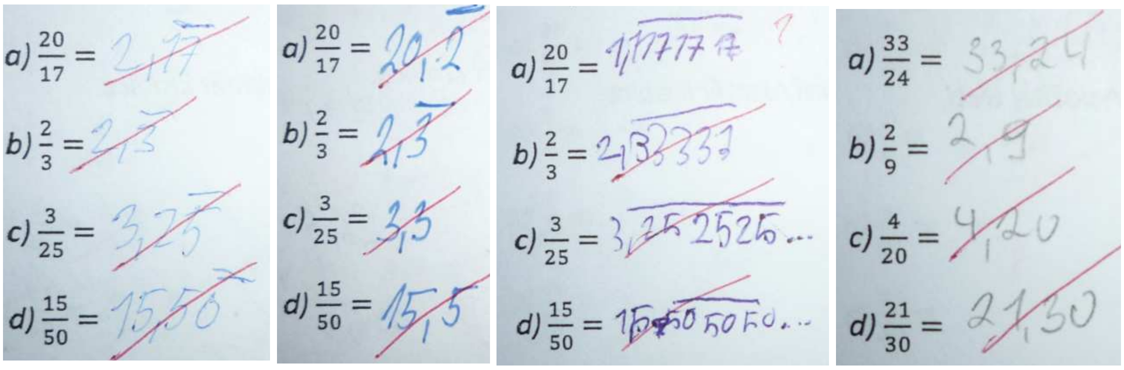
➢ Vyhodnocení: Uvědomuji si, že žáci mohli postupovat tímto způsobem také z důvodu absence kalkulačky. Žáci se nažili ulehčit si výpočet, přitom už ale nepřemýšleli nad tím, že operace dělení není komutativní a není jedno, v jakém pořadí čísla dělím.

V řešení žáků se opět objevovalo nepochopení zlomku jako vztahu celku a části. Zadaný zlomek a vzniklé desetinné číslo se neshodují ve vztahu celku a části. Zlomek menší než jedna nemůže být vyjádřen desetinným číslem větším než jedna nebo dokonce celým číslem.

Také zapsání zbytku po dělení jako desetinný rozvoj desetinného čísla vypovídá o nedostatečném pochopení dané problematiky.

2. Pokus o zápis desetinného čísla použitím čísel z čitatele a jmenovatele

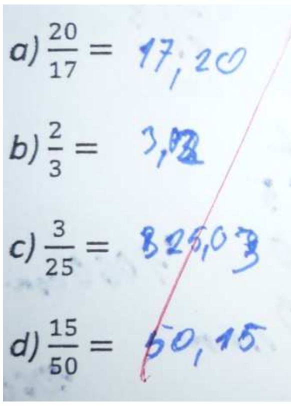
➢ Obr. 3.19 ukazuje řešení žáků, kteří zapsali zlomek desetinným číslem tak, že číslo z čitatele zlomku tvoří celky desetinného čísla a číslo ze jmenovatele tvoří desetinný rozvoj desetinného čísla. Tato miskoncepce se objevila již u řešení žáků v kapitole Zlomek jako veličina.



Obr. 3.19 Pokus o zápis desetinného čísla použitím čísel z čitatele a jmenovatele 1

Pozn.: Žáci měli výsledek zaokrouhlit na desetiny, což odpovídá druhému řešení zleva na obr. 3.19. Dále měli žáci ve výsledku vyznačit případnou periodu, proto žák ve třetím řešení zleva na obr. 3.19 zapsal desetinná čísla tímto způsobem.

➢ Na obr. 3.20 je naopak desetinné číslo tvořeno tak, že číslo ze jmenovatele zlomku je použito k vyjádření celků desetinného čísla a číslo z čitatele zlomku k vyjádření desetinného rozvoje desetinného čísla.



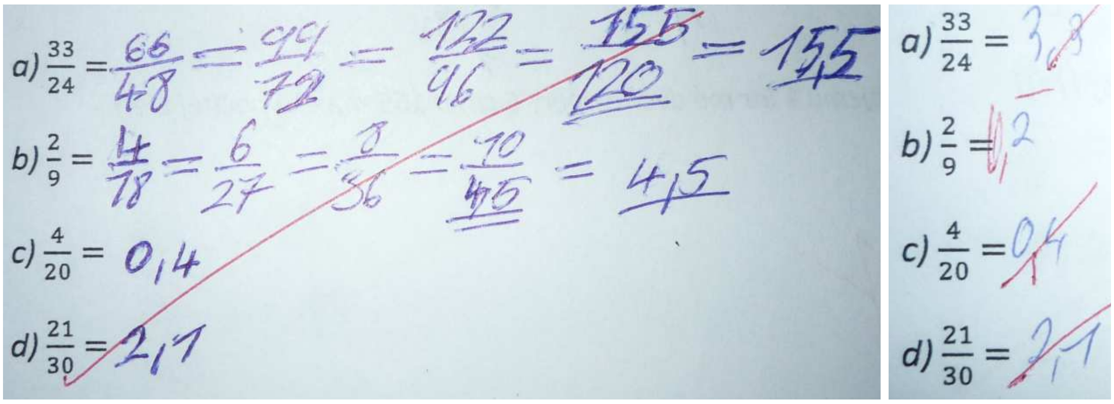
Obr. 3.20 Pokus o zápis desetinného čísla použitím čísel z čitatele a jmenovatele 2

➢ Vyhodnocení: Tento pokus o zápis zlomku desetinným číslem se nacházel již v předchozích řešeních žáků úlohy v kapitole Zlomek jako veličina. Vypovídá o formálním přístupu žáků, kde žáci nemají sebemenší představu zlomku a desetinného čísla jako vyjádření vztahů celku a části.

3. „Nedesetinný“ zlomek

Žáci, jejichž řešení je zařazeno do této skupiny chybných řešení, se snažili uplatnit postup převodu desetinného zlomku na desetinné číslo.

- První přístup z obr. 3.21 vlevo se opírá o postup při rozšiřování zlomku. Žák rozšiřoval zlomek tak dlouho, dokud nezískal v čitateli nebo ve jmenovateli zlomku číslo končící nulou. Žák se tak snažil použít postup řešení, který je založený na rozšiřování zlomku na desetinný zlomek, protože desetinný zlomek lze snadno převést na desetinné číslo. Zlomek obsahující číslo končící nulou ale není desetinný, jak se žák nejspíš domníval. Desetinný zlomek je zlomek se jmenovatelem 10, 100, 1000 apod., což žák nevěděl.



Obr. 3.21 Chybně využitý postup pro převod zlomku na desetinné číslo

- V druhé ukázce řešení na obr. 3.21 vpravo žák podle mě vůbec nebral v úvahu jmenovatele zlomku. Nad dvouciferným číslem ve jmenovateli uvažoval tak, jako kdyby jmenovatel byl číslo 10. Když bylo číslo ve jmenovateli zlomku jednociferné, upravil zlomek jako kdyby byla ve jmenovateli jednička.

- Vyhodnocení: I v tomto případě šlo o formální přístup žáka. Tentokrát řešení spočívalo ve využití postupu převodu desetinného zlomku na desetinné číslo. Samotná úvaha není zcela chybná, ale objevují se zde miskoncepce v pojmu desetinného zlomku.

Závěr

Úloha představovala interpretaci zlomku jako podílu. Přes šedesát procent žáků mělo s řešením úlohy problémy. Z toho přibližně třicet procent neuvedlo žádné řešení a třicet procent postupovalo v této úloze chybně.

V řešeních žáků se tak ukázaly nedostatky žáků v chápání zlomku, a také desetinného čísla, jako vyjádření vztahu celku a části. Žáci se při řešení úlohy soustředili na naučený postup. V řešeních se také projevily závažné miskoncepce žáků, kdy žáci zapisovali zlomek desetinným číslem tak, že ho zapsali pomocí čitatele a jmenovatele zlomku a umístili mezi tato dvě čísla desetinnou čárku.

3.2.3 Zlomek jako operátor

Pro ilustraci úlohy, kde vystupuje zlomek jako operátor, jsem vybrala slovní úlohy z písemné práce (obr. 3.22). Úlohy byly obsaženy v souhrnném opakování po probrání učiva o zlomcích.

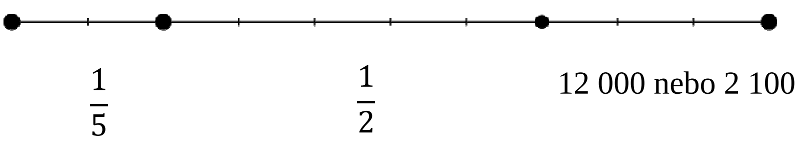
5. Splátku nového stroje si podnikatel rozložil na tři roky. V prvním roce splatil $\frac{1}{5}$ ceny, ve druhém roce $\frac{1}{2}$ ceny a v posledním roce zaplatil zbylých 12 000 Kč. Kolik Kč stál nový stroj?

5. Lucka si chce koupit nové kolo. Od dědečka k Vánocům dostala $\frac{1}{5}$ ceny kola, rodiče jí dali k narozeninám $\frac{1}{2}$ ceny kola a babička jí doplatila zbylých 2 100 Kč. Kolik Kč stojí nové kolo?

Obr. 3.22 Slovní úlohy – zlomek jako operátor

Řešení úloh lze rozdělit do několika kroků. Žák může postupovat tak, že v prvním kroku sečte zadané zlomky představující operátor. Následuje úvaha, kdy si žák musí uvědomit, že zadané přirozené číslo není celek, ale část z daného celku. V dalším kroku řešení by se žák měl zamyslet nad tím, jak lze část zadanou přirozeným číslem vyjádřit zlomkem. Nakonec by měl ze zadané části a operátoru dopočítat celek.

Úlohu může žák řešit také pomocí obrázku (obr. 3.23).



Obr. 3.23 Znázornění dané úlohy

Chybná řešení žáků:

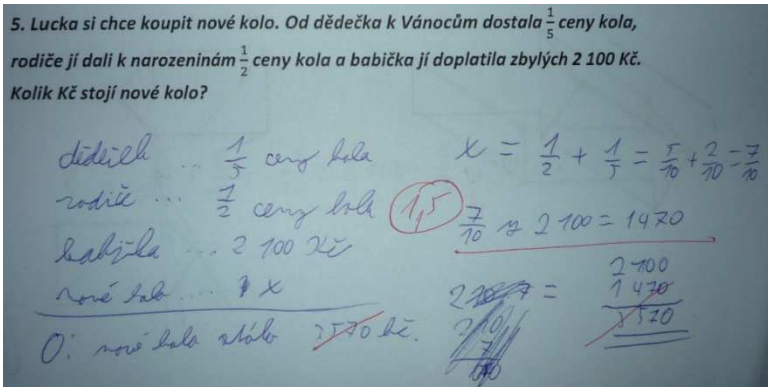
Ve slovních úlohách vystupují zlomky v podobě operátoru a přirozené číslo reprezentuje část z celku. Jsou známy dva potřebné údaje ze tří a zbývá tedy dopočítat celek.

Řešení žáků jsem rozdělila do čtyř skupin.

1. <u>Zadané přirozené číslo jako celek</u>

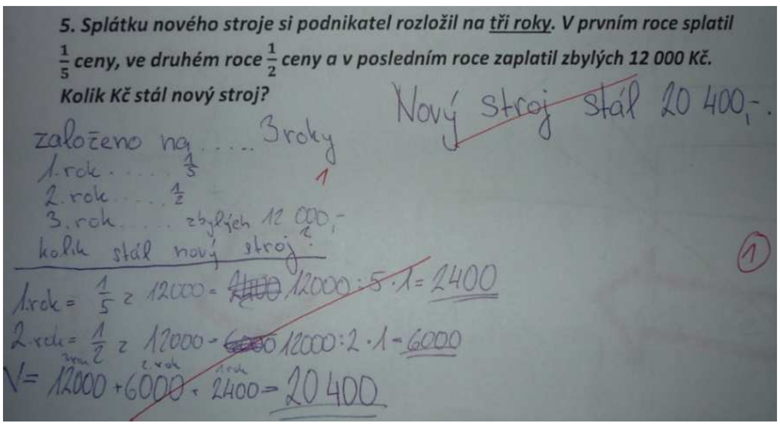
Řešení v této skupině mají společné to, že žáci se zadaným přirozeným číslem počítali jako s celkem. Tuto skupinu jsem dále rozdělila na další tři části, a to podle toho, jak žáci zacházeli se zadanými zlomky.

- Řešení uvedené na obr. 3.24 zastupuje postup řešení, který je založený na správné první úvaze, kdy žák sečetl zadané zlomky a získal vyjádření části celku zlomkem. Druhá úvaha je již chybná. Žák považuje zadané přirozené číslo za celek a počítá za pomocí sečtených zlomků část z tohoto celku. Nakonec vzniklé číslo a zadané přirozené číslo sečte.



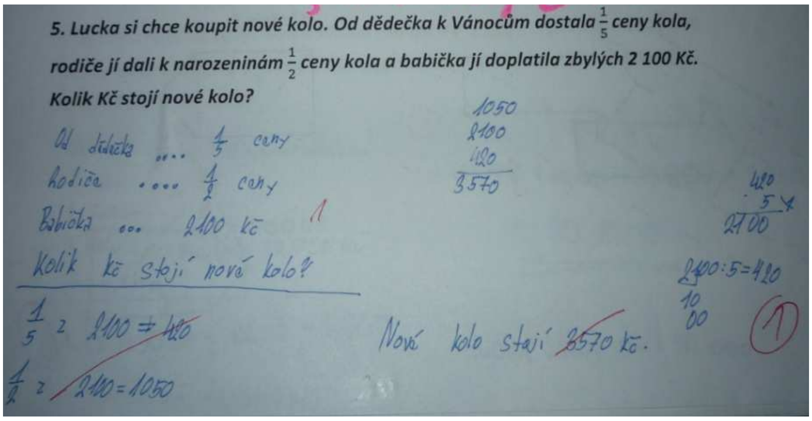
Obr. 3.24 Přirozené číslo jako celek 1

Další chybný postup řešení (obr. 3.25 a obr. 3.26) vychází také z vnímání zadaného přirozeného čísla jako celku. Žáci počítají jednotlivé části, které jsou v úloze vyjádřené



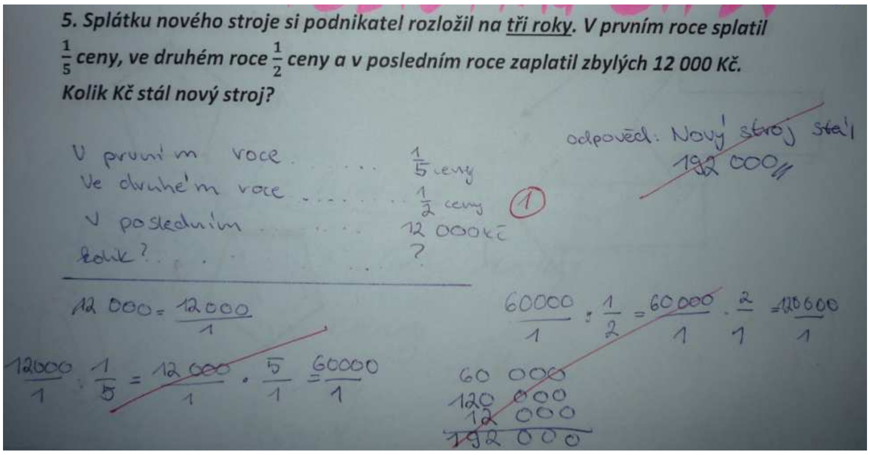
Obr. 3.25 Přirozené číslo jako celek 2

zlomky, ze zadaného přirozeného čísla. Následně opět všechna čísla sečtou.



Obr. 3.26 Přirozené číslo jako celek 3

➢ Stejně jako v předchozích ukázkách chybných řešení, i toto řešení je založené na vnímání zadaného přirozeného čísla jako celku (obr. 3.27). Žák obdobně jako v řešení výše počítá části z celku, rozdíl je ale v tom, že žák nejdříve vypočítá část pomocí prvního zadaného zlomku z daného přirozeného čísla. Pak tento výsledek považuje za nový celek a počítá další část využitím druhého zlomku. Nakonec všechny takto spočítané části sečte.

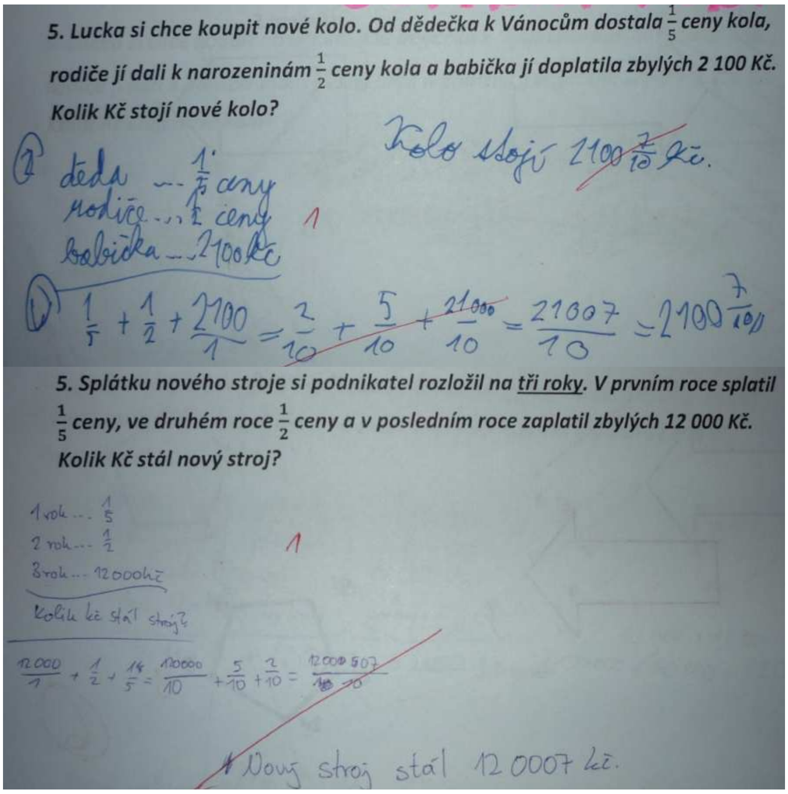


Obr. 3.27 Přirozené číslo jako celek 4

➢ Vyhodnocení: Žáci automaticky považovali v úloze zadané číslo jako celek. Se zlomky počítají jako s operátory, ale ne vždy tak jak mají.

2. Sečtení všech čísel

➢ Byli tací žáci, kteří všechna zadaná čísla sečetli (obr. 3.28).

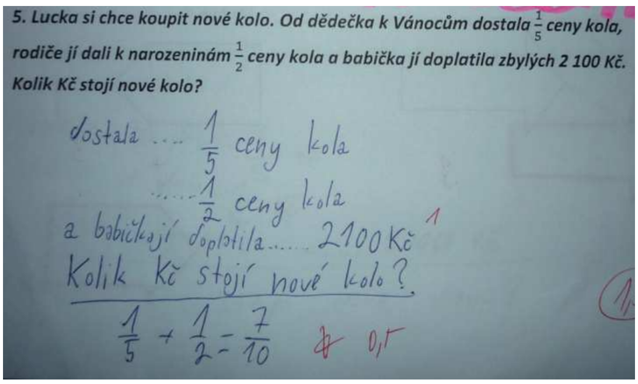


Obr. 3.28 Sečtení všech čísel vyjadřující část z celku

➢ Vyhodnocení: Žáci, kteří takto úlohu řešili, nerespektovali zadané zlomky jako operátory a zlomky považovali jako vyjádření mnohosti. Na druhou stranu chápali zadané přirozené číslo jako část a ne jako celek.

3. Sečtení zlomků a nic víc

➢ Někteří žáci pouze sečetli zadané zlomky, ale úlohu už více neřešili (obr. 3.29).

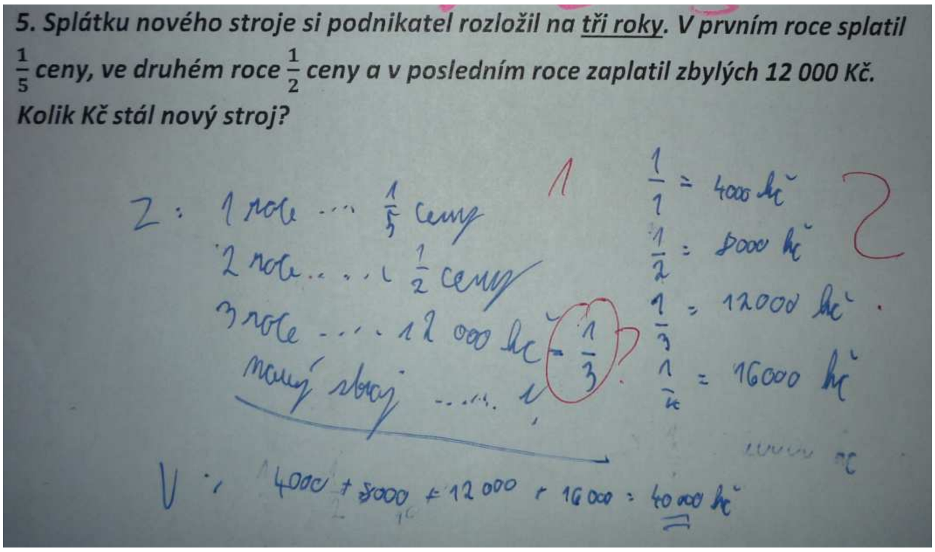


Obr. 3.29 Sečtení zlomků

➢ Vyhodnocení: Nedovedu posoudit, zda žáci nevěděli co se součtem zlomků, nebo jestli považovali zadané číslo za celek. I tak předpokládám, že se pokusili o nějakou početní operaci se zlomky ale bez většího porozumění dané úloze.

4. <u>Speciální úvaha</u>

V této poslední skupině chybných řešení uvádím postup řešení, který mě zaujal svou zvláštností (obr. 3.30).



Obr. 3.30 Speciální řešení

➢ Žákova úvaha nad úlohou byla velmi specifická a pro tento konkrétní případ žákovo řešení „fungovalo". Žák si nejspíš řekl, že pětina a polovina dávají dohromady sedm dílů. Na část zadanou přirozeným číslem tak zbývají tři díly, což označil zlomkem 1/3. Vypočítal, kolik tvoří jeden díl, tj. kolik je 12 000 děleno třemi. Nakonec spočítal zbylé části a všechna čísla sečetl.

Když jsem se nad řešením úlohy zamýšlela a snažila se ho pochopit, zaujalo mě specifické sčítání kmenových zlomků. Pokud sčítám kmenové zlomky, tak čitatel součtu získám tak, že sečtu jmenovatele sčítanců. Jmenovatel součtu je pak nejmenší společný násobek jmenovatelů ze sčítanců. Pro nekmenové zlomky tato úvaha samozřejmě obecně neplatí.

Př. : $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2+5}{5 \cdot 2} = \frac{7}{10}$

- Vyhodnocení: Pokud k takovému specifickému sčítání kmenových zlomků dospěl i žák, mohl část úvah použít při svém postupu řešení. Pokud nevycházel z něčeho podobného, tak nechápu, kde žák bere jistotu v tom, že počet částí je celkem deset. To mi prozradí jmenovatel součtu zadaných zlomků, ale žák zadané zlomky nesčítal …

Závěr

Přes devadesát procent žáků neuměla slovní úlohy řešit. Polovina z těchto žáků se o řešení ani nepokusila a druhá polovina žáků dělala chyby uvedené v části Chybná řešení žáků.

V řešeních úloh se objevily některé chybné strategie a miskoncepce, o kterých jsem psala již v teoretické části. Největším problémem bylo, že žáci považovali zadané přirozené číslo v úloze za celek. Nedovedli tak vypočítat celek, pokud měli zadanou část a operátor.

Ani jeden z žáků nevyužil k řešení úlohy znázornění na nějakém modelu zlomku, i když by mu to mohlo pomoci v porozumění úloze.

3.2.4 Shrnutí průzkumného šetření

V průzkumném šetření jsem se soustředila na některé interpretace zlomku, a to na zlomek jako kvantitativní údaj u veličin, zlomek jako zápis naznačeného dělení a zlomek jako operátor. Všemi úlohami se také prolínal zlomek jako vztah celku a části.

Uvědomila jsem si, že chyby v řešeních daných úloh jsou způsobené z velké části formálním přístupem žáků. Žáci se naučili mechanické postupy a následně se je snažili při řešení úloh použít, i když tato strategie řešení vedla k nesmyslnému výsledku.

Toto zjištění mě vedlo k zamyšlení, zda žáci mají vůbec nějaké představy o zlomcích, a to zejména o zlomcích ve vztahu celku a části.

Na základě těchto zjištění jsem se začala při výuce více soustředit na názornost a snažím se u žáků více soustředit na představy.

Na základě průzkumného šetření jsem formulovala nejen samotnou výzkumnou otázku, tj. *Jak žáci chápou modely a interpretace zlomku?*, ale i konkrétní výzkumné podotázky, které jsem již uvedla na začátku praktické části.

Pro získání odpovědí na výzkumné otázky jsem vytvořila pracovní listy pro žáky, ve kterých žákům zadávám úlohy, které jsou zaměřeny na:

- modely zlomků a znázornění zlomků na daných modelech

- ➢ velikost zlomků a jejich umístění na číselné ose
- ➢ úlohy celek – část – operátor
- ➢ úlohy na rozpoznávání celku a části

3.3 První fáze výzkumu

V první fázi výzkumného šetření jsem žákům v červnu 2015, tedy na konci školního roku v rámci závěrečného opakování, zadala pracovní list, který žáci vypracovali (viz. Příloha První fáze výzkumu).

Žáci na vyřešení pracovního listu měli necelou vyučovací hodinu. V závěru hodiny jsem pracovní listy vybrala a proběhla diskuse nad správným řešením úloh.

Kromě pracovního listu každý žák obdržel také rozstříhané karty (viz. Příloha Pexeso), které využívali k řešení první úlohy - Pexeso.

Žáci byli požádáni, aby vše co je napadne, napsali do pracovního listu.

Pracovní list vyplňovalo celkem 41 žáků.

V první fázi výzkumu jsem reagovala na zjištění z průzkumného šetření, kde jsem zjistila, že žáci úlohy řešili pomocí ne vždy správně zapamatovaných algoritmů, tj. formálním způsobem. V souvislosti s jejich přístupem k řešení úloh jsem dospěla k zamyšlení, jestli žáci mají nějaké představy o zlomcích. Ve výuce jsem se v důsledku této úvahy začala více věnovat vizualizaci, představám a také činnostní reprezentaci.

Úlohy v pracovním listu této fáze by měli žákům pomoci získat konkrétní představy o zlomcích. To bylo mým cílem v této části výzkumu.

Pracovní list se skládal ze tří úloh – Úloha Pexeso, Úloha Číselná osa a Úloha Tyč sem, tyč tam. Každou úlohu rozebírám v dalším textu zvlášť.

V první, druhé i třetí fázi výzkumu používám pro dané úlohy následující strukturu:

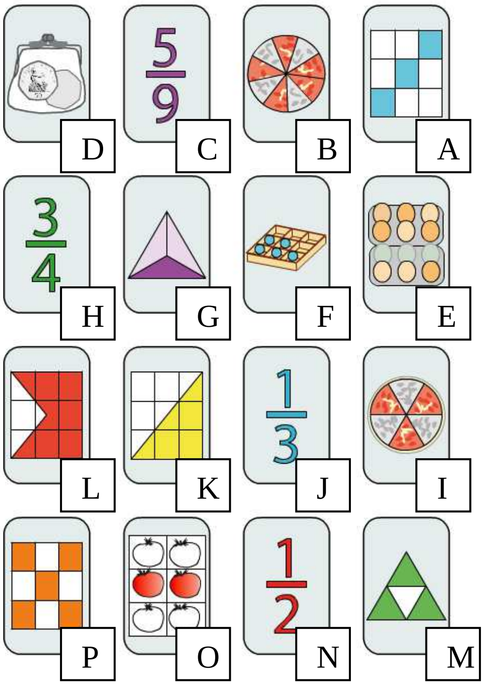
- Zadání úlohy
- Souvislost s předchozím výzkumem
- Cíle a předpoklady
- Zjišťování a analýza dat
- Dílčí závěry

3.3.1 Úloha Pexeso

Zadání úlohy

Úkolem žáků v této úloze[13] bylo, utvořit skupiny ze zadých karet (obr. 3.31) a zdůvodnit, proč tyto skupiny vytvořili.

Pozn.: Na každé kartě bylo zezadu napsané písmeno a žáci tak zaznamenávali do pracovního listu daná písmena a zdůvodnění vytvořené skupiny. Karty byly nakopírovány na černobílé kopírce.



Obr. 3.31 Karty k úloze pexeso

Na kartách jsou zlomky znázorněny symbolickým zápisem v podobě čísla. Také se tu nachází zlomky v ikonické reprezentaci, a to ve dvou formách. První formou jsou obrázky zachycující nějaké reálné objekty jako jsou jablka, vejce, peníze a podobně. Druhou formou je znázornění zlomku na geometrických útvarech například trojúhelníku a obdélníku.

Nebylo řečeno, kolika početné mají skupiny být. Zůstávalo tedy na žácích, zda budou vytvářet dvojice, nebo i více početné skupiny vyjadřující stejnou část.

V průběhu řešení této úlohy se žáci ptali, zda musí zařadit všechny obrázky do nějaké skupiny. Domluvili jsme se tedy, že obrázky, které se jim do žádné skupiny nehodí, vyřadí.

[13] Úloha je stažená z internetové stránky: http://nrich.maths.org/8283/note

V závěru hodiny proběhla krátká diskuse nad správným řešením této úlohy. S některými kartami měli žáci problém, tak jsme si vysvětlili, jakou část znázorňovali.

Souvislost s průzkumným šetřením

Z průzkumného šetření jsem nabyla dojmu, že žáci pracují se zlomky velmi formálně. Domnívám se, že žákům chybí základní představy o zlomku jako vztahu celku a části, tj. nechápou význam čitatele a jmenovatele zlomku, také si neuvědomují velikost zlomku. Při řešení slovní úlohy (viz Zlomek jako operátor) si danou situaci ani jeden žák neznázornil na modelu, i když by mu tento obrázek pomohl k uvědomění si vzájemných vztahů zadaných údajů.

V reakci na průzkumné šetření jsem do pracovního listu zařadila právě úlohu Pexeso, protože propojuje symbolickou reprezentaci zlomku a reprezentaci ikonickou. Jak jsem již psala v teoretické části, pokud budou žáci znát modely zlomků a budou umět tyto modely zlomku používat, může jim to pomoci k pochopení nejen zlomku ve vztahu celku a části, ale i k uvědomění si ekvivalence zlomků, nebo početních operací se zlomky apod.

Cíle a předpoklady

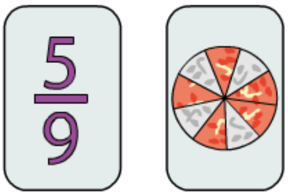
Cílem úlohy bylo, aby si žáci uvědomili různé způsoby reprezentace zlomku, tj. ikonické a symbolické. Také aby si tyto reprezentace propojili a vytvořili si tak představy zlomku ve vztahu celku a části.

Žáci navíc měli tvořit skupiny ze zadaných karet, což by mohlo vést k pochopení ekvivalence zlomků. Domnívala jsem se, že si žáci vezmou karty, na kterých je zlomek v symbolické reprezentaci, a budou se snažit zbývající karty zařadit k tomuto symbolickému vyjádření zlomku. Tímto postupem by si mohli následně uvědomit, hlavně tedy díky ikonické reprezentaci zlomku, právě ekvivalenci mezi zlomky. Porozumění ekvivalenci zlomků vnímám jako velmi důležité, protože také díky ní získají žáci představy o zlomcích.

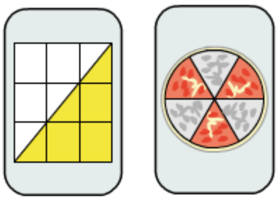
Prostřednicvím této úlohy bych chtěla zjistit:

- *Zda žáci chápou a v úloze najdou ekvivalentní zlomky.*
- *Jestli se vyskytnou modely, které žáci nebudou umět zařadit.*
- *Jaké skupiny budou žáci vytvářet.*

Předpokládala jsem, že žáci budou tvořit skupiny tak, že spojí zlomek v symbolické reprezentaci se zlomkem v ikonické reprezentaci (obr. 3.32), ale také že budou dávat dohromady obrázky vyjadřující stejný zlomek (obr. 3.33).

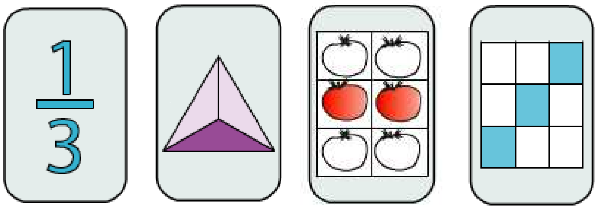


Obr. 3.33 Symbolická a ikonická reprezentace téhož zlomku



Obr. 3.32 Dvě ikonické reprezentace téhož zlomku

Například mě zajímalo, zda žáci spojí zlomek jedné třetiny s trojúhelníkem s vybarvenou jednou částí ze tří. Stejně tak jestli si žáci uvědomí, že i „jablka v bedýnce“ a obdélník se třemi vybarvenými částmi znázorňují zlomek jedné třetiny (obr. 3.34).



Obr. 3.34 Příklad správné čtveřice obrázků znázorňujících stejný zlomek

Zjištění a analýza dat

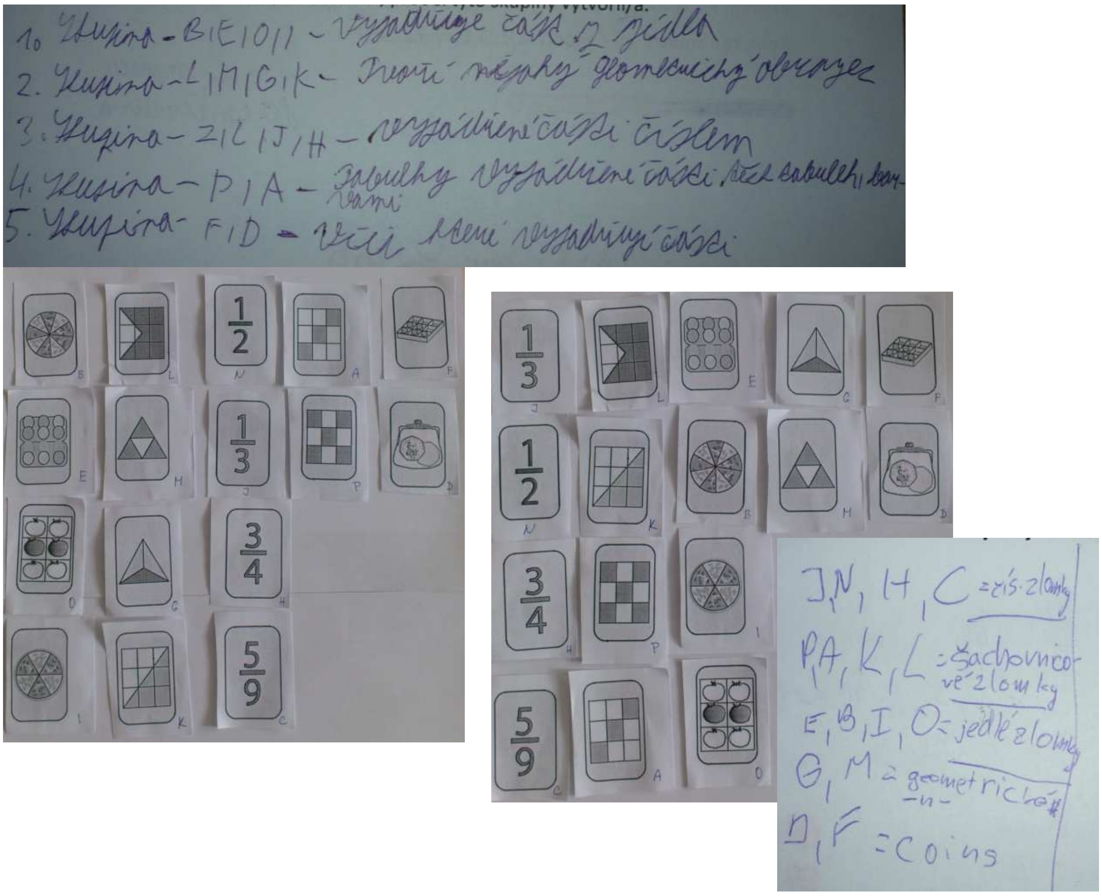
Při zracovávání výsledků úlohy mě překvapilo, že poměrně velká část žáků vytvářela skupiny, které nijak nesouvisely s matematikou. Dávali k sobě obrázky jídla, obrázky s trojúhelníky nebo jinými geometrickými útvary a pak také obrázky s čísly.

Žáci pojmenovávali nebo charakterizovali takto vytvořené skupiny následovně:

- karty pizzy, jablek, (vajec) - vyjadřují část z jídla, jsou k jídlu, jedlé zlomky
- karty s trojúhelníky, obdélníky, (pizza) - tvoří geometrický obrazec, geometrické zlomky, mají trojúhelníkový tvar
- karty se symbolickým zápisem - vyjádření části číslem, číslice, číselné zlomky
- karty obdélníků dělené na devítiny - zlomky vyjádřené tabulkou, čtvercová síť, šachovnicové zlomky
- karty s peněženkou, kuličkami v přihrádkách – věci které vyjadřují části, cions (myšleno asi peníze), zlomky z běžného života apod.

Žáci tedy vytvářeli skupiny podle kontextu, významu. Takto vytvořené skupiny jsou náznakem neformálního a tvořivého přístupu[14].

Příklady skupin vytvořených podle kontextu jsou na obr. 3.35. Jeden sloupeček tvoří jednu skupinu a jsou uvedeny i komentáře žáků, kde žáci pojmenovali nebo charakterizovali své skupiny.

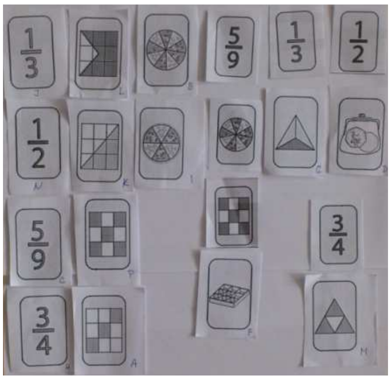


Obr. 3.35 Skupiny vytvořené podle kontextu – neformální přístup

Někteří žáci, kteří vytvářeli výše popsané skupiny karet, si během hodiny uvědomili, že mají hodinu matematiky a utvářeli i další skupiny, které již odpovídaly mým předpokladům. Tito žáci se soustředili nejdříve na kontextovou stránku úlohy, následně pak na obsahovou stránku. Ostatní z této skupiny žáků si uvědomili nějaké jiné skupiny karet až při závěrečné diskuzi.

Na obr. 3.36 je příklad řešení, kde si žák uvědomil i jiné skupiny, které již souvisely s vyjádřením zlomku jako vztahu celku a části. První tři sloupečky zleva tvoří jeden způsob uvažování a zbylé sloupečky pak druhý způsob uvažování.

[14] Metoda zpracování je inspirována technikou „concept mapping“, o které píše K. Hasemann (1995). Tuto metodu využívala ve výzkumu také M. Tichá (1997).



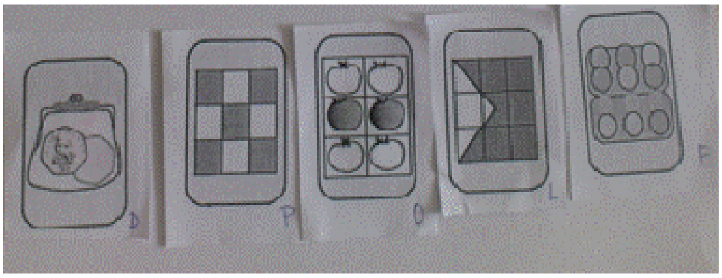
Obr. 3.37 Skupiny vytvořené nejdříve podle kontextu, potom podle matematického obsahu

Obr. 3.36 Skupiny vytvořené podle matematického obsahu

Příklad skupiny vytvořené podle matematického obsahu je na obr. 3.37.

Zajímavé bylo pozorovat, jaké karty žáci vyřazovali. To znamená, u jakých obrázků nebyli schopni určit, jakou část vyjadřují.

Příklad vyřazených karet je na obr. 3.38.

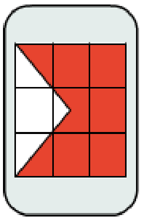


Obr. 3.38 Často vyřazované karty

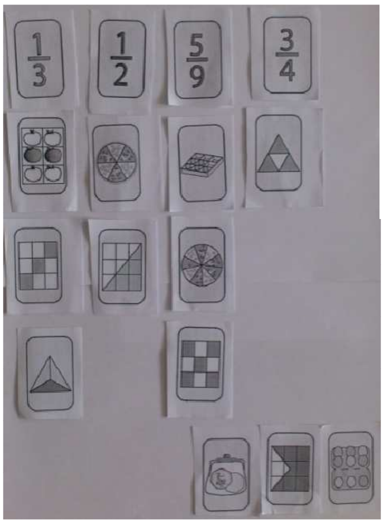
Žáci nejčastěji nedokázali určit, jakou část vyjadřuje rozdělený obdélník (obr. 3.39). Tuto kartu žáci buď do žádné skupiny nezařadili, nebo ji přiřadili nesprávně. V závěrečné diskuzi se na tuto kartu žáci nejvíce ptali. Když jsme si řekli, že karta vyjadřuje zlomek ¾, někteří žáci namítali, že to není pravda, protože to není čtverec ale obdélník.

Z takové reakce žáků usuzuji, že si žáci uvědomují shodnost části tvarem, ale už jim uniká „stejnost" částí obsahem.

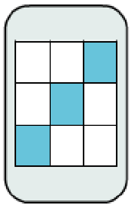
Další velmi problematický obrázek byl opět obrázek obdélníka, ale takového, který vyjadřoval zlomek 1/3 (obr. 3.41). Žáci tuto kartu často vyřazovali nebo ji nesprávně přiřazovali ke zlomku 5/9 a ¾, případně také k dalším obrázkům obdélníků.



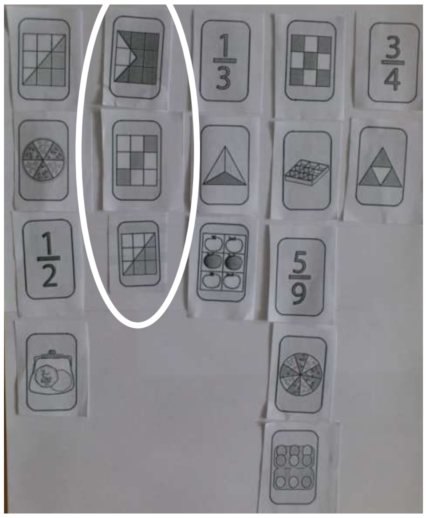
Obr. 3.42



Obr. 3.41 Vyřazený obdélník

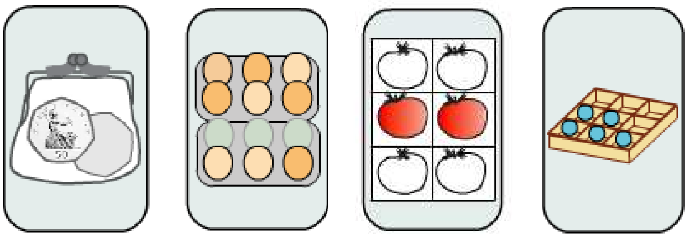


Obr. 3.40



Obr. 3.39 Začlenění obdélníku mezi jiné obdélníky

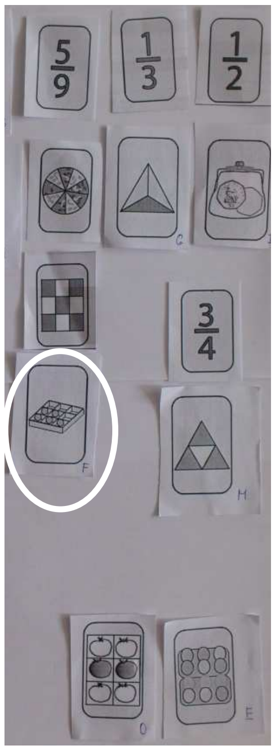
Zařadit obrázky mincí v peněžence, plata s vajíčky a jablek v bedně (obr. 3.43) dělalo žákům také problémy. Až při vyhodnocování dat jsem si uvědomila, že obrázky byly málo čitelné a matoucí, hlavně pak obrázky plata s vajíčky a peněženky. K nečitelnosti přispěla také černobílá kopie těchto karet.



Obr. 3.43 Obrázky mincí, vajec, jablek a kuliček

Zpočátku mi nebylo jasné, co činilo žákům takovou potíž zařadit jablka v bedně, když problémy se zařazením kuliček v přihrádkách neměli.

Z obr. 3.44 je zřejmé, že žák uměl zařadit kuličky v přihrádkách, ale jablka v bedýnce již ne. Jablka spolu s vajíčky žák vyřadil z důvodu, že neuměl tyto obrázky nikam umístit.

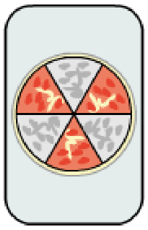


Obr. 3.44 Zařazení kuliček v přihrádkách

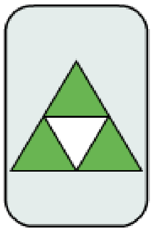
Možná je tedy problém v tom, že v bedýnce jsou vyplněny všechny přihrádky, jen někde jsou červená jablka a jinde bílá jablka. Zatímco přihrádky s kuličkami nejsou všechny vyplněny.

Pravděpodobnější důvod neúspěšného zařazení jablek v bedýnce ale přisuji tomu, že jablka znázorňují zlomek 2/6. To nutí žáka trochu zamýšlet se, aby si ujasnil, že 2/6 je totéž jako 1/3.

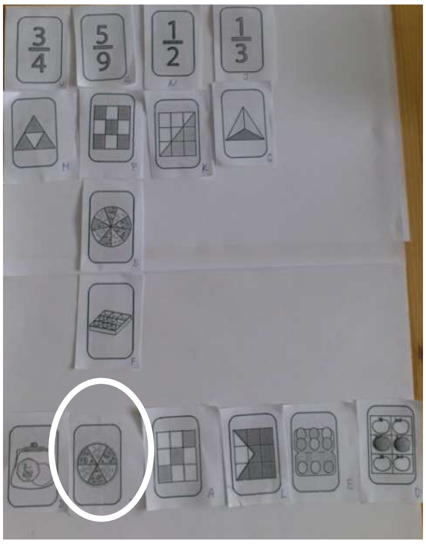
Překvapivě žáci chybně začleňovali, nebo dokonce vyčleňovali, také model zlomku ½ na obrázku pizzy (obr. 3.45, 3.47).



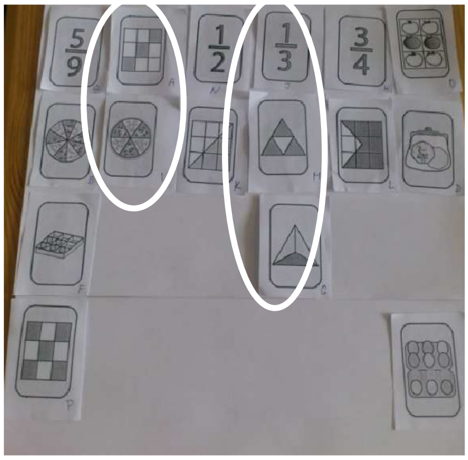
Obr. 3.45



Obr. 3.48



Obr. 3.47 Správné zařazení kuliček vs. neschopnost zařadit jablka a vejce



Obr. 3.46 Začlenění kruhu a obdélníku do stejné skupiny
Začlenění trojúhelníků do stejné skupiny

Žáci mohli tento obrázek kruhu vyčlenit z důvodu toho, že obrázek neznázorňuje zlomek v základním tvaru, tj. 3/6 místo ½, a tak ho neuměli přiřadit k jedné polovině. Žáci neuměli ekvivalenci zlomků.

Velmi často žáci tuto kartu kruhu začlenili do skupiny spolu s obdélníkem, který představuje 3/6=1/3 (obr. 3.48). Domnívám se, že zlomek 3/6 na obrázku pizzy a poměr vybarvených částí obdélníku ku nevybarveným částem, tj. 3 : 6, žáci považovali za totéž.

Stejné chyby se žáci dopouštěli i při zařazování obrázku trojúhelníku, který reprezentuje zlomek ¾ (obr. 3.46). Tento obrázek žáci dávali do souvislosti s obrázkem v poměru 1 : 3 (obr. 3.48).

Dílčí závěry

Někteří žáci úlohu řešili spontánně, čehož jsou důkazem řešení, kdy žáci vytvářeli skupiny podle kontextu, tj. skupiny se symbolickým zápisem zlomku, skupiny s obrázky zlomků znázorněné na jídle, na běžně používaných věcech, na geometrických obrazcích apod. Tito žáci při řešení úlohy pracovali tvořivě a neformálně. Náznak tohoto neformálního přístupu se projevil u 6 žáků.

Dále žáci vytvářeli očekávané skupiny, kde v jedné skupině byl jak symbolický zápis zlomku, tak i ikonická reprezentace zlomku. Tyto skupiny jsou zaměřené na matematický obsah.

V úloze se vyskytovaly chyby způsobené nedostatečným vhledem do prostředí zlomků. Žáci si zřejmě nejsou vědomi, že zlomkem lze vyjádřit část z celku, která je stejná tvarem, ale také obsahem, hodnotou, velikostí apod. Toto úskalí se projevilo nejvíce na zařazení obdélníku znázorňujícího ¾ (obr. 3.42). Celkem 93 % žáků tuto kartu vyřadilo nebo nesprávně začlenilo do odpovídající skupiny.

Další problém vznikl v souvislosti zlomku a poměru. Zlomek jako interpretace poměru musí vyjadřovat část ku celku. V případě obdélníku či trojúhelníku, žáci vnímali zlomek jako část ku části, tj. vybarvená část ku nevybarvené části místo vybarvená část ku všem částem.

Domnívám se, že také ekvivalence zlomků není žákům zcela jasná. Neumí, nebo si neuvědomovali, úpravu zlomku do základního tvaru, a tak jim činilo některé začleňování zlomků potíže. Nejvíce se to projevilo u obrázku pizzy znázorňující zlomek ½. Žáci nejspíš vnímali obrázek jako zlomek 3/6, a tak ho nebyli schopni nikam zařadit. Stejně tak i neuměli zařadit obdélník reprezentující 3/9 = 1/3 a jablka v bedýnce 2/6 = 1/3. Obrázek pizzy znázorňující 3/6 nebylo schopno správně začlenit 59 % žáků, jablka v bedýnce pak 71 % žáků, vajíčka v platu 85 % žáků a obdélník rozdělený na devět dílů, z nichž byly tři díly vybarvené, dokonce 88 % žáků.

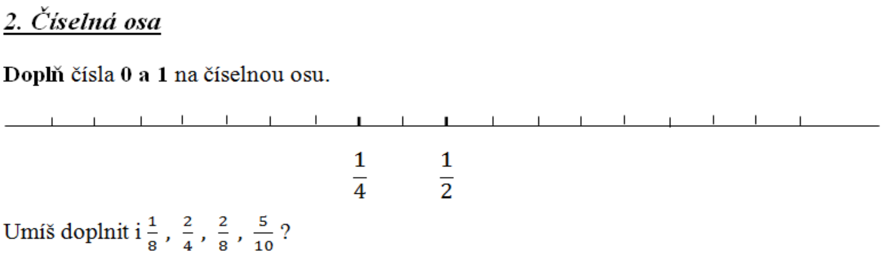
Některá řešení žáků mi nebyla jasná. Bylo by vhodné se žáky provést rozhovory a zeptat se jich na způsob, jakým úlohu řešili. Rozhovory jsem bohužel z důvodu velké vytíženosti neuskutečnila.

Zdrojem problémů byla černobílá kopie karet, kde byly obrázky vajec a peněženky se dvěma mincemi pro žáky málo čitelné. To jsem si ale před zadáním úlohy neuvědomila. Tyto obrázky byly pro žáky nesmyslné, příště bych je nahradila jinými.

3.3.2 Úloha Číselná osa

Zadání úlohy

Druhá úloha[15], kterou jsem žákům k vyřešení do pracovního listu zadala, spočívala v zobrazení čísel na číselné ose. Žáci měli zobrazit v prvním kroku čísla 0 a 1 a v druhém kroku zadané zlomky (obr. 3.49).



Obr. 3.49 Zadání úlohy - Číselná osa

Souvislost s průzkumným šetřením

Úlohu jsem do pracovního listu zařadila, protože jsem v průzkumném šetření uskutečněném před samotným výzkumem zaregistrovala, že si žáci při řešení úloh často neuvědomují velikost zadaného zlomku. K uspořádání čísel podle velikosti se číselná osa často využívá. Náznaky chybného vnímaní velikosti zlomku se projevily hlavně v chybných řešeních úloh v kapitolách průzkumného šetření Zlomek jako veličina a Zlomek jako podíl.

Dalším úskalím vyplývajícím z průzkumného šetření bylo chybné identifikování celku v kapitole Zlomek jako operátor. Žáci v zadané úloze považovali zadané číslo za celek, i když šlo o část. V případě zadané číselné osy dva dílky mezi čísly $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$ tvoří část celku, a to jednu čtvrtinu. Žáci mají za úkol určit celek, a tak najít čísla 0 a 1.

Cíle a předpoklady

Číselnou osu jsem zvolila proto, že mě zajímalo, jak žáci chápou znázornění zlomků na číselné ose. Z výuky vím, že žákům zobrazování zlomků na číselné ose činilo potíže, ale do písemky jsem jim úlohu s číselnou osou nikdy nezadávala a tak jsem vlastně nemohla posoudit, jak žáci budou při řešení úlohy úspěšní.

Ve výzkumném šetření jsem se zaměřila na představy, které mají žáci v souvislosti se zlomky. Proto jsem se v předchozí úloze (Úloha Pexeso) orientovala na představy žáků v souvislosti

[15] Úloha je z pracovního sešitu S. Kočí (2014).

s ikonickými reprezentacemi zlomku. U číselné osy žáci vlastně také řešili úlohu s modelem zlomku a to s modelem „úsečka“, kde celek tvoří právě úsečka mezi čísly 0 a 1. Díky úloze si žáci mohou do své „evidence“ zařadit další model zlomku.

Úloha také souvisí s porozuměním ekvivalenci zlomky, stejně jako úloha Pexeso. Předpokládala jsem, že pokud si žáci uvědomí ekvivalenci zlomků $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ a tím budou mít na ose čísla $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{4}$, nebudou mít problém s umístěním čísel 0 a 1 na dané číselné ose. Část, kterou tvoří dva dílky na číselné ose, mezi čísly $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ je tak jednou čtvrtinou z hledaného celku ohraničeného právě čísly 0 a 1.

V druhé části úlohy pak měli žáci umístit i zadané zlomky $\frac{1}{8}, \frac{2}{4}, \frac{2}{8}, \frac{5}{10}$. Myslela jsem, že takto zadané zlomky, které jsou až na zlomek $\frac{1}{8}$ ekvivalentní se zlomky již vyznačenými na číselné ose, tj. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ a $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, budou pro žáky jistou nápovědou pro hledání umístění čísel 0 a 1. Zlomek $\frac{1}{8}$ jsem do úlohy zařadila, aby se mi potvrdilo, zda žák úlohu řešil správně a umí na číselné ose znázornit i jiná čísla, než čísla 0 a 1 případně ekvivalentní zlomky.

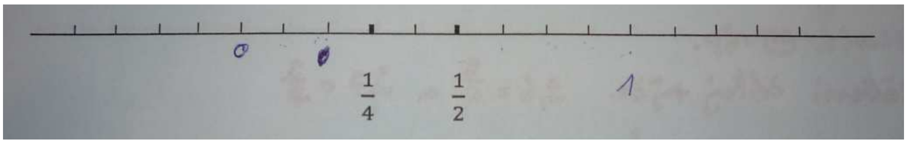
Také jsem zjišťovala, jak žáci chápou zlomek jako zápis čísla a porovnávání[16].

Zjištění a analýza dat

Při objasňování dat z řešení úlohy jsem výsledky žáků rozdělila na tři části. První část tvořilo znázornění čísel 0 a 1 na číselné ose. V druhé části šlo o přiřazení ekvivalentních zlomků. Ve třetí části jsem se zaměřila na umístění zlomku $\frac{1}{8}$.

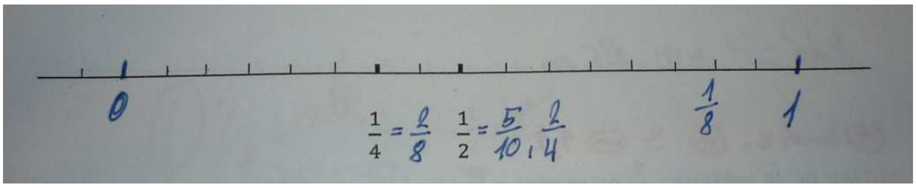
Téměř 15 % žáků umístilo čísla 0 a 1 na číselnou osu velikostně správně, tj. $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$, ale k nesprávnému bodu na ose. Domnívám se, že si velikost čísel uvědomovali.

Mezi těmito řešeními se nacházela jak řešení, kde žáci umístili pouze čísla 0 a 1 (obr. 3.50), tak řešení, kde si žáci uvědomovali ekvivalenci zlomků a správně ekvivalentní zlomky přiřadili, ale i přes to čísla 0 a 1 nezobrazili na ose správně (obr. 3.51).



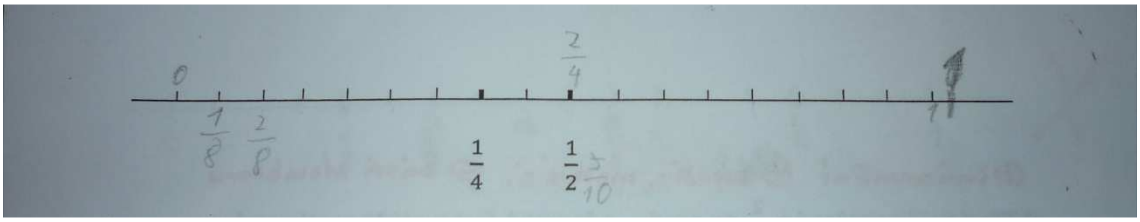
Obr. 3.50 Umístění pouze čísel 0 a 1

[16] V souladu s O. Odvárkem a J. Kadlečkem (2011) chápu zlomek jako zápis čísla.



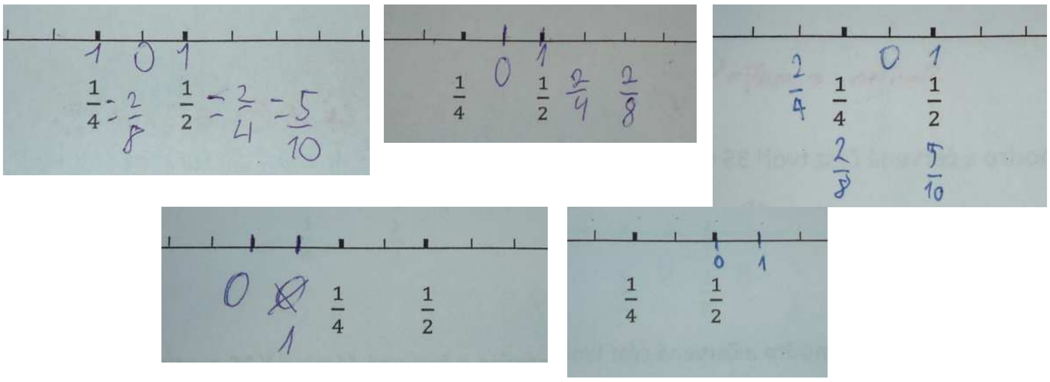
Obr. 3.51 Číselná osa - Ukázka řešení 1

V řešení na obr. 3.51 se podle mě projevuje tendence, umístit čísla 0 a 1na konec osy. Obr. 3.52 pak znázorňuje opravdu zobrazení čísel 0 a 1 na konce osy.



Obr. 3.52 Číselná osa - Ukázka řešení 2

V dalších řešeních žáci čísla 0 a 1 znázorňovali na ose chybně (obr. 3.53).

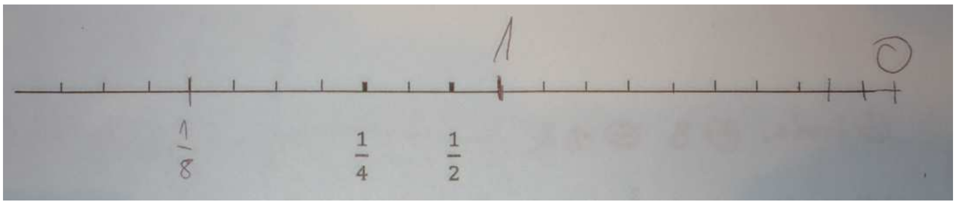


Obr. 3.53 Číselná osa - Ukázka řešení 3

Řešení úlohy na obr. 3.53 mají společný prvek, že žáci čísla 0 a 1 zařadili ihned za sebou. To si vysvětluji tak, že žáci uvažovali o jednom dílku jako o jednotce délky 1. Vůbec při tomto způsobu umisťování nerespektovali zadané zlomky. Kdyby ano, nepřiřadili by číslo 1 ke stejnému bodu, jako leží například $\frac{1}{2}$ nebo dokonce, že se 0 rovná $\frac{1}{2}$. Žáci znázornili na ose nejprve čísla 0 a 1 a v druhém kroku ekvivalentní zlomky bez jakékoliv souvislosti s čísly 0 a 1.

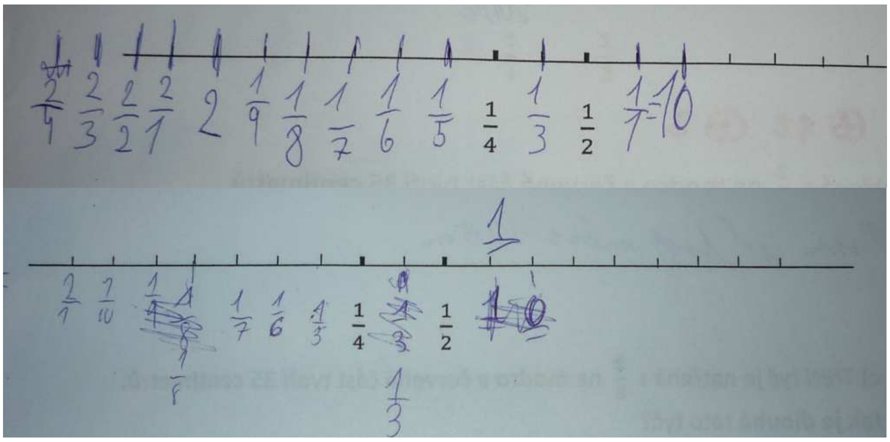
Následující řešení jsou důkazem naprostého nepochopení velikosti zlomků.

Řešení na obr. 3.54 je založeno na umístění čísel 0 a 1 tak, že mezi čísly 0 a 1 je deset dílů. Zvláštní je, že žáci řadili čísla na ose místo zleva doprava zprava doleva.



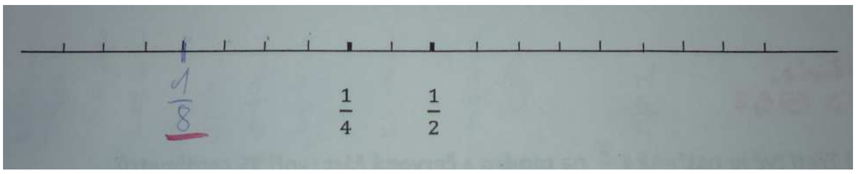
Obr. 3.54 Číselná osa - Ukázka řešení 4

V řešení na obr. 3.55 jsou stejně jako v předchozí ukázce čísla 0 a 1 řazena v opačném směru a ohraničují jeden dílek osy. Dále jsou zlomky řazeny podle čísla ve jmenovateli. To znamená, že po zlomku $\frac{1}{2}$ následuje směrem zprava doleva zlomek $\frac{1}{3}$, pak $\frac{1}{4}$ apod.



Obr. 3.55 Číselná osa - Ukázka řešení 5

Tato tendence řadit zlomky se projevila i v jiných řešeních, a to na zobrazení zlomku $\frac{1}{8}$ (obr. 3.56). Žáci umístili zlomek $\frac{1}{8}$ na bod osy vzdálený od $\frac{1}{4}$ čtyři dílky.



Obr. 3.56 Číselná osa - Ukázka řešení 6

Dílčí závěry

Téměř čtvrtina žáků vyřešila úlohu správně, nebo jen s drobnými chybami. Například zapomněli znázornit jeden z ekvivalentních zlomků.

Na druhou stranu se čtvrtina žáků o řešení ani nepokusila.

Zbylých padesát procent žáků řešilo úlohu chybnými strategiemi.

Jedním z chybných postupů řešení bylo zobrazení čísel 0 a 1 na číselnou osu tak, že platilo uspořádání čísel na číselné ose, tj. $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$, ale čísla 0 a 1 ležela na nesprávném bodě osy. Této chyby se dopustilo 15 % žáků. Tři žáci ze 41 žáků znázornili čísla 0 a 1 na konce číselné osy.

Další řešení spočívala v chybném umístění čísel 0 a 1 a to ve smyslu nerespektování velikostí zlomků $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$. Takového chybného řešení úlohy se dopustilo 35 % žáků.

Sedm ze 41 žáků umístilo čísla 0 a 1 na číselné ose hned za sebou, tj. jeden dílek osy tak představoval jednotku délky 1.

Téměř dvacet procent žáků umístilo zlomek $\frac{1}{8}$ tak, že řadili zlomky na číselné ose podle velikosti čísla na ve jmenovateli. Mezi zlomky $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ tak leží zlomek $\frac{1}{3}$. Každý dílek na ose směrem doleva tak představuje zlomek s číslem ve jmenovateli o jedna větší. Zlomek $\frac{1}{8}$ tak leží čtyři dílky od zlomku $\frac{1}{4}$.

Tento způsob řešení je velmi alarmující. Je zřejmé, že žáci nemají představu o velikosti ani kmenových zlomků.

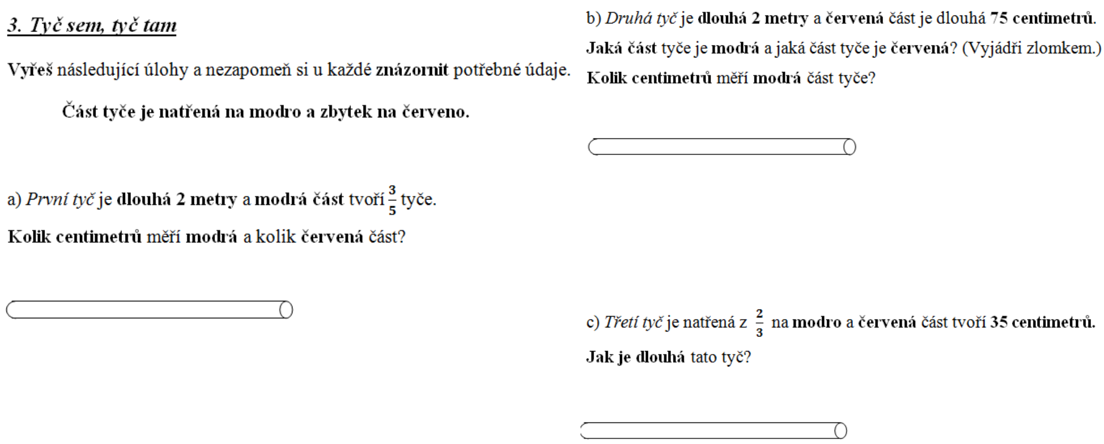
Překvapilo mě, že čtyři žáci ze 41 žáků uměli přiřadit ekvivalentní zlomky, ale neuměli určit, kde leží čísla 0 a 1.

Předpokládala jsem, že pokud si žák uvědomí ekvivalentnost zlomků, nebude mít problém s dohledáním čísel 0 a 1 na ose. Vysvětluji si to tím, že žáci neumí pracovat s modelováním zlomku na úsečce. Proto neschopnost najít řešení může také souviset s tím, že žáci měli zadanou část představující jednu čtvrtinu. Žáci ale neuměli identifikovat tuto část, díky tomu určit celek a najít obrazy čísel 0 a 1.

3.3.3 Úloha Tyč sem, tyč tam

Zadání úlohy

Úloha se skládá ze tří samostatných dílčích úloh (obr. 3.57)[17]. Každá dílčí úloha se soustředí na vypočítání jednoho ze tří údajů, kterými jsou celek – část – operátor. Součástí řešení je také grafické znázornění dané situace.


3. Tyč sem, tyč tam

Vyřeš následující úlohy a nezapomeň si u každé **znázornit** potřebné údaje.

Část tyče je natřená na modro a zbytek na červeno.

a) *První tyč* je **dlouhá 2 metry** a **modrá** část tvoří $\frac{3}{5}$ tyče.
Kolik centimetrů měří **modrá** a kolik **červená** část?

b) *Druhá tyč* je **dlouhá 2 metry** a **červená** část je dlouhá **75 centimetrů**.
Jaká část tyče je **modrá** a jaká část tyče je **červená**? (Vyjádři zlomkem.)
Kolik centimetrů měří **modrá** část tyče?

c) *Třetí tyč* je natřená z $\frac{2}{3}$ **na modro** a **červená** část tvoří **35 centimetrů**.
Jak je dlouhá tato tyč?

Obr. 3.57 Zadání úlohy tyč sem, tyč tam

Souvislost s průzkumným šetřením

Úlohu jsem do pracovního listu zařadila z důvodu znepokojujících výsledků vyplývajících z průzkumného šetření. Zjistila jsem, že 90 % žáků neumělo řešit zadanou slovní úlohu spočívající v dopočítání celku, když byly zadány operátory a část.

V návaznosti na průzkumné šetření jsem žákům předložila tři typy úloh, kde žáci dopočítávají jeden ze tří údajů celek – část – operátor. U každé úlohy mají žáci na obrázku tyče znázornit zadané údaje. Myslím, že k řešení úlohy žákům může toto znázornění pomoci v uvědomění si zadaných údajů a vztahů mezi nimi. V průzkumném šetření žádný žák obrázek k řešení úlohy nevyužil.

Cíle a předpoklady

Cílem úlohy bylo zjistit, který typ úlohy bude žákům činit největší potíže, a nebudou tak umět úlohu vyřešit. Žákům jsem ke každému typu úlohy přiložila obrázek tyče hlavně z důvodu, aby si uvědomili, že znázornění dané situace jim může pomoci při řešení úlohy. Následně jsem se při zjišťování dat zaměřila na souvislost mezi znázorněním dané situace na obrázku a výpočtem.

[17] Úloha byla inspirovaná úlohou z námětů pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007 (M. Hejný, 2011, str. 29).

Předpokládala jsem, že v prvním typu úlohy (zadaný celek a operátor, úkolem je dopočítat část) budou žáci při řešení nejúspěšnější. Také se nadále domnívám, že pokud budou žáci schopni si úlohu znázornit, budou také úspěšní při výpočtu.

V dalším typu úlohy, kde byl zadán celek a červená část v centimetrech, myslím, že žáci snadno dopočítají modrou část v centimetrech. Domnívám se, že problém budou mít s vyjádřením části zlomkem.

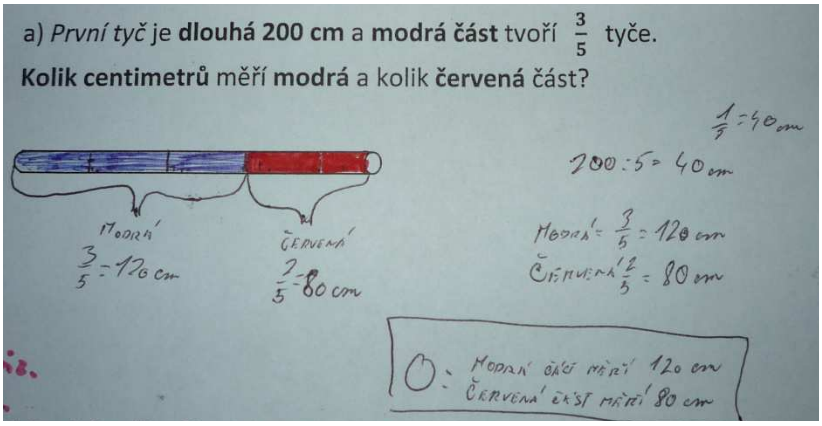
V poslední úloze, kde byla zadaná červená část v centimetrech a modrá část jako operátor, měli žáci dopočítat celek. K úspěšnému vyřešení tohoto typu úlohy si myslím, že je opět znázornění situace důležité pro pochopení vzájemných vztahů zadaných čísel. Opět jsem předpokládala, že pokud si žáci úlohu budou umět znázornit, vyřeší úlohu správně.

Zjištění a analýza dat

Každý typ úlohy jsem vyhodnocovala zvlášť. Vždy jsem se zaměřila na znázornění a samotný výpočet. Snažila jsem se dát do souvislosti schopnost znázornit danou úlohu a schopnost vypočítat tuto úlohu.

<u>První typ úlohy – dáno: celek, operátor → úkolem je dopočítat část</u>

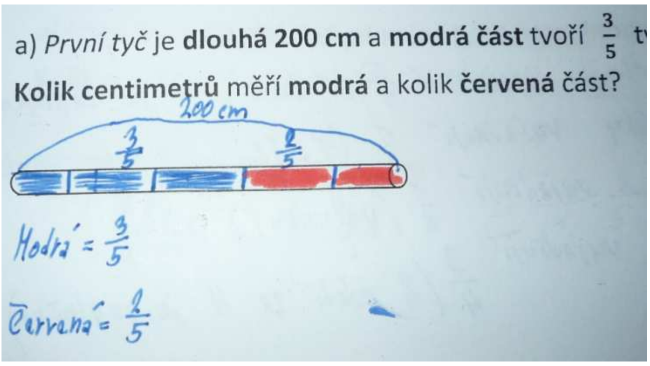
Žáci při znázorňování úlohy postupovali dvěma způsoby. První skupina si obrázek tyče rozdělila na pět částí a následně vybarvila příslušné části modře a červeně (obr. 3.58).



Obr. 3.58 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 1

Tímto způsobem postupovalo 29 % žáků, tj. 12 žáků.

- 5 z těchto žáků dopočítalo úlohu správně
- 4 byli schopni určit, že červená část tyče představuje $\frac{2}{5}$ (obr. 3.59)
- zbývající žáci úlohu nepočítali

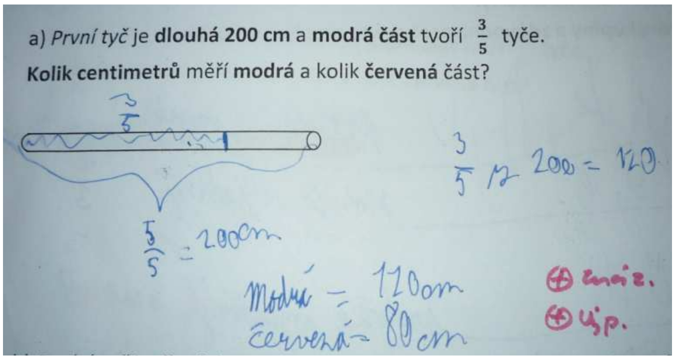


Obr. 3.59 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 2

Druhá skupina žáků při znázornění odhadovali dané části, a to tak, že nejdříve určili přibližně polovinu dané tyče. Následně si museli uvědomit, zda je modrá část vyjádřená zlomkem $\frac{3}{5}$ větší nebo menší než polovina tyče.

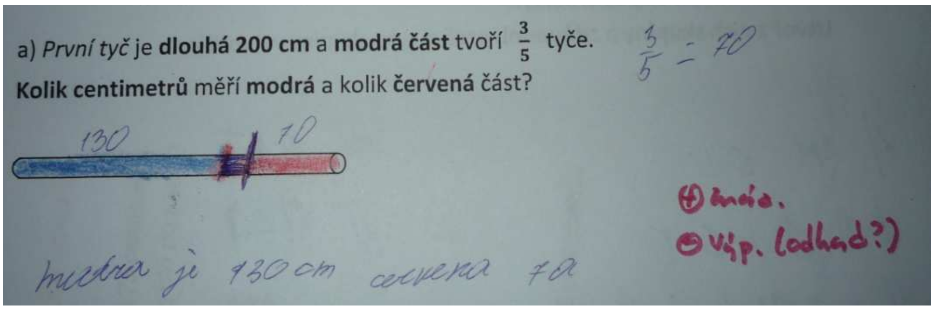
Správný odhad, že modrá část je delší než červená část učinilo 37 % žáků, tj. 15 žáků.

- 10 žáků správně úlohu dopočítalo (obr. 3.60)



Obr. 3.60 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 3

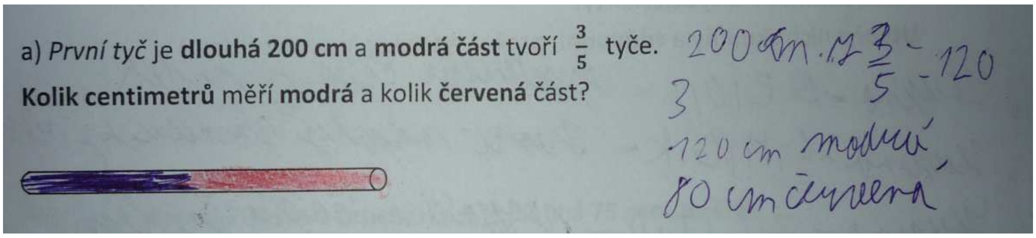
- zbývající žáci úlohu dále nepočítali nebo se o výpočet pouze pokoušeli (obr. 3.61)



Obr. 3.61 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 4

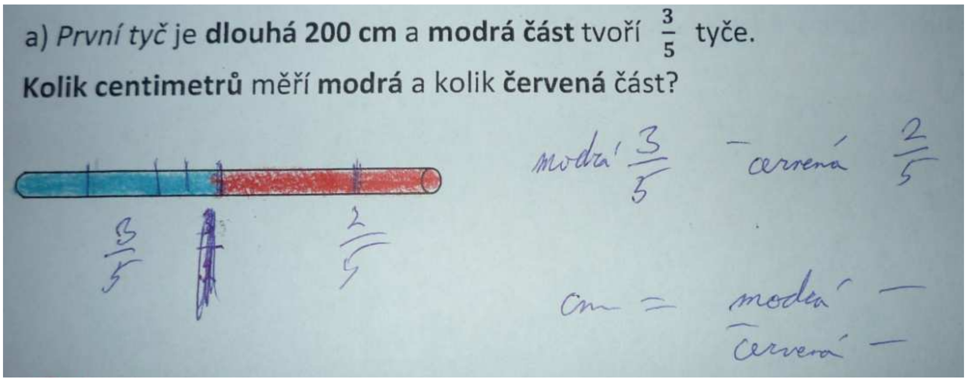
Nesprávný odhad délky červené a modré části mělo celkem 17 % žáků, tj. 7 žáků.

- 1 žák i tak spočítal délku červené a modré tyče (obr. 3.62)



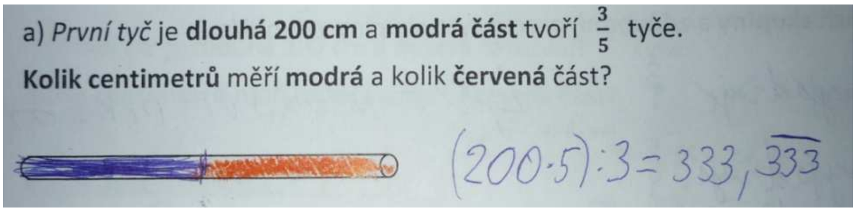
Obr. 3.62 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 5

- 1 žák i tak určil, že červená část jsou $\frac{2}{5}$, ale nepokračoval v dalším výpočtu (obr. 3.63)



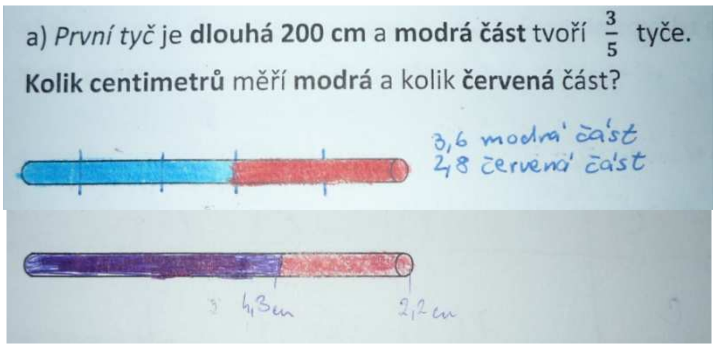
Obr. 3.63 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 6

- zbývající žáci se pouze pokoušeli o výpočet, někteří se o výpočet ani nepokusili (obr. 3.63)



Obr. 3.64 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 7

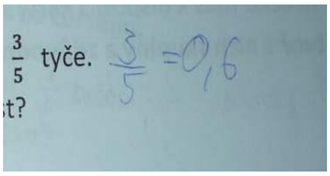
Zajímavé bylo, že celkem 3 žáci využili při řešení úlohy měření délky tyče (obr. 3.65).



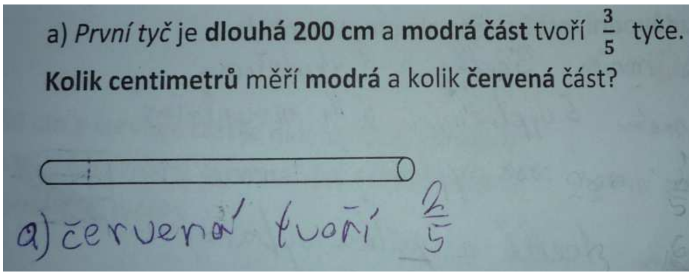
Obr. 3.65 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 8

Třetí skupina žáků znázornění vůbec nevyužila. Celkem 17 % žáků, tj. 7 žáků.

- 1 žák se pokoušel převést zlomek $\frac{3}{5}$ na desetinné číslo, ale ve výpočtu také dále nepokračoval (obr. 3.66)
- 1 žák určil, že červená část jsou $\frac{2}{5}$, ale nepokračoval v dalším výpočtu (obr. 3.67)
- zbývající žáci se pokoušeli o výpočet nebo dál nepočítali



Obr. 3.66 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 9



Obr. 3.67 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 10

➢ Vyhodnocení: Celkem tedy umělo úlohu znázornit 66 % žáků. Z těchto žáků, kteří měli správné znázornění úlohy, ke správnému řešení dospělo 15 žáků z 27 žáků. Pouze jeden žák pak došel ke správnému řešení bez znázornění.

Z těchto výsledků vyplývá, že pouze 55 % žáků, kteří si úlohu uměli znázornit, umělo také úlohu správně spočítat. Domnívám se, že zbývající žáci již neuměli úlohu správně uchopit a tak vypočítat část z daného celku, tj. uvědomit si, že mají počítat $\frac{3}{5}$ z 200 nebo $\frac{2}{5}$ z 200. Proto také nezanedbatelná část žáků při zjištění, že červená část tvoří $\frac{2}{5}$, už ve výpočtu dále nepokračovala. Celkem 6 žáků umělo pouze určit, jakou část vyjádřenou zlomkem tvoří červená část, z toho jeden bez využití názoru.

Vyskytli se tři žáci, kteří v úloze měřili délku tyče na obrázku. Tito žáci přistupují k náčrtu, obrázku jako vyobrazení skutečnosti se skutečnými rozměry, které mohou měřit. Tato miskoncepce je obzvlášť závažná.

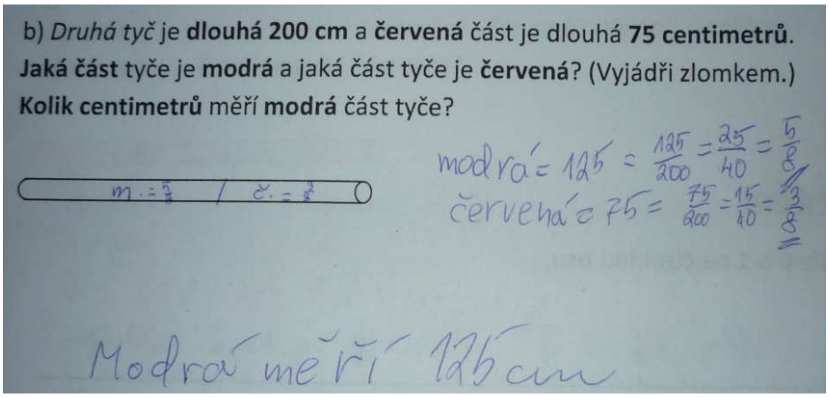
Žáci se také pokoušeli o výpočet typu $\frac{3}{5}$ z 200, kde si nepamatovali správný postup početních operací. Tento formální přístup se projevil již v průzkumném šetření, zde se jím nebudu více zabývat (viz úloha Zlomek jako veličina).

Druhý typ úlohy – dáno: celek, část → úkolem je spočítat operátor

Řešení úlohy jsem rozdělila na dvě části. Za prvé jsem pozorovala, jaká část žáků byla schopna dopočítat délku modré tyče v centimetrech a za druhé, jestli žáci uměli vyjádřit části tyče zlomkem.

Znázornění známých údajů na obrázku nebylo podle mě příliš nápomocné k samotnému výpočtu. Žáci by si možná uvědomili, že 75 cm je část a tyč dlouhé 200 centimetrů je celek. Navíc že je tato část menší než polovina tyče. To bych ale předpokládala, že je žákům jasné i bez obrázku. Přesto se našlo 15 ze 41 žáků, kteří nebyli schopni dopočítat ani délku modré tyče, tj. $200 - 75 = 125\ cm$.

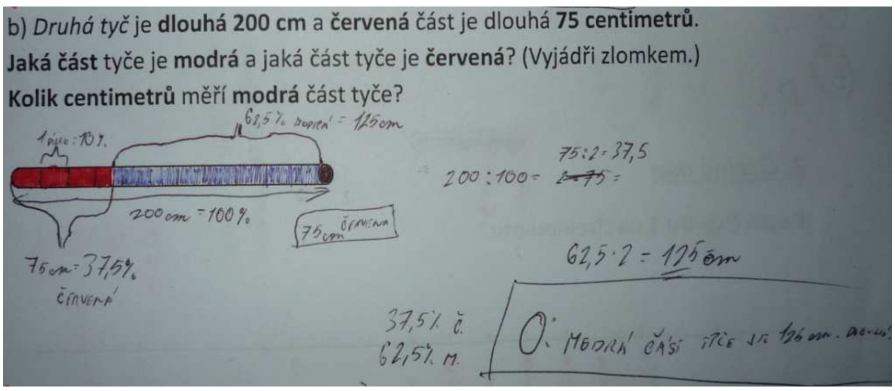
Někteří žáci doplňovali znázornění až po vypočítání jednotlivých částí (obr. 3.68), ilustrovali nalezené řešení.



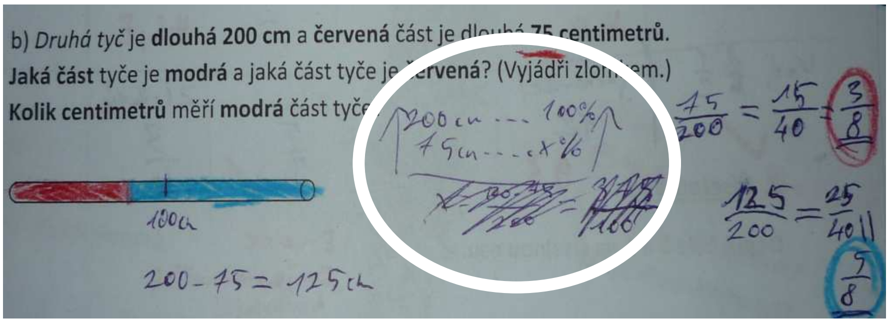
Obr. 3.68 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 11

Při určení částí tyče zlomkem se objevila následující řešení.

Řešení na obr. 3.69 bylo založené na znalosti procent. Žák vyjádřil modrou a červenou část tyče místo zlomkem právě procenty. Tendenci řešit úlohu přes procenta měl ještě jeden žák, ten však v průběhu výpočtu svou strategii řešení změnil (obr. 3.70).

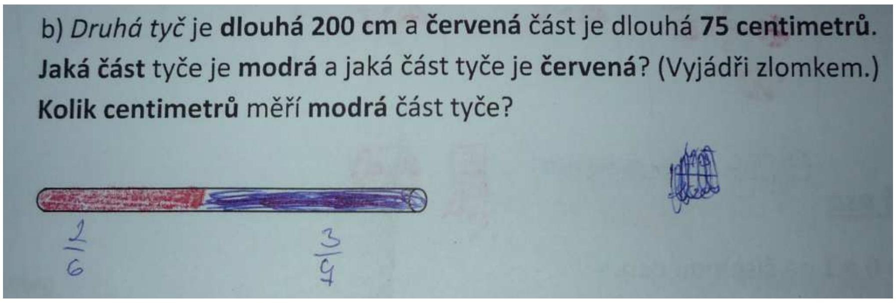


Obr. 3.69 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 12



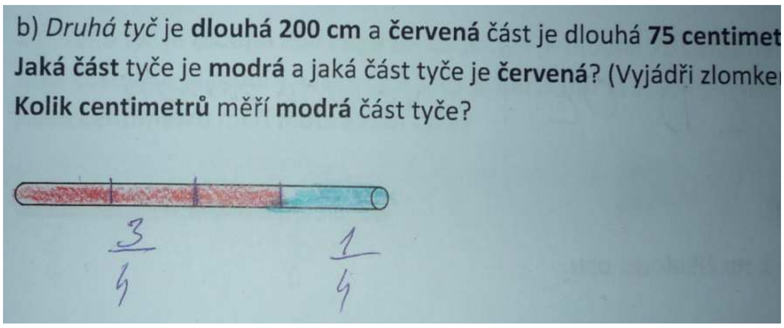
Obr. 3.70 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 13

Žák, jehož řešení je na obr. 3.71, v předchozí úloze délku tyče na obrázku měřil a i zde určoval části tyče pomocí měření. Změřil si délku červené části tyče, tj. $2{,}6\ cm$, následně i délku modré části, tj. $3{,}7\ cm$. Tato desetinná čísla přepsal na zlomky způsobem, který se již vyskytoval v průzkumném šetření (viz úloha Zlomek jako podíl), tj. $2{,}6 = \frac{2}{6}$ a $3{,}7 = \frac{3}{7}$.



Obr. 3.71 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 14

V další ukázce řešení na obr. 3.72 žák znázorňoval na tyči červenou část tak, že za celek uvažoval tyč dlouhou 100 místo 200 centimetrů. Buď se spletl, nebo si zadání upravil tak, aby úlohu uměl vyřešit.



Obr. 3.72 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 15

➢ Vyhodnocení: Úlohu řešilo správně pouze 8 ze 41 žáků. Dalších 18 žáků spočítalo kolik centimetrů je dlouhá modrá tyč, z toho 3 žáci vyjádřili zlomkem červenou část tyče modrou už ne. Další dva žáci vyjádřili části tyče zlomkem, ale nespočítali délku modré tyče v centimetrech.

Opět se v řešení objevilo měření délky v obrázku. Jednalo se o stejného žáka, který měřil i v předchozím typu úlohy. Žák navíc převáděl desetinné číslo na zlomky tak, že celek desetinného čísla tvořil čitatel zlomku a jmenovatel zlomku byl zapsán na místo desetinného rozvoje.

Dva žáci se pokoušeli uplatnit při vyjádření části tyče zlomkem procenta. Tento postup není zcela chybný, procenta stejně jako zlomek vyjadřují vztah celek – část, ale v závorce v zadání jsem po žácích chtěla vyjádřit části zlomkem.

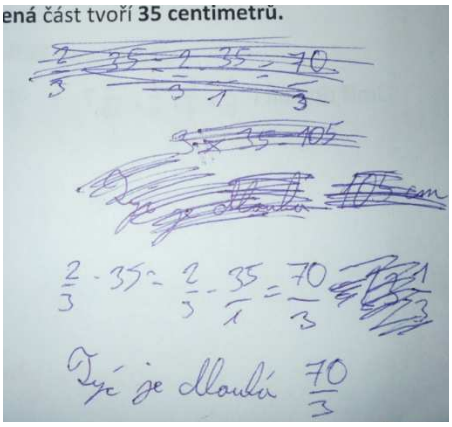
<u>Třetí typ úlohy – dáno: část, operátor → úkolem je dopočítat celek</u>

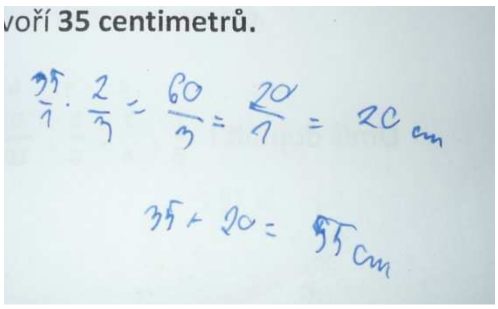
Poslední typ úlohy je většinou pro žáky problematický, protože žáci považují číslem zadanou část za celek a pomocí operátoru následně počítají část ze zadaného čísla, místo aby počítali hledaný celek.

Tato tendence se mi při zjišťování dat ve velké míře nepotvrdila. Domnívám se, že úloha byla natolik jednoduchá, že ji žáci řešili celkem úspěšně.

Pouze dva žáci úlohu řešili tak, že vypočítali $\frac{2}{3} \cdot 35$ (obr. 3.73). Žák, jehož řešení je obr. 3.75 vpravo, vzniklou část přičetl k 35, což následně považoval za délku tyče. Žák navíc udělal numerickou chybu.

Na obr. 3.73 vlevo se mi řešení jeví tak, že žák se o nějaký výsledek pouze pokoušel náhodnými početními operacemi. Nejdříve násobil číslo 35 zlomkem, pak násobil 35 třemi a



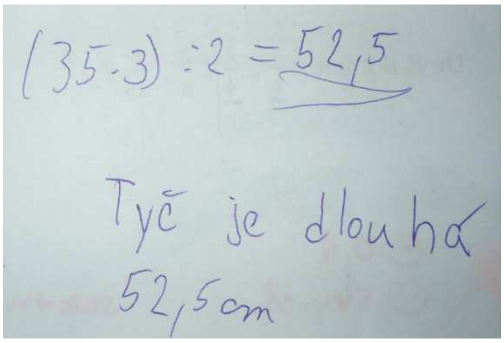


Obr. 3.73 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 16

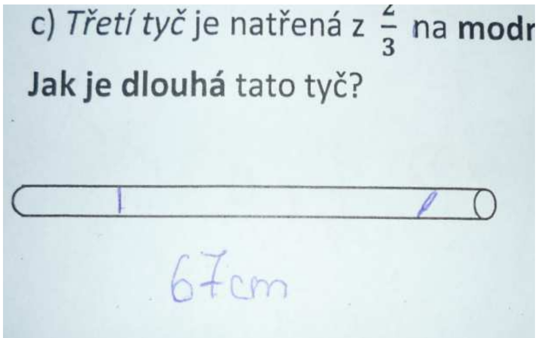
nakonec se vrátil k původnímu chybnému výpočtu.

Ani v jednom z výše zmíněných případů se žáci nepokusili o znázornění situace na obrázku tyče.

Další pokus o výpočet je na obr. 3.74. I zde se žák pokouší o výpočet náhodnými operacemi. Opět se zde projevuje formální přístup.



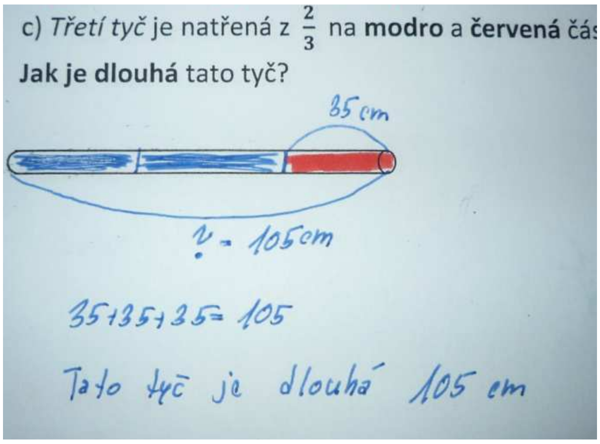
Obr. 3.75 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 17



Obr. 3.74 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 18

Poslední z nesprávných řešení je na obr. 3.75. Myslím si, že žák v obrázku měřil délku tyče. V předchozích typech úlohy žák ale délku tyče neměřil. Obrázek byl dlouhý 6,5 cm, což by výsledku žáka přibližně odpovídalo.

- Vyhodnocení: Celkem 46 % žáků si úlohu správně znázornilo (obr. 3.76). Z toho 13 žáků úlohu správně vyřešilo a 6 žáků se správným znázorněním se o výpočet ani nepokusilo. Další 4 žáci úlohu vyřešili i bez obrázku. Celkem 34 % žáků se nepokusilo úlohu řešit.



Obr. 3.76 Tyč sem, tyč tam - Ukázka řešení 19

Dílčí závěry

Jak jsem předpokládala, žáci byli nejúspěšnější při řešení prvního typu úlohy, kde měli zadaný celek a operátor a úkolem bylo dopočítat části tyče v centimetrech. Více jak polovina žáků, která si úlohu znázornila, spočítali části tyče správně. Ostatní žáci i přes správné znázornění neuměli úlohu vyřešit, a to ani ti co si uvědomili, že druhá část tyče tvoří $\frac{2}{5}$.

Druhá úloha se ukázala pro žáky jako nejproblematičtější. Při zjišťování dat jsem si uvědomila, že obrázek v tomto případě není žákům moc nápomocný. Proto jsem znázornění při zjišťování dat nepřikládala příliš velkou váhu. Pouze 8 ze 41 žáků mělo celou úlohu správně vyřešenou. Celkově pak 63 % umělo dopočítat, že modrá část je dlouhá 125 centimetrů a 31 % určila části vyjádřené zlomkem.

Poslední typ úlohy nakonec nebyl tak problematický, jak jsem předpokládala. Úlohy tohoto typu dělají žákům problém, protože žáci chybně identifikují celek. Celkem 41 % žáků úlohu vyřešili správně. Z toho 13 žáků k výpočtu využilo ilustraci a 4 žáci řešili úlohu bez znázornění. Dalších 6 žáků si úlohu znázornilo, ale nebylo schopno úlohu dořešit. Celkem tedy 68 % žáků, kteří si úlohu znázornili, tak ji také vyřešili.

Domnívám se, že takto zadaná úloha byla pro žáky celkem jednoduchá. Také si myslím, že pokud by úloha byla zadaná například *Tyč byla zkrácena o* $\frac{2}{3}$ *na 35 centimetrů. Kolik měřila původní tyč*, žáci by při jejím řešení tak úspěšní asi nebyli[18].

Objevila se také řešení, za kterých je zřejmé, že žáci trpí závažnou miskoncepcí. Jedním takovým řešením bylo měření délek obrázku tyče. Celkem se měření objevilo u pěti žáků. Žáci by již v sedmém ročníku měli vědě, že obrázek, náčrt slouží pouze pro zjednodušení nějaké reálné situace a že v něm tedy nelze měřit.

Další zajímavá strategie řešení spočívala ve vyjádření části tyče pomocí procent. Tato tendence se projevila u dvou žáků.

3.3.4 Shrnutí výsledků první fáze výzkumného šetření

Z řešení úlohy Pexeso a také z řešení úlohy Číselná osa vyplývá, že velká část žáků si neuvědomuje ekvivalenci zlomků. Proto žáci nebyli schopni tyto úlohy úspěšně řešit.

[18] Chybná řešení v souvislosti s obdobnou úlohou popisují Tichá a Macháčková (2006) ve výsledcích svého výzkumu.

Další chybná řešení se projevovala z důvodu toho, že žáci neuměli zobrazit zlomek na daném modelu a následně ze zadané části určit celek. Tento problém se objevil v řešení úloh Číselná osa a Tyč sem, tyč tam.

Některá chybná řešení v úloze Číselná osa svědčila o tom, že žáci nemají představu o zlomku ve vztahu celku a části, a to ani o kmenových zlomcích.

V úloze Pexeso žáci naopak neuměli přiřadit daný zlomek v symbolické reprezentaci k vyjádření zlomku v ikonické reprezentaci. Žáci si často neuvědomili ekvivalenci zlomků. Také jsem zjistila, že žáci nechápou, že části můžou být „stejné" velikostí, tvarem, ale také obsahem či počtem prvků.

Ve výuce jsem si i nadále věnovala budování představ, ikonické a také činnostní reprezentaci.

V druhé části výzkumu se v důsledku těchto zjištění blíže zaměřím na:

- představy žáků o zlomcích
- schopnost znázornit zlomek na modelu
- identifikaci ekvivalentních zlomků
- stejnost částí velikostí a obsahem

3.4 Druhá fáze výzkumu

Druhá fáze výzkumu proběhla v polovině prosince 2015. V mezidobí mezi jednotlivými fázemi výzkumu jsem zpracovávala první fázi výzkumu. Ve výuce jsem pak reagovala na zjištění a upravila vyučování tak, aby se zlepšily představy žáků. Soustředila jsem se více na ikonické a činnostní reprezentace. Vytváření představ probíhalo sice v jiném učivu, ale přesto jsem chtěla zjistit, jak se projevil důraz na vizualizaci.

Žáci vypracovávali předložený pracovní list (viz. Příloha Druhá část výzkumu). Na vyplnění měli žáci jednu vyučovací hodinu a byli opět požádáni, aby vše co je napadne, napsali do pracovního listu. Také jsem chtěla, aby žáci pracovali samostatně.

Pracovní list vyplňovalo celkem 46 žáků.

3.4.1 Úloha 1.

Zadání úlohy

Žáci měli za úkol nakreslit, co si představují pod danými zlomky (obr. 3.77)[19].

1. Nakresli, co si představíš, když vidíš napsáno:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{13}$

Obr. 3.77 Zadání úlohy 1

Při řešení této úlohy, žáci malovali nějaké obrázky, kde zvýraznili část z celku vyjádřenou zlomkem. Když jsem procházela mezi lavicemi, zjistila jsem, že žáci buď uvádějí obrázek, nebo napsali pouze například „koláč“. Na to jsem rovnou reagovala a chtěla, aby uvedli nejen obrázek, ale také nějakou konkrétní představu, kterou pod daným obrázkem mají, tj. slovní vyjádření pizza, koláč apod.

Souvislost s první částí výzkumu

V předchozí části výzkumu jsem v úloze Pexeso žákům předložila karty se symbolickou a ikonickou reprezentací. Nyní jsem uvedla pouze symbolickou reprezentaci zlomku a ikonickou mají žáci vymyslet sami.

Ve výuce po první fázi a před druhou fází výzkumu jsem se snažila vizuální představy u žáků podpořit.

Cíle a předpoklady

Cílem úlohy bylo zjistit, jakou mají žáci představu o zlomcích a jaké modely ke znázornění použijí, tj. zda jsou schopní ikonické reprezentace. Zajímalo mě také, jestli použijí pouze běžně používané geometrické modely zlomku, jako jsou kruh a obdélník, nebo jestli žáci využijí také nějaké diskrétní modely (v podobě kuliček, krychlí, bonbónů apod.). Také zda budou zlomky znázorňovat na adekvátním obrázku.

Předpokládala jsem, že největší problémy budou mít žáci nejspíš se zlomkem s třináctkou ve jmenovateli a budou se pokoušet znázornit tento zlomek na kruhu či nevhodném obdélníku (jiný než 1x13), a tak budou velmi nepřesně dělit tento obrázek na nestejně velké části.

Úloha mi měla pomoci zjistit:

- *Jaká bude úspěšnost při znázornění daných zlomků?*

[19] Úloha byla inspirovaná úlohou Tiché a Macháčkové (2006).

- *Které modely budou žáci při znázornění využívat?*

Své domněnky jsem formulovala následovně:

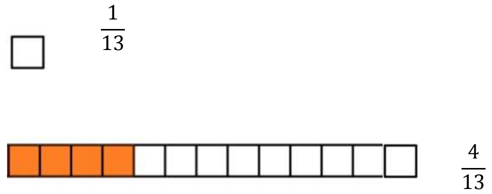
- zlomek $\frac{3}{4}$ znázorní téměř všichni žáci správně (ve smyslu dělení na stejně velké části), protože má zlomek ve jmenovateli sudé a poměrně malé číslo. Jak jsem již psala v teoretické části, nejlépe se znázorňují zlomky s mocninami dvou ve jmenovateli.
- zlomek $\frac{4}{5}$ znázorní správně nižší počet žáků, protože zlomek má ve jmenovateli liché číslo. Předpokládala jsem to proto, že žáci při nevhodné volbě modelu budou daný obrázek dělit na nestejné části.
- zlomek $\frac{4}{13}$ znázorní jen velmi malá část žáků správně, a to z důvodu lichého a poměrně velkého čísla ve jmenovateli. Opět záleží na volbě modelu a s tím souvisejícím přesném dělení na stejné části.

Myslela jsem, že žáci ke znázornění zlomků budou využívat nejčastěji model „kruh“, v menším počtu pak model „obdélník (čtverec)“. Tyto dva geometrické modely jsou pro žáky blízké hlavně z důvodu toho, že jsme s nimi v hodinách často pracovali a na obrázcích v učebnicích se také často vyskytují.

U znázornění zlomků s lichým jmenovatelem jsem předpokládala, že se vyskytnou obrázky (např. kruhu), které žáci budou přibližně, odhadem, dělit na části, které tak nebudou stejně velké.

Domnívala jsem se, že se při znázornění zlomku $\frac{4}{13}$ žáci budou snažit dělit například kruh na 13 částí, ale tyto části nebudou stejné, z důvodu tohoto nepřesného dělení.

Soustředila jsem se také na to, jestli žáci využijí nějaký kontinuální model, a ten se budou snažit rozdělit. Nebo zda si zvolí například u zlomku $\frac{4}{13}$ jeden čtvereček jako prvek pevné velikosti, který bude představovat část $\frac{1}{13}$, následně rozšíří tento jeden díl na $\frac{13}{13}$ a 4 díly zvýrazní (neboť tímto způsobem lze znázornit libovolný zlomek) viz obr. 3.78.



Obr. 3.78 Konstrukce modelu pomocí jednoho dílu

➢ *Jaké využijí žáci netradiční modely?*

Též mě zajímalo, jestli žáci využijí při modelování zlomků trojúhelník či jiné geometrické obrazce než je obdélník a kruh. Domnívala jsem se z důvodu, že v první části výzkumu žáci zjistili, jakými možnými způsoby lze zlomek znázornit. V úloze Pexeso to byl kruh (pizza), obdélník, trojúhelník, ale také netradiční znázornění na kuličkách v přihrádkách, vejcích v platu, jablkách v bedýnce apod. V úloze Číselná osa a úloze Tyč sem, tyč tam se pak jednalo o vizualizaci zlomku na úsečce. Ve výuce po první fázi výzkumu jsem se také zaměřila na různé vizualizace.

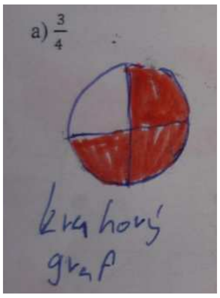
Budu zjišťovat, zda se v řešení úlohy vyskytnou nějaké diskrétní modely v podobě určitého počtu kuliček nebo bonbónů apod. S těmito diskrétními modely jsem v hodinách se žáky před první fází výzkumu příliš nepracovala, nejsou pro ně tedy tak běžné.

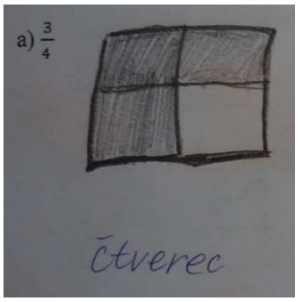
Zjištění a analýza dat

Při znázorňování zlomku $\frac{3}{4}$ využila naprostá většina žáků vhodný model, který snadno rozdělili na stejné části a tak ilustrovali zadaný zlomek.

➢ 32 žáků využilo model „kruh“ a správně znázornili daný zlomek. Pod obrázkem si představovali koláč, pizzu, dort, kruhový graf, hodiny apod. (obr. 3.79)

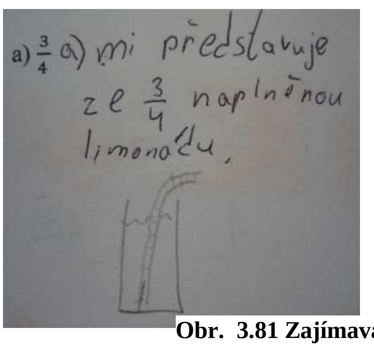
➢ 9 žáků modelovalo správně zlomek na čtverci/obdélníku a představovali si většinou čokoládu nebo také toustovač (obr. 3.80)

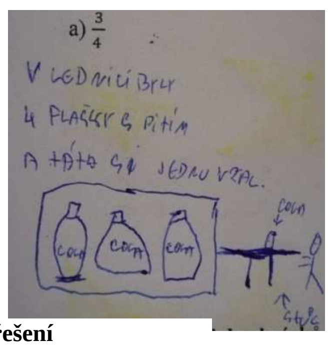




Obr. 3.79 Kruhový model **Obr. 3.80 Obdélníkový model**

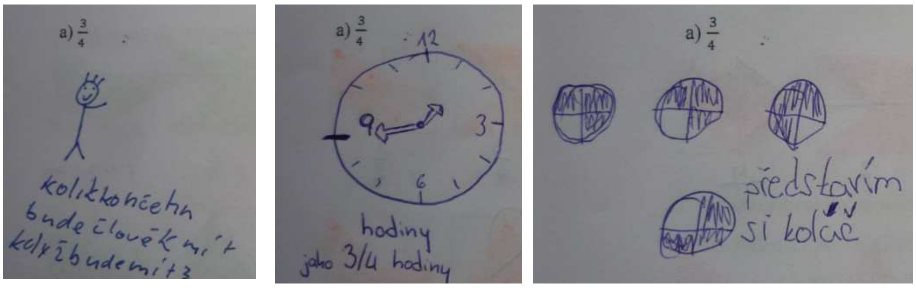
➢ 2 žáci ilustrovali zlomek zajímavým způsobem (obr. 3.81)





Obr. 3.81 Zajímavá řešení

➢ 3 řešení byla chybná (obr. 3.82)

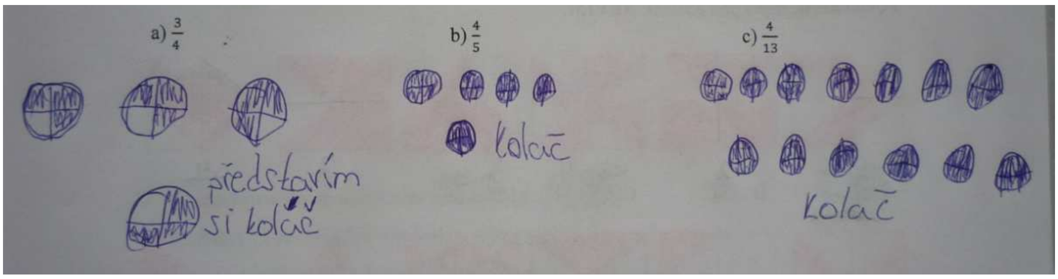


Obr. 3.82 Chybná řešení

Na obr. 3.82 první zleva je znázorněn člověk, který má pouze tři končetiny. Byl to sice nápaditý způsob znázornění zlomku, ale části těla ani končetiny nejsou shodné části. A to ani z hlediska velikosti, váhy, funkce apod.

Obr. 3.82 (uprostřed) znázorňuje ciferník hodin. Úvaha, že zlomek ¾ si lze přestavit jako tři čtvrtě hodiny, je sice v pořádku, ale znázornění ručičkami (poloha ručiček) neodpovídá znázornění daného zlomku.

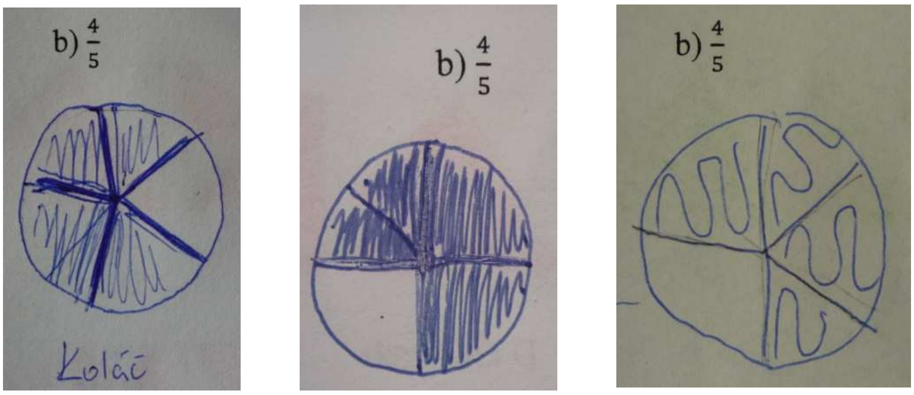
Poslední chybné řešení je mi nejasné (obr. 3.83). Žák si představuje čtyři koláče, kde na každém koláči je znázorněn zlomek ¾. U dalších zlomků žák také kreslil tolik koláčů, kolik byl jmenovatel zlomku a každý dělil na čtvrtiny.



Obr. 3.83 Nejasné řešení

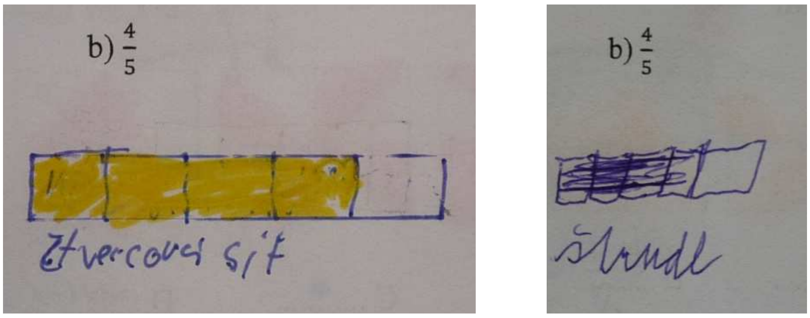
Další zlomek $\frac{4}{5}$ žáci také nejčastěji zobrazovali na kruhu. Využití kruhu, jako modelu zlomku s lichým jmenovatelem, je nepřesné.

➢ 22 žáků se snažilo znázornit zlomek na kruhu. Z toho polovina se opravdu snažila o rozdělení na stejné části (obr. 3.84 první zleva) a zbývající žáci rozdělili kruh například na čtvrtiny a jednu z těchto čtvrtin rozdělili ještě na dvě části (obr. 3.84 uprostřed) nebo nejdříve rozdělili kruh na poloviny a pak jednu polovinu na tři části a druhou polovinu na dvě části (obr. 3.84 vpravo). Žáci opět pojmenovávali obrázky jako pizza, koláč apod.



Obr. 3.84 Ukázka řešení 1

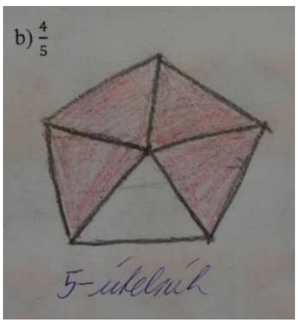
➢ 15 žáků využilo obdélníku 1x5 pro znázornění zlomku. Pod obrázkem si představovali čtvercovou síť, čokoládu, štrůdl, klávesnici, bazén, tyčinku kinder bueno apod. (obr. 3.85). Zde se projevovaly první tendence žáků, konstruovat model tak, jak jsem popisovala v předpokladech. Žáci si zvolili dílek pevné délky a následně dokreslili tolik dílků, kolik byl jmenovatel zlomku.



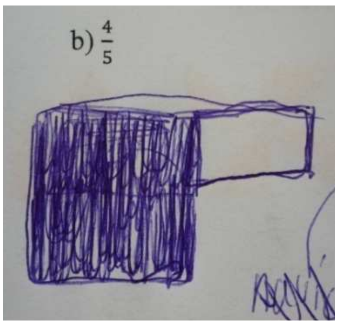
Obr. 3.85 Ukázka řešení 2

➢ 1 žák použil zajímavý model, který spočíval v dělení pětiúhelníku na shodné trojúhelníky (obr. 3.86)

➢ 1 žák znázornil způsobem, že si nakreslil čtverec, ten rozdělil na čtyři části a pak ještě domaloval ke čtverci jednu stejně velkou část (obr. 3.87)

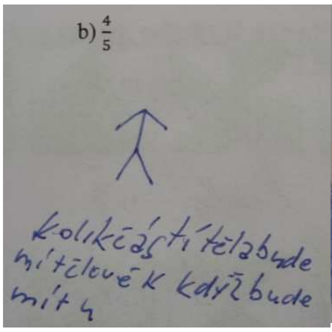


Obr. 3.86 Ukázka řešení 3

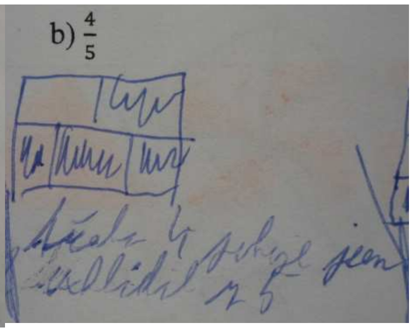


Obr. 3.87 Ukázka řešení 4

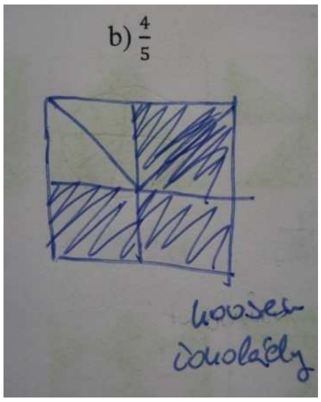
- 2 žáci nenamalovali nic
- 5 žáků uvedlo znázornění, kde objekt nebyl rozdělený na stejně velké části (sem by bylo možné zařadit i řešení spočívající v nepřesném dělení kruhu obr. 3.84), jeden žák opět ilustroval zlomek na částech těla (obr. 3.88), jeden žák se při vybarvování nejspíš spetl a vybarvil tak zlomek 3/5, další žák uvedl pět koláčů, kde každý z koláčů byl rozdělen na čtyři části (obr. 3.83)



Obr. 3.88 Ukázka řešení 5



Obr. 3.89 Ukázka řešení 6

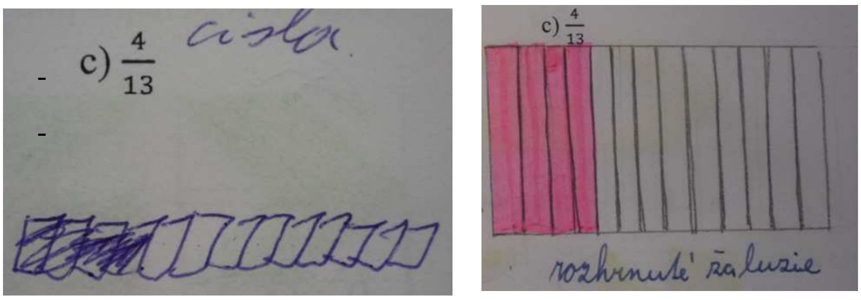


Obr. 3.90 Ukázka řešení 7

Na obr. 3.89 a obr. 3.90 jsou znázorněna řešení žáků, kteří si zřejmě neuvědomují, že části musí být „stejné“ (s ohledem na tvar, velikost, obsah, apod.). Jde o zavažnou miskoncepci, která velmi ovlivňuje představy žáka o zlomcích ve vztahu celku a části. Žákům tak chybí základní představa o zlomku ve smyslu spravedlivého rozdělování.

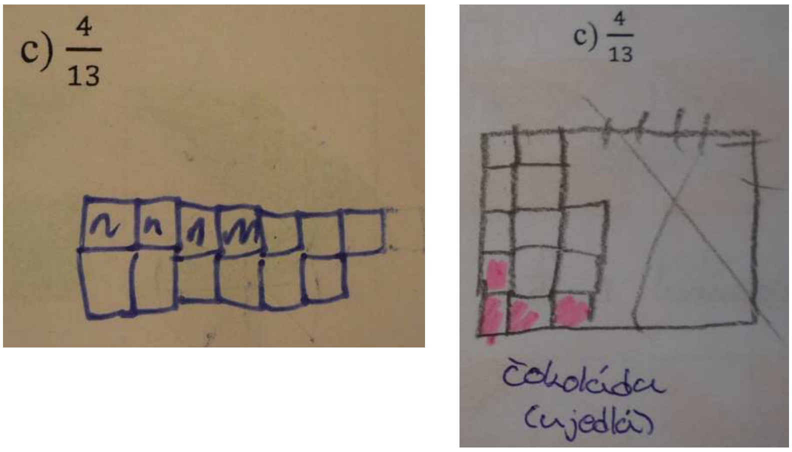
Poslední zlomek $\frac{4}{13}$ žáci překvapivě nejčastěji znázorňovali pomocí konstrukce, kde si zvolili jednu pevnou část (čtvereček, obdélník) a pomocí ní dokreslili celý model.

- 20 žáků ilustrovalo zlomek na modelu vzniklém z poskládaných dílků
    - 10 žáků řadilo dílky za sebe a vytvořili tak obdélník 1x13 (obr. 3.91), žáci si pod obrázkem představovali žaluzie, teploměr, žebřík, plot, čokoládu apod.



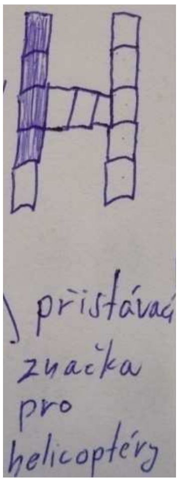
Obr. 3.91 Ukázka řešení 8

- 8 žáků sestavilo model, kde nejčastější představa byla čokoláda, čtvercová síť apod. (obr.3.92)

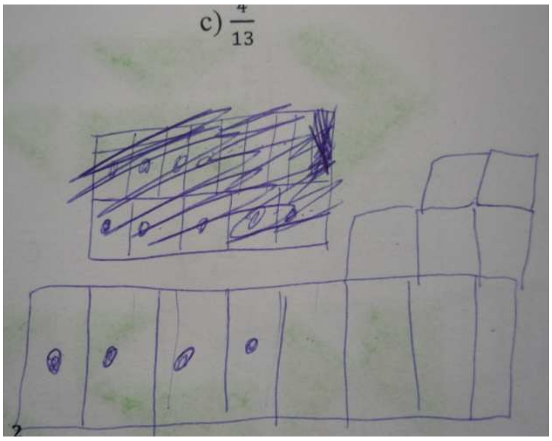


Obr. 3.92 Ukázka řešení 9

- 1 žák sestavil značku pro přistávání helikoptéry (obr. 3.93)
- 1 žák také skládal části, ale jeho části nebyly stejně veliké (obr. 3.94)

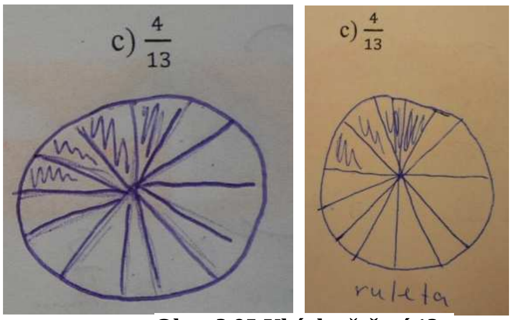


Obr. 3.93 Ukázka řešení 10



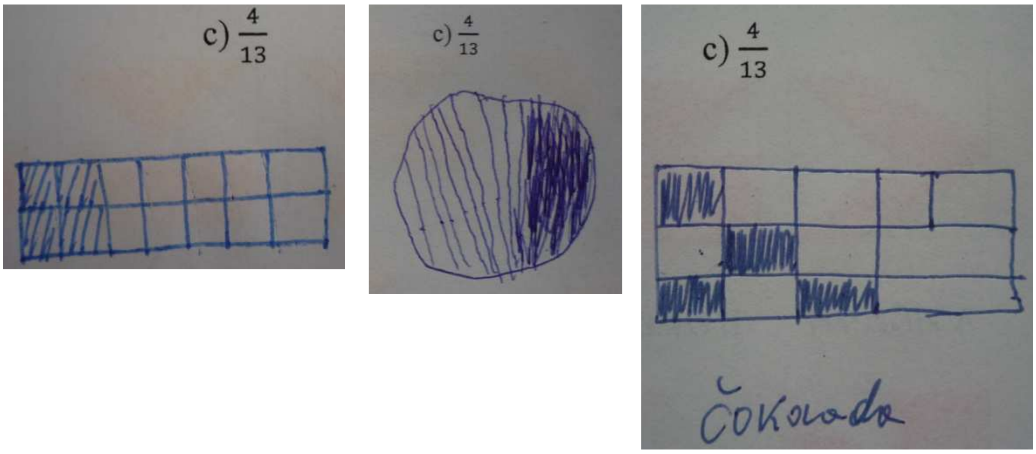
Obr. 3.94 Ukázka řešení 11

➢ 16 žáků znázornilo zlomek na kruhu, kde toto dělení bylo nepřesné, přibližné (obr. 3.95)



Obr. 3.95 Ukázka řešení 12

- 2 žáci nenakrelili nic
- 7 žáků uvedlo chybné řešení, kde neodpovídal počet částí, nebo žák dělil na nestejně velké části, nebo bylo řešení nesmyslné (obr. 3.96)



Obr. 3.96 Ukázka řešení 13

Na obr. 3.96 uprostřed je kruh chybně dělený vertikálně, na obr. 3.96 vpravo je obdélník dělený na nestejně velké části. Tato řešení jsou opět ukázkou chybných představ o zlomku ve smyslu dělení na stejné části.

Dílčí závěry

Z řešení první úlohy se potvrdily mé předpoklady, že žáci ke znázornění zlomku budou nejčastěji využívat kruh a obdélník.

Také se ukázalo, že první zlomek se čtyřkou ve jmenovateli žáci, až na dvě výjimky, znázornili správně a objekt tedy dělili na stejné části. Přitom 72 % žáků využilo model „kruh“ a 20 % model „obdélník“. Objevila se i zajímavá řešení. Například tři láhve s limonádou ze čtyř zůstaly v lednici nebo mít sklenici ze ¾ plnou.

V řešení druhé části úlohy žáci již tak úspěšní nebyli. Měli znázornit zlomek s pětkou ve jmenovateli. Protože jmenovatel není mocnina dvou, dělení na stejné části již bylo pro žáky obtížnější. Celkem 37 % žáků zvolilo vhodný model, který snadno a přesně dělili na stejné části. Obdélník zvolilo 35 % žáků a jeden žák znázorňoval zlomek na pravidelném pětiúhelníku. Model „kruh“ použilo ke znázornění zlomku 48 % žáků. Žáci kruh rozdělovali na části pouze přibližně, nepřesně a někteří na první pohled chybně. Chybné dělení se objevilo také u dělení obdélníku, a to ve dvou případech.

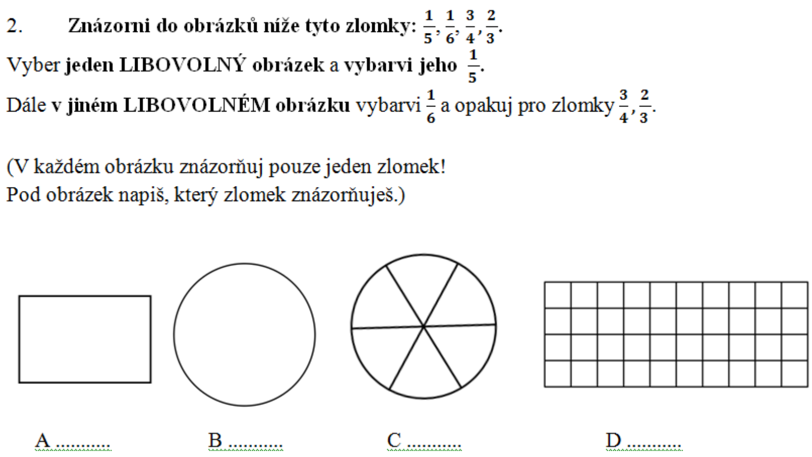
U poslední části úlohy mě řešení žáků překvapila. Nepředpokládala jsem, že tak velká část žáků znázorní zlomek poměrně přesně. Celkem 41 % žáků využilo k řešení konstrukci modelu pomocí jednoho dílku a znázornilo tak zlomek s třináctkou ve jmenovateli. Celkem 35 % žáků využilo ke znázornění kruh, kde toto řešení bylo velmi nepřesné a přibližné stejně jako v předchozím případě, kde žáci znázorňovali pětiny na kruhu. Chybná řešení spočívala v dělení částí obdélníka na nestejné části, nebo žáci pracovali s jiným počtem částí. Dva žáci uvedli nesmyslná řešení a dva nenakreslili nic. Nakonec v této části úlohy byli žáci úspěšnější než v části předchozí, kde znázorňovali zlomek s pětkou ve jmenovateli, a to hlavně z důvodu nepřesného dělení kruhu. Jmenovatel 5 budí u žáků mylný dojem, že mohou snadno celek rozdělit. Oproti tomu číslo 13 ve jmenovateli vyvolává jinou strategii řešení.

Nejzávažnější chyby v této úloze byly tedy spojené s dělením na části, kde v některých případech toto dělení na nestejné části bylo velmi závažné. Další spíše nepřesná než chybná řešení spočívala ve znázornění na nevhodném modelu.

3.4.2 Úloha 2.

Zadání úlohy

V úloze měli žáci za úkol přiřadit a znázornit zadané čtyři zlomky na daných čtyřech obrázcích (obr. 3.97)[20].



Obr. 3.97 Zadání úlohy

[20] Úloha byla převzatá z učebnice Koman, Tichá, Kuřina, Černek (1998, str. 51), ale zadání úkolu jsem přepracovala.

Úloha byla inspirovaná úlohou (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 1998), ale předpokládala jsem, že žáci zadání nebudou rozumět, proto jsem zadání upravovala. Přesto zadání žáci stále nerozuměli, a tak jsem ho musela v hodině vysvětlit. Zdůraznila jsem, že si vezmou například první zlomek a znázorní ho na LIBOVOLNÉM obrázku. Že tedy nemusí první zlomek znázornit na prvním obrázku, druhý zlomek na druhém obrázku apod.

V úloze jsou zadány dva modely kontinuální a dva diskrétní. U kontinuálního modelu musí žák celek nejdříve vhodně rozdělit na stejné části a následně znázornit daný zlomek. Žák tedy konstruuje toto řešení. Na kontinuálních modelech, díky tomu, že jsou nerozdělené, lze znázornit libovolný ze zadaných zlomků. Ve „vhodném rozdělení“ shledávám největší problém. U diskrétního modelu je již celek rozdělen, proto na něm lze znázornit pouze některé zlomky. Závisí to na tom, jestli počet dílků rozděleného obrazce je dělitelný číslem ve jmenovateli zlomku, který chceme znázornit. Žák v tomto případě eviduje dané řešení.

Souvislost s první fází výzkumu

V celé druhé fázi výzkumu se snažím soustředit na modely zlomku, protože v průzkumném šetření i v první fázi výzkumu vyšlo najevo, že žáci nemají představy o zlomcích patřičně rozvinuté a práce s modely jim není příliš blízká.

V první fázi šetření se také ukázalo, že žáci nerozumí ekvivalenci zlomků a neumí si propojit symbolickou a ikonickou reprezentaci zlomku (viz úloha Pexeso). Problém s ekvivalentními zlomky měli žáci také u úlohy Číselná osa.

Cíle a předpoklady

Cílem úlohy bylo, aby žáci přišli na to, který model je vhodný pro znázornění zadaného zlomku (který pomůže úlohu vyřešit). Žáci by si tak v prvním kroku měli rozmyslet, jestli v každém obrázku půjdou znázornit všechny zlomky, následně až úlohu začít řešit.

Zajímalo mě, zda žáci budou schopni najít vhodný model zadaného zlomku a na něm daný zlomek znázornit. To znamená přiřadit zlomek k takovým modelům, kde bude možné snadno přibližně rozdělit celek na odpovídající počet stejných částí.

Úlohu jsem do pracovního listu zařadila také proto, že žáci se v úlohách v pracovních sešitech či učebnicích, dle mé zkušenosti, setkávají spíše s úlohami, kde mají zadané obrázky a jejich úkolem je určit, jaká část obrázku je vybarvená. Další běžně používaný typ úlohy je, že žáci vybarvují zadané části již rozděleného obrázku. Žáci tedy běžně řešení evidují. Proto jsem zvolila úlohu, kde žáci nejen evidují, ale také konstruují řešení úlohy.

Druhá úloha mi měla pomoci zjistit:

- *Které vhodné modely žáci využijí ke znázornění daných zlomků?*
- *Jakých chyb se žáci budou dopouštět?*

Vhodným modelem myslím takový model, který lze snadno a poměrně přesně rozdělit na stejné části a tak znázornit daný zlomek.

Obrázek neděleného obdélníku lze využít pro znázornění libovolného zlomku. Předpokládala jsem ale, že v něm budou žáci znázorňovat převážně zlomky $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{3}$, a to z důvodu poměrně snadného dělení na tři nebo čtyři stejné části. Nemyslela jsem si, že žáci budou mít se znázorněním zlomků na tomto modelu větší potíže.

Domnívala jsem se, že nerozdělený kruh žáci budou dělit ve velké míře na čtvrtiny, protože je opět toto dělení snadné a poměrně přesné. Je také možné, že se žáci inspirují již rozděleným kruhem a rozdělí tak přibližně stejným znázorněním i tento nerozdělený kruh na šest částí. Pokud by tak učinili, myslela jsem si, že na jednom kruhu znázorní zlomek $\frac{2}{3}$ a na druhém zlomek $\frac{1}{6}$, protože jiný ze zadaných zlomků v kruhu děleném na šest částí nelze znázornit. Domnívala jsem se, že se žáci budou pokoušet na tomto modelu znázornit i jiné zlomky např. $\frac{1}{5}$. Toto znázornění bude velmi nepřesné a přibližné, jak jsem již psala u Úlohy 1.

Předpokládala jsem, že v rozděleném kruhu, jak jsem již psala výše, žáci převážně vyznačí zlomek $\frac{1}{6}$, protože je již rozdělen na šest částí.

Dále jsem předpokládala, že rozdělený obdélník žáci využijí ke znázornění zlomku $\frac{1}{5}$, protože tento obdélník představuje diskrétní model se 40 částmi. Číslo 40 je dělitelné pěti, ale také čtyřmi, proto v tomto modelu lze znázornit zlomky $\frac{1}{5}$ a $\frac{3}{4}$. Myslela jsem si ale, že pro znázornění zlomku $\frac{3}{4}$ žáci využijí jiný model, například nedělený kruh nebo nedělený obdélník.

Domnívala jsem se, že nejvíce chyb se žáci dopustí ve znázornění zlomku v již rozděleném obdélníku. Žáci budou mít problém s tím, jaký zlomek znázornit právě na tomto modelu. Také jsem si myslela, že tento model bude problematický z důvodu jeho rozdělení na poměrně velký počet částí. To, že žáci nechápou ekvivalentnost zlomků, se může projevit na znázornění zlomků na tomto modelu. Myslela jsem si, že budou chybovat v počtu vybarvených dílků ve smyslu, že například při znázornění zlomku $\frac{1}{6}$ vybarví šest políček ze čtyřiceti.

Zjištění a analýza dat

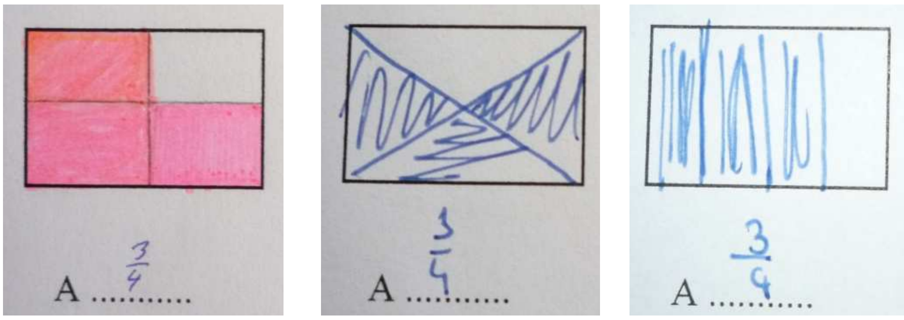
Výsledky zjištění jsem uspořádala podle modelů, ve kterých žáci dané zlomky znázorňovali. Vždy uvádím daný model a zjištění s ním související.

Na modelu „nerozdělený obdélník" žáci znázorňovali následující zlomky:

- $\frac{3}{4}$ celkem 20 žáků - z toho správně 18 a chybně 2 žáci

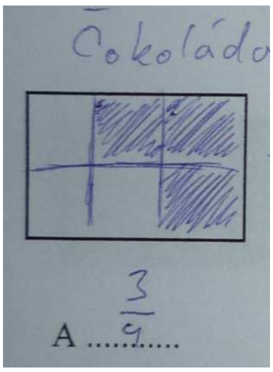
  Žáci obdélník správně dělili třemi způsoby.

  - 14 žáků dělilo obdélník horizontálně a vertikálně (obr. 3.99 vlevo)
  - 3 žáci rozdělili čtverec úhlopříčkami (obr. 3.99 uprostřed)
  - 1 žák vytvořil vertikální části (obr. 3.99 vpravo)



Obr. 3.99 Ukázky správných znázornění zlomku 3/4

První chybné řešení (obr. 3.100) mi není jasné, možná se žák spletl. Druhého nesprávného řešení (obr. 3.101) se žák dopustil z důvodu, že znázornil ¾ a v nevybarvené čtvrtině znovu znázornil zlomek ¾. Žák tímto způsobem řešil celou tuto úlohu.

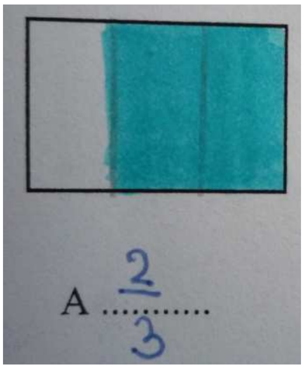


Obr. 3.100 Ukázka řešení 1

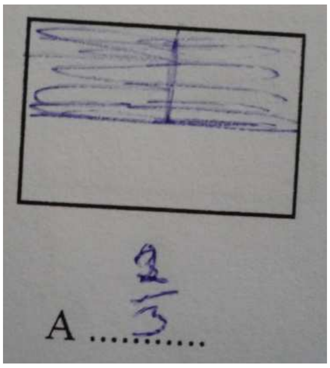
Obr. 3.101 Ukázka řešení 2

- $\frac{2}{3}$ celkem 20 žáků - z toho správně 12 a chybně 8 žáků

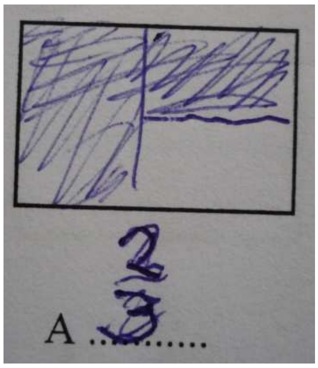
  Žáci obdélník správně dělili pouze jedním způsobem (obr. 3.102).



Obr. 3.102 Ukázka řešení 3



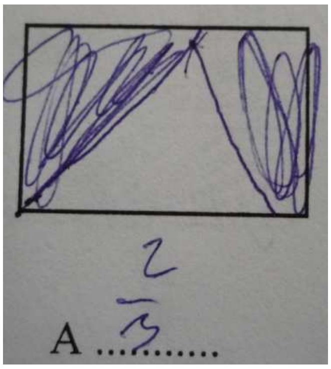
Obr. 3.103 Ukázka řešení 4



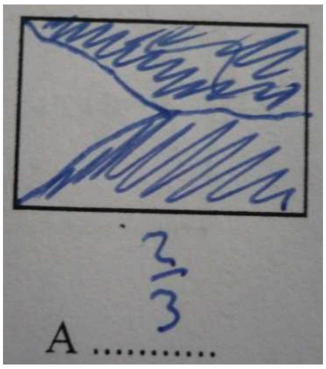
Obr. 3.104 Ukázka řešení 5

Chybná řešení byla následující:

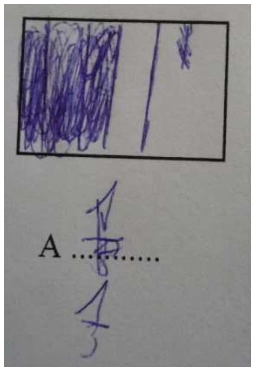
- 3 žáci rozdělili obdélník na nestejné části způsobem znázorněným na obr. 3.103
- 2 žáci rozdělili obdélník na nestejné části způsobem znázorněným na obr. 3.104
- 2 žáci rozdělili obdélník na nestejné části (obr. 3.105, 3.106)
- 1 žák znázorňoval nejspíš poměr 2:3 místo zlomku 2/3 (obr. 3.107)



Obr. 3.105 Ukázka řešení 6



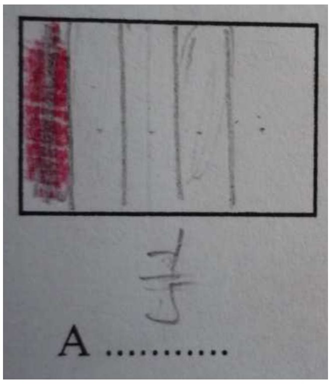
Obr. 3.106 Ukázka řešení 7



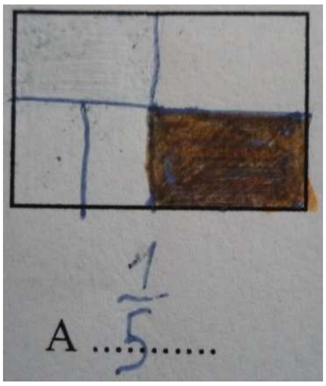
Obr. 3.107 Ukázka řešení 8

- $\frac{1}{5}$ celkem 5 žáků - z toho správně 3 a chybně 2 žáci

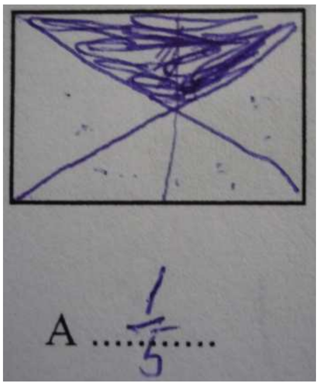
  Všechna správná řešení byla konstruována přibližným rozdělením obdélníku ve vertikálním směru (obr. 3.108). Nesprávná řešení pak souvisela opět s dělením na nestejné části (obr. 3.109, 3.110).



Obr. 3.108 Ukázka řešení 9



Obr. 3.109 Ukázka řešení 10

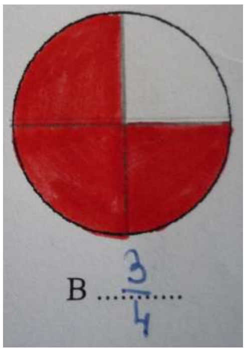


Obr. 3.110 Ukázka řešení 11

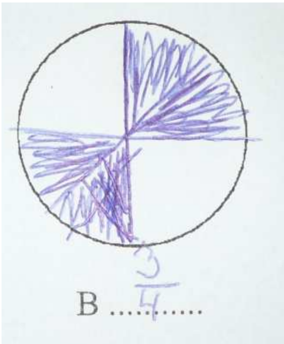
- Jeden žák v obdélníku nezobrazil žádný zlomek.

V <u>nerozděleném kruhu</u> žáci zobrazovali následující zlomky:

- $\frac{3}{4}$ celkem 15 žáků - z toho správně 14 (obr. 3.111) a chybně 1 žák (obr. 3.112)



Obr. 3.111 Ukázka řešení 12

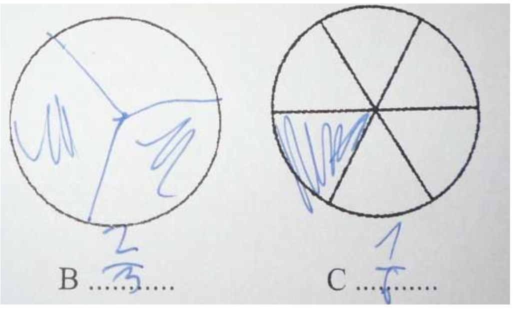


Obr. 3.112 Ukázka řešení 13

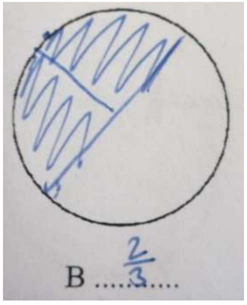
- $\frac{2}{3}$ celkem 15 žáků - z toho správně 11 a chybně 4 žáci

  Pouze u dvou správných řešení se domnívám, že ho žáci konstruovali podobně, jako byl rozdělený vedlejší kruh (obr. 3.113).

  Nesprávná řešení souvisela opět s dělením kruhu na nestejné části (obr. 3.114, 3.115).



Obr. 3.113



Obr. 3.114

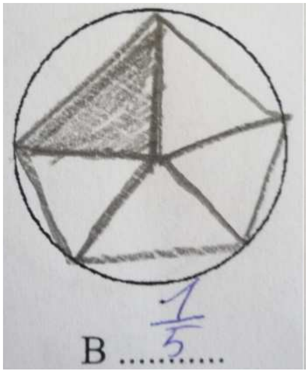
Obr. 3.115

- $\frac{1}{5}$ celkem 13 žáků - z toho správně 4, nepřesně 7 a chybně 2 žáci

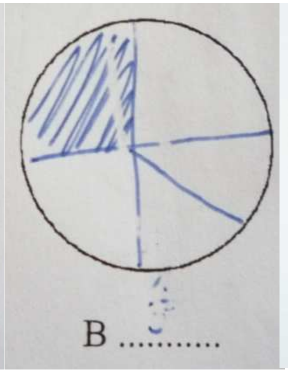
  Dělení kruhu na pět částí je bez dané konstrukce velmi nepřesné. Správným řešením myslím, že se žáci opravdu snažili rozdělit kruh na stejné části. Žák, který i v Úloze 1 znázorňoval zlomek na pětiúhelníku, se snažil i tento zlomek tímto způsobem ilustrovat (obr. 3.116). Jsem si vědoma toho, že nejde o znázornění 1/5 na kruhu ale na pětiúhelníku vepsaného do kruhu, přesto jsem toto řešení řadila mezi správné.

  Mezi nepřesná řešení jsem zařadila řešení, kde se žáci se dopouštěli některých chyb, které byly popsané v Úloze 1. Například rozdělili kruh na čtvrtiny a potom jednu čtvrtinu ještě na dvě části (obr. 3.117) nebo rozdělili kruh na poloviny a jednu polovinu na dvě části a druhou polovinu na tři části (obr. 3.118).

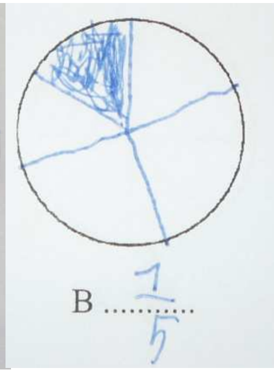
  Jeden žák pak dělil kruh vertikálním způsobem (obr. 3.119), ale byl to jiný žák než v Úloze 1.



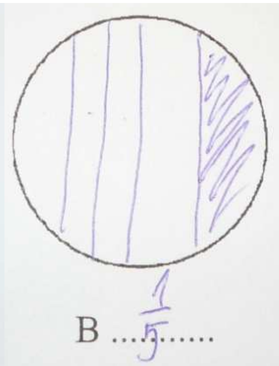
Obr. 3.116



Obr. 3.117



Obr. 3.118

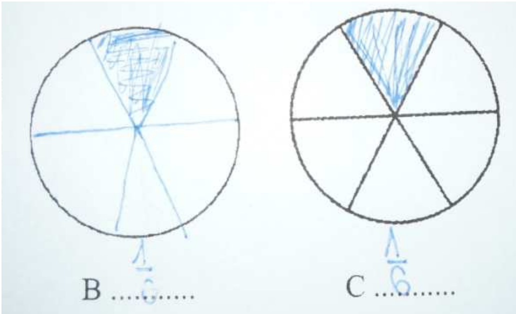


Obr. 3.119

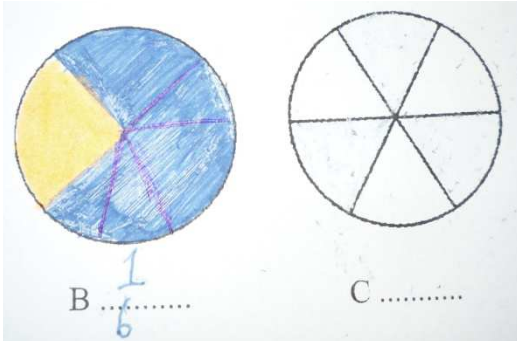
- $\frac{1}{6}$ celkem 2 žáci

  Na obr. 3.120 je řešení, kde žák nerozdělený kruh rozdělil na šest částí a vyznačil zlomek 1/6. Stejně tak i v rozděleném kruhu vyznačil stejný zlomek. Tento žák byl jediný, který znázorňoval jeden zlomek na dvou modelech.

  Obr. 3.121 pak ukazuje řešení, kde žák znázornil šestinu na kruhu, který rozdělil na nestejné části, přestože hned vedle měl kruh rozdělený na tento počet částí. Tento žák rozdělil kruh na poloviny a potom jednu polovinu rozdělil na dvě části a druhou polovinu dokonce na tři části.



Obr. 3.120



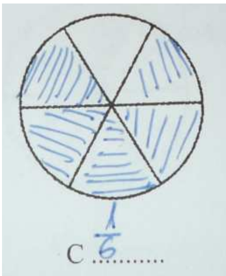
Obr. 3.121

- Jeden žák neznázornil žádný zlomek.

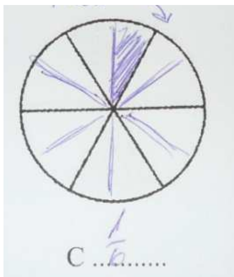
V <u>rozdělené kruhu</u> žáci znázorňovali následující zlomky:

- $\frac{1}{6}$ celkem 44 žáků – z toho 39 správně, 3 chybně a 2 nenakreslili

  Nesprávné řešení na obr. 3.122 bylo způsobeno tím, že žák naopak nechal 1/6 nevybarvenou.



Obr. 3.122



Obr. 3.123

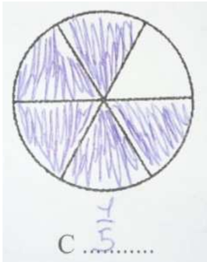
Obr. 3.124

  Druhému chybnému řešení příliš nerozumím (obr. 3.123). Žák dělil každou část napůl a potom znázornil jeden díl.

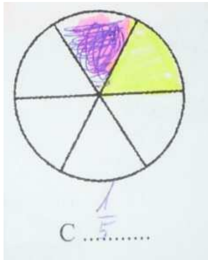
  Ve třetím chybném řešení žák opět znázorňoval zlomek dvakrát, stejně jako v předchozích modelech (obr. 3.124).

- $\frac{1}{5}$ celkem 2 žáci – oba chybně

  Nejdříve jsem myslela, že oba žáci znázorňovali zlomek jako poměr 1:5 (obr. 3.125, 3.126).

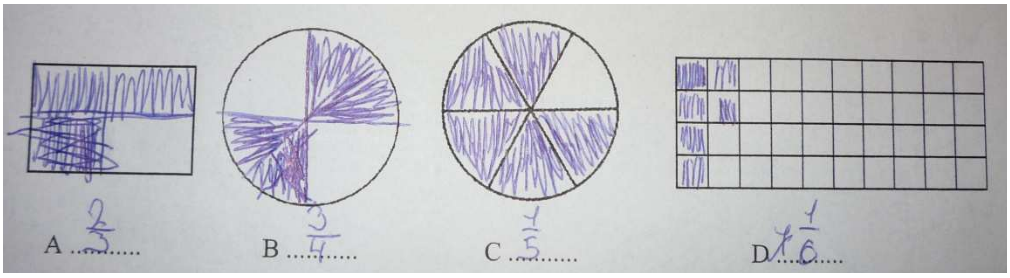


Obr. 3.125



Obr. 3.126

Žák, jehož řešení je na obr. 3.125, ve všech modelech vybarvoval tolik částí, kolik byl jmenovatel zlomku (obr. 3.127).

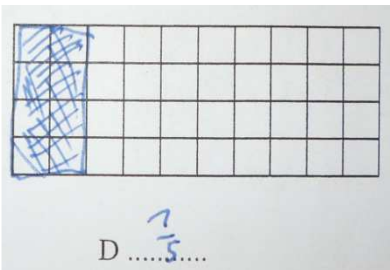


Obr. 3.127

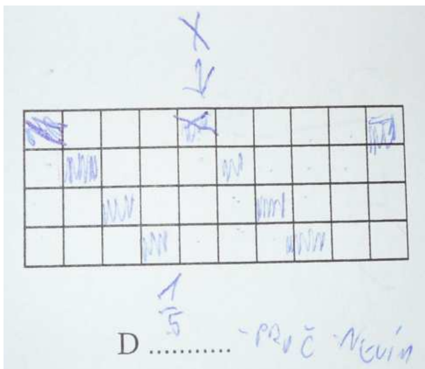
V <u>rozděleném obdélníku</u> žáci znázorňovali následující zlomky:

- $\frac{1}{5}$ celkem 22 žáků – správně 16 a chybně 6 žáků

  Správné řešení je na obr. 3.128. Všichni žáci znázorňovali správné řešení více méně stejně tak, že vybarvené dílky tvořily skupinu. Jen jeden žák nevybarvoval skupinu osmy prvků (obr. 3.129).



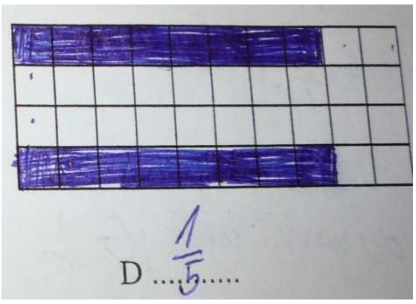
Obr. 3.128



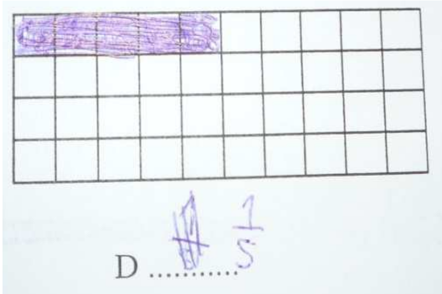
Obr. 3.129

Nesprávné řešení na obr. 3.130 je žáka, který jak již jsem několikrát zmiňovala, všechny části zdvojnásobil.

Na obr. 3.131 znázornil žák pět dílů, protože jmenovatel zlomku je číslo pět.

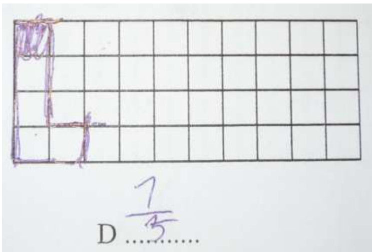


Obr. 3.130

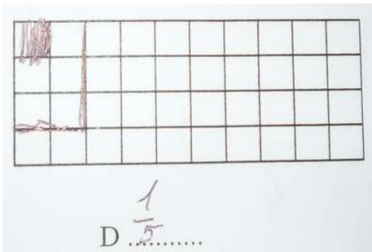


Obr. 3.131

V dalších řešeních žák vybarvil jeden díl z pěti, protože jmenovatel zlomku je číslo pět a čitatel zlomku je jednička (obr. 3.132). V obr. 3.133 pak žák znázorňoval jeden díl ku pěti dílům.

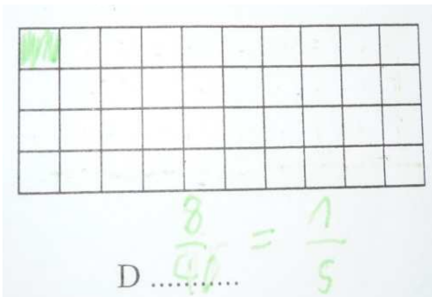


Obr. 3.132



Obr. 3.133

V polední ukázce mi není jasné, proč když žák uměl zlomek převést na ekvivalentní zlomek, neuměl znázornit tento zlomek na modelu (obr. 3.134).

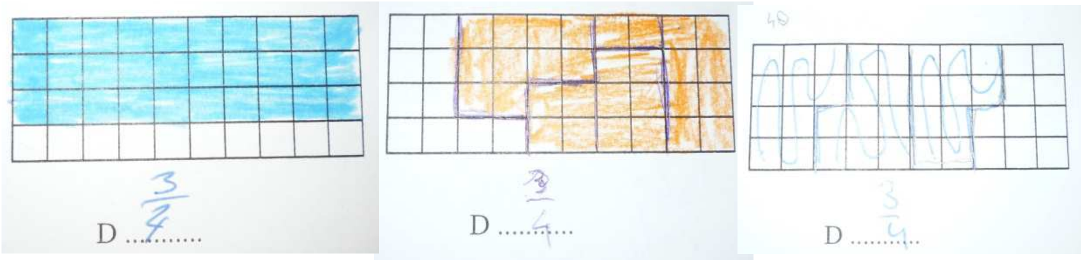


Obr. 3.134

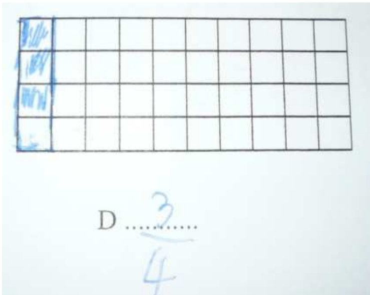
- $\frac{3}{4}$ celkem 11 žáků – správně 8 a chybně 3 žáci

Správná řešení byla trojího typu (obr. 3.135).

Nesprávné řešení na obr. 3.136 je opět znázornění tří částí ze čtyř. Druhé chybné řešení na obr. 3.137 souvisí s tím, že čitatel je číslo tři a znázorněná část má tak tři sloupce a jmenovatel je číslo čtyři, proto má vybarvená část čtyři řádky.



Obr. 3.135 Správná řešení



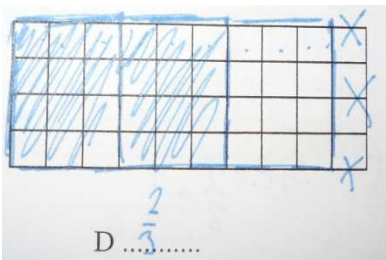
Obr. 3.136

Obr. 3.137

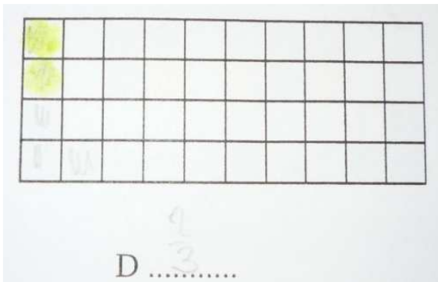
- $\frac{2}{3}$ celkem 6 žáků – všechna řešení chybná

  Nesprávné řešení na obr. 3.138 je sice v případě vynechání posledního sloupce řešením správným, ale žák si měl umět poradit s tímto modelem, tak jak je.

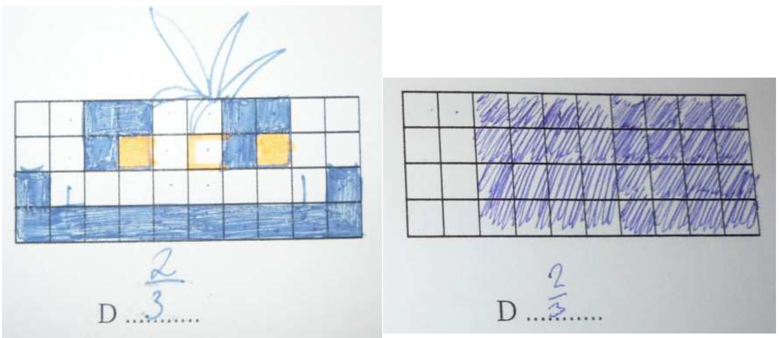
  Druhý obr. pak ukazuje postup, kde žák znázorňuje dva díly, protože čitatel je dvojka a pak ještě tři díly, protože jmenovatel je číslo tři. Poslední dvě řešení jsou pak nějakým pokusem o znázornění (obr. 3.140).



Obr. 3.138



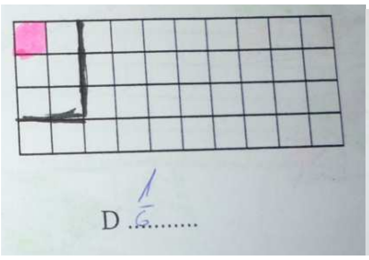
Obr. 3.139



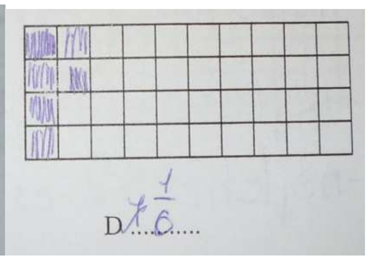
Obr. 3.140

- $\frac{1}{6}$ celkem 3 žáci – všechna řešení chybná

  V prvním nesprávném řešení žák opět znázorňuje jeden díl ze šesti (obr. 3.141). V druhém chybném řešení žák vybarvuje šest dílů, protože jmenovatel je číslo šest (obr. 3.142). Poslední chybné řešení mi není jasné (obr. 3.143).



Obr. 3.141

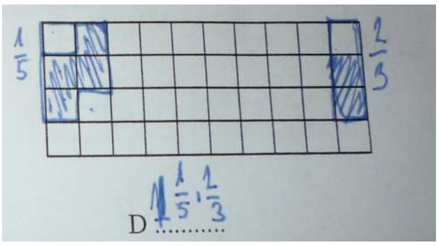


Obr. 3.142

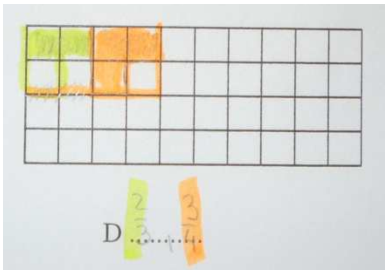
Obr. 3.143

- 2 žáci zobrazili do tohoto modelu najednou dva zlomky

  V obou případech na obr. 3.144 a obr. 3.145 se žáci snaží zlomky znázornit tak, že uvažovali pouze tolik dílů, kolik je jmenovatel zlomku a vybarvili tolik dílů, kolik je čitatel zlomku.



Obr. 3.144



Obr. 3.145

- 2 žáci neuvedli žádná řešení

Dílčí závěry

Na modelu „nerozdělený obdélník“ znázornilo celkem 33 žáků vhodný zlomek, tj. takový, aby ho bylo možné rozdělit na stejné části. Devět žáků při pokusu rozdělit obdélník na požadovaný počet částí, rozdělilo obdélník na části, které nebyly na první pohled stejné. Jeden žák pak znázornil zlomek tak, že vybarvená část tvořila tolik dílů, kolik byl čitatel zlomku a nevybarvená část tolik dílů, kolik byl jmenovatel zlomku např. zlomek $\frac{2}{3}$ jako 2:3.

Model „nerozdělený kruh“ žáci využívali pro znázornění zlomku, který jsem předpokládala, tj. $\frac{3}{4}$. Toto dělení modelu na části bylo, až na jednu výjimku, celkem přesné. Celkem tento zlomek znázornilo 15 žáků. Dále se žáci pokoušeli znázornit zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{5}$. Toto dělení bylo již nepřesné a v některých případech žáci na první pohled dělili na nestejné části. Celkem tedy 28 žáků znázornilo tyto tři zlomky názorně a 14 žáků dělilo kruh na nestejné části. Znázornění zlomku jako poměru čitatele a jmenovatele objevilo u jednoho žáka. Tendence inspirovat se při dělení již rozděleným kruhem se projevila u 4 žáků.

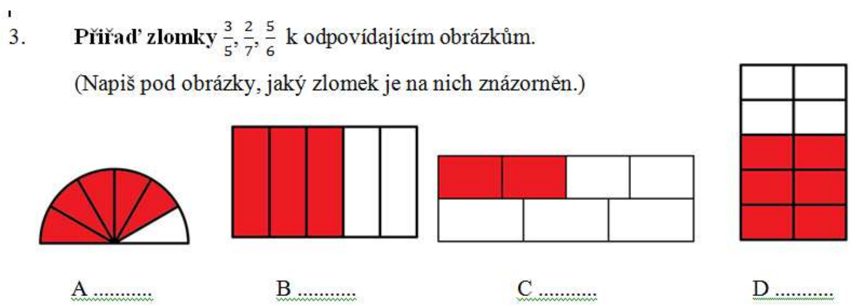
V rozděleném kruhu dle předpokladu 39 žáků znázornilo zlomek $\frac{1}{6}$. Dva žáci pak znázorňovali zlomek $\frac{1}{5}$ a vybarvovali buď jeden díl z pěti, nebo 5 dílů ze zadaných šesti dílů, tj. vybarvovali tolik dílů, kolik byl čitatel nebo jmenovatel zlomku.

Dělený obdélník činil dle předpokladů největší potíže. Pouze 23 žáků v něm správně znázornilo zlomky $\frac{1}{5}$ celkem 15 krát a $\frac{3}{4}$ celkem 8 krát. Žáci se pak pokoušeli znázornit také zlomky $\frac{1}{6}$ a $\frac{2}{3}$, což bylo z důvodu počtu částí neuskutečnitelné. Jeden žák si model upravil tak, že škrtl 4 díly, aby mu znázornění vyšlo. Řešení, která spočívala v tom, že žáci s tímto modelem pracovali jako se čtvercovou sítí, byly projevem tvůrčího způsobu. Žáci například znázorňovali 3 díly ze 4 a to celkem čtyřikrát. Další chybná řešení souvisela s neuvědoměním si zlomku jako vztahu celku a části. Dva žáci vybarvili tolik dílů, kolik byl jmenovatel zlomku, další žáci vybarvili místo zlomku $\frac{3}{4}$ součin $3 \cdot 4$ nebo součet $3 + 4$. Jeden žák věděl, že zlomek $\frac{1}{5}$ je ekvivalentní se zlomkem $\frac{8}{40}$, přesto danou část neznázornil.

3.4.3 Úloha 3.

Zadání úlohy

V úloze měli žáci za úkol přiřadit zadané zlomky k zadaným obrázkům (obr. 3.146)[21].



Obr. 3.146 Zadání úlohy

[21] Úloha je převzatá z učebnice Koman, Tichá, Kuřina, Černek (1998, str. 51).

Souvislost s první částí výzkumu

V souvislosti s průzkumným šetřením a první fází výzkumu se v této úloze zaměřuji na vyjádření zlomku ve vztahu celku a části. Součástí je obrázek C, který neznázorňuje zlomek, protože není dělený na stejné části. Další obrázek D pak znázorňuje ekvivalentní zlomek, protože se v první fázi výzkumu ukázalo, že žáci ekvivalentnost zlomků neumí.

Cíle a předpoklady

Do úlohy jsem zařadila klamné znázornění zlomku v podobě obdélníku C viz obr. 3.146. Cílem bylo, aby se žáci nad úlohou zamysleli, uvědomili si, že části musejí být shodné a tak projevili, že nad úlohou kriticky přemýšleli. Myslela jsem, že pokud si tuto skutečnost uvědomí, opraví si případně řešení v jiných úlohách. Zajímalo mě tedy, jaká část žáků si uvědomí, že obdélník C není rozdělený na stejné části, proto na něm nemohou být znázorněny $\frac{2}{7}$.

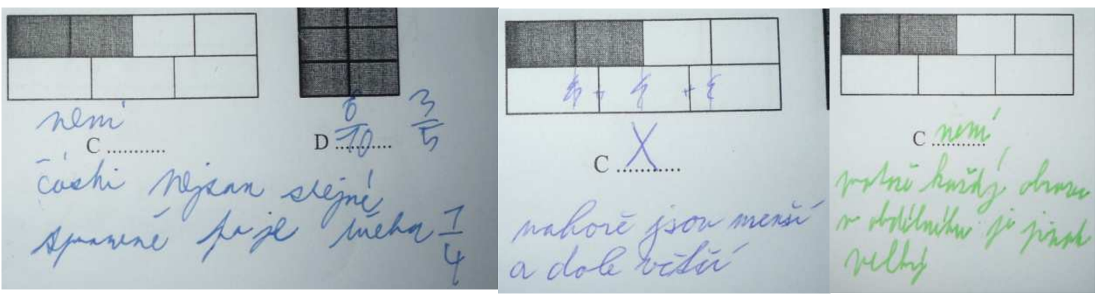
Na tento typ úlohy, kde mají žáci určit jaká část obrázku je vybarvená, jsou žáci zvyklí. Tyto úlohy se běžně vyskytují v pracovních sešitech i učebnicích. Proto si myslela, že žáci budou postupovat automaticky a vůbec je nenapadne, že by úloha neměla řešení.

Dále předpokládala, že velmi malá část žáků identifikuje zlomek $\frac{3}{5}$ u obdélníku D, protože žáci příliš neovládají ekvivalentnost zlomků. Žáci tak budou pod obrázek psát, že tento zlomek není v nabídce nebo napíší, že obdélník vyjadřuje $\frac{6}{10}$.

Zjištění a analýza dat

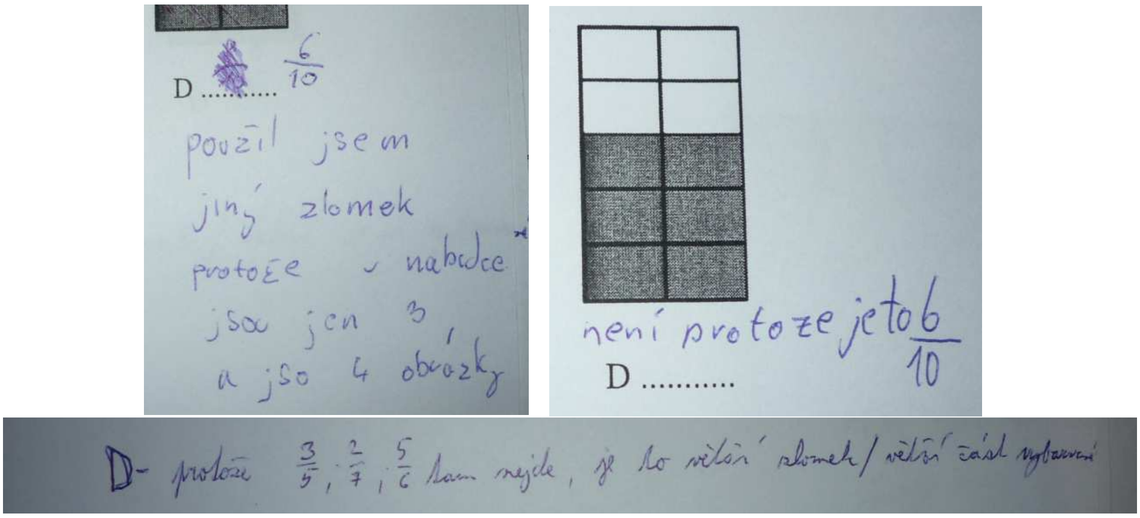
Žáci bez problémů přiřadili zlomek $\frac{5}{6}$ k půlkružnici a zlomek $\frac{3}{5}$ k obdélníku B, úspěšní byli všichni žáci.

Jak jsem předpokládala, 42 žáků přiřadilo zlomek $\frac{2}{7}$ k obdélníku C. Pouze 3 žáci si uvědomili a napsali, že v obdélníku C nejsou stejně velké části (obr. 3.147). Jeden žák uvedl pod obrázek zlomek $\frac{3}{7}$, což si myslím, že bylo omylem.



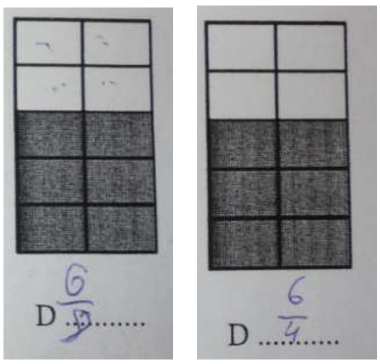
Obr. 3.147 Komentáře žáků, proč obrázek neznázorňuje zlomek 2/7

U obdélníku D pouze 9 žáků identifikovalo zlomek $\frac{3}{5}$. Celkem 32 žáků uvedlo zlomek $\frac{6}{10}$. Z těchto žáků navíc 4 napsali komentář, že tento zlomek není v nabídce (obr. 3.148).



Obr. 3.148 Ukázka řešení 1

Dva žáci napsali, že neví, jaký zlomek přiřadit. Dva žáci napsali, že obdélník D znázorňuje zlomek $\frac{6}{8}$ (obr. 3.149 vlevo). Jeden žák napsal, že obdélník D vyjadřuje zlomek $\frac{6}{4}$ nejspíš proto, že obrázek znázorňuje 4 části nevybarvené a 6 částí vybarvených (obr. 3.149 vpravo).



Obr. 3.149 Ukázka řešení 2

Dílčí závěry

Dle mých předpokladů žáci nad úlohou příliš nepřemýšleli. Neuvědomili si tak, že obdélník C není rozdělen na stejné části, proto na něm nemůže být znázorněn zlomek $\frac{2}{7}$. Pouze tři žáci se nad úlohou zamysleli a napsali, že části nejsou stejné. Naopak si myslím, že některé žáky tato úloha ovlivnila tak, že i v předchozích úlohách dělili obrázky na nestejné části (viz úloha 1 a 2). Úloha tak na žáky zapůsobila spíše v negativním smyslu.

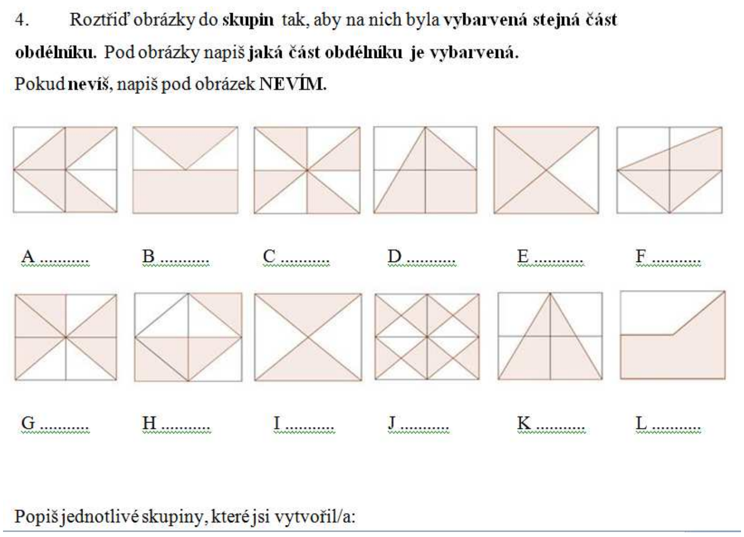
Druhý předpoklad, že žáci neodhalí v obdélníku D ekvivalentní zlomky, tj. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ potvrzuje, že žáci ekvivalentní zlomky neumí.

3.4.4 Úloha 4.

Zadání úlohy

Žáci mají v úloze popsat zlomkem části vybarvené v obdélnících a následně roztřídit tyto obdélníky do skupin, aby v každé skupině byly obdélníky se shodnou částí (obr. 3.150)[22].

Části obdélníku v této úloze se okopírovaly málo kontrastně, proto jsem tyto části před rozdáním pracovního listu žákům barevně zvýraznila, abych je mohla žákům zadat.



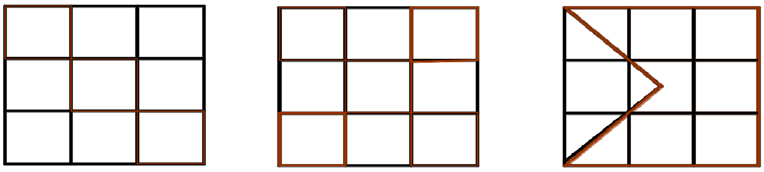
Obr. 3.150 Zadání úlohy

I v této úloze se našli žáci, kteří nechápali zadání. Poradila jsem jim, aby si nejdříve pod každý obdélník napsali, jaká část obrázku je vybarvená a pak ať vytvoří skupiny se stejně velkou vybarvenou částí. Když se žák následně zeptal, jestli zlomkem, uvědomila jsem si, že jsem do zadání napsala pouze „napiš jaká část obdélníku je vybarvená“, ale že bych to chtěla zapsat zlomkem, jsem do zadání zapomněla zapsat. V průběhu vyplňování jsem žákům několikrát připomněla, aby část vyjádřili zlomkem.

[22] Úloha je inspirovaná úlohou v učebnici Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša (1994, str. 24).

Souvislost s první částí výzkumu

Do druhé fáze výzkumu jsem tuto úlohu zařadila jako reakci na úlohu Pexeso z první fáze výzkumu. Žáci v úloze Pexeso měli problémy s určením vybarvené části v obdélníku (obr. 3.151), a to zejména u obdélníku nejvíce vpravo.



Obr. 3.151 Problémové obdélníky z úlohy Pexeso

V závěrečné diskuzi po první sérii úloh jsme úlohu Pexeso vyřešili a vysvětlili si správné řešení. Proto jsem do druhé série úloh zařadila tuto úlohu, která tak reaguje na problém, který měli žáci s vyjádřením vybarvené části u obdélníku. Žáci měli totiž námitky, že to není čtverec, proto jeho části nemohou být stejné. Žáci podle mě nevěděli, že zlomek ve vztahu celku a části může vyjadřovat jak části stejné tvarem, tak i délkou, obsahem, hodnotou apod.

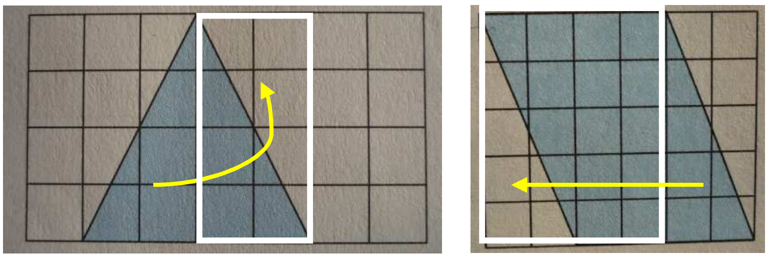
Cíle a předpoklady

Touto úlohou jsem chtěla u žáků podpořit, případně vytvořit představu zlomku jako vyjádření části, která je dána stejným obsahem.

Pomocí řešení žáků se budu snažit zodpovědět následující otázky:

- *Jaká část žáků vyjádří správně zlomkem vybarvenou část obdélníku?*

Předpokládala jsem, že úspěšnost řešit úlohu bude již vyšší než v první sérii úloh. Myslím si to proto, že se s tímto poznatkem žáci již seznámili. Žáci mají za sebou navíc učivo o obsahu čtyřúhelníků, kde jsme řešili úlohy ve čtvercové síti. Snažili jsme se rozdělovat a doplňovat různé geometrické tvary na obrazce, u kterých jsme snadno dopočítali obsah tj. obdélník, čtverec apod. (obr. 3.152).

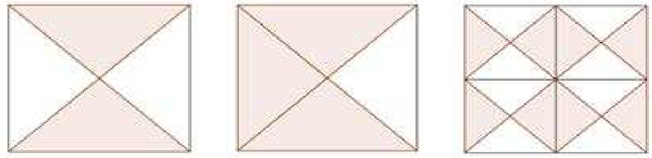


Obr. 3.152 Určení obsahu rovinných obrazců pomocí čtvercové sítě (Cihlář, Zelenka, 1998, str. 155 a 156)

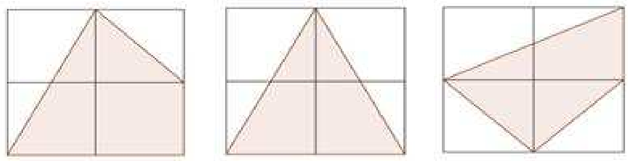
Do zadání úmyslně zadávám i možnost „nevím“, abych zjistila, kolik žáků tento typ úloh stále nechápe a předešla tak pouhým pokusům o řešení.

➢ *Který obdélník bude činit při určení vybarvené části největší potíže?*

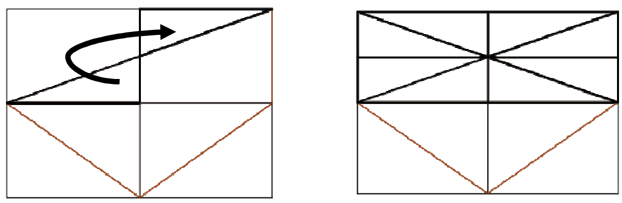
Přepokládala jsem, že pro žáky budou problematické následující obdélníky:

- 

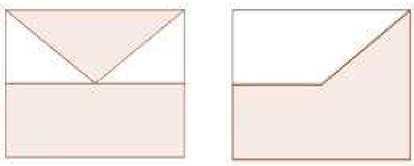
  Protože jsou obdélníky rozděleny na trojúhelníky, které nejsou shodné a žáci si neuvědomí shodnost obsahů, případně si nepomohou rozdělením na menší trojúhelníky (obr. 3.153).

- 

  Protože žákům bude chybět představa, že složením určitých částí získají menší obdélník (obr. 3.153 vlevo), nebo že jemnějším rozdělením obdélníku získám shodné trojúhelníky (obr. 3.153 vpravo).

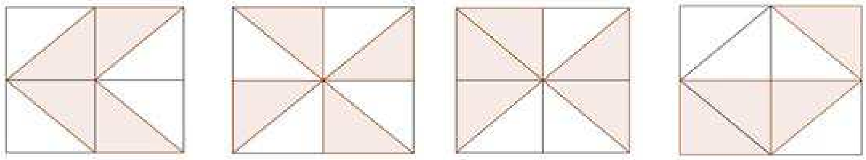


Obr. 3.153 Ověření stejného obsahu částí obdélníku pomocí dělení na trojúhelníky

- 

  Protože u těchto obdélníků není naznačené podrobnější rozdělení jednotlivých částí.

- Zbylé obdélníky jsou rozdělené na shodné trojúhelníky, proto jsem předpokládala správné určení vybarvené části.

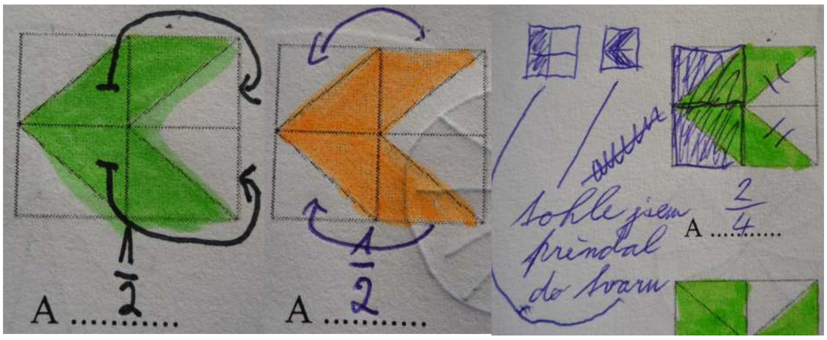


Zjištění a analýza dat

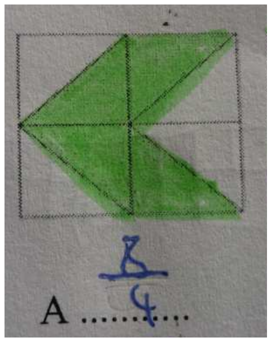
Žáci vybarvenou část v obdélnících pojmenovávali následovně:

<u>Obdélník A</u>

Správná řešení (obr. 3.154) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 28 žáků (2 slovy polovina), $\frac{4}{8}$ celkem u 8 žáků, $\frac{2}{4}$ celkem u 4 žáků.



Obr. 3.154 Správná řešení



Obr. 3.155 Chybné řešení

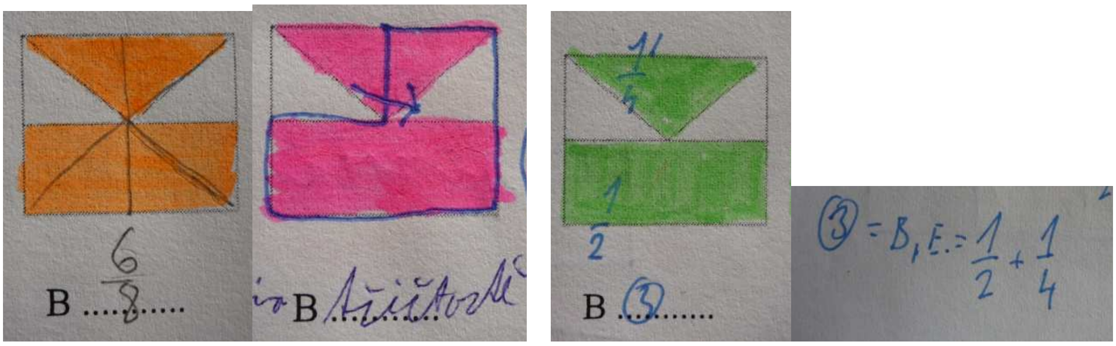
Chybné řešení bylo jedno, a to zlomek $\frac{8}{4}$ (obr. 3.155). Žák v celé úloze psal zlomek obrácený.

„Nevím“ uvedlo 5 žáků.

Celková úspěšnost byla 87 %. Dle předpokladu neměli žáci s řešením větší potíže.

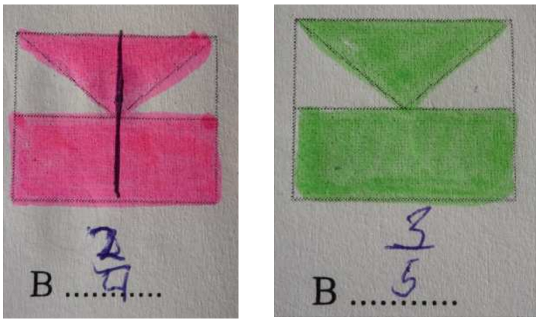
<u>Obdélník B</u>

Správná řešení (obr. 3.156) byla vyjádřena zlomky $\frac{3}{4}$ celkem u 12 žáků (1 slovy čtvrtina, 1 součtem) a $\frac{6}{8}$ celkem u 5 žáků.



Obr. 3.156 Správná řešení

Chybná řešení (obr. 3.157) byla vyjádřena zlomky $\frac{2}{4}$ celkem u 9 žáků, $\frac{3}{5}$ a $\frac{4}{6}$ po jednom žákovi. Tato chybná řešení měla společné to, že žáci vyjadřovali zlomkem nestejné části obdélníku. Na obr. 3.157 vpravo je obdélník rozdělen na 5 částí, které nejsou stejné. Další uvedené zlomky byly $\frac{1}{2}$ celkem 2 krát a $\frac{1}{5}$ jednou.



Obr. 3.157 Chybná řešení

„Nevím“ uvedlo 13 žáků.

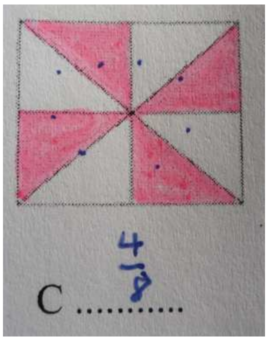
Celková úspěšnost byla 37 %. Dle předpokladu měli žáci s vyjádřením části již větší potíže.

<u>Obdélník C</u>

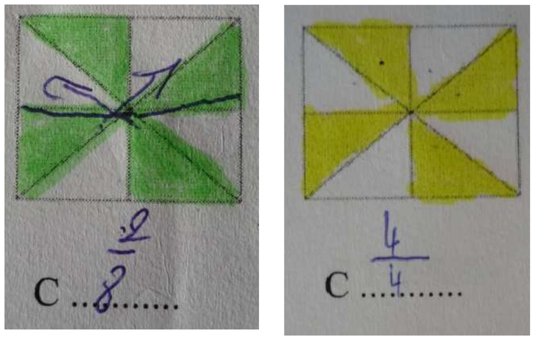
Správná řešení (obr. 3.158) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 23 žáků (2 slovy polovina), $\frac{4}{8}$ celkem u 13 žáků a $\frac{2}{4}$ celkem u 2 žáků.

Chybná řešení (obr. 3.159) byla vyjádřena zlomky $\frac{2}{8}$ celkem u 2 žáků, $\frac{4}{4}$ a $\frac{8}{4}$ po jednom žáku, jeden žák vyjádřil část součtem $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

„Nevím“ uvedli 3 žáci.



Obr. 3.158 Správné řešení



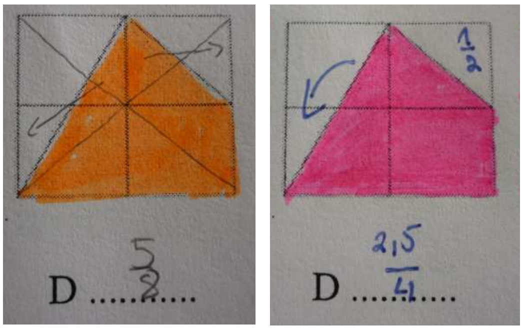
Obr. 3.159 Chybná řešení

Celková úspěšnost byla 83 %. Dle předpokladu neměli žáci s vyjádřením části větší potíže.

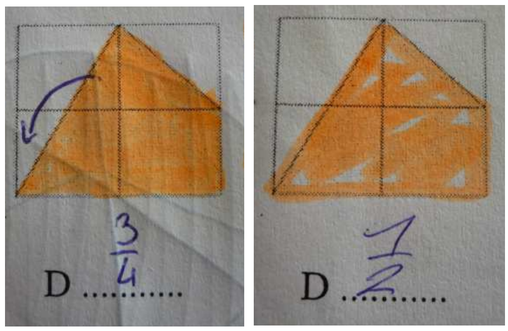
<u>Obdélník D</u>

Správná řešení (obr. 3.160) byla vyjádřena zlomky $\frac{5}{8}$ celkem u 6 žáků a $\frac{2{,}5}{4}$ celkem u 5 žáků.

Chybná řešení (obr. 3.161) byla vyjádřena zlomky $\frac{4}{7}$ celkem u 3 žáků, $\frac{4}{8}$ celkem u 2 žáků. Tito žáci uvažovali opět nestejné části obdélníku. V případě osmin si navíc rozdělili čtvrtinu obdélníku na dvě části, čímž získali osminy. Další uvedené zlomky byly $\frac{3}{4}$ celkem u 2 žáků, $\frac{1}{2}$ celkem u 2 žáků a po jednom žáku $\frac{4}{3}, \frac{5}{5}$.



Obr. 3.160 Správná řešení



Obr. 3.161 Chybná řešení

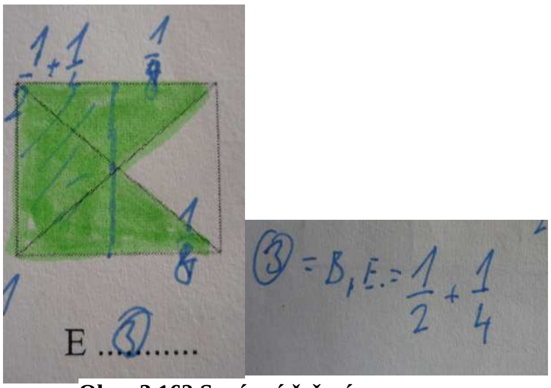
„Nevím“ uvedlo 24 žáků.

Celková úspěšnost byla 24 %. Dle předpokladu měli žáci s vyjádřením části potíže, nejspíš hlavně z důvodu tohoto rozdělení obdélníku.

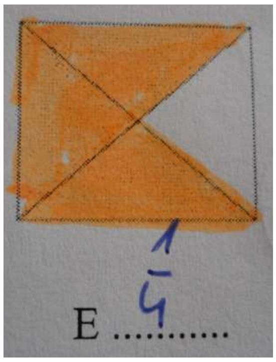
<u>Obdélník E</u>

Správné řešení (obr. 3.162) bylo vyjádřeno zlomkem $\frac{3}{4}$ celkem u 36 žáků, jeden žák vyjádřil část součtem $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Chybná řešení (obr. 3.163) byla vyjádřena zlomky $\frac{2}{4}$ celkem u 2 žáků, $\frac{1}{4}$ celkem u 2 žáků a $\frac{3}{5}$ jeden žák.



Obr. 3.162 Správné řešení



Obr. 3.163 Chybné řešení

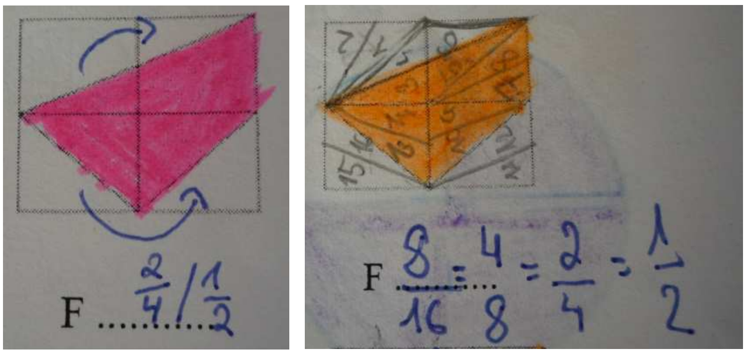
„Nevím“ uvedli 4 žáci.

Celková úspěšnost byla 80 %. Domnívám se ale, že tato úspěšnost nevypovídá o pochopení, že mají části stejný obsah. Nikdo z žáků se nepokusil o dělení částí obdélníku, aby tak naznačil shodné trojúhelníky a ukázal, že si vědom stejnosti částí. Pokud navíc vezmu v úvahu předešlé úlohy, hlavně tedy úlohu 3, žáci si stejnost částí neuvědomují. Tyty části obdélníku proto automaticky považovali za shodné.

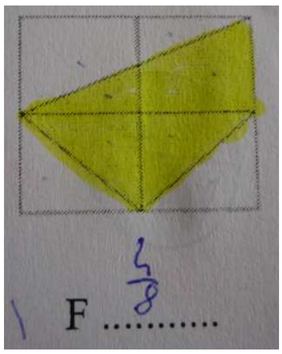
Obdélník F

Správná řešení (obr. 3.164) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 22 žáků, $\frac{2}{4}$ celkem u 4 žáků a $\frac{4}{8}$ celkem u 4 žáků.

Chybná řešení (obr. 3.165) byla vyjádřena zlomky $\frac{8}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1,25}{4}$ po jednom žákovi.



Obr. 3.164 Správná řešení



Obr. 3.165 Chybné řešení

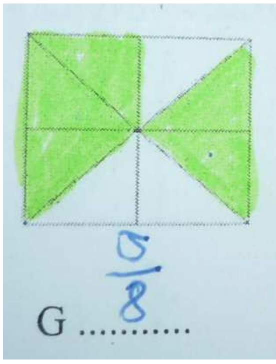
„Nevím“ uvedli 13 žáci.

Celková úspěšnost byla 65 %. Přesto, že jsem předpokládala, že s určením této vybarvené části budou mít žáci potíže, úspěšnost správného řešení byla poměrně velká. Obdélník D byl podobně rozdělený, ale žáci tak úspěšní při řešení nebyli.

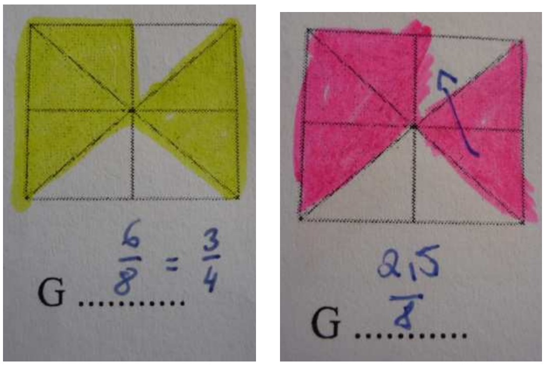
Obdélník G

Správné řešení (obr. 3.166) bylo vyjádřeno zlomkem $\frac{5}{8}$ celkem u 27 žáků.

Chybná řešení (3.167) byla vyjádřena zlomky $\frac{3}{4}$ celkem u 2 žáků, $\frac{2,5}{8}$ uvedl jeden žák (neuvědomil si, na kolik dílů dělil celek) a jeden žák uvedl zlomek $\frac{3}{5}$, kde nejspíš uvažoval opět nestejné části obdélníku.



Obr. 3.166 Správné řešení



Obr. 3.167 Chybná řešení

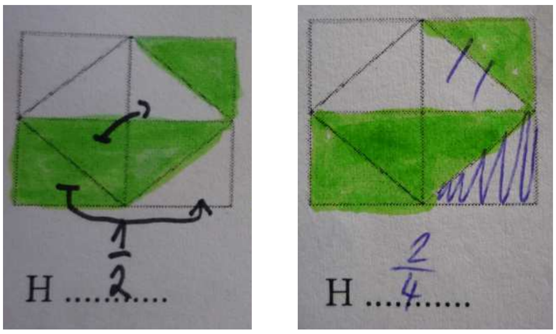
„Nevím“ uvedlo 14 žáků.

Celková úspěšnost byla 59 %. U tohoto obdélníku jsem očekávala vyšší úspěšnost, hlavně z důvodu dělení obdélníku na shodné trojúhelníky.

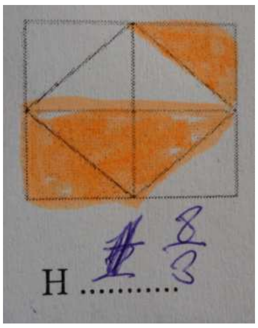
Obdélník H

Správná řešení (obr. 3.168) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 23 žáků, $\frac{4}{8}$ celkem u 13 žáků a $\frac{2}{4}$ jeden žák.

Chybná řešení (obr. 3.169) byla vyjádřena zlomky $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{3}$ po jednom žákovi.



Obr. 3.168 Správná řešení



Obr. 3.169 Chybné řešení

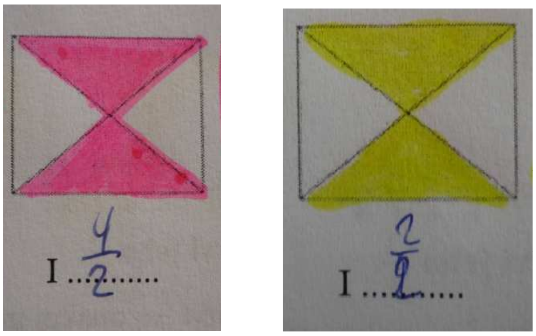
„Nevím“ uvedlo 7 žáků.

Celková úspěšnost byla 80 %. Zde jsem předpokládala vysokou úspěšnost, protože je obdélník opět dělený na shodné trojúhelníky.

Obdélník I

Správná řešení byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 21 žáků a $\frac{2}{4}$ celkem u 19 žáků.

Chybná řešení (obr. 3.170) byla vyjádřena zlomky $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$ po jednom žákovi.



Obr. 3.170 Chybná řešení

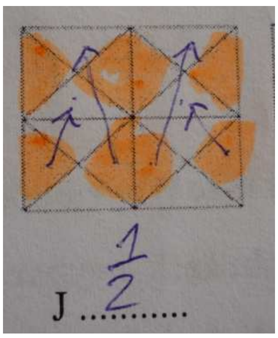
„Nevím“ uvedli 4 žáci.

Celková úspěšnost byla 87 %. Stejně jako u obdélníku E je tato úspěšnost dána hlavně tím, že žáci považovali, bez většího zamýšlení, že dané části obdélníku jsou stejné.

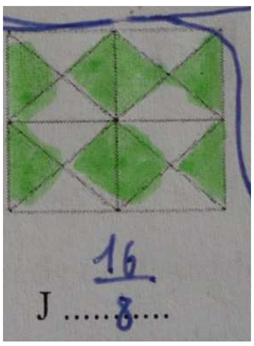
Obdélník J

Správná řešení (obr. 3.171) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 24 žáků, $\frac{8}{16}$ celkem u 10 žáků a $\frac{2}{4}$ celkem u 2 žáků.

Chybná řešení (obr. 3.172) byla vyjádřena zlomky $\frac{16}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ po jednom žákovi.



Obr. 3.171 Správné řešení



Obr. 3.172 Chybné řešení

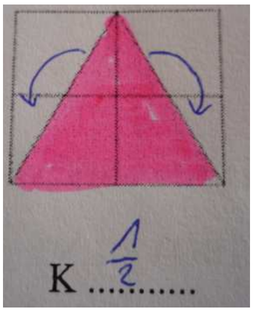
„Nevím“ uvedlo 7 žáků.

Celková úspěšnost byla 78 %. Stejně jako u obdélníku E a H je tato úspěšnost dána hlavně tím, že žáci považovali, bez většího zamýšlení, že dané části obdélníku jsou stejné.

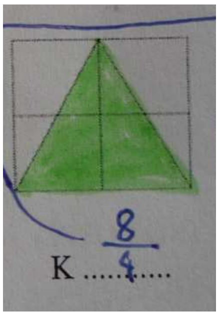
<u>Obdélník K</u>

Správná řešení (obr. 3.173) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 27 žáků, $\frac{4}{8}$ celkem u 6 žáků a $\frac{2}{4}$ celkem u 6 žáků.

Chybné řešení (obr. 3.174) bylo vyjádřeno zlomkem $\frac{8}{4}$ jedním žákem.



Obr. 3.173 Správné řešení



Obr. 3.174 Chybné řešení

„Nevím“ uvedlo 6 žáků.

Celková úspěšnost byla 84 %. Přestože jsem předpokládala, stejně jako u obdélníku D a F, že žáci budou mít s řešením potíže, byla úspěšnost vysoká. Vysvětluji si to tím, že řešení bylo vidět na první pohled nebo bylo ho možné poměrně snadno odvodit přeskládáním trojúhelníků.

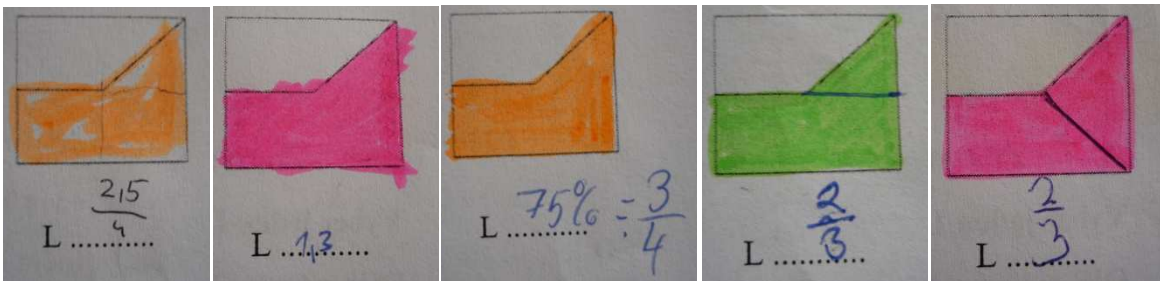
<u>Obdélník L</u>

Správná řešení byla vyjádřena zlomky $\frac{5}{8}$ celkem u 11 žáků a $\frac{2{,}5}{4}$ jedním žákem.

Chybná řešení (obr. 3.174) byla vyjádřena zlomky $\frac{1}{2}$ celkem u 8 žáků, kde žáci uvažovali nestejné části obdélníku, který je rozdělen právě na dvě části. Nestejné části uvažovali i další dva žáci, kteří uvedli zlomek $\frac{2}{3}$. Ti si rozdělili ještě vybarvenou část obdélníku na dvě části, čímž získali třetiny. Další uvedená řešení byla $\frac{2}{1}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} = 75\%$, 1,3.

„Nevím“ uvedlo 20 žáků.

Celková úspěšnost byla 26 %. Nízkou úspěšnost jsem očekávala, protože obdélník není dělený na více částí. Toto rozdělení bylo tedy na žácích. I tak bych předpokládala, že se žáci inspirují předchozími obdélníky a o nějaké rozdělení se pokusí, to se ale nepotvrdilo.



Obr. 3.175 Chybná řešení

Protože velká část žáků nevytvářela skupiny, ale pouze popsala části obdélníku zlomkem, skupinami jsem se tedy ve výzkumu nezabývala.

Dílčí závěry

U některých obdélníků jsem očekávala, že žáci snadno určí, jaká část obdélníku je znázorněna. Byly to části, které byly znázorněné v obdélnících A, C, G, H. Žáci části v obdélnících A, C a H byly schopni žáci pojmenovat zlomkem úspěšně z více jak 80 %. Trochu nižší úspěšnost byla u pojmenování části v obdélníku G, která tak činila necelých 60 %. Žáci často psali odpověď, že „neví“.

U dalších částí znázorněných v obdélnících jsem předpokládala, že žáci budou mít s jejich pojmenováním problémy. Hlavně tak u částí v obdélnících B, D, F, K a L, protože jsou to obdélníky dělené na nestejné části a tak museli žáci při řešení přemýšlet. U pojmenování částí v obdélních B, D a L byla úspěšnost nižší než 40 %. Naopak u obdélníků F a K si žáci počínali při řešení velmi dobře a jejich úspěšnost tak byla 65 % a 84 %.

Žáci také správně určovali části znázorněné v obdélnících E, I a J. Domnívám se, že to ale nebylo proto, že si uvědomují stejný obsah částí. Pouze vyjádřili zlomkem kolik částí je vybarvených a nezabývali se velikostí částí. V souvislosti s předchozími úlohami, hlavně s úlohou 3, jsem si touto skutečností téměř jistá.

Tendence vyjadřovat zlomkem nestejně velké části se projevila také na několika dalších řešeních, která jsem uvedla ve zjištění a analýze dat této části.

Protože žáci většinou neutvářeli skupiny obdélníků se stejnými částmi, nedovedu posoudit, zda se projevila neznalost ekvivalentních zlomků.

Také si myslím, že se mi nepovedlo dosáhnout toho, aby si žáci uvědomili, že zlomek může vyjadřovat části stejné nejen tvarem, ale také velikostí, délkou, a hlavně obsahem, což byl hlavní úkol této úlohy. Žáci se tak pokoušeli o řešení přeskládáním částí obdélníku, než aby se soustředili na stejnost obsahů.

3.4.5 Shrnutí druhé fáze výzkumu

V první úloze měli žáci prokázat, zda ovládají ikonickou reprezentaci a umí si jí propojit s reprezentací symbolickou. Až na pár výjimek žáci byli schopni ikonické reprezentace a využívali ke znázornění zejména model „kruh“ a model „obdélník“.

Velmi malá část žáků znázorňovala zlomky na jiných než výše zmíněných modelech. Objevila se řešení, kde žáci ilustrovali zlomky na pravidelném pětiúhelníku, na počtu láhví uložených v lednici, na množství limonády ve sklenici nebo částech těla, které z hlediska nestejnosti částí nelze považovat za správné vyjádření zlomku.

Žáci znázorňovali zlomky s lichým jmenovatelem na kruhu, kde toto řešení bylo pouze přibližné či nepřesné. Naopak žáci také znázornili zlomky tak, že si zvolili jeden dílek a z něho následně vybudovali celý model, který si představovali jako čokoládu. Nepředpokládala jsem, že se najde tak velká část žáků, kteří tento postup využijí.

Chybná řešení souvisela z velké části s dělením na nestejné části.

V další úloze jsem sledovala, zda žáci ke znázornění využijí vhodný model. To znamená, že budou znázorňovat zlomek na takovém modelu, který lze snadno a poměrně přesně dělit na stejné části.

Na modelu „nerozdělený obdélník“ žáci dle očekávání většinou znázornili zlomky $\frac{3}{4}$ (cca 40 % žáků) a $\frac{2}{3}$ (cca 30 % žáků). V neděleném kruhu pak zlomek $\frac{3}{4}$ (cca třetina žáků), ale také zlomky $\frac{2}{3}$ (cca třetina žáků) a $\frac{1}{5}$ (necelá třetina žáků), kde toto dělení na lichý počet částí bylo nepřesné a v některých případech na první pohled nesprávné. Dělený kruh na šest částí žáci z více jak 85 % použili ke znázornění zlomku $\frac{1}{6}$. Rozdělený obdélník byl pro znázornění zlomků pro žáky nejproblematičtější. Necelých 50 % žáků na tomto modelu znázornila zlomek $\frac{1}{5}$, pak také zlomek $\frac{3}{4}$ (necelých 25 % žáků) a zbývající žáci se chybně pokoušeli znázornit zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{6}$.

Chyby, které se vyskytovaly v této úloze, byly způsobeny hlavně dělením na nestejné části. U rozdělených modelů se objevila tendence znázornit zlomky tak, že žáci vybarvili tolik částí, kolik byl čitatel nebo jmenovatel zlomku. U obdélníkového modelu pak žáci znázorňovali zlomky jako na čtvercové síti a tak si ohraničili například 4 dílky a 3 z nich vybarvili.

Třetí úloha pak odhalila, že žáci pracují s takovýmto typem úlohy naprosto mechanicky. Pouze tři žáci si uvědomili, že v obrázku nejsou stejné části a tak obrázek nemůže vyjadřovat zlomek. V úloze se vyskytl také obrázek obdélníku, ke kterému žáci měli přiřadit zlomek $\frac{3}{5}$. Necelých 70 % žáků ale uvedla ekvivalentní zlomek $\frac{6}{10}$ a někteří dokonce připsali komentář, že požadovaný zlomek v nabídce není.

Z této úlohy tak vyplývají dvě znepokojující zjištění. Žáci si neuvědomují, že zlomkem lze vyjádřit pouze stejné části a také že žáci nechápou ekvivalentnost zlomků.

Domnívám se, že úloha navíc ovlivnila žáky v opačném smyslu, než jsem zamýšlela. Žáci modelovali zlomky na částech, které nebyly stejné právě v inspiraci s touto úlohou.

Poslední úloha pak měla za úkol, aby si žáci uvědomili, že části mohou být stejné i obsahem. Tohoto cíle se mi nejspíš nepovedlo dosáhnout, žáci řešili úlohu spíše přesouváním trojúhelníků tak, aby vznikla část, kterou umí pojmenovat zlomkem. V této úloze se také projevilo, že žáci popisují zlomkem i nestejně velké části.

Celkově se ukázalo, že žáci neumí ekvivalentní zlomky. Ani úlohy, které byly založené na ikonické reprezentaci a tak měly vytvořit představy zlomku, tuto skutečnost příliš nezměnili.

Budování představ založené na již zmíněné reprezentaci nepřispělo k tomu, aby si žáci uvědomili, že zlomek vyjadřuje vztah celek a část, kde části musí být „stejné“ s ohledem na tvar, velikost, obsah, hodnotu apod.

Ukázalo se také, že nejbližší je žákům modelování zlomku na kruhu nebo obdélníku, bez ohledu na nepřesné dělení. Diskrétní modely v podobě množství kuliček nebo jiných předmětů uvedl pouze jeden žák. Nedovedu ale říci, jaké další modely žáci ve své hlavě evidují a zda je umí použít. To by mohlo být námětem dalšího zkoumání.

Po zpracování druhé fáze výzkumu jsem si uvědomila, že první a druhá fáze obsahovala pracovní listy s velkým množství úloh. Žáci pracovali většinou celou hodinu, což pro ně bylo náročné. Některá řešení, která jsem uvedla v kapitolách Zjištění a analýza dat, mi nebyla jasná a nevěděla jsem, jak žáci nad řešením přemýšleli.

Z těchto důvodů jsem do výuky zařadila úlohy typu concept cartoons, díky kterým zjišťuji miskoncepce žáků. Nad úlohami vedeme s žáky diskuze, která mi pomáhá objasnit, jak nad řešením úloh žáci přemýšlí.

3.5 Třetí fáze výzkumu

Třetí fáze výzkumu byla uskutečněná v dubnu 2016. Úlohy jsem žákům zadala ve formě concept cartoons v podobě pracovních listů. Žáci pracovní listy vždy s jednou úlohou řešili na začátku hodiny místo „matematické rozcvičky“. Třetí fáze výzkumu tak proběhla ve třech etapách. (V důsledku tří fází neuvádím celkový počet žáků, kteří úlohy řešili, protože se na vyplňování pracovních listů podílel vždy jiný počet žáků.)

Pracovní listy žáci vypracovávali v rámci opakování učiva o zlomcích. Opakování bylo zařazeno před učivo o rovnicích se zlomky a s nimi souvisejícími slovními úlohami.

Nad úlohami jsme následující hodinu matematiky vedli diskuzi. Žáci tak měli možnost vyjádřit se k daným řešením. Ode mě získali zpětnou vazbu o tom, kolik žáků řešilo úlohu správně či chybně.

Souvislost s předchozím výzkumem

V průzkumném šetření jsem zjistila, že žáci neumí identifikovat celek ve slovní úloze (viz Zlomek jako operátor).

Do první fázi výzkumu jsem zařadila tři typy úloh (viz úloha Tyč sem, tyč tam). U každého typu úlohy měli žáci dopočítat jeden ze tří údajů, tzn. celek, část nebo operátor. V řešení těchto úloh se mi nepovedlo zjistit, zda mají žáci s nalezením celku problém.

Proto jsem v této třetí fázi výzkumu použila úlohy, které jsou zaměřeny právě na identifikaci celku, tj. na zlomek ve vztahu celku a části. Správné řešení úloh tedy spočívá v určení celku.

V předešlých výzkumných fázích jsem si všimla toho, že velká část žáků se o řešení úloh ani nepokusila. Protože žáci, kteří se podíleli na tomto výzkumu, patří z hlediska prospěchu spíše k průměrným až podprůměrným, zadala jsem jim úlohy v podobě concept cartoons.

Úlohy ve formě concept cartoons jsem zařadila do výuky již před výzkumem. Žáci tedy před třetí fází výzkumu takto zadané úlohy již řešili. Sama jsem se ve výuce přesvědčila, že úlohy v této podobě žáky motivují k bádání nad úlohou, k činnosti a přemýšlení, a také k argumentaci.

Domnívám se, že tato forma zadání úloh je pro ně z hlediska hledání správného řešení přístupnější, než kdyby úlohy měli žáci vyřešit sami. Žáci se mohou zamyslet nad úlohami, které by mnozí měli problém bez nabídky řešení sami řešit. Z tohoto důvodu jsem úlohy v podobě concept cartoons použila i do výzkumu.

Úlohy byly žákům zadány jednotlivě, protože jsem si na základě předešlých fází výzkumů uvědomila, že se žáci nejsou schopni soustředit nad větším množstvím úloh celou hodinu. Proto jsem je aplikovala do hodin místo „matematické rozcvičky“.

Cíle

Cílem úloh je vzbudit v žácích uvažování a přemýšlení nad danými řešeními. Také aby hledali souvislosti a dokázali tak určit, zda jsou tvrzení dětí na obrázku pravdivá či ne. Úlohy ve formě concept cartoons žákům předkládají možná řešení. Úkolem žáků je zamyslet se nad uvedenými tvrzeními, označit správné a odůvodnit, proč jsou ostatní nesprávné. Domnívám se, že by úlohy na toto téma zadané v běžné formě příliš úspěšně samostatně neřešili. To vyplývá z předešlých fází výzkumu. Toto podobou úloh jsem chtěla docílit toho, aby se o řešení pokusila většina žáků.

Řešení úloh by mi mělo pomoci zjistit, zda došlo k posunu znalostí a najít odpovědi na otázky:

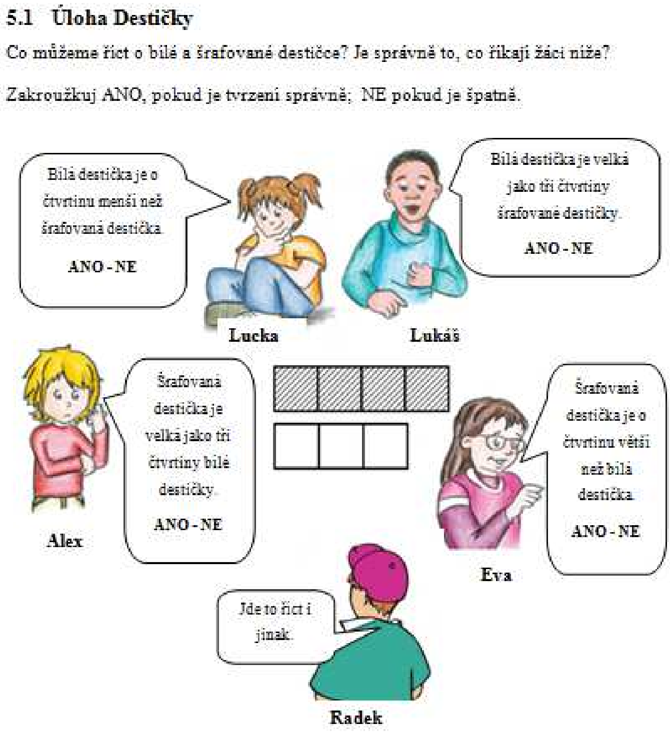
- *Jak chápou žáci podstatu zlomku jako vztahu celku a části?*
- *Jaká část žáků uvede správné řešení zadaných úloh?*

3.5.1 Úloha Destičky

Zadání úlohy

V úloze (viz přílohy Úloha Destičky) je celkem 5 dětí, které se vyjadřují ke dvěma destičkám umístěným uprostřed (obr. 3.176)[23]. Úkolem žáků je rozhodnout, která tvrzení jsou pravdivá a která nepravdivá. U výpovědí dětí mají žáci zakroužkovat ANO nebo NE. Žák má navíc možnost, vyjádřit své vlastní tvrzení o dané situaci, ztotožnit se s názorem Radka na obrázku a níže popsat své tvrzení.

[23] Původní úloha je od M. Tiché (konzultace). Tuto úlohu jsem doplnila o možnosti ANO – NE.



Obr. 3.176 Zadání úlohy

Předpoklady

Na základě výzkumů a svého předešlého šetření jsem se snažila zjistit, zda budou žáci stále chybovat v určení celku. Tuto domněnku jsem postavila na základě toho, že šrafovaná destička je dělená čtvrtiny a bílá destička na třetiny.

Domnívala jsem se, že žáci při řešení úlohy budou uvažovat například následovně: zvětší-li bílou destičku o čtvrtinu, bude bílá destička stejně dlouhá jako šrafovaná, tj. přibude k bílé destičce jeden dílek (čtvereček). Tato úvaha ale není v pořádku, protože jeden dílek (čtvereček) z bílé destičky představuje třetinu.

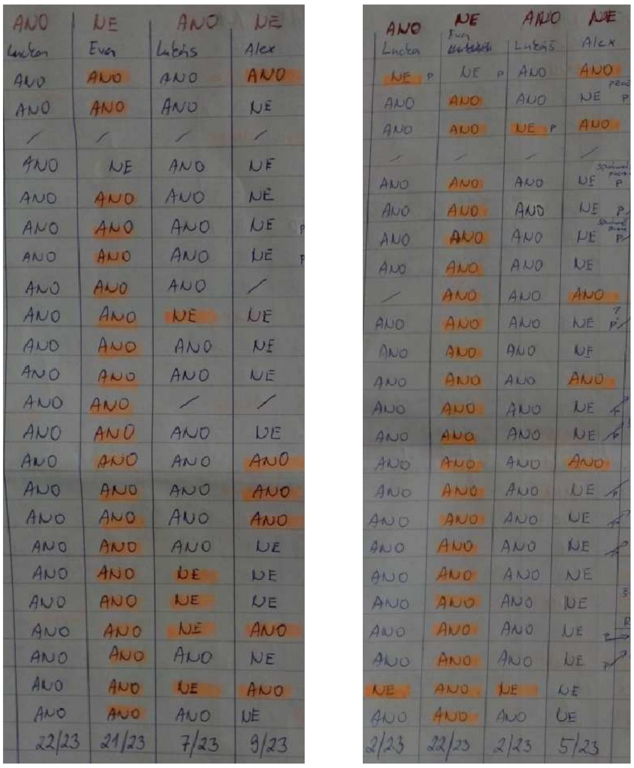
S předešlou domněnkou souvisí rozhodování žáků o pravdivosti výroků. Domnívala jsem se že tvrzení, která porovnávají velikosti destiček, tj. větší/menší než…, budou žáci označovat buď obě tvrzení za správná, nebo obě za chybná. Např. pokud žák u Lucky zakroužkuje ANO, tak u Evy zakroužkuje také ANO, protože obě dívky porovnávají velikosti destiček. Tato chybná úvaha vyplývá z toho, že si žáci neuvědomí, ze kterého celku uvažují danou část. Čtvrtina z bílé destičky není jeden dílek, jak budou žáci pravděpodobně předpokládat.

Dále jsem se domnívala, že většina žáků správně rozhodne o pravdivosti tvrzení, která konstatují velikosti destiček, tj. destička je velká jako.

Zjištění a analýza dat

Úlohu řešilo celkem 46 žáků.

Řešení úlohy jsem si zapsala do tabulek (obr. 3.177). V tabulkách jsem úmyslně umístila vedle sebe tvrzení, která porovnávají délky destiček (Lucka a Eva) a tvrzení, která konstatují velikosti destiček (Lukáš a Alex). Díky tomu jsem mohla lépe potvrdit či vyvrátit své předpoklady.



ANO	NE	ANO	NE
Lucka	Eva	Lukáš	Alex
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
/	/	/	/
ANO	NE	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	/
ANO	ANO	NE	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	/	/
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	NE	NE
ANO	ANO	NE	NE
ANO	ANO	NE	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	NE	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
22/23	21/23	7/23	9/23

ANO	NE	ANO	NE
Lucka	Eva	Lukáš	Alex
NE P	NE P	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE P
ANO	ANO	NE P	ANO
/	/	/	/
ANO	ANO	ANO	NE P
ANO	ANO	ANO	NE P
ANO	ANO	ANO	NE P
ANO	ANO	ANO	NE
/	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE P
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	ANO
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
ANO	ANO	ANO	NE
NE	ANO	NE	NE
ANO	ANO	ANO	NE
2/23	22/23	2/23	5/23

Obr. 3.177 Data z řešení úlohy

Přesto, že jsem se ve výuce zaměřila na posílení vnímání celku a části ukázalo se, že žáci opravdu většinou označovali obě tvrzení (Lucka a Eva), která porovnávala velikosti destiček, jako pravdivá, a to ve 41 případech ze 46.

Rozhodnout o pravdivosti tvrzení, která konstatovala délky destiček, nebylo pro žáky tak problematické. Více jak dvě třetiny žáků určily správné odpovědi.

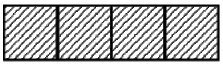
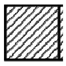
Žádný žák nevyužil možnost vyjádřit své vlastní tvrzení o situaci na obrázku.

<u>Rozhovory</u>

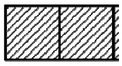
Zjištění vyplývající z úlohy byla pro mě velmi zajímavá. Protože jsem chtěla více porozumět tomu, jak žáci nad úlohou přemýšleli, uskutečnila jsem po zpracování dat této úlohy polostrukturované rozhovory se dvěma žáky. Rozhovory se konaly ještě před tím, než jsme s žáky vedli diskuzi nad řešeními.

Pro rozhovory jsem si vybrala dva žáky, jejichž řešení bylo chybné. Rozhovory probíhaly s každým žákem zvlášť. Z těchto rozhovorů jsem pořídila audio záznam. Výpověďmi žáků jsem se následně podrobněji zabývala a hledala příčiny chyb, kterých se žáci dopustili. V rozhovoru jsem žákům nejdříve kladla připravené otázky, abych zjistila, jak chápou zlomek ve vztahu celku a části. K otázkám měli žáci k dispozici nastříhané kusy destiček, aby si na nich mohli mnou zadané úkoly znázornit. Poté jsme diskutovali nad řešením úlohy z pracovního listu.

Otázky, které jsem žákům pokládala, byly následující:

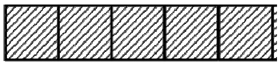
1. Celek je  . Jak bys zlomkem vyjádřil tuto část? 

   (oba žáci v rozhovoru správně odpověděli, že je to $\frac{1}{4}$)

2. Celek je stejný. Jak bys pojmenoval tuto část z daného celku? 

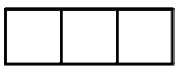
   (oba žáci odpověděli správně – jeden odpověděl, že je to $\frac{1}{2}$ a druhý, že jsou to $\frac{2}{4}$)

3. Celek je stejný. Jak bys zlomkem vyjádřil tuto část z daného celku?

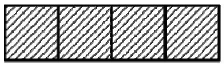
   (oba žáci odpověděli, že je to $\frac{5}{4}$) 

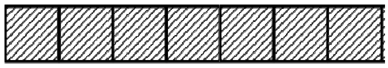
4. Celek je stejný. Zvětši celek o polovinu.

   (oba žáci správně zvětšili celek o dva díly)

Stejné otázky (úkoly) jsem oběma žákům zadala i na druhý celek  . Žáci opět odpovídali správně.

Problém nastal až u zadání:

Zvětši celek o třetinu. 

Oba žáci považovali za zvětšení celek 

Žáci tímto zvětšili celek tak, že přidali tři díly (čtverečky) k původnímu celku. Třemi díly tak vyjádřili třetinu. Tato miskoncepce se již objevila u úloh v předešlých fázích výzkumu (např. Úloha 2 v druhé fázi výzkumu).

Následně jsem se žáky řešila úlohu z pracovního listu.

Z rozhovoru s jedním ze žáků vyplynulo:

Já: Co tohle? Šrafovaná je o čtvrtinu větší než bílá.

Žák1: Takže, kdybych tady přidal čtvrtinu (ukazuje na bílou destičku), tak by to bylo stejný jako šrafovaná.

Já: Takže když zvětším o čtvrtinu bílou…

Žák1: Tak by byla stejně velká jako šrafovaná…

Následně jsem žáka požádala, aby mi ukázal, kolik je čtvrtina z bílé destičky. Žák ukázal na jeden dílek z bílé destičky (jeden ze čtverečků). Jako vysvětlení uvedl následující větu:

Žák1: Protože to jsou tři, a když přidám jeden, tak jsou to čtyři.

Druhý žák mi vysvětlil, jak chápal zadání po té, co si díky předchozím otázkám, které jsem mu pokládala, uvědomil, jaký byl vztah mezi destičkami:

Žák2: Já jsem právě myslel, že to je to... že se to... Jsem nečekal, že to budou myslet, že to je všechno z jedný třetiny a z jedný čtvrtiny... že tady to myslí jako jednu čtvrtinu a tady jako jednu třetinu. Jsem myslel, že to myslí jako tři čtvrtiny.

Já: Že tenhle obrázek je vyjádření tří čtvrtin? (Ukazuji na bílou desku.)

*Žák2: No. Že to jsou tři čtvrtiny (ukazuje na bílou destičku) [*Tady se jasně ukazuje, že čtvereček je pro žáky v obou případech jedna čtvrtina.*] a tady čtyři čtvrtiny (ukazuje na šrafovanou destičku) a že to má bejt v těch čtvrtinách. Právě, že jsem tady nikde neviděl třetiny...*

Dílčí závěry

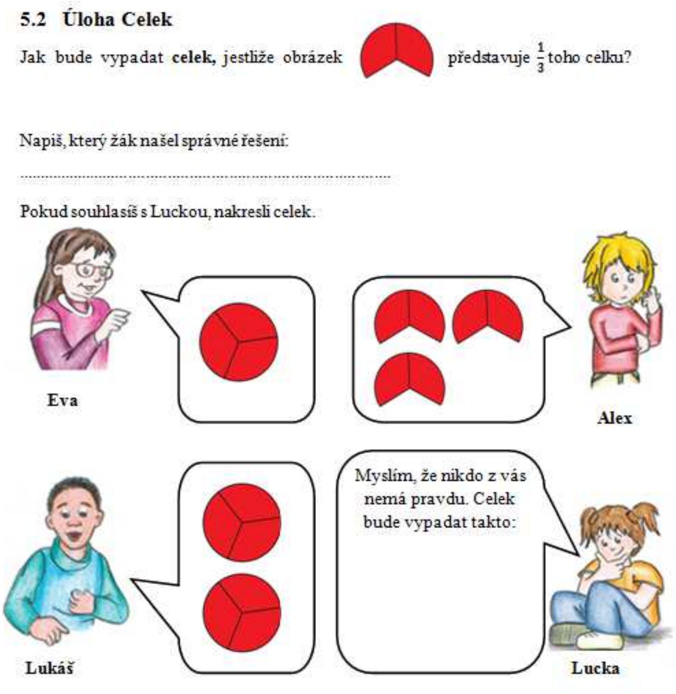
Potvrdily se mé předpoklady, že při rozhodování o správnosti tvrzení budou žáci úspěšnější u konstatování délek destiček než u porovnávání délek destiček. Dále se potvrdilo, že žáci budou chybovat v určení části celku. Domnívala jsem se, že u bílé destičky žáci budou vnímat jeden dílek (čtvereček) jako čtvrtinu, to se také potvrdilo. Z těchto skutečností vyplývá, že žáci mají stále problém s uvědoměním si celku. To pro další výuku znamená, že se identifikováním celku v úlohách musím ještě více v hodinách matematiky věnovat.

Při rozhovorech se navíc znovu objevila miskoncepce, při které žáci vyjádřili konkrétně 1/3 jako tři díly. Tato miskoncepce se již projevila u Úlohy 2 ve druhé fázi výzkumu.

3.5.2 Úloha Celek

Zadání úlohy

V úloze (viz přílohy Úloha Celek) je zadaná část, která je vyjádřená ikonickou reprezentací, a je dán také operátor. Žáci mají určit, které z dětí na obrázku nabízí správné řešení dané úlohy (obr. 3.178)[24]. Žáci mají také možnost uvést vlastní řešení. Úkolem žáků je také popsat, jak došly děti na obrázku k řešením, která žák považuje za chybná.



Obr. 3.178 Zadání úlohy

[24] Úloha je převzatá z výzkumu Tichá, Macháčková (2006, str. 16). Tuto úlohu jsem přepracovala do formy concept cartoons, a jako řešení jsem uvedla mnou předpokládaná řešení žáků.

Předpoklady

Předpokládala jsem, že někteří žáci chybně pochopí úlohu. V důsledku toho pak budou považovat za správné řešení takový obrázek, ve kterém lze danou část, tj. jednu třetinu (vyjádřenou v zadání zlomkem) znázornit. V tomto případě by byla správná všechna řešení.

Také jsem se domnívala, že žáci uvedou jen jedno ze dvou správných řešení, to znamená jen řešení Lukáše nebo jen řešení Alexe. Je možné, že žáci budou považovat řešení Alexe, za neúplné ve smyslu, že části celku nejsou spojené.

Dále jsem předpokládala, že někteří žáci budou mít problém s celkem, který se skládá z více kruhů, tj. s řešením Lukáše a Alexe. Usuzovala jsem to z toho důvodu, že žáci nemají moc zkušeností s ikonickou reprezentací nepravého zlomku. Proto budou tíhnout ke stereotypu a označí jako správné řešení úlohy řešení Evy.

Původní zadání úlohy jsem přepracovala do formy concept cartoons a na základě předpokladů do nabídky řešení úlohy uvedla právě tyto obrázky kruhů.

Zjištění a analýza dat

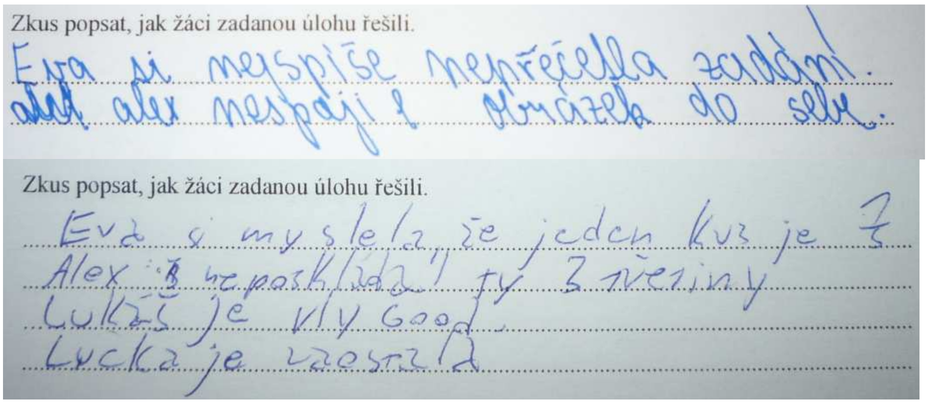
Úlohu řešilo celkem 47 žáků.

Řešení žáků jsem shrnula v tab. 3.1.

Uvedená řešení	**Počet žáků**
Alex a Lukáš	14
Lukáš	13
Eva	8
Eva a Lukáš	5
Alex	3
Lucka	2
Lukáš, Alex, Eva	1
Eva, Alex	1

Tab. 3.1 Data z řešení úlohy

Celkem 32 % žáků uvedlo správná řešení v podobě obrázků Lukáše a Alexe. Dalších 30 % žáků správně určilo jako správné řešení pouze Lukáše. Z komentářů žáků je zřejmé, že řešení Alexe nebrali v úvahu, protože „jeho“ celek nebyl spojený do celých kruhů (obr. 3.179).



Obr. 3.179 Komentáře žáků

Řešení Alexe, jako jedinou možnost správného řešení, uvedli 3 žáci ze 47. Celkově ale 68 % žáků určilo alespoň jedno ze správných řešení.

Celkem velká část žáků (8 ze 47) uvedla jako správný výsledek řešení Evy. Žáci nejspíš pracovali se třetinou a s modelem, který jim byl blízký, což jsem předpokládala.

Lucku, a tedy své řešení, uvedli dva žáci (obr. 3.180).

Obr. 3.180 Řešení Lucky

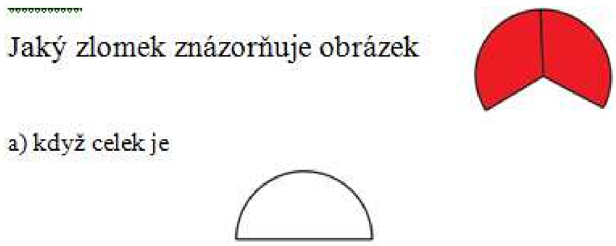
Žák, jehož řešení je na obr. vpravo, nejspíš uvažuje celek $\frac{3}{3}$. Když z celku odebere $\frac{1}{3}$, vznikne část, která byla zadaná.

Pouze jeden žák uvedl jako správná řešení všechny tři možnosti. Což odpovídá předpokladu, že žáci budou hledat celek, ve kterém lze znázornit zadanou část.

Dílčí závěry

Dvě třetiny žáků identifikovaly alespoň jedno správné řešení. Celkem 10 žáků nebralo v úvahu ani jedno správné řešení (Alexe a Lukáše) a uvedli chybné řešení Evy nebo řešení Lucky, kde znázornili svá řešení, která byla nesprávná.

Domnívám se, že žáci byli při řešení této úlohy celkem úspěšní, protože zadaná část byla menší než celek. Zajímalo by mě, jak by žáci řešili úlohu, kde by stejný obrázek z této úlohy představoval zlomek 4/3. Úkolem žáků by bylo určit celek. Nebo také jak by řešili úlohu na obr. 3.181. Myslím, že by měli s identifikací celku větší potíže, než v úloze Celek.

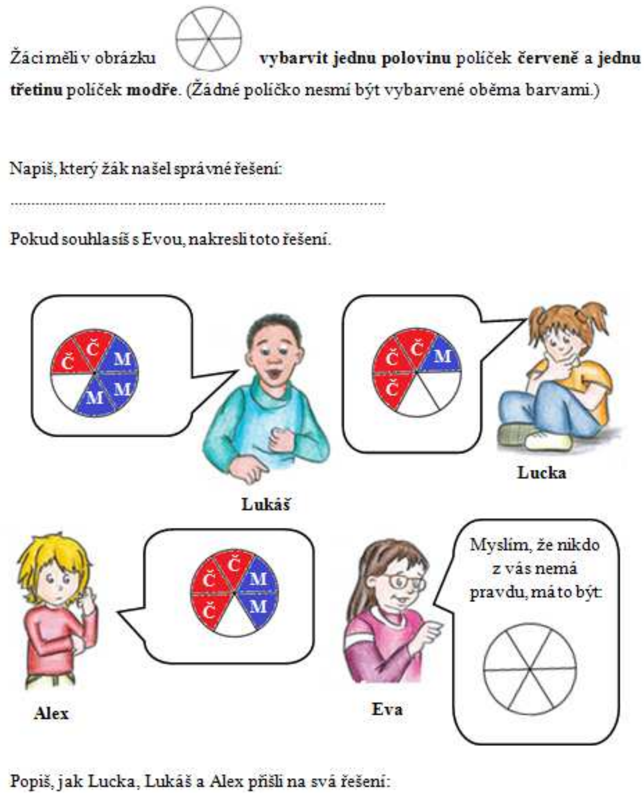


Obr. 3.181 Zadání úlohy

3.5.3 Úloha Vybarvování

Zadání úlohy

Žáci měli v úloze (viz Přílohy Úloha Vybarvování) zadaný rozdělený kruh na šest stejných částí a jejich úkolem bylo, najít správné řešení mezi řešeními dětí na obrázku (obr. 3.182)[25]. Správné řešení spočívalo v tom, že žáci určí obrázek, ve kterém jsou správně znázorněné části, a to polovinu červeně a třetinu modře. Žáci mají opět možnost, uvést vlastní řešení.



Obr. 3.182 Zadání úlohy

[25] Úloha je inspirovaná úlohou z výzkumu Tichá, Macháčková (2006). Úlohu jsem předělala do formy concept cartoons a mezi řešení uvedla nejčastější miskoncepce.

I v této úloze mají žáci popsat, proč považují některá řešení za chybná.

Při řešení úlohy se žáci dotazovali, zda je úloha myšlená tak, že nejdříve vybarví jednu část a pak druhou část zbytku. Na tyto otázky jsem reagovala pokynem, aby přemýšleli a přečetli si pořádně zadání.

Předpoklady

Na základě zjištění, která jsem nabyla při zpracování teoretické části, jsem chtěla zjistit, zda někteří žáci budou za správné označovat řešení, kde je znázorněna polovina jako dvě vybarvené části a třetina jako tři vybarvené části. Tj. žáci budou uvažovat, že jmenovatel zlomku udává počet vybarvených dílů. Tyto tendence se projevily již ve druhé fázi výzkumu (Úloha 2) a také v rozhovoru ve třetí fázi výzkumu (Úloha Destičky).

Dále jsem předpokládala, že poměrně velká část žáků, bude nad řešením úlohy uvažovat tak, že vybarví polovinu celku a následně třetinu z ještě nevybarvené části tohoto celku. Žáci by v průběhu řešení uvažovali nejdříve polovinu z daného celku a potom třetinu z jiného celku než byl zadaný, tj. z celku, který představovala ještě nevybarvená část. Tento předpoklad se projevil již v dotazech, když žáci úlohu řešili.

Původní zadání úlohy jsem opět přepracovala do formy concept cartoons a na základě předpokladů do nabídky řešení úlohy uvedla právě tyto obrázky.

Také jsem zadání upravila tak, že jsem zlomky vyjádřila slovně. Protože jsem v přešlých úlohách zlomky zadávala pouze v symbolickém zápisu. Slovní vyjádření vyžaduje od žáků, aby si uvědomili, že polovina je jedna část ze dvou stejných částí a třetina je jedna část ze tří částí. Nebo si žáci zlomky mohou zapsat symbolicky a následně řešit úlohu.

Zjištění a analýza dat

Celkem úlohu řešilo 43 žáků.

Řešení žáků jsem shrnula v tab. 3.2.

Uvedená řešení	**Počet žáků**
Lucka	19
Alex	18
Eva	3
Alex a Lucka	2
Lukáš a Lucka	1

Tab. 3.2 Data z řešení úlohy

Téměř polovina žáků uvedla jako správné řešení postup, kterým nejdříve znázorní polovinu a pak třetinu z ještě nevybarvené části. Celkem toto řešení považovalo za správné 44 % žáků. Žáci si neuvědomují, že je celek po celou dobu znázorňování stále stejný. Takže polovinu i třetinu musí vyznačovat ve stejném celku.

Celkem 42 % žáků pak uvedlo správné řešení.

Své řešení znázornili tři žáci (obr. 3.183). První žák znázornil správně polovinu, ale třetinu pak znázornil vybarvením tří dílů (obr. 3.183 vlevo). Projevila se tak závažná miskoncepce, kterou jsem uvedla v předpokladech. V druhém obr. žák znázornil pouze polovinu.

Obr. 3.183 Chybná řešení

Kombinaci Lucky a Alexe uvedli žáci, kteří se nemohli rozhodnout, zda znázornit třetinu z daného celku nebo z ještě nevybarvené části.

Dílčí závěry

Ukázalo, že největším problémem při řešení této úlohy bylo rozhodnutí, zda má být třetina znázorněna v daném celku nebo v ještě nevybarvené části. Žáci tak při znázorňování třetiny uvažovali jiný celek.

Miskoncepce související s vybarvováním poloviny jako dvou dílů a třetiny jako tří dílů se objevila pouze u jednoho žáka.

3.5.4 Shrnutí třetí fáze výzkumu

Díky úlohám ve formě concept cartoons se na vyřešení zadaných úloh podíleli téměř všichni žáci. V úlohách tak mohli žáci vybírat z daných řešení to, které považovali za správné a řešení tak nemuseli vymýšlet.

U úlohy Destičky a úlohy Vybarvování se nejvíce projevilo chybné identifikování celku.

U úlohy Destičky měli žáci zadané dvě destičky, kde šrafovaná destička byla rozdělena na čtyři díly a bílá destička na tři díly. Žáci za správné považovali tvrzení, že bílá destička je o čtvrtinu menší než šrafovaná. Ale chybně označili za správné i tvrzení, že šrafovaná destička je o čtvrtinu větší než bílá destička. Žáci označovali obě výpovědi jako pravdivé ve

41 případech ze 46. Při konstatování velikosti destiček (je velká jako) již žáci uváděli většinou správná řešení.

Ze dvou uskutečněných rozhovorů vyplynulo, že žáci považovali jeden dílek za čtvrtinu, a to i u bílé destičky. V rozhovorech se také projevila miskoncepce související se znázorňováním kmenových zlomků, kdy žáci vybarvují v celku tolik dílů, kolik je jmenovatel zlomku.

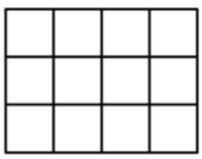
Další problém v identifikování celku se objevil v řešení úlohy Vybarvování. Žáci uvažovali nad vybarvováním jako nad procesem, kdy nejdříve vybarví jednu část z celku a druhou část pak vybarví z ještě nevybarvené části. Polovina žáků úlohu řešila tímto způsobem.

U úlohy Celek jsem si až po zjištění výsledků uvědomila dva důležité poznatky. První spočívá v tom, že jsem zlomky v úloze zadala slovně. Žáci tyto zlomky neviděli napsané symbolicky (pokud si je tímto způsobem nezapsali), proto neviděli jmenovatele a tak je číslo ze jmenovatele negativně neovlivňovalo při znázorňování, tj. $\frac{1}{2}$ má 2 ve jmenovateli -> vybarvím dva díly. Druhý poznatek, proč se zřejmě ve větší míře neobjevila předpokládaná miskoncepce (znázorňování zlomků tak, že se vybarví tolik dílů, kolik je jmenovatel zlomku), je pro mě mnohem přínosnější. Ve slově polovina nezazní číslo dva, jako je tomu například u zlomku třetina (tři), proto žáci při znázorňování poloviny zřejmě nevybarví dva díly.

Na základě těchto poznatků, bych úlohu zadala již jinak. Zadání úlohy by obsahovalo symbolický zápis zlomku. Například bych zadání úlohy žákům předložila v původním znění, kde v kruhu rozděleném na 12 dílů žáci vybarvují 1/6 a ¼. (Tichá, Macháčková, 2006)

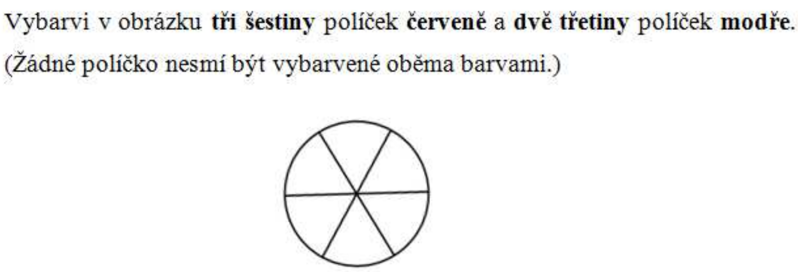
Nebo by žáci mohli řešit úlohy na obr. 3.184 a obr. 3.185, které jsem vytvořila v inspiraci s výzkumem M. Tiché a J. Macháčkové (2006). V řešeních úloh bych zjišťovala, zda se objeví výše popsaná miskoncepce a také jestli žáky při řešení úlohy ovlivňuje slovní zápis zlomků.

Vybarvi v obrázku **jednu polovinu** políček **červeně** a **jednu třetinu** políček **modře**. (Žádné políčko nesmí být vybarvené oběma barvami.)



Jaká část obrázku je **nevybarvená**? ....

Obr. 3.184 Zadání úlohy



Obr. 3.185 Zadání úlohy

3.6 Shrnutí praktické části

V praktické části jsem se snažila zjistit, proč je učivo o zlomcích pro žáky tak problematické. Zjištěné problémy se projevily již od samého začátku výuky zlomků a objevují se i nadále v tématech o procentech apod.

Nejdříve jsem provedla průzkumné šetření, které souviselo s řešeními úloh žákovských prací. Úlohy souvisely s daným tématem a soustředily se na zlomek ve vztahu celku a části, konkrétně pak na tři z možných interpretací: zlomek jako veličinu, zlomek jako podíl a zlomek jako operátor. Zkoumáním řešení úloh jsem došla k následujícím zjištěním:

- žáci uplatňovali určitý postup, který neodpovídal zadání a vedl k nesprávnému výsledku
- používali k výpočtu náhodně zvolené početní operace, zejména násobení a dělení, o kterých věděli, že se používají při řešení úloh se zlomky
- neuvědomovali si souvislost mezi desetinným číslem a zlomkem vzhledem ke vztahu celku a části
- neuměli identifikovat celek v úloze typu celek – část – operátor
- nevyužívali žádné ikonické modely

Z mého průzkumného šetření vyplynulo, že žáci nemají vybudované představy o zlomku a nepoužívají modely. Nechápou zlomek ve vztahu celku a části. Neuvědomují si funkci čitatele a jmenovatele a ani velikost zlomku. K daným úlohám přistupovali žáci velmi formálně.

Na zjištěné skutečnosti jsem reagovala třemi fázemi výzkumu. V jednotlivých fázích jsem žákům zadávala pracovní listy s úlohami.

První fáze výzkumu se orientovala na možné cesty vytvoření a podpoření představ žáků, hlavně ve vztahu ikonické a symbolické reprezentace. Žáci díky řešení úloh v této fázi výzkumu, mohli získat představu o možných modelech zlomku. Úlohy se dále zabývali ekvivalentními zlomky, kam patří i úvahy o ekvivalentních zlomcích, jejichž podstatu si žáci mohli uvědomit právě díky ikonické reprezentaci zlomku.

Na tyto úlohy jsem navázala druhou fází výzkumu, který jsem zaměřila na zjištění konkrétních představ žáků a schopnost znázornit zlomek na vhodném modelu. Znovu jsem ověřovala znalost ekvivalence zlomků. Velkou pozornost jsem věnovala zlomku ve vztahu celku a části ve smyslu dělení na stejné části podle tvaru, velikosti nebo obsahu.

Celý výzkumný proces jsem završila třetí fází výzkumu, kde měli žáci v úlohách zadaných ve formě concept cartoons správně identifikovat vztah celku a části.

Na začátku výzkumného šetření jsem si kladla výzkumné otázky a provedením výzkumu jsem získala tyto odpovědi:

- *Jaké mají žáci představy o zlomcích?*

Z výsledků šetření vyplynulo, že představy žáků jsou jen velmi omezené, povrchní. Žáci nemají představu o velikosti ani kmenových zlomků, ani o vztahu mezi ekvivalentními zlomky a vlastně ani o zlomku ve vztahu celku a části a s tím souvisejícím dělením na stejné části. Znalosti jsou orientovány na symbolickou reprezentaci zlomku a numerické postupy s nimi souvisejícími (provádění výpočtů).

Co se týče konkrétních představ, žáci si zlomek nejčastěji představují v souvislosti s koláčem, čokoládou, žebříkem, plotem apod. Představy spojené s kuličkami nebo bonbony se neobjevily (viz Úloha 1 ve druhé fázi výzkumu).

- *Které modely zlomku žáci využívají?*

Žáci nejčastěji využívali kruhový a obdélníkový model. Na kruhu modelovali i zlomky s lichým jmenovatelem, kde toto dělení na stejné části bylo nepřesné a přibližné. Překvapilo mě, že žáci byli schopni konstruovat obdélníky, či podobné útvary připomínající části čtvercové sítě (viz obr. 3.92 v Úloze 1 druhé fáze výzkumu). Na těchto modelech poměrně přesně znázorňovali i zlomky s lichým jmenovatelem a se jmenovatelem různým od mocnin dvou.

Pouze jeden žák uvedl zlomek modelovaný na pravidelném pětiúhelníku. Jeden žák znázornil zlomkem vztah počtu láhví v lednici a jedné láhve na stole (viz Úloha 1 ve druhé fázi výzkumu).

- *Jak chápou žáci podstatu zlomku jako vztahu celku a části?*

Pokud budu uvažovat vztah celku a části ve smyslu chápání významu čitatele a jmenovatele, žáci nechápou podstatu dělení na stejné části.

Dále se ukázalo, že žáci mají problém s identifikací celku. Ve slovním vyjádření popisujícím vztah dvou celků si žáci neuvědomili tuto skutečnost (viz úloha Destičky ve třetí fázi výzkumu). Uvažujeme-li jeden celek a z něho část a druhý například menší celek a z něho stejnou část, tak tyto dvě části nemohou být stejné. Při znázorňování dvou zlomků do jednoho obrázku žáci nejdříve znázornili jednu část z daného celku, v druhém kroku uvažovali jiný celek v podobě zbytku a zde znázornili druhou část (viz úloha Vybarvování ve třetí fázi výzkumu).

Žáci v úlohách, zejména ve slovních úlohách, neidentifikují celek. Skutečnost, že si neuvědomují, co je celek, vede k řešení chybnými strategiemi.

- *Jak budou žáci řešit zadané úlohy?*

Sledovala jsem, zda se projeví snaha po objevování. Žáci ale řešili úlohy ve velké části formálně. Někteří žáci projevili trochu tvořivosti, jiní však zadané úlohy neřešili, protože je řešit neuměli nebo nechtěli přemýšlet.

Také se domnívám, že žáci některé úlohy neřešili, protože v první a v druhé fázi výzkumu zadané pracovní listy obsahovaly více úloh. Žáci úlohy řešili celou hodinu, a tak mohli být už unavení, nebo úlohy nestihli vyřešit.

V poslední fázi výzkumu jsem reagovala na tato zjištění a žákům jsem zadala úlohy ve formě concept cartoons. Díky charakteru zadání úloh se na vyřešení podíleli všichni žáci. Dokonce takto zadané úlohy vzbudily u žáků bádání a přemýšlení nad řešením, přestože by v jiné formě úlohu neřešili. Úlohy byly zadávány postupně, po jedné úloze v jedné hodině matematiky, místo „matematické rozcvičky“. Díky tomu měli žáci čas si jednotlivé úlohy promyslet.

- *Jakých chyb se žáci dopustí při řešení zadaných úloh?*

Jednotlivé chyby jsem popsala u každé úlohy. Jako velmi alarmující chybu bych označila znázorňování zlomku na celku rozděleném na nestejné části.

Další chyby a nepřesnosti souvisely se znázorňováním zlomku na nevhodném modelu, například znázornění třináctin na modelu „kruh“.

Někteří žáci znázorňovali zlomky na modelu tak, že vybarvili tolik částí, kolik byl čitatel nebo jmenovatel zlomku.

Při porovnání čísel podle velikosti žáci řadili zlomky podle čísla ve jmenovateli např. 0, 1, ½, 1/3, ¼ atd. Nemají vybudované představy ani o kmenových zlomcích a jejich velikosti.

Objevila se také chyba v souvislosti se zlomkem a poměrem. Pokud budeme uvažovat zlomek, jako zápis poměru, tak je to vyjádření část ku celku. Zatímco poměr vyjadřuje vztah část ku části. Žáci v důsledku toho chybně znázorňovali i zapisovali číslem dané zlomky (viz Úloha 2 v druhé fázi výzkumu).

4 ZÁVĚR

Již v úvodu této práce jsem se zmínila o tom, proč jsem si zvolila téma diplomové práce zaměřující se na badatelské vyučování a zlomky.

Díky prostudování odborné literatury jsem získala ucelený přehled o přístupech k vyučování, zejména o konstruktivistickém a badatelském vyučování. Ve své výuce se díky tomu snažím prvky těchto přístupů postupně zařazovat, což žáci vítají a motivuje je to k aktivitě.

Mimo jiné jsem se seznámila s publikacemi a výzkumy, které se orientují na téma zlomků. Jejich prostudováním jsem se dozvěděla o možných interpretacích zlomků a zjistila také problémové oblasti v tématu zlomek (M. Hejný, 2004; Tichá, Macháčková, 2006; Macháčková, 2012; Vondrová, Žalská, 2013; Vondrová, Rendl, 2015). Různé výklady zlomků jsem do té doby vnímala pouze intuitivně a úskalí, která se skrývají v úlohách se zlomky, jsem si ve větší míře neuvědomovala vůbec.

Praktickou část jsem zaměřila na úlohy se zlomky, které jsem vybrala na základě nabytých poznatků z výzkumů. Zkoumáním řešení těchto úloh mi tak pomohlo k pochopení některých postupů a strategií, které žáci využívají.

Zpracování této práce mi pomohlo objasnit, proč jsou zlomky pro žáky tak problematické učivo. Jaké miskoncepce se u žáků objevují a jakých chyb se v důsledku toho dopouštějí. Proč nejsou schopni řešit úlohy o zlomcích a také, posoudit správnost výsledku vzhledem k zadání úlohy.

Hlavním cílem bylo zlepšit a obohatit mou pedagogickou praxi. Tohoto cíle jsem dosáhla. Postupně měním své přístupy k vyučování, více se orientuji na činnostní a ikonické reprezentace, soustředím se na vytváření představ a spojení učiva s reálnými situacemi.

Na základě výzkumu jsem si také uvědomila, že se žáci nejsou schopni soustředit nad větším množstvím úloh celou hodinu. Dále, že pokud opravdu chci porozumět strategiím, které žáci při řešení úloh používají, musím s žáky o jejich řešení mluvit.

Proto se snažím ve výuce vhodně pracovat s chybou. Nechávám žáky vysvětlit svá řešení, hledám a zamýšlím se nad chybami, které žáci dělají a pokouším se na ně vhodně reagovat.

Zadávám žákům úlohy formou concept cartoons, kde mezi možnosti výběru uvádím právě nejčastější chyby. Nad řešeními úloh vedeme s žáky diskuse. Žáci se díky tomu učí chápat důležitost a význam argumentace.

Kdybych pokračovala ve svém výzkumu, zařadila bych další úlohy, které by spočívaly v manipulaci například s kostkami nebo jinými předměty stejné velikosti. Díky této činnostní reprezentaci bych podpořila představy žáků o zlomcích znázorněných na diskrétních modelech. Také bych se zaměřila na nepravé zlomky.

5 POUŽITÉ ZDROJE

ACSA. *Studie zahraničních zkušeností s podporou zájmu o technické a přírodovědné obory*: Realizováno v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost, individuální projekt národní Podpora technických a přírodovědných oborů. [online]. MŠMT, 2009 [cit. 2016-10-25]. Dostupné z: http://www.acsa.cz/editor_download.php?id=250

ARTIGUE, M., BAPTIST, P. *Inquiry in Mathematics Education* (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School). 2012. Dostupné z: http://www.fibonacci-project.eu/

BERTRAND, Y. *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha: Portál, 1998. Studium. ISBN 80-7178-216-5.

BRUNER, J., S. *O podstate a problémoch vyučovania*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1968.

DIVÍŠEK, J. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Učebnice pro vysoké školy. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-20433-3.

EDELSON, D., C., GORDIN, D., N., PEA, R., D. Addressing the Challenges of Inquiry-Based leasing though technology and curriculum design. Journal of The Learning Sciences. 1999, 48.

FIALOVÁ, D. Chápání celku u modelu zlomku 3/4 žáky 3. ročníku ZŠ. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2008* [online]. Praha, 2008 [cit. 2016-10-16]. ISBN 978-80-7290-386-3. Dostupné z: mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2008.pdf

FIALOVÁ, D. Některá didaktická doporučení při zavádění a uchopování pojmu zlomek. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2012* [online]. Praha, 2012 [cit. 2016-10-16]. ISBN 978-80-7290-604-8. Dostupné z: mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2012.pdf

GRECMANOVÁ, H., URBANOVSKÁ, E., NOVOTNÝ, P. *Podporujeme aktivní myšlení a samostatné učení žáků*. Vyd. 1. Olomouc: Hanex, 2000. 160 s. Edukace. ISBN 80-85783-28-2.

GRUNWALD, P. *Key Technology Trends: Excerpts from New survey research sundings, exploring the digital generation, Educational Technology*. Washington: Department of Education. 2003.

HASEMANN, K., MANSFIELD, K. Concept mapping in research on mathematicalknowledge development: background, methods, fading and conclusions. Educational Studies in Mathematics 29, 45-72, 1995.

HEJNOVÁ, E. Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. In *Matematika, fyzika, informatika.* [online]. 2016, roč. 25, č. 2 [cit. 2016-10-25]. Dostupné z: http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/258/271

HEJNÝ, M. *Teória vyučovania matematiky 2.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989. ISBN 80-08-00014-7

HEJNÝ, M. Představa celku a jeho části. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10 - 15 let*. Frýdek-Místek: JČMF, 1999.

HEJNÝ, M. Zlomky. In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., VONDROVÁ, N. (eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. (eds.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007. ISBN 978-80-7394-052-2.

HEJNÝ, M. Nesnáze při budování představ čísla. In *Speciální pedagogika* [online]. 2011, roč. 21, č. 2, 77-94 s. [cit. 2015-10-11]. ISSN 1211-2720. Dostupné z: http://dspace.specpeda.cz/bitstream/handle/0/206/077094.pdf?sequence=1

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka [online]. *SUMA JČMF*, 2006. [cit. 2016-10-25]. Dostupné z: https://mdisk.pedf.cuni.cz:5003/sharing/Q0NeHWg25

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova, 1999. ISBN 80-86039-98-6.

HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F., TICHÁ, M. Celek a část v primárním matematickém vzdělávání. Nepublikovaný interní materiál (podklad pro workshop na konferenci SEMT 03), 2003.

HRUŠA, K., VYŠÍN, K. *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. Učební texty vysokých škol.

JANÍK, T., STUCHLÍKOVÁ, I. Oborové didaktiky na vzestupu: přehled aktuálních vývojových tendencí. In *Scientia in educatione* [online]. 2010, roč. 1, č. 1. [cit. 2016-10-23]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/3/4

KUBÍNOVÁ, M. *Projekty ve vyučování matematice: cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2002. ISBN 80-7290-088-9.

KUŘINA, F. Vyučování matematice a modely. In *Matematika a fyzika ve škole*. Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 1978, roč. 8, č. 9.

KUŘINA, F. Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice. *MATEMATIKA, FYZIKA, INFORMATIKA: ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLE* [online]. 2013, roč. 22, č. 1 [cit. 2016-09-28]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/1/1

LAMON, S., J. *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 2nd ed. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2006. ISBN 0805852107.

MAREŠ, J., GAVORA, P. *Anglicko-český slovník pedagogický*. Vyd. 1. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-310-2

NAYLOR, S., KEOGH, B. Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science Education*, 1999, 21, 4. [cit. 2016-10-25]. Dostupné z: millgatehouse.co.uk/wp-content/uploads/2015/07/IJSE-1999-final-version.doc

NAYLOR, S., KEOGH, B. Concept Cartoons: what have we learnt? *Paper presented at the Fibonacci Project European Conference* [online]. Leicester, UK, 2012. [cit. 2016-10-25]. Dostupné z: conceptcartoons.com/research.html

NEZVALOVÁ, D. Akční výzkum ve škole. *Pedagogika* [online]. 2003, roč. 53, 300-308 [cit. 2016-12-09]. Dostupné z: https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0ahUKEwiKyNXY6OXQAhUB2SwKHS2GA0MQFgghMAE&url=http%3A%2F%2Fpages.pedf.cuni.cz%2Fpedagogika%2F%3Fattachment_id%3D1944%26edmc%3D1944&usg=AFQjCNF8T8Of15lSbyCdKcaDGo5iITzjEA&cad=rja

PAPÁČEK, M. Badatelsky orientované přírodovědné vyučování - cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa?. In *Scientia in educatione* [online]. 2010, roč. 1, č. 1. [cit. 2016-10-23]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/4/5

PIAGET, J., INHELDER, B. *Psychologie dítěte*. Přeložila Eva VYSKOČILOVÁ. Praha: Portál, 1997. ISBN 80-7178-146-0.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. 6., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

SAMKOVÁ, L., HOŠPESOVÁ, A. Using Concept Cartoons to investigate future teachers' knowledge. In K. Krainer and N. Vondrová (Eds.) *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 3241-3247), Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2015. [cit. 2016-10-26]. ISBN 978-80-7290-844-8. Dostupné z: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289873/document

SAMKOVÁ, L., TICHÁ, M. Investigating future primary teachers' grasping of situations related to unequal partition word problems. In C. Sabena, B. Di Paola (Eds.) *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), n. 25, Supplemento n.2. Proceedings CIEAEM 67, Teaching and learning mathematics: resources and obstacles* (pp. 295-303), Palermo, Italy: G.R.I.M. (Departimento di Matematica e Informatica, University of Palermo), 2015. [cit. 2016-10-26]. ISSN 1592-4424. Dostupné z: math.unipa.it/~grim/CIEAEM%2067_Proceedings_QRDM_Issue%2025_Suppl.2.pdf

SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování matematice. In *Scientia in educatione* [online]. 2015, roč. 6, č. 1. [cit. 2016-10-23]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/154/145

STUCHLÍKOVÁ, I. O badatelsky orientovaném vyučování. In Papáček, M. (ed.): *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování* [online]. DiBi 2010.

[cit. 2016-10-25]. ISBN 978-80-7394-210-6. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/bi/DiBi2010.pdf

TICHÁ, M. Po stopách vytváření pojmů (czech). In: *Sborník o vyučování matematice a kultivace myšlení*, Gaudeamus, Hradec Králové, 1997, 86-93.

TICHÁ M., MACHÁČKOVÁ J. Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. *SUMA JČMF* [online]. 2006 [cit. 2015-09-19]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=1&ClanekID=188

TRNOVÁ, E. Typy vzdělávacích komiksů a analýza jejich edukačního potenciálu pro přírodovědnou výuku. In *Scientia in educatione* [online]. 2016, roč. 7, č. 1 [cit. 2016-10-25]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/225/261

VONDROVÁ, N., ŽALSKÁ, J. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In RENDL, M., VONDROVÁ, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, 73–79.

VONDROVÁ, N., RENDL, M. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

<u>Učebnice a sbírky</u>

BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M., MATOUŠKOVÁ, K. *Matematika pro 4. ročník základních škol*. Vyd. 2. Všeň: Alter, 1997. ISBN 80-85775-98-0.

CIHLÁŘ, J., ZELENKA, M. *Matematika 7: Učebnice*. Praha: Pythagoras Publishing, a. s., 1998. ISBN 80-902382-3-8.

HEJNÝ, M., HOUFKOVÁ, J., JIROTKOVÁ, D., MANDIKOVÁ, D. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011. ISBN 978-80-211-0611-6.

HERMAN, J. *Matematika: racionální čísla, procenta*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-85849-49-6.

JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. Vyd. 2. Všeň: Alter, 1996. ISBN 80-85775-70-0.

KASLOVÁ, M., FIALOVÁ, D., ČÍŽKOVÁ, R., KORDA, J. *Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 80-7235-169-9.

KOČÍ, S., KOČÍ, M. *Matematika: 7. ročník 1. díl*. Šumperk: Reprotisk, 2014.

KOMAN, M. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1998. ISBN 80-85823-36-5.

KOMAN, M. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 2000. ISBN 80-85823-41-1.

KOMAN, M. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 2003. ISBN 80-85823-48-9.

KOMAN, M., KUŘINA, F., TICHÁ, M. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1999. ISBN 80-85823-37-3.

NOVOTNÁ, J. *Matematika s Betkou pro 6. ročník základní školy*. Praha: Scientia, 1996. ISBN 80-7183-015-1.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-423-0.

ROSECKÁ, Z., ČUHAJOVÁ, V., RŮŽIČKA, J. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Brno: Nová škola, 1998. ISBN 80-85607-74-3.

ZAPLETAL, F., BOBOK, J., URBANOVÁ, J. *Matematika 6: 1.díl - aritmatika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.

Diplomové práce

SIBLÍKOVÁ, M. *Vytváření představ zlomku na 1. stupni ZŠ.* Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Mgr. Marie Tichá, CSc.

SEDLÁKOVÁ, J. Chápání zlomků u dětí 7. a 8. třídy. Praha, 2006. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce PhDr. Miroslav Rendl, CSc.

SVOBODOVÁ, L. *Rozvíjení aktivity a tvořivosti ve vyučování tématu zlomek v 6. - 7. ročníku ZŠ.* Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Mgr. Marie Tichá, CSc.

MACHÁČKOVÁ, J. *Kolektivní reflexe v přípravě studentů učitelství 1. stupně v matematice.* 2012. Dizertační práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Mgr. Marie Tichá, CSc.

VEJMELKOVÁ, E. *Zlomky – některé obtíže žáků a didaktické přístupy učitelů.* Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Obrázky z internetu

Obr. 2.1 [cit. 2016-10-25] : https://secondarymaths.wikispaces.com/misconception+cartoons

Obr. 2.7 [cit. 2016-11-07] : http://objem.websnadno.cz/Laborka_024.jpg

Obr. 2.12 [cit. 2016-10-12] : http://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/13661/VYROBA-A-VYUZITI-ZLOMKOVNICE.html/

Obr. 2.14 [cit. 2016-10-12] : http://berkapetr.rajce.idnes.cz/Korpusy_hodin_-_cifernik/#cifernikC1.jpg

Obr. 2.19 [cit. 2016-10-12] : http://www.coko-shop.cz/eshop-starbrook-mlecna-cokolada-500g-334.html

6 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1 – Pracovní list - První fáze výzkumu

Příloha 2 – Pracovní list - Druhá fáze výzkumu

Příloha 3 – Pracovní list - Třetí fáze výzkumu

Příloha 1 - První fáze výzkumu

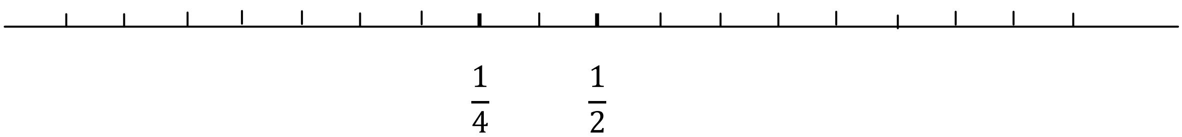
1. Pexeso

V balíčku máš k dispozici karty.

Utvoř z nich **skupiny** a **zdůvodni**, proč jsi tyto skupiny vytvořil/a.

2. Číselná osa

Doplň čísla **0 a 1** na číselnou osu.



Umíš doplnit i $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{10}$?

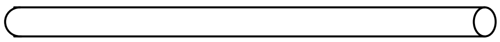
3. Tyč sem, tyč tam

Vyřeš následující úlohy a nezapomeň si u každé **znázornit** potřebné údaje.

Část tyče je natřená na modro a zbytek na červeno.

a) *První tyč* je **dlouhá 2 metry** a **modrá část** tvoří $\frac{3}{5}$ tyče.

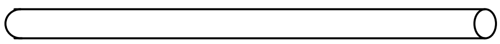
Kolik centimetrů měří **modrá** a kolik **červená** část?



b) *Druhá tyč* je **dlouhá 2 metry** a **červená** část je dlouhá **75 centimetrů**.

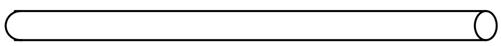
Jaká část tyče je **modrá** a jaká část tyče je **červená**? (Vyjádři zlomkem.)

Kolik centimetrů měří **modrá** část tyče?

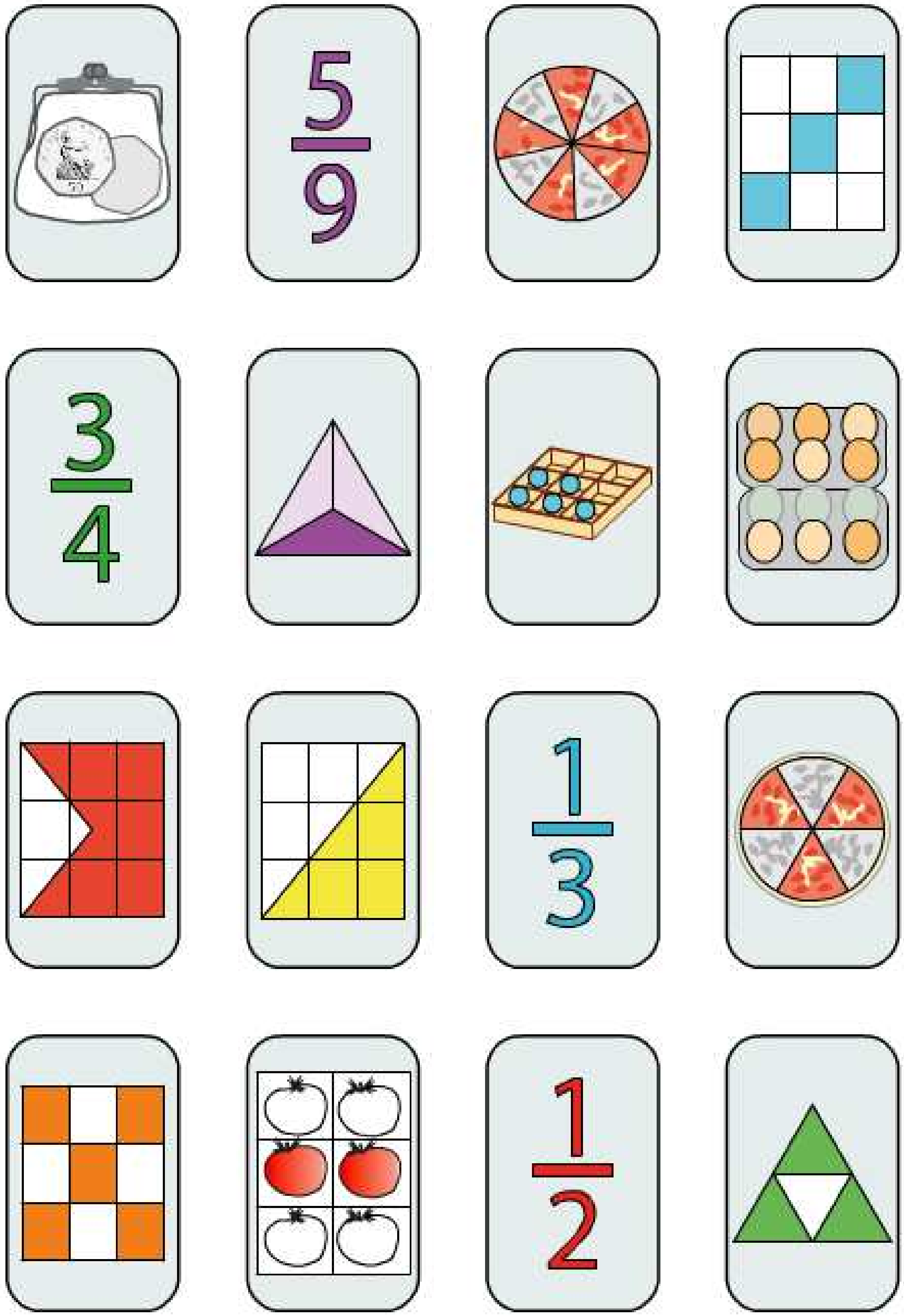


c) *Třetí tyč* je natřená z $\frac{2}{3}$ na **modro** a **červená** část tvoří **35 centimetrů.**

Jak je dlouhá tato tyč?



Pexeso:



Příloha 2 - Druhá fáze výzkumu

<u>Vyřeš dané úlohy a neboj se napsat, cokoliv tě napadne ;-).</u>

1. **Nakresli,** co si **představíš,** když vidíš napsáno**:**

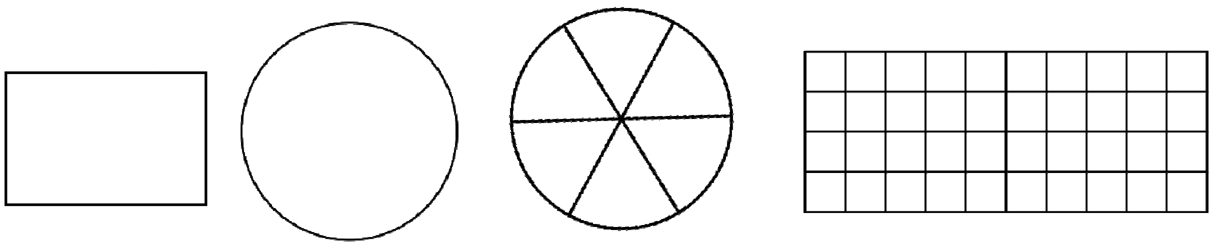
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{13}$

2. **Znázorni do obrázků níže tyto zlomky:** $\mathbf{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}}$**.**

Vyber **jeden LIBOVOLNÝ obrázek** a **vybarvi jeho** $\mathbf{\frac{1}{5}}$**.**

Dále **v jiném LIBOVOLNÉM obrázku** vybarvi $\mathbf{\frac{1}{6}}$ a opakuj pro zlomky $\mathbf{\frac{3}{4}, \frac{2}{3}}$.

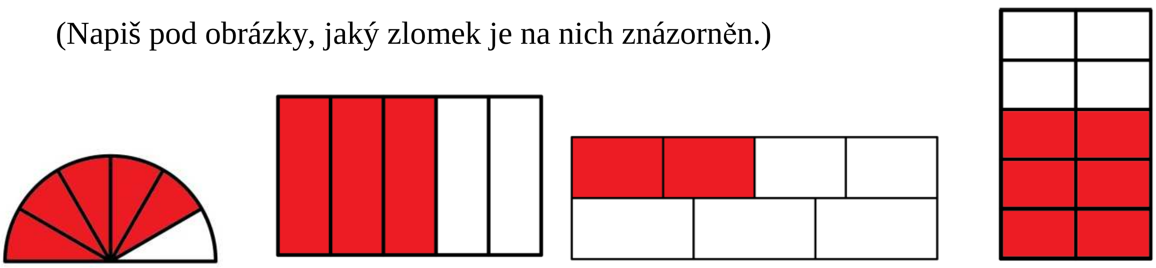
(V každém obrázku znázorňuj pouze jeden zlomek!
Pod obrázek napiš, který zlomek znázorňuješ.)



A .... B .... C .... D ....

3. **Přiřaď zlomky** $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{6}$ k odpovídajícím obrázkům.

(Napiš pod obrázky, jaký zlomek je na nich znázorněn.)

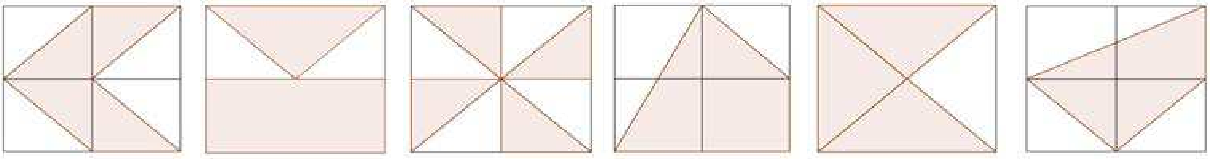


A .... B .... C .... D ....

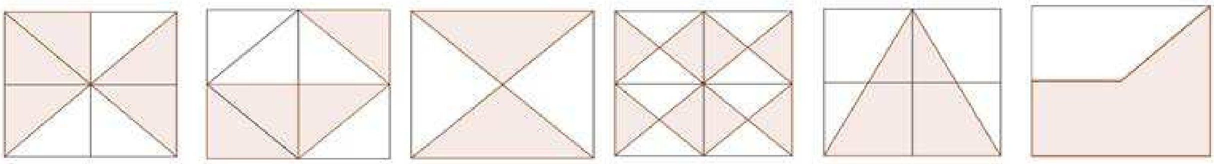
4. Roztřiď obrázky do **skupin** tak, aby na nich byla **vybarvená stejná část obdélníku.**

Pod obrázky napiš **jaká část obdélníku je vybarvená.**

Pokud **nevíš,** napiš pod obrázek **NEVÍM.**



A .... B .... C .... D .... E .... F ....



G .... H .... I .... J .... K .... L ....

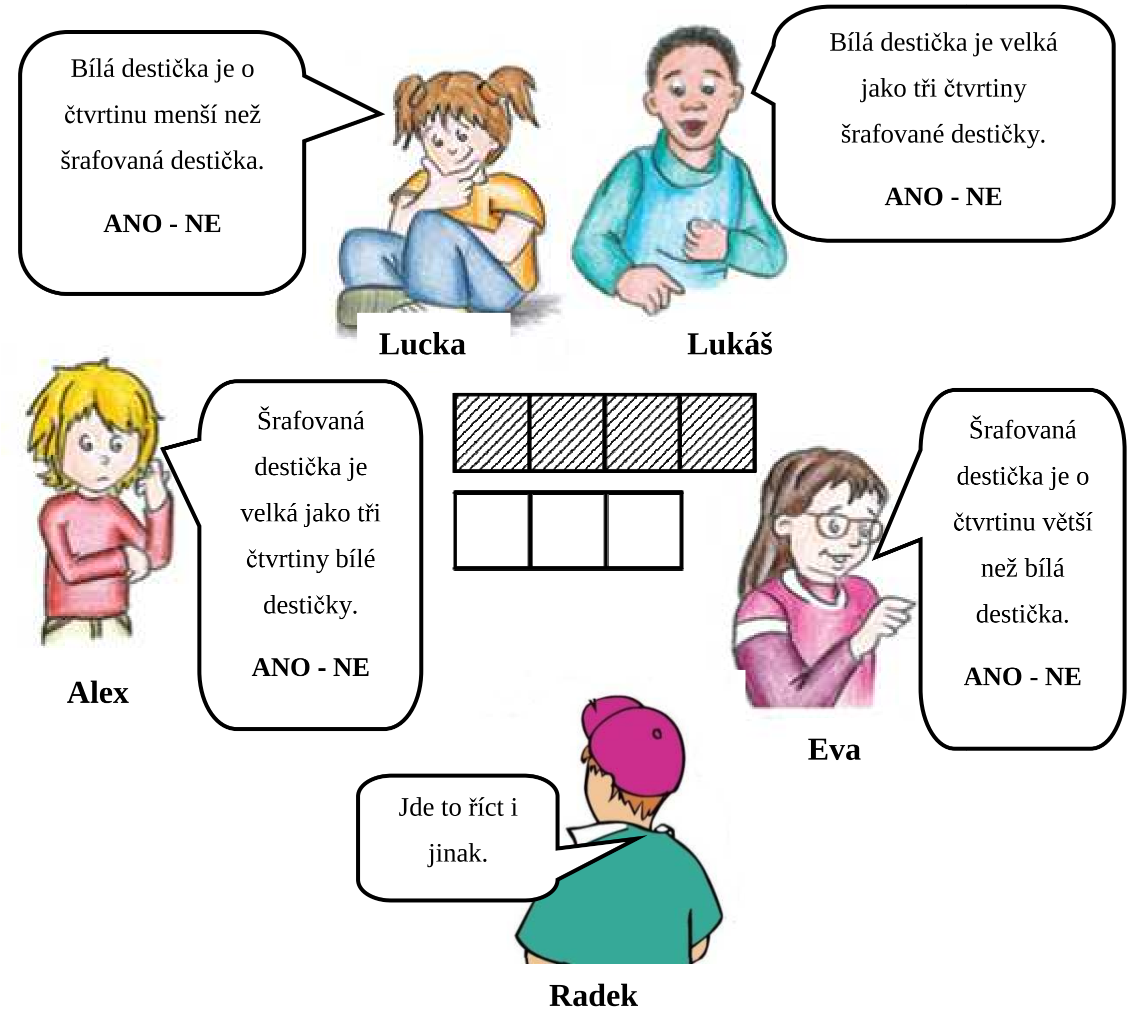
Popiš jednotlivé skupiny, které jsi vytvořil/a:

Příloha 3 - Třetí fáze výzkumu

Úloha Destičky

Co můžeme říct o bílé a šrafované destičce? Je správně to, co říkají žáci níže?

Zakroužkuj ANO, pokud je tvrzení správně; NE pokud je chybně.



Lze situaci na obrázku vyjádřit i jinak? Jak? ....

....

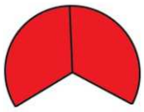
....

....

....

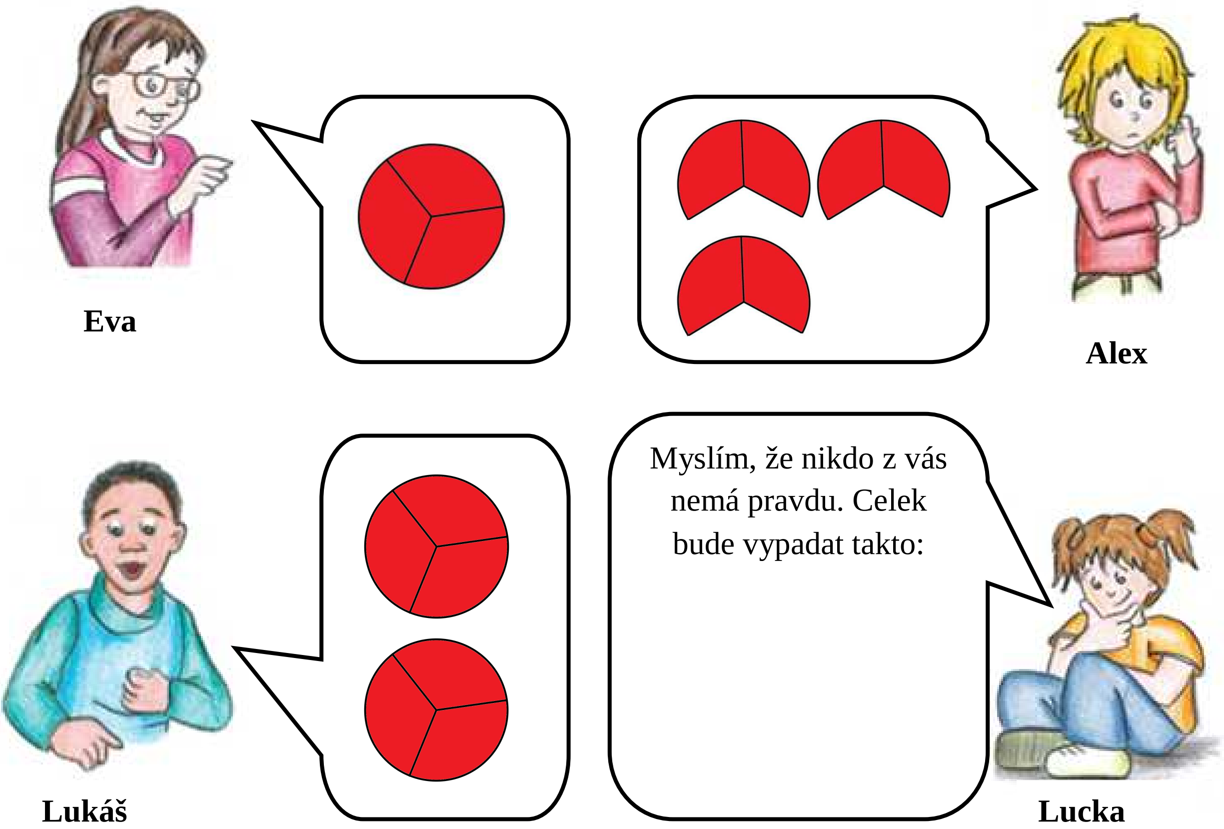
....

Úloha Celek

Jak bude vypadat **celek,** jestliže obrázek  představuje $\frac{1}{3}$ toho celku?

Napiš, který žák našel správné řešení: ....

Pokud souhlasíš s Luckou, nakresli celek.



Popiš, jak Eva, Lukáš a Alex přišli na svá řešení:

Eva:...

....

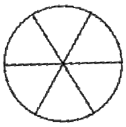
Lukáš:...

....

Alex:...

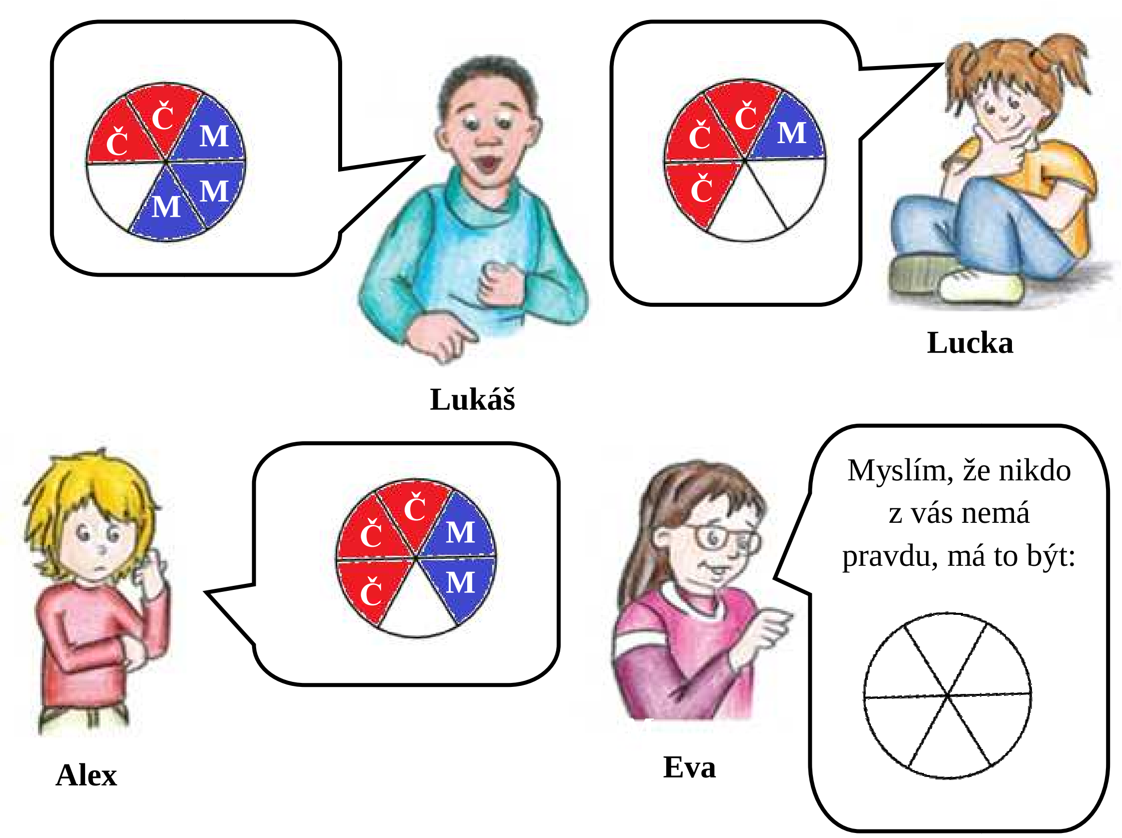
....

Úloha Vybarvování

Žáci měli v obrázku  **vybarvit jednu polovinu** políček **červeně** a **jednu třetinu** políček **modře**. (Žádné políčko nesmí být vybarvené oběma barvami.)

Napiš, který žák našel správné řešení: ....

Pokud souhlasíš s Evou, nakresli toto řešení.



Popiš, jak Lucka, Lukáš a Alex přišli na svá řešení:

Lukáš:..

....

Lucka:..

....

Alex:..

....