Oponentský posudok na dizertačnú prácu

STRUCTURE OF SUBMODELS

Diagonal Indiscernibility in Models of Arithmetic

Petr Pajas

Ako naznačuje už samotný názov, predložená dizertačná práca sa zaoberá modelmi Peanovej aritmetiky, prípadne niektorých jej prirodzených fragmentov, presnejšie štruktúrou podmodelov neštandardných modelov týchto teórií. Rôzne študované aspekty celej problematiky sú vyložené z jednotiaceho stanoviska, ktorým je metóda diagonálne nerozlíšiteľných prvkov.

V úvodnej časti autor podáva zasvätený prehľad vývoja študovaných otázok a súčasného stavu problematiky. Vzápätí predbežne načrtáva otázky, ktorými sa hodlá v práci zaoberať, ako aj ich miesto v komplexe otázok týkajúcich sa modelov aritmetiky. V nadväzujúcej prvej kapitole je potom popri zavedení potrebnej terminológie a symboliky podaný prehľad základných ďalej využívaných výsledkov. V týchto častiach uchádzač preukázal široký všeobecný rozhľad a dobrú orientáciu v problematike matematickej logiky všeobecne a modelov aritmetiky zvlášť ako i v príslušnej literatúre.

V druhej kapitole je zavedená a rozpracovaná metóda diagonálne nerozlíšiteľných prvkov ako isté zovšeobecnenie Ramseyovej vety. S jej pomocou sú potom dokázané viaceré výsledky ramseyovského typu. Väčšina z nich je známych, sú však vyložené elegantným a jednotným spôsobom. Novým výsledkom je charakterizácia tzv. k-elementárnych rezov spĺňajúcich Peanovu aritmetiku alebo niektoré jej fragmenty ako rezov na istých systémoch diagonálne nerozlíšiteľných prvkov (vety 2.3.2 a 2.3.3).

Kapitola 3 je venovaná štúdiu rôznych systémov rezov v spočítateľných neštandardných modeloch fragmentu $I\Sigma_1$ Peanovej aritmetiky, spolu s ich lineárnym usporiadaním inklúziou a prirodzenou topológiou. Kľúčovým výsledkom je zrejme veta 3.2.1, ktorá opäť zjednocuje viacero dovtedy roztratených výsledkov o indikátoroch. Ďalej je odvodených niekoľko špecifických výsledkov o určitých dôležitých konkrétnych sytémoch rezov, ktoré sú prehľadne zhrnuté v záverečnom paragrafe 3.7.

V poslednej, štvrtej kapitole sa autor zaoberá Stoneovými priestormi rôznych algebier definovateľných množín v modeloch Peanovej aritmetiky. Pritom sytematicky využíva neštandardný prístup, čo v tomto prípade znamená, že východzí spočítateľný model M vnára do nejakého $\aleph_1$-saturovaného elementárneho rozšírenia C a ultrafiltre na M nahrádza ich monádami v C. Súvislosti medzi rezmi a monádami zasa umožňujú charakterizovať niektoré vlastnosti podmodelov modelu M v jazyku monád. Hlavné výsledky sú obsiahnuté v časti 4.4, kde sa pri štúdiu rôznych typov monád opäť hojne využíva metóda diagonálne nerozlíšiteľných prvkov. Na rozdiel od klasickej teórie, kde v priestore $\beta\mathbb{N}$ viacero kombinatorických vlastností popisuje rovnaké triedy ultrafiltrov, prípadne ich rozdielnosť sa zakladá na dodatočných axiómach rozširujúcich Zermelov-Fraenkelov systém, v tomto prípade zakaždým dostávame rozdielne triedy monád (ultrafiltrov).

Prácu uzatvárajú dva dodatky, ktoré ilustrujú silu v nej rozvinutých metód: prvý je venovaný dôkazu McDowellovej-Speckerovej vety spolu s Gaifmanovým prídavkom o konzervatívnych rozšíreniach, druhý istým charakterizáciám silných rezov.

Práca má priam vzorovú úpravu, je napísaná dobrou angličtinou a kultivovaným štýlom. Jej zrozumiteľnosti a čitateľnosti by však prospelo, keby autor častejšie a vo väčšej miere doprevádzal symbolické formulácie definícií pojmov a výsledkov taktiež slovným, neformálnym, hoci aj nie celkom presným vyjadrením a doplňujúcim komentárom. Dizertácia prináša rad zaujímavých pôvodných výsledkov, dokázaných sofistikovanými a elegantnými metódami, ktoré – súc publikované – zrejme vzbudia zaslúžený ohlas. Podľa môjho názoru svojou úrovňou nielen spĺňa no i výrazne prekračuje požiadavky bežne kladené na dizertačné práce. Jej hodnotu nijako neznižujú ani niektoré drobné pripomienky, či otázky do diskusie, ktoré uvádzam pod čiarou. Uchádzač v nej nad všetku pochybnosť preukázal schopnosť samostatnej tvorivej vedeckej práce.

Záver: Jednoznačne odporúčam predloženú dizertačnú prácu p. Petra Pajasa k obhajobe aj ako podklad pre udelenie titulu

Doktor filozofie (PhD).

Bratislava, 16. júla 2007

Prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc.

Pripomienky a otázky do diskusie

1. str. 13: V definícii pojmu *"total choice set"* formula $Y = \mathrm{dom}(P)$ je očividne nesprávna. Také Y by mohlo byť výberovou množinou len pre rozklad P na jednoprvkové množiny.
2. str. 21: V závere lemy 1.8.15 asi niečo chýba. V tejto podobe ide o triválne tvrdenie, vyhovovali by mu totiž už tri vhodné jednoprvkové množiny X_0, X_1, X_2.
3. str. 24: V dôsledku 2.1.3 sa n na začiatku kvantifikuje, no ďalej sa už nespomína. Aká je jeho úloha? Nehovoriac o tom, že samotné tvrdenie nie je Ramseyova veta ale iba veelku triviálny Dirichletov princíp (Ramseyova veta pre $n = 1$).
4. str. 46: V prvom odstavci paragrafu 3.4 *"we applying"* nedáva príliš zmysel (gramaticky).
5. str. 64: Čo znamená *"totally ordered"* v bode e) vety 4.2.18: niektorý zo štandardných významov *"partially ordered"*, *"linearly ordered"*, *"well ordered"*, *"pre-ordered"* alebo niečo iné?
6. Autor v zozname literatúry neuvádza nijaké vlastné publikácie. Je v jeho záujme, aby pôvodné výsledky predloženej dizertácie publikoval čo najskôr. V rámci diskusie by preto mal informovať, čo už v tomto smere podnikol.

Poznámka. Všetky uvedené pripomienky, s výnimkou poslednej otázky, sú v podstate úplne nepodstatné. Bol by som preto nerád, keby sa im venovalo viac času a pozornosti, ako si zaslúžia. Celkom postačia vysvetlenia jednou vetou. Dúfam, že moji vážení kolegovia oponenti prispejú aj podstatnejšími, no najmä kompetentnejšími a podnetnejšími otázkami a námetmi.